ФГБОУ «Ивановский государственный химико-технологический университет»

А.Н.Ильченко

Декомпозиция задач математического программирования большой размерности: решение проблемы «проклятия размерности»

Публичная лекция

Иваново – 2012

Аннотация

Лекция прочитана 30.12.2011г. для аспирантов и преподавателей факультета математики и информатики Уханьского текстильного университета (город Ухань, Китайская Народная Республика) на английском языке.

Основное содержание лекции составили результаты исследований профессора А.Н.Ильченко и её учеников по проблеме внедрения методов экономико-математического моделирования в практику управленческой деятельности на уровне отрасли производства, территориально-производственного комплекса и региональной экономики. Отдельные вопросы и частные результаты были опубликованы в российских научных изданиях на протяжении двадцати лет (1990 - 2010г.г.). В кратком, компактном изложении материал публикуется впервые.

В подготовке и оформлении материала для печати автору помогали преподаватели Уханьского текстильного университета: Ло Джейн, Сян Сяо-ган, Хэ Вэй и Ивановского химико-технологического университета: Головачева О.А. и Ксенофонтова О.Л.

Представленный материал будет полезен студентам и магистрантам, обучающимся по экономическим направлениям, преподавателям и аспирантам экономических вузов, практическим менеджерам регионального уровня управления.

Основные разделы

1. Основные понятия и определения теории декомпозиции задач математического программирования. Содержание задачи исследования как задачи согласования управленческих решений в экономике.
2. Требования практического менеджмента к качеству решения задачи оптимизации управленческих решений.
3. Гипотеза о разрешимости проблемы размерности. Декомпозиция блочной задачи линейного программирования.
4. Теория согласования плановых решений. Два способа декомпозиции блочной задачи. Экономическая интерпретация алгоритма декомпозиции как процесса согласования планов в двухуровневой системе управления .
5. Модель согласования оптимальных планов производства для двухуровневой системы управления с горизонтальными связями.
6. Алгоритмизация модели согласования управленческих решений для текстильной отрасли.
7. Экспериментальное компьютерное моделирование.
8. Расширение модели согласования для оптимизации стратегического управления агропромышленным комплексом региона. Учёт неопределённости влияния погодных условий на урожайность.

Введение

Вначале несколько слов о названии лекции. Термин «проклятие размерности» ввёл американский математик Ричард Беллман (1920 - 1984), автор теории динамического программирования. Но к моему исследованию этот термин тоже подходит. Смысл в том, что хорошо разработанные в теории, математические методы оптимизации управленческих решений, при внедрении в практическую деятельность менеджеров, наталкиваются на непреодолимые трудности, препятствующие их применению. На небольших учебных моделях экспериментатор всё понимает, а на реальных «больших» моделях возникают такие информационные проблемы (с участием «человеческого фактора»), что получить оптимальное решение в приемлемые сроки не представляется возможным. Высокая скорость работы компьютера не помогает.

Дело в самой сущности математической экономики, которая соединяет две науки: точную – математику, и неточную, описательную – экономику, где главный действующий элемент – человек, «лицо, принимающее решение» (ЛПР).

Математическая модель – это совокупность уравнений и неравенств, которые отображают функционирование реального объекта в экономике: предприятия, отрасли производства, региона. Модель строится для того, чтобы с помощью компьютерных экспериментов улучшить работу ЛПР: предсказать развитие объекта в будущем; выбрать наилучший вариант развития (оптимальный) из многих возможных (допустимых). Таким образом, модель нужна менеджеру, чтобы проводить вычисления с реальной числовой экономической информацией.

Чтобы с моделью проводить компьютерные эксперименты, наука математика требует точных числовых данных, а экономическая практика точных чисел дать не может. Это объективное противоречие, проблема математической экономики, которая препятствует внедрению хороших теоретических моделей в практику менеджмента. Проблема обостряется для моделей большой размерности, содержащих сотни и тысячи элементов, что соответствует реальному многообразию взаимосвязей элементов внутри экономических объектов. Это и есть «проклятие размерности».

Научная работа, о которой пойдёт речь далее, относится к разделу математической экономики, который называется «математическое программирование». Эта работа характерна тем, что в неё включены мои результаты, полученные на всех трёх этапах технологии моделирования: построение моделей и математических алгоритмов получения оптимальных решений; инструментальная реализация алгоритмов, т.е. компьютерное программирование; практическое применение этих разработок для менеджмента на уровне отрасли промышленности в масштабе страны (СССР) и региона (Ивановская область).

Раздел 1.Основные понятия. Содержание задачи исследования.

В теории математической экономики хорошо известна задача математического программирования (МП):

$$f(X) - extr , \quad (1)$$

$$g^i(X) \le b^i , \quad (2)$$

$$X \ge 0,$$

где $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ - переменные,

f - функция цели (max, min),

$g^i (i = \overline{1,m})$ – функции ограничений,

$b^i (i = \overline{1,m})$ – лимиты ограничений.

Задача (1)-(2) может иметь множество решений или одно единственное решение или не иметь решения. В этом случае система ограничений (2) называется несовместной, а задача (1) - (2) называется неразрешимой. Для практического менеджмента имеет значение только разрешимая задача (1) - (2), у которой имеется единственное решение. В терминах экономической науки задача (1)-(2) называется «задача оптимизации управленческих решений» или «задача оптимизации планирования». Для этого есть своё объяснение.

Формальное описание (1) - (2) отражает практическое содержание основной задачи управления экономическим объектом: оптимизация производственной программы с целью получения максимальной прибыли, если ввести следующие допущения:

n - количество видов производимой продукции;

m - количество видов используемых ресурсов;

$x_j (j = \overline{1,n})$ - объемы продукции по видам;

$b^i (i = \overline{1,m})$ - объёмы имеющихся ресурсов;

$g^i (i = \overline{1,m})$ - технологические зависимости между продукцией и ресурсами;

f - экономическая цель производства (прибыль).

Решить задачу (1)-(2): найти такой вектор X^*, при котором выполняются все условия (2), а функция $f(X^*) = \max f(X)$. В математике вектор X^* называется «оптимальное решение», а в экономической науке вектор X^* называется «оптимальный план».

Для решения задачи (1) - (2) в общем виде не существует однозначных алгоритмов, чтобы за конечное число шагов получить оптимальное решение. Такой алгоритм существует для простейшего варианта задачи (1)-(2), когда f и g^i - линейные функции. Это задача линейного программирования (ЛП):

$$cX \to \max(\min), \tag{3}$$

$$AX \le b, \tag{4}$$

$$X \geq 0,$$

где X - вектор переменных,

A- матрица ограничений,

$c\,(\overline{1,n})$, $b\,(\overline{1,m})$ – векторы.

Алгоритм называется «симплекс-метод», он реализован во всех современных офисных компьютерных прикладных программах, например MS Excel. Оптимальное решение всегда будет найдено, если оно существует для задачи (3)-(4). В противном случае нужно корректировать заданные параметры: *A, c, в* и пытаться снова получить оптимальное решение. (Сначала формальное математическое решение, а потом подходящее экономическое решение). Такое решение должно быть основой для менеджмента – это наилучшая производственная программа на планируемый период.

Раздел 2. Требования практического менеджмента к качеству решения задачи оптимизации

Чтобы использовать оптимальное решение в практической работе менеджера (разработке плановых заданий для производства), разработчиком модели должны быть выполнены требования:

- значения величин X^* должны быть подходящими для производства;

- подходящих планов X^* должно быть несколько вариантов для выбора;

- расчет очередного варианта на компьютере не должен занимать много личного времени у менеджера;

- параметры n , m должны достаточно полно отражать масштабы производства.

Разработчик модели (с использованием конкретных числовых данных), чтобы выполнить требования 1 - 4 , сам требует от менеджера выполнить условия:

- исходная информация должна быть полной (календарные сроки, объемы, масштабы производства);

- разные исходные данные должны быть сопоставимы между собой (единицы измерения, ассортимент),

- числовые значения взаимосвязанных показателей должны быть сбалансированы (лимиты ресурсов, производственные нормативы).

Чтобы выполнить все требования 1 - 4 и 1 - 3, необходимо провести работу «вручную», путем переговоров менеджера и математика, путем многократной корректировки исходных значений заданных параметров модели (3)-(4). Это необходимо, чтобы обеспечить существование оптимального решения задачи (3)-(4) и его приемлемость для условий производства.

Если $n,m \leq 30$, то корректировки могут занять несколько дней. Если $n,m \geq 200$, как бывает в задачах реальной экономики, то переговоры и корректировки превышают разумные сроки. Оптимальное решение с использованием модели уже никому не нужно.

В этом заключается «проклятие размерности» при внедрении технологии экономико-математического моделирования в практику планирования и управления производством. Если модель маленькая (примитивная и грубая), то оптимальное решение можно получить легко и быстро. Если модель большая (подробная и полезная), то решение запутывается в переговорах и корректировках. Этот процесс нельзя формализовать математически.

Раздел 3. Гипотеза о разрешимости проблемы размерности. Декомпозиция блочной задачи

Указанное противоречие между теорией и практикой экономико-математического моделирования имеет объективный характер. Первичная реальная экономическая информация имеет объективные недостатки. Высокая скорость работы компьютера не помогает при согласовании информационных конфликтов.

Теоретическая гипотеза о разрешимости проблемы размерности сводится к обоснованию возможности решения задачи ЛП (3)-(4) по частям, то есть решать серию «маленьких» задач для получения одного решения «большой» задачи. Чтобы вместо «большого» устного согласования информационных конфликтов проводить серию «маленьких» согласований, которые идут быстро.

Универсальный алгоритм «симплекс-метода» не допускает решения задачи ЛП (3)-(4) по частям, только целиком. Однако для задач блочного вида теоретически доказана возможность расчленения общей задачи на ряд локальных задач малой размерности. Это методы декомпозиции. Суть метода декомпозиции: все локальные задачи решаются с помощью «симплекс-метода», полученные локальные оптимумы объединяются в единое множество, проверяются на соответствие глобальному критерию оптимизации. При необходимости выполняется корректировка параметров локальных задач (это можно автоматизировать), затем повторяются все расчеты локальных задач, снова проверяются на соответствие глобальному критерию и т.д.

Таким образом, можно свести к минимуму длительные информационные согласования между разработчиком модели и менеджером. В некоторых случаях их можно полностью автоматизировать. Главная теоретическая трудность: способ связывания промежуточных результатов решения локальных задач в единую цепь расчетов и обеспечение сходимости ряда промежуточных решений (суммы всех локальных оптимумов) к глобальному оптимуму. Для этого используются двойственные переменные.

Раздел 4. Теория согласования плановых решений. Два способа декомпозиции блочной задачи

Для любой задачи ЛП (3)-(4) всегда существует двойственная задача ЛП (5)-(6):

$$cX \to max, \tag{3}$$
$$AX \le b, \tag{4}$$
$$X \ge 0.$$

$$bY \to min, \tag{5}$$
$$YA^T \ge c, \tag{6}$$
$$Y \ge 0.$$

Здесь: $Y\left(\overline{1,m}\right)$ - вектор двойственных переменных; A^T $(m \times n)$ - транспонированная матрица А. При этом, $cX^* = bY^*$ в точках оптимума. Оптимальные значения Y^* имеют названия: двойственные переменные, двойственные оценки ресурсов, объективные оценки, «теневые цены». При решении на компьютере значения X^* и Y^* вычисляются одновременно.

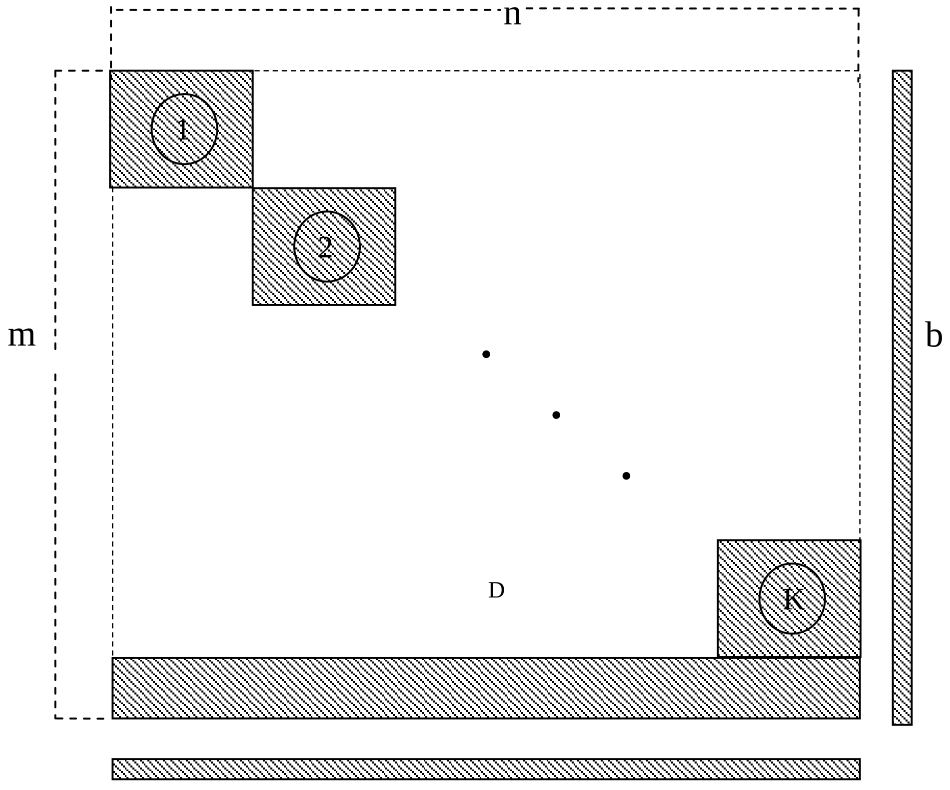


Рис.1. Матрица ограничений блочной задачи

Напомним экономический смысл значений двойственных переменных. Компоненты вектора Y^*, т.е. $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ соответствуют строкам матрицы A прямой задачи ЛП (3)-(4).Для оптимального плана X^* каждый компонент вектора Y^*, т.е. $y_i \left(i=\overline{1,m}\right)$ означает степень дефицитности или избыточности ресурса $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, т.е. «напряжённости» оптимального плана X^*.

Перейдем к описанию блочной задачи ЛП, чтобы пояснить как работает метод декомпозиции (расчленения) «большой» задачи на ряд «малых».

Блочная задача ЛП имеет матрицу ограничений как на рис. 1. Здесь: темные участки – это ненулевые коэффициенты; b и c – векторы из (3)-(4); K – количество блоков (частей) матрицы A; D – часть ограничений (4), общая для всех блоков.

$$cX \rightarrow max, \tag{7}$$
$$A^{(1)}X^{(1)} + A^{(2)}X^{(2)} + \dots + A^{(K)}X^{(K)} \le b^{(1\div K)}, \tag{8}$$
$$A^{(D)}X \le b^{(D)}, \tag{9}$$
$$X \ge 0.$$

$$c^{(k)}X^{(k)} \rightarrow \max, \tag{10}$$
$$A^{(k)}X^{(k)} \le b^{(k)}, \tag{11}$$
$$A^{(D,k)}X^{(k)} \le b^{(D,k)}, \tag{12}$$
$$X^{k} \ge 0$$

Здесь: $X = (X^{(1)}, X^{(2)},\dots, X^{(K)})$; $b = (b^{(1)}, b^{(2)},\dots, b^{(K)}, b^{(D)})$; $b^{(D)} = \sum_{k=1}^{K} b^{(D,k)}$.

Математически блочная задача ЛП может быть записана в виде (7), (8), (9). Если ее разделить на блоки, то каждый отдельный блок можно записать в виде локальной задачи ЛП (10), (11), (12). При этом разделении общий блок D, т.е. условия (9), тоже разделится на K частей. Локальные лимиты общих ресурсов $b^{(D,k)}$, $k = 1,\dots, K$, нужно подбирать по специальной методике, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{K} b^{(D,k)} = b^{D} \tag{13}$$

для каждой строки из группы ограничений D.

Процесс поиска оптимального решения для задачи (7), (8), (9) $X^* = (X^{(1)*}, X^{(2)*},\dots, X^{(K)*})$ состоит из L шагов ($l = 1, 2,\dots, L$). На первом шаге ($l = 1$) выбираем $b^{(D,k)}$ ($k = 1, 2,\dots, K$) произвольно, но при соблюдении условия (13). Решаем симплекс-методом все локальные задачи (10), (11), (12), однако объединение всех локальных оптимумов ($X^{(1)*}, X^{(2)*},\dots, X^{(K)*}$) еще не является оптимумом задачи (7), (8), (9). Для выполнения второго шага ($l = 2$) нужно корректировать лимиты $b^{(D,k)}$ ($k = 1, 2,\dots, K$) и снова решать все K локальных задач, чтобы приближаться к оптимальному плану X^* общей задачи (7), (8), (9).

Доказано в теории математической экономики: если вместо решения задачи (7), (8), (9) «целиком», решать группу локальных задач (10), (11), (12) с одновременной корректировкой заданных параметров на каждом l-ом шаге расчетов, то можно постепенно приблизиться к оптимальному решению общей задачи (7), (8), (9) как суммы локальных оптимумов.

Правило для корректировки лимитов $b^{(D,k)}$: после каждого l-го шага значения параметров $b^{(D,k)}$ заменяются на $\lambda^{(D,k)} \times b^{(D,k)}$, где $\lambda^{(D,k)}$ - значения двойственных переменных в локальных задачах из предыдущего $(l-1)$-го шага. При этом новые значения $b^{(D,k)}$ ($k = 1, 2,\ldots, K$) соответствуют условию (13). Потом снова решаются все локальные задачи: $l = 2, 3,\ldots$ Процесс заканчивается, когда $\lambda^{(D,k)}$ выравниваются для всех K локальных задач по одноименным ограничениям для группы условий (9), т.е. после шага $l = L$ $(X^{(1)*}, X^{(2)*}, \ldots, X^{(K)*}) = X^*$.

Этот алгоритм называется «декомпозиция через ресурсы». Авторы: Я. Корнаи, К.А. Багриновский.

Другой алгоритм называется «декомпозиция через цены». Авторы: Дж. Данциг, П. Вольф. Он доказан для блочных задач с матрицей ограничений как на рис. 2.

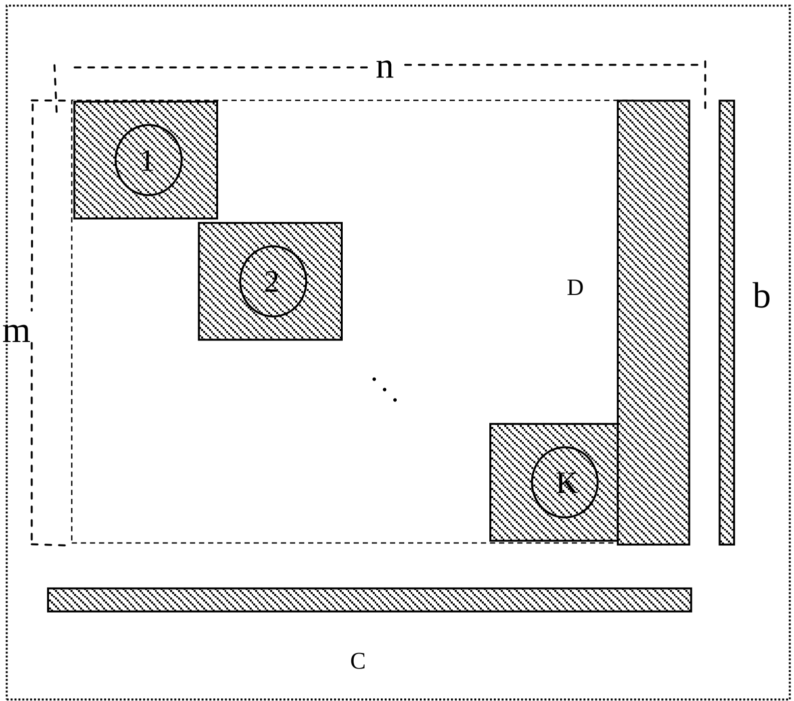


Рис. 2. Матрица ограничений блочной задачи

Здесь двойственные переменные используются для корректировки локальных целевых функций на каждом l-м шаге итеративных расчетов.

Алгоритмы декомпозиции могут очень ускорять процесс согласования и корректировки исходных числовых параметров модели (3)-(4). Это очень важно для практического менеджмента, потому что оптимальный «большой» план получается быстро. Работы «вручную» стало меньше.

Чтобы перейти к компьютерной автоматизации процесса информационного согласования плановых решений, нужно преодолеть ещё одну трудность. Алгоритм декомпозиции предполагает существование начальных допустимых планов для всех локальных задач. На языке математики это означает, что системы ограничений (11) - (12) разрешимы и имеют формальное решение. Напоминаю, что речь идёт о конкретных моделях с реальными числовыми данными. Чаще всего допустимого решения не существует из-за несогласованности данных. Это объективные недостатки статистической информации.

Мною был разработан алгоритм поиска (локализации) причин отсутствия допустимого решения и корректировки числовых параметров исходной задачи таким образом, что существование допустимого решения гарантируется. Об этом будет рассказано подробно в следующем разделе.

Таким образом, в результате применения перечисленных алгоритмов можно автоматизировать на компьютере декомпозицию «большой» задачи ЛП блочной структуры. Даже при наличии объективных недостатков в исходной экономической информации можно автоматически получить оптимальное управленческое решение для «большой» модели реального объекта (или близкое к оптимальному – «квазиоптимальное» с заданной точностью). Для этого нужно разработать компьютерные программы реализации «декомпозиции» и объединить их с «симплекс-методом». Высокая скорость работы компьютера поможет преодолеть проблему «проклятия размерности».

Далее я расскажу, для какой реальной экономико-математической модели это было выполнено.

Раздел 5. Модель согласования оптимальных планов производства для двухуровневой системы управления с горизонтальными связями.

Рассматривается двухуровневая система управления текстильной отраслью. На нижнем уровне рис. 3 – производственные предприятия, выпускающие конечную продукцию (ткани, трикотаж) и промежуточную продукцию (волокно, пряжу).

На верхнем уровне рис. 3 – управление всей отраслью в целом: координация взаимодействия между предприятиями, учёт расходования лимитированных ресурсов (например: газ, электроэнергия и т.д.), регулирование экспортных поставок.

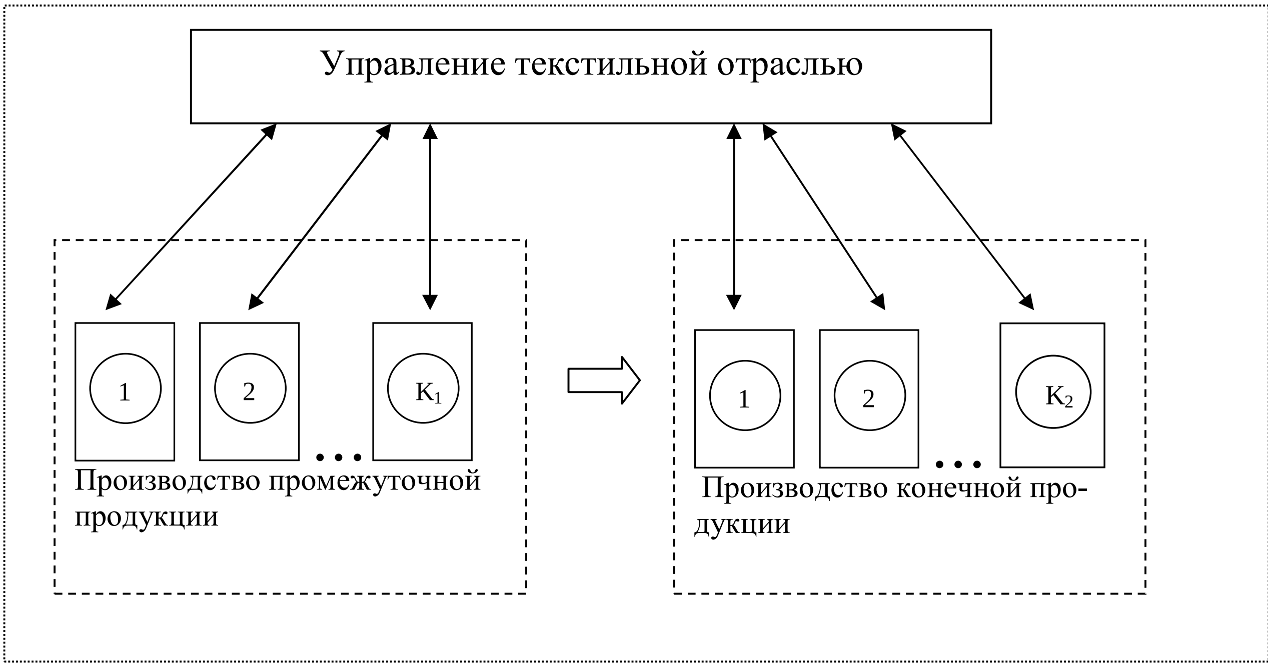


Рис.3. Двухуровневая система управления текстильной отраслью

В реальности процесс управления отраслью (разработки проекта стратегии развития отрасли на перспективу) – это многошаговая итеративная процедура. На каждом шаге осуществляется расчет проекта производственной программы «внизу» (каждое предприятие - самостоятельно), затем выполняется баланс для системы в целом «наверху», перераспределение лимитированных централизованных ресурсов для достижения единой цели для всей отрасли.

Другой пример: по такой же схеме осуществляется управление всей сетью образовательных учреждений страны.

В содержательном смысле процесс согласования проектов планов в двухуровневой системе управления отраслью напоминает алгоритм декомпозиции при решении задачи ЛП большой размерности, о котором я рассказала ранее. Воспользуемся этим сходством.

Задача управления текстильной отраслью по схеме 3 может быть представлена как задача ЛП большой размерности с матрицей блочного вида. Здесь: $X^{k_1}, X_T^{k_2}$ - векторы неизвестных объёмов производства (пряжи и тканей соответственно).

$M^{k1}, M_T^{k2}, B^{k1}, B_T^{k2}$ - лимиты внутриотраслевых ресурсов для производства пряжи и тканей соответственно, а также технологические коэффициенты для их использования;

D, L^{k1} - лимиты общих ресурсов и коэффициенты для их использования для всех прядильных предприятий в целом;

V, V_T, R^{k1}, R_T^{k2} - производственные мощности предприятий промежуточной и конечной продукции и коэффициенты для их использования;

E^{k1}, L_T^{k2} - технологические коэффициенты, связывающие производство промежуточной и конечной продукции.

Графически это соответствует рис. 4.

Блоки (14) и (17) – это технологические ограничения при производстве пряжи и тканей соответственно. Блоки (15), (16), (18) – это ограничения по производству продукции (пряжи и тканей). Блок (19) – глобальные (связующие) ресурсные ограничения для всей отрасли.

$$\sum_{k_2 \in K_2} c^{k_2} X_T^{k_2} \to max,$$

$$B^{k_1} X^{k_1} \le M^{k_1}, k_1 \in K_1, \tag{14}$$

$$\sum_{k_1 \in K_1} L^{k_1} X^{k_1} \le D \ , \tag{15}$$

$$\sum_{k_1 \in K_1} R^{k_1} X^{k_1} \ge V, \tag{16}$$

$$B_T^{k_2} X_T^{k_2} \le M_T^{k_2}, k_2 \in K_2 \ , \tag{17}$$

$$\sum_{k_2 \in K_2} R_T^{k_2} X_T^{k_2} \ge V_T \ , \tag{18}$$

$$\sum_{k_1 \in K_1} E^{k_1} X^{k_1} - \sum_{k_2 \in K_2} L_T^{k_2} X_T^{k_2} \ge 0. \tag{19}$$

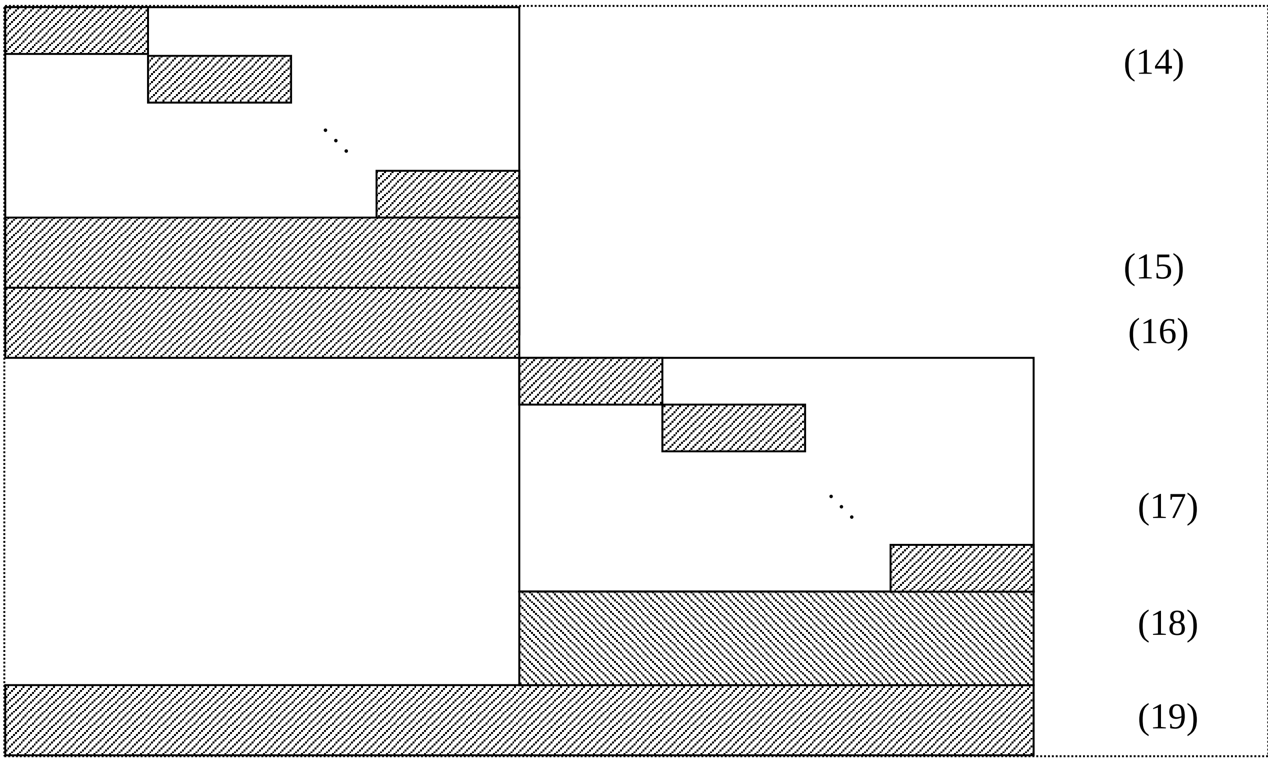


Рис. 4. Структура матрицы задачи (14)-(19)

Рис. 4 наглядно показывает блочно-диагональную структуру матрицы ограничений задачи (14) – (19). Здесь можно выделить две блочно-диагональные структуры, объединённые общим блоком (19).Общая размерность задачи большая: (m*n) = (200*300), если даже учитывать укрупнённый, агрегированный ассортимент производимой продукции.

Моя задача исследования включала в себя следующие разделы:

- разработать детальный алгоритм поэтапной декомпозиции задачи (14) – (19);
- математически доказать обоснованность его применения (сходимость ряда промежуточных решений локальных задач к оптимуму общей задачи);
- разработать комплекс компьютерных программ для реализации алгоритма;
- провести модельный эксперимент (компьютерные расчеты) на реальном объекте с использованием моих разработок.

Раздел 6. Алгоритмизация модели согласования управленческих решений для текстильной отрасли

Рассматриваемая экономическая система характеризуется двумя схемами взаимодействия между элементами:

1. Подсистемы нижнего уровня взаимодействуют с центральным органом управления (вертикальное взаимодействие).
2. Подсистемы нижнего уровня взаимодействуют между собой через поставки промежуточной продукции (горизонтальное взаимодействие).

Поэтому мой алгоритм базируется на применении сразу двух принципов декомпозиции задачи (14) – (19).

Этапы алгоритма:

1. Исходная задача сначала расчленяется на две задачи, тоже «большие»: производство конечной продукции и промежуточной продукции. Частные задачи записываются в виде:

$$\begin{aligned} & Z^2EX^1 - max \\ & B^1X^1 \le M^1 \\ & L^1X^1 \le D^1 \\ & R^1X^1 \ge V^1 \\ & X^1 \ge 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} & C^2X^2 - max \\ & B^2X^2 \le M^2 \\ & R^2X^2 \ge V^2 \\ & L^2X^2 \le Y^2 \\ & X^2 \ge 0; \mathrm{Y}^2 = \mathrm{EX}^1 \end{aligned} \qquad (21)$$

Здесь: E – технологическая матрица производства пряжи; Z^2 - цены; (λ_i^2 - двойственные переменные третьей группы ограничений в (21) на предыдущей итерации расчетов).

2. Для решения каждой из задач (20), (21) применяется декомпозиция по ресурсам: задача (20) расчленяется на K_1 локальных задач, задача (21) – на K_2 локальных задач вида:

$$
\begin{aligned}
& C^k X^k - \ max, \\
& B^k X^k \le M^k, \\
& L^k X^k \le D^k, \\
& R^k X^k \ge V^k, \\
& X^k \ge 0; k = k_1, k_2; k_1 \in K_1, k_2 \in K_2 .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Здесь: D^K, V^K - фиксированные параметры (объёмы сырья и произведенной продукции). Они корректируются на каждой итерации в зависимости от двойственных переменных, полученных на предыдущей итерации.

Этап 2 повторяется многократно (решаются $K_1 + K_2$ малых задач одновременно), пока двойственные переменные «глобальных» ограничений

$(\ldots, D^k, \ldots V^k)$ сблизятся с точностью до заданного ε .

Затем объединённые показатели передаются на этап 1 и все повторяется. На этапе 1 проверяется сбалансированность объёмов производства промежуточной и конечной продукции, а также сходимость ряда локальных оптимальных решений к глобальному оптимуму.

3. Этап вспомогательный. Чтобы этапы 1 и 2 работали, необходимо, чтобы каждая локальная задача имела допустимое решение. Чтобы это условие обеспечить, предложен алгоритм «расшивки узких мест». Все ограничения локальной задачи (22) условно разбиваются на 3 группы (внутренние и внешние ресурсы, объём производства). Последовательно строятся и решаются 3 вспомогательные задачи ЛП (минимум изменений вектора лимитов). Они всегда разрешимы и дают значения для корректировки величин M^k, D^k, V^k ,чтобы задача (22) была разрешимой и имела математическое допустимое решение.

Таким образом, разработанный в теории алгоритм позволяет полностью автоматизировать решение задачи оптимизации большой размерности. При этом будут рассчитаны все необходимые поправки в исходные данные (для информирования менеджера). Так как современные компьютеры работают очень быстро, то весь расчет оптимального решения (вариант согласованного плана) пройдёт в нормальные сроки для менеджера. Большое количество информационных конфликтов (согласование параметров моделей) компьютер разрешит сам, автоматически.

Описанный 3-этапный алгоритм двойной декомпозиции задачи (14) – (19) сводит решение исходной задачи большой размерности к некоторой последовательности решений локальных задач (22) малой размерности. Процедура пошаговой координации решений локальных задач позволяет интерпретировать ее как имитацию процесса согласования управленческих решений.

Раздел 7. Экспериментальное компьютерное моделирование

Предложенный мной алгоритм согласования оптимальных планов для двухуровневой системы управления с горизонтальными связями был реализован в компьютерных программах. Общая схема технологии расчета в соответствии с алгоритмом представлена на рис. 5.

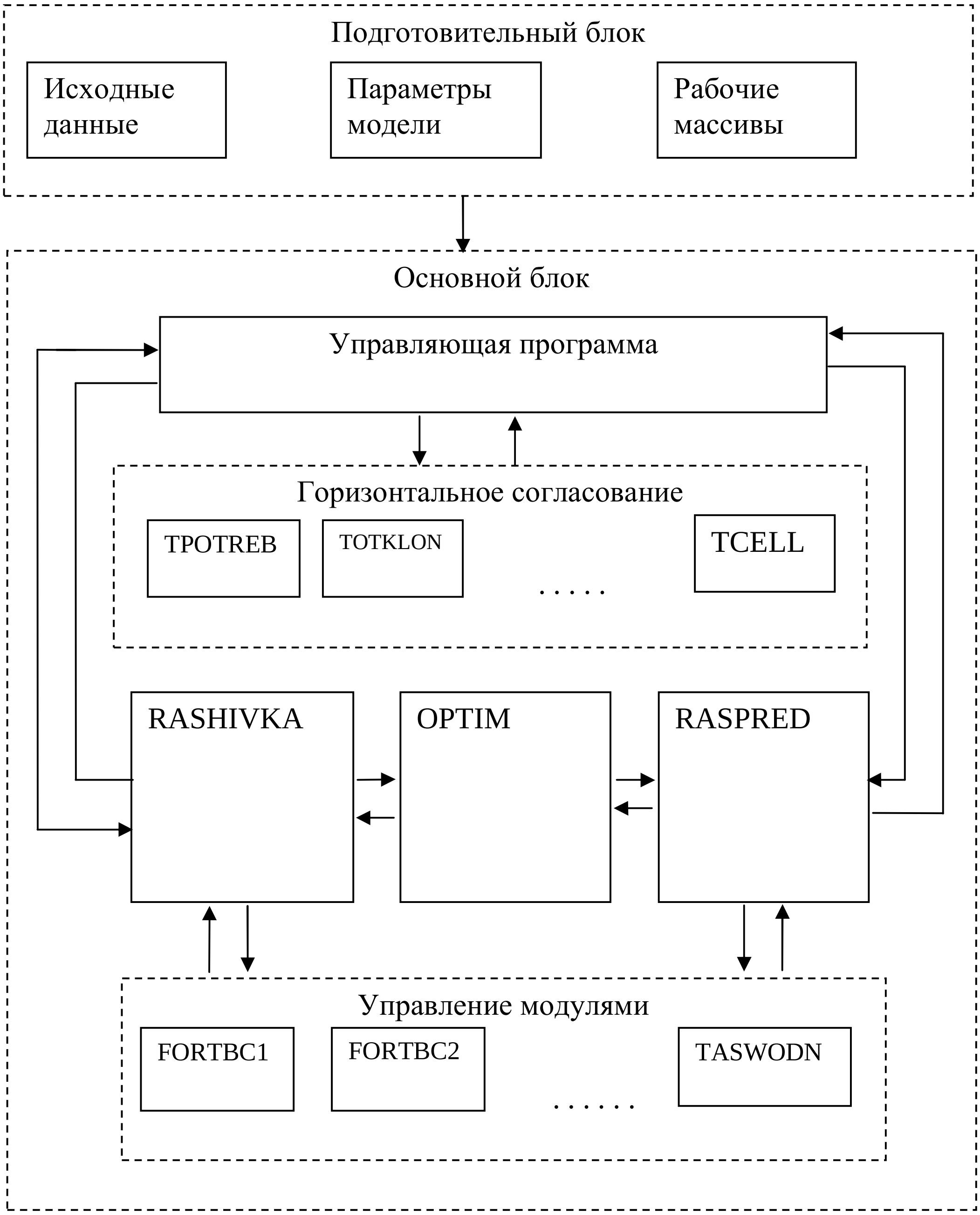


Рис. 5. Структура программного комплекса для реализации модели согласования управленческих решений

По окончании расчета менеджер получает план для отрасли в целом, приближенный к оптимальному, а также для каждого предприятия. Сбалансированный план позволяет выявить резервы предприятий: по внутренним ресурсам, по взаимным поставкам продукции.

Не будем останавливаться на конкретных деталях профессионального компьютерного программирования, поскольку языковая база постоянно меняется и совершенствуется. Отметим только: достаточно базовой университетской подготовки в области программирования на языках высокого уровня (универсальных). Вначале это был FORTRAN-4, информационно совместимый с MS Excel.

Программный комплекс на рис. 5 работает по принципу «черного ящика». Менеджер видит только результаты: выходные данные (решение), которые сформированы сервисными программами. На рис. 5 они не показаны. Не показаны также программы пользовательского интерфейса (на входе программного комплекса рис. 5). Сервисные и интерфейсные программы должны быть адаптированы к действующей информационной системе менеджера-специалиста.

Компьютерные эксперименты показали, что теоретический алгоритм является удобным для практического использования. Достаточно 3 – 4 шага (итерации), чтобы совокупность локальных оптимальных решений приблизилась к глобальному оптимуму с точностью до 4 – 5 %. Этого достаточно для экономического анализа и принятия управленческих решений.

Весь комплекс программ организован таким образом, чтобы использовать его совместно с любой действующей информационной системой (где обрабатывается первичная статистическая информация). На схеме видим: только блок OPT1M – это стандартный «симплекс-метод», дающий решение прямой и двойственной задач ЛП. Всё остальное – это программы моего алгоритма, написанные мной лично. Здесь 25 программ, они не включают обработку первичной информации и выдачу выходных документов. Полностью (вместе с сервисом) комплекс включает около 60 программ (работал авторский коллектив 5 человек).

Практическое применение модели согласования выполнено по заказу Министерства текстильной промышленности СССР для расчета проекта перспективного развития отрасли на 5-летний период.

Позднее эта же модель была применена для расчета проекта перспективного развития сельскохозяйственного производства Ивановской области РФ на 5-летний период. После этого программный комплекс был запатентован в СССР (авторское свидетельство 1991 года).

Раздел 8. Расширение модели согласования для оптимизации стратегического управления аграрным комплексом региона. Учет неопределенности влияния погодных условий на урожайность

Модель согласования управленческих решений или декомпозиция задачи (14) – (19) допускает расширение системы ограничений для учета конкретных особенностей моделируемого объекта. Если при этом структура матрицы исходной задачи сохраняется, то сохраняется и алгоритм реализации двойной декомпозиции. Значит можно использовать этот алгоритм для моделирования процесса планирования различных двухуровневых экономических объектов.

Для сельскохозяйственного производства (растениеводство + животноводство) потребовалось усложнить основную модель, чтобы учесть различные погодные условия на 5 лет вперёд. Модель стала вероятностной (стохастической), но нами было доказано, что её можно трансформировать в блочно-диагональную детерминированную модель. Использован подход В. Кардаш для определения полного набора N возможных вариантов погодных условий на будущие годы с вероятностями их наступления $q^{\nu}, \nu = 1,2,..., N$. На предварительном этапе нужно выполнить статистическую обработку динамических рядов уровней урожайности основных сельскохозяйственных культур за период 20 – 30 лет. Для макроэкономики достаточно оценить вероятность наступления каждого из трех вариантов: урожайный год, неурожайный, средний (N = 3).

Для двухуровневой системы управления аграрным комплексом (регион + сельскохозяйственные районы) критерий оптимальности: максимум прибыли при любых погодных условиях и при выполнении производственных условий. Структура матрицы такой гипотетической модели оптимального планирования показана на рис. 6.

Здесь каждый из m блоков (районов) отражает производственную модель развития (растениеводство + животноводство) в каждом из трех вариантов погодных условий $(\nu = 1,2,3)$. Общий блок (сверху) – региональное госрегулирование производства и закупок, включая льготные тарифы на общепроизводственные ресурсы и закупочные цены на продукцию для госрезервов (в зависимости от погодных условий).

Результатом является оптимальный план для каждого района (m = 22) и для каждого варианта погодных условий, чтобы в целом по региону обеспечить максимум средней прибыли (математическое ожидание).

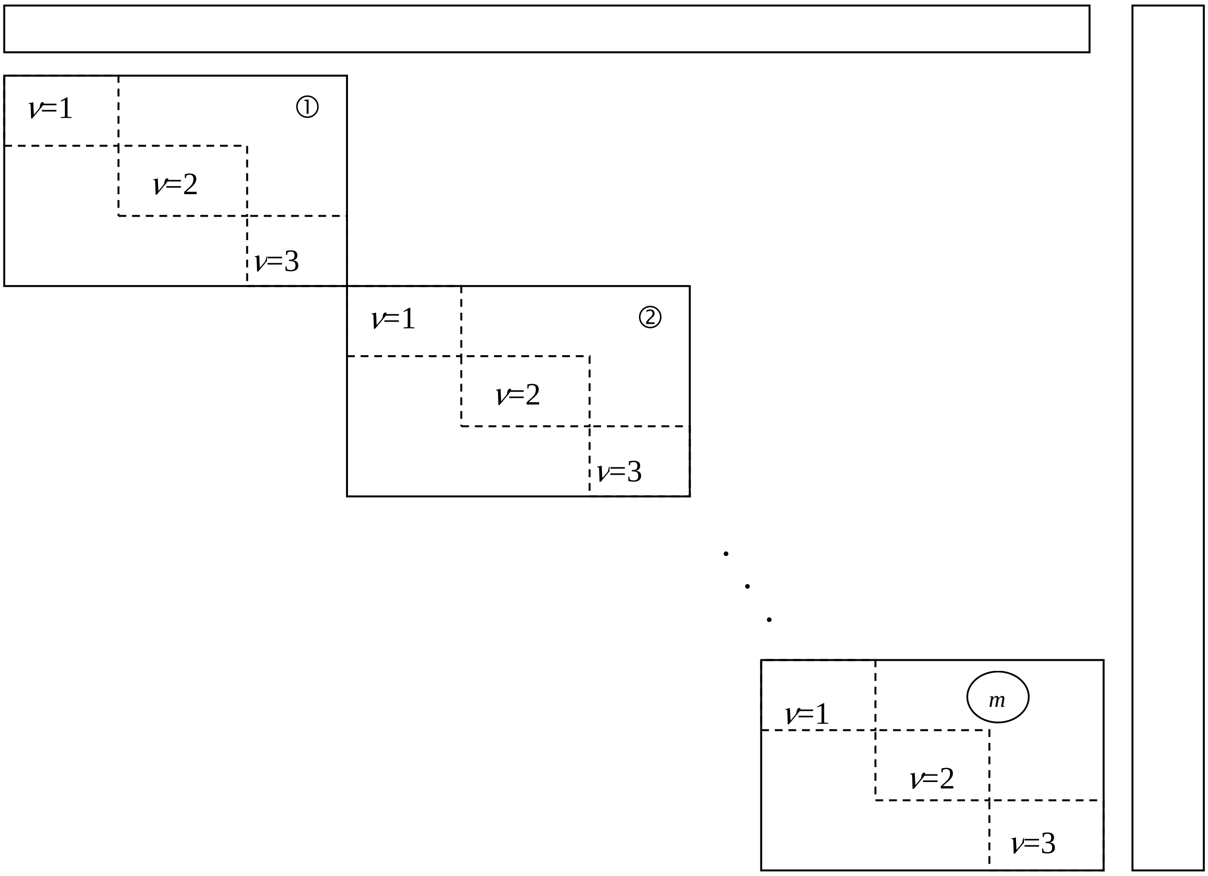


Рис. 6. Структура матрицы стохастической модели оптимизации

Модель согласования интересов региона и предприятий учитывает влияние случайных погодных факторов на уровень производства и меры по предотвращению ущерба. Предусмотрено применение специальных (государственных) закупочных цен на продукцию в неурожайные годы.

Опустим далее полное математическое описание модели, но отметим главное: из схемы 6 ясно, что мы получили задачу ЛП блочной структуры и большой размерности. Для ее решения можно применить метод декомпозиции по ресурсам и алгоритм для реализации этого метода (см. раздел 5). Достоинство алгоритма декомпозиции: возможность работать менеджеру в условиях неполной и нестабильной информации. Для получения достаточно пригодного решения для экономического анализа потребуется всего 3-4 «большие итерации», или менее 1 часа работы на компьютере. Размерность общей модели может превышать 800×1000. Менеджер может экспериментировать с моделью в реальном режиме времени, получать новые варианты прогнозов развития экономической ситуации в зависимости от изменения спроса и предложения.

Экспериментальная апробация модели (1992 г.) проводилась одновременно с проектной разработкой 5-летней стратегии развития АПК Ивановской области («вручную», по действующим методикам). Общий вывод: компьютерный проект имеет лучшее научное обоснование, специалист-менеджер может работать быстро и с большей эффективностью.

Литература

1. Багриновский К.А. Основы согласования плановых решений. – М.: Наука, 1977.

2. Кардаш В.А. Экономика оптимального погодного риска. – М.:Агропромиздат, 1989.

3. Корнаи Я., Липтак Т. Планирование на двух уровнях // Применение математики в экономических исследованиях. – М.: Мысль, 1956. – С. 107 – 136.

4. Ильченко А.Н. Моделирование внутрирегиональных экономических взаимоотношений в АПК. – М.: МСХА, 1993.

5. Dantzig G.B., Wolfe P. Decomposition Principle for Linear Programs // Operations Research, 1960, № 8, p. 101 – 111.

Ivanovo State University of Chemistry and Technology

A. Ilchenko

Big dimension mathematical programming problem decomposition: “dimension damnation” problem solution

Public lecture

Ivanovo – 2012

Annotation

The lecture was delivered on 30 of December 2011 for postgraduates and professors of mathematics and computer science department of Wuhan Textile University (the city of Wuhan, Chinese National Republic) in English.

The basic content of the lecture is formed by Professor A. Ilchenko and her followers' findings in the problem of economic mathematical modelling methods adoption to the practical management activity at the production branch, territorially industrial complex and regional economy levels. Single questions and particular results were published in Russian scientific editions over a period of twenty years (from 1990 to 2010). In brief compacted account the material is published for the first time.

The lecturers of Wuhan Textile University Luo Juan, Xiang Xiao Gang, He Wei and also of Ivanovo State University of Chemistry and Technology O.A. Golovacheva and O.L. Ksenofontova help the author in material preparation and design for publishing.

Presented material will be useful for students and undergraduates who get trained in economic specialties, economic universities lecturers and postgraduates, applied managers of regional level of management.

The basic sections

1. The basic concepts and definitions of mathematical programming problems decomposition theory. The content of research task as the problem of management decision accommodation in economics.
2. Practical management requirements to management decisions optimization problem solution quality.
3. Dimension problem solvability hypothesis. Linear programming block problem decomposition.
4. Planned solutions coordination theory. Two ways of block problem decomposition. Decomposition algorithm economic interpretation as the plan coordination process in bimodal management system.
5. Optimal production plan coordination model for bimodal management system with horizontal connections.
6. Management decision accommodation model algorithmization for textile branch.
7. Experimental computer modelling.
8. Accommodation model extension for regional agricultural sector strategic management optimization. Responsiveness to uncertainty of weather conditions on crop capacity.

Introduction

At the beginning it is necessary to tell some words about the title of the lecture. A “dimension damnation” term was introduced by American mathematician Richard Bellman (1920 – 1984), the author of the dynamic programming. But this term is also proper to my scientific inquiry. The whole point is that management decision optimization mathematical methods well elaborated in theory at introduction to the managers’ practice strike on invincible difficulties preventing its application. Experimenter understands all on small models but on the real big models informational problems arise (with the human factor participation) that to receive the optimal decision not occurs as possible. High speed of computer functioning does not help.

The matter is in mathematical economics essence which unites two sciences: exact science – mathematics and inexact descriptive science – economics where the main active element is human, “the person taken a decision” (PTD).

Mathematical model is the combination of equations and inequalities which reflect real object functioning in economy (enterprise, industrial branch, region). The model is created for the purpose of PTD work improvement with the computer experiment assistance: to predict the object development in future; to choose the best development variant (optimal) from among many possible (admissible). In this way the model is necessary to manager calculations making out with real numerical economic information.

In order to carry out computer experiments mathematic science requires exact figures but economic practice can not give exact numbers. This is the objective contradiction, the problem of mathematical economics, which prevents good theoretical model introduction in management practice. The problem is becoming acute for big dimension models including hundreds and thousands of elements what corresponds to the real diversity of element correlation inside economic objects. This is “dimension damnation”.

The scientific work which will be talking about further applies to the mathematical economics section which is called “mathematical programming”. This work is characterized by the fact that my research results obtained during all the three modelling technology stages are included in it: models and optimal decision reception mathematical algorithm construction; instrumental algorithm realization, that is computer programming; this elaboration application for management on the industrial branch level on nation-wide (USSR) and on a regional scale (Ivanovo region).

Section 1. The basic concepts. The content of research task

In the theory of mathematical economy a problem of mathematical programming (MP) is well-known:

$$f(X) - extr \ , \tag{1}$$

$$g^i(X) \le b^i \ , \tag{2}$$

$$X \ge 0,$$

where $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ - variables,

f - object function (max, min),

$g^i (i = \overline{1,m}) -$ restriction functions,

$b^i (i = \overline{1,m}) -$ restriction limits.

The problem (1) - (2) can have range of solutions or the only one solution or not to have solution. In this case restriction system (2) is called incompatible and the problem (1) – (2) is called unsolvable. For practical management only soluble problem (1) – (2) which has the only solution is of consequence. In the economic terminology the problem (1) – (2) is called “management decision optimization problem” or “planning optimization problem”. There is its own explanation for it.

The formal description (1) – (2) reflects the practical essence of the main economic object management problem: production program optimization for the purpose of making a maximum of profit if the following assumptions to be brought out:

n - number of goods manufactured types;

m - number of applied resources types;

$x_j (j = \overline{1,n})$ - volumes of production by types;

$b^i (i = \overline{1,m})$ - volumes of available resources;

$g^i (i = \overline{1,m})$ - technological subordinations between production and resources;

f - economic production purpose (profit).

To solve a problem (1) - (2): to find such X^* vector by which all conditions (2) are fulfiled, and function $f(X^*) = \max f(X)$. In mathematics X^* vector is called “optimal decision” and in economic science X^* vector is called “optimal plan”.

For the problem (1) - (2) solving (in a general view) there are no simple algorithms to receive the optimal decision for final number of steps. Such algorithm exists for the elementary variant of (1) - (2) problem, when f and g^i are linear functions. It is a problem of linear programming (LP):

$$cX - \max (\min)\, , \tag{3}$$

$$AX : b\, , \tag{4}$$

$$X \ge 0,$$

where X - vector of variables,

A - matrix of restrictions,

$c(\overline{1,n})$, $b(\overline{1,m})-$ vectors.

The algorithm is called "simplex-method", it is realized in all modern office computer application programs, for example MS Excel. The optimal decision will be always found, if it exists for a (3) - (4) problem. Otherwise it is necessary to correct the set parameters: *A*, *c*, *b* and to try again to receive the optimal decision. (At first it is the formal mathematical decision and then suitable economic decision). Such decision should be a basis for management - it is the best production program for the planned period.

Section 2. Practical management requirements to management decisions optimization problem solution quality

In order to use the optimal decision in manager practical work (working out of planned production targets), the following requirements should be fulfilled by the model developer:

- X^* values should be acceptable for production;
- there should be some variants of suitable X^* plans for choosing;
- next variant computer calculation should not take a lot of manager's personal time;
- *n*, *m* parameters should full enough reflect a scale of production.

The model developer (with concrete numerical data use), in order to fulfil 1 - 4 requirements, demands himself from the manager to satisfy the following conditions:

- initial data must be complete (terms, volumes, scales of production);
- varied initial data must be comparable (units of measure, assortment),
- numerical values of the interconnected indicators must be balanced (resource limits, production standards).

To fulfil all (1 - 4) and (1 - 3) requirements it is necessary to carry out work "manually" by force of the manager and the mathematician negotiation, by force of multiple updating of (3) - (4) model set parameters basic data. It is necessary for (3) – (4) problem optimal decision existing ensuring and its applicability for production conditions.

If $n,m \leq 30$, updating can take some days. If $n,m \geq 200$ as happens in real economy problems negotiations and updating surpass reasonable terms. The optimal decision with (3) - (4) model use is not already necessary for nobody.

«The dimension damnation» consists in it at economic-mathematical modelling technology introduction to planning and production management practice. If model is small (primitive and crude) it is possible to receive the optimal decision easy and quickly. If model is big (detailed and useful) the decision becomes more complicated by negotiations and updating. It is impossible to formalize this process mathematically.

Section 3. Dimension problem solvability hypothesis. Block problem decomposition

The mentioned contradiction between the economic-mathematical modelling theory and practice has objective character. Basic real economic information has objective defects. High speed of computer functioning does not help at informational conflict coordination.

Theoretic hypothesis of dimension problem solving comes to substantiation of (3) - (4) LP problem solving possibility in parts that is to solve "small" problem series for the purpose of receiving one "big" problem decision. In order to run a series of "small" coordination proceeding faster instead of “big” informational conflict verbal coordination.

"Simplex-method" universal algorithm does not permit (3) - (4) LP problem solving in parts, only entirely. But for the block type problems the possibility of total problem breaking down into small dimension local problems range is theoretically proved. These are the decomposition methods. Decomposition method essence is that all local problems are solving with the “simplex-method” aid, local optimums received are uniting into single multitude and checking on correspondence with global optimization criterion. In case of necessity local problem parameters update is fulfilled (it can be done automatically), then all local problem calculations are repeated, are checking on correspondence with global criterion again etc.

Thus long-run informational coordination between model developer and manager may be reduced to minimum. In some cases it can be automated completely. The main theoretical difficulty: the way of linking of local problem solving intermediate results into integrated calculation range and intermediate result range convergence provision (all local optimum sums) to a global optimum. Dual variables are used for this purpose.

Section 4. Planned solution coordination theory. Two ways of block problem decomposition

For any LP (3) - (4) problem dual LP (5) - (6) problems always exists:

$$cX - max, \quad (3)$$

$$AX \leq b, \quad (4)$$

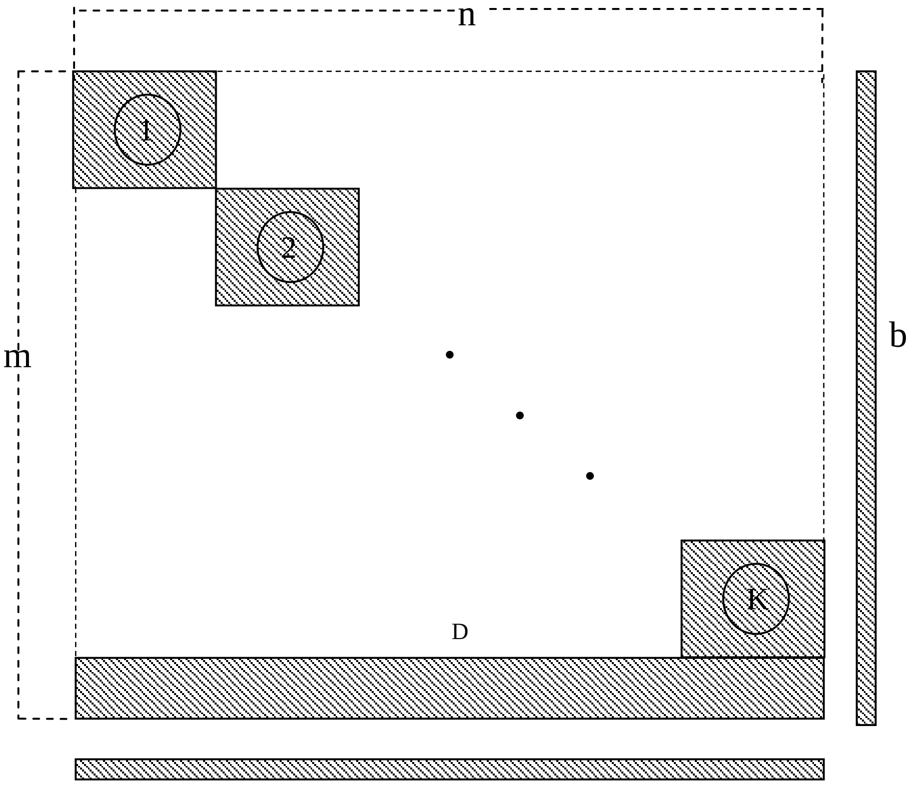
$$X \geq 0.$$

$$bY - min, \quad (5)$$

$$YA^T \geq c, \quad (6)$$

$$Y \geq 0.$$

Here: $Y\left(\overline{1,m}\right)$ - vector of dual variables; A^T $(m \times n)$ transposed A matrix. In so doing $cX^* = bY^*$ is in optimum points. Y^* optimal values have names: dual variables, dual resource estimations, objective estimations, «shadow prices». When computer solving X^* and Y^* values are calculated simultaneously.



Scheme 1. Restriction matrix of block problem

Let's remind the dual variable value economic meaning. Y^* vector components, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, correspond with A matrix lines of (3) – (4) LP straight problem. For optimal X^* plan each Y^* vector component, that is y_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$, means resource deficit or surplus measure $b_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ that is of X^*optimal plan "intensity".

LP block problem has restriction matrix as on the scheme 1. Here: dark areas are nonzero coefficients; b and c – vectors from (3) - (4); K – A matrix blocks (parts) quantity; D – restriction part (4), general for all blocks.

$$cX \to max, \tag{7}$$

$$A^{(1)}X^{(1)} + A^{(2)}X^{(2)} + \cdots + A^{(K)}X^{(K)} \le b^{(1 \div K)}, \tag{8}$$

$$A^{(D)}X \le b^{(D)}, \tag{9}$$

$$X \geq 0.$$

$$c^{(k)}X^{(k)} \rightarrow \max, \tag{10}$$
$$A^{(k)}X^{(k)} \le b^{(k)}, \tag{11}$$
$$A^{(D,k)}X^{(k)} \le b^{(D,k)}, \tag{12}$$
$$X^{k} \ge 0$$

Here: $X = (X^{(1)}, X^{(2)},\dots, X^{(K)})$; $b = (b^{(1)}, b^{(2)},\dots, b^{(K)}, b^{(D)})$; $b^{(D)} = \sum_{k=1}^{K} b^{(D,k)}$.

Mathematical LP block problem can be put down in the form of (7), (8), (9). If it will be divided into blocks every separate block can be put down in the form of (10), (11), (12) LP local problem. In this division D common block, (12) conditions, also will be divided into K parts. Common resource local limits, $b^{(D,k)}$, $k = 1,\dots, K$, need to be selected by special methodic in order to fulfil the following condition

$$\sum_{k=1}^{K} b^{(D,k)} = b^{D} \tag{13}$$

for each line from D restriction group.

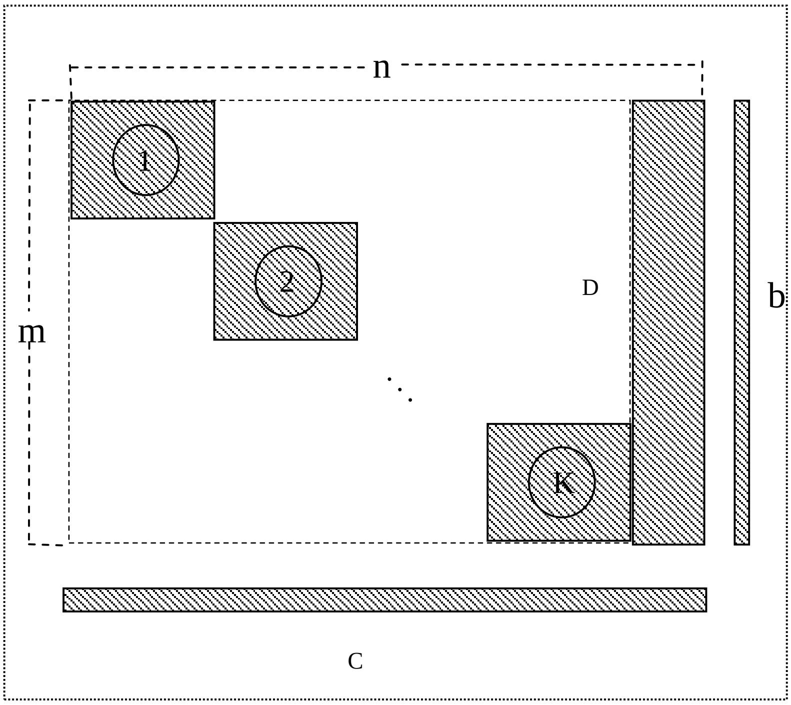
The process of searching of optimal solution of (7), (8), (9) problem, $X^{*} = (X^{(1)*}, X^{(2)*},\dots, X^{(K)*})$, consists of L steps ($l = 1, 2,\dots, L$). On the first step ($l = 1$) we choose $b^{(D,k)}$ ($k = 1, 2,\dots, K$) at will with (13) condition maintenance. We solve all (10), (11), (12) local problems by simplex-method but all local optimum ($X^{(1)*}, X^{(2)*},\dots, X^{(K)*}$) unification is not (7), (8), (9) problem optimum yet. For second step (l = 2) fulfillment it is necessary to correct $b^{(D,k)}$ ($k = 1, 2,\dots, K$) limits and to solve all local problem K again in order to approach to optimal plan of (7), (8), (9) common problem.

It is proved in the theory of mathematical economy: if to solve a group of (10), (11), (12) local problems with set parameters simultaneous correction on each l-step of calculation instead of (7), (8), (9) problem solving "entirely" then it is possible to approach by degrees to the optimal (7), (8), (9) general problem solving as the sum of local optimums.

The rule for $b^{(D,k)}$ limit correction: after each l step $b^{(D,k)}$ parameter values are substituted for $\lambda^{(D,k)} \times b^{(D,k)}$ where $\lambda^{(D,k)}$ are dual variable values in local problems from previous (l – 1) step. Incidentally new $b^{(D,k)}$ ($k = 1, 2,\dots, K$)) values correspond with condition (13). Then all local problems $l = 2, 3,\dots$ are solving again. Process comes to an end, when $\lambda^{(D,k)}$ are leveled for all K local problems on the restrictions of the same name for group of conditions (9), that is after step $l = L$ $(X^{(1)*}, X^{(2)*}, \dots, X^{(K)*}) = X^{*}$.

This algorithm is called «decomposition through resources». Authors: J. Kornai, K. Bagrinowsky.

Another algorithm is called «decomposition through the prices». Authors: D. Danzig, G. Wolf. It is proved for block problems with the matrix of restrictions as it presented on scheme 2.



Scheme 2. Restriction matrix of block problem

Here dual variables are used for local goal-oriented function correction on each *l* step of iterational calculations.

Decomposition algorithms can accelerate a lot a process of the (3) - (4) model initial numerical parameter coordination and updating. It is very important for practical management because the optimal "big" plan turns out quickly. "Manually" work became less.

In order to move on computer automation of informational coordination process of planned solutions, it is necessary to conquer one more difficulty.

Decomposition algorithm assumes initial admissible plans existence for all local problems. In mathematical language it means that (11) - (12) restriction systems are to be solved and have formal solution. I remind that it is a question of concrete models with real numerical data. Usually the admissible solution does not exist because of data non-coordination. These are statistical information objective defects.

I have developed algorithm of search (localization) of admissible solution absence reasons and initial problem numerical parameters correction in such manner that admissible solution existence is guaranteed. It will be talked about it in detail in the following section.

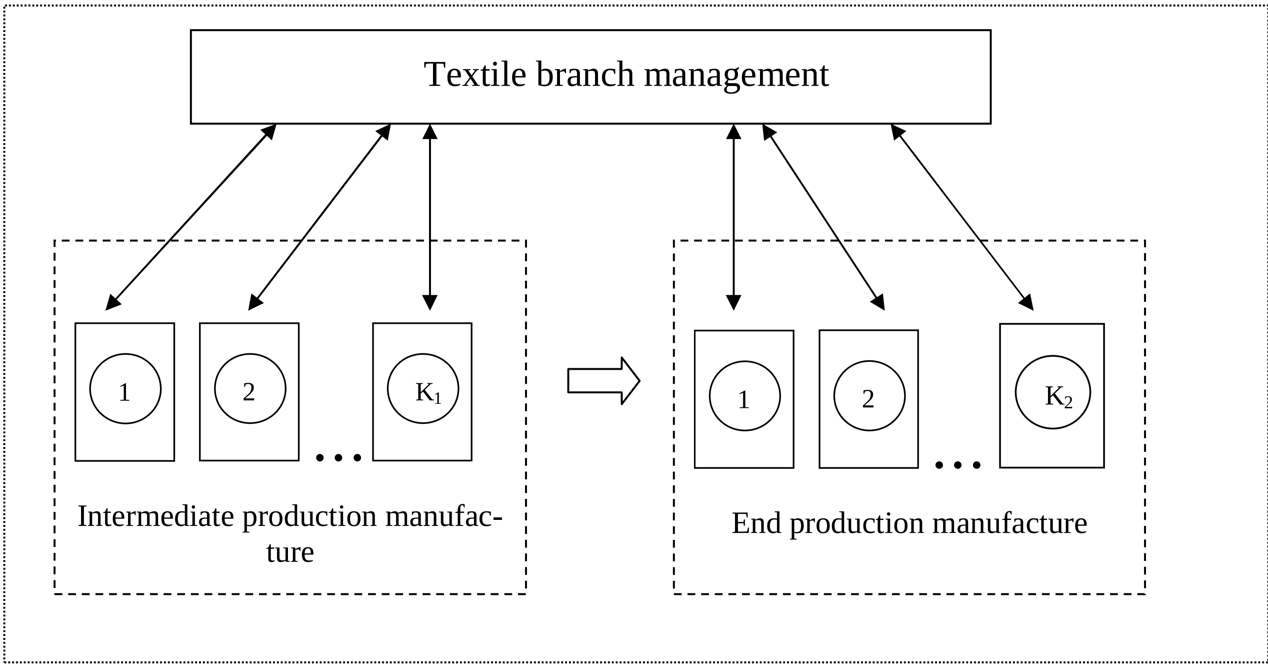
Thus, as a result of listed algorithm application it is possible to automate decomposition of "big" LP problem of block structure on computer. Even in the presence of initial economic information objective defects it is possible to receive automatically the optimal administrative decision for the real object “big” model (or near optimal – “quasi-optimal” with the set accuracy). It is necessary for it to develop “decomposition” realization computer programs and unite with “simplex-method”. High speed of computer functioning will help to overcome “dimension damnation” problem.

Further I’ll tell for what real economic-mathematical model it was executed.

Section 5. Optimal production plans coordination model for bimodal management system with horizontal connections

Textile branch management two-level system is considered. At the scheme number 3 lower level the industrial enterprises making end production (fabrics, jersey) and intermediate production (fibre, yarn) are presented.

At the scheme number 3 upper level all branch management as a whole is presented: that is interaction coordination between the enterprises, limited resource expenditure accounting (for example: gas, the electric power etc.), export delivery regulation.



Scheme 3. The two-level management system of textile branch

Actually branch management process (the process of working out of the project of branch development strategy on prospect) is a multistage iterative procedure. On each step calculation of the project of the production program "below" (each enterprise - is independent) is carried out, then the balance for system as a whole "above" is fulfiled, limited global resources redistribution for all branches united purpose achievement is carried out. Another example: under the same scheme administration of whole country educational institutions network is realized.

Substantially plan project coordination process in two-level branch management system reminds decomposition algorithm when LP problem of "big" dimension is being solved. I talked about it earlier. Let's make use of this similarity.

Textile branch management problem by scheme number 3 can be presented as LP problem of the big dimension with block type matrix. Here: $X^{k_1}, X_T^{k_2}$ - vectors of manufacture unknown volumes (yarn and fabrics accordingly).

$M^{k1}, M_T^{k2}, B^{k1}, B_T^{k2}$ are limits of domestic resources for yarn and fabric production accordingly and also technological coefficients for its use;

D, L^{k1} are limits of common resources and coefficients for its use for all spinning enterprise in the whole;

V, V_T, R^{k1}, R_T^{k2} are productive capacities of enterprises of intermediate and final output and coefficients for its use;

E^{k1}, L_T^{k2} are technological coefficients which bind together intermediate and final output production.

Graphically it corresponds with scheme 4.

(14) and (17) blocks are technological restrictions correspondingly during yarn and fabric production. (15), (16), (18) are restrictions in production (yarn and fabric). (19) block – global (connecting) resource restrictions for all branch.

$$\sum_{k_2 \in K_2} c^{k_2} X_T^{k_2} \to max,$$

$$B^{k_1} X^{k_1} \le M^{k_1}, k_1 \in K_1, \tag{14}$$

$$\sum_{k_1 \in K_1} L^{k_1} X^{k_1} \le D, \tag{15}$$

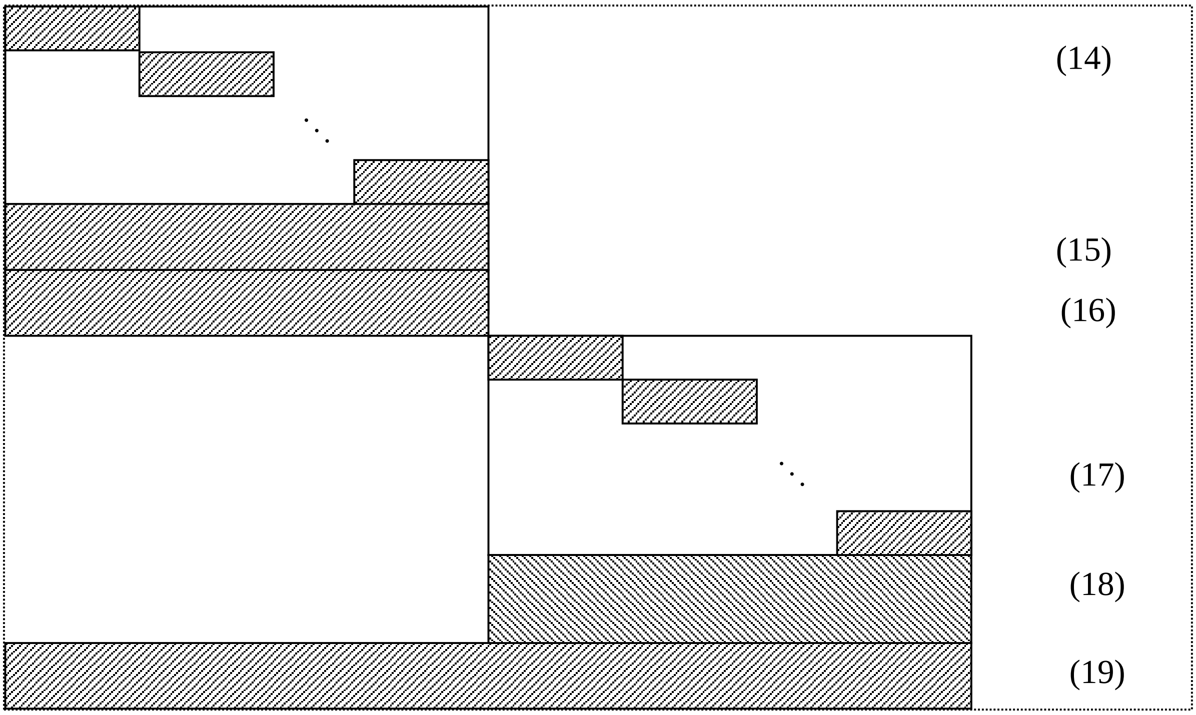
$$\sum_{k_1 \in K_1} R^{k_1} X^{k_1} \ge V, \tag{16}$$

$$B_T^{k_2} X_T^{k_2} \le M_T^{k_2}, k_2 \in K_2, \tag{17}$$

$$\sum_{k_2 \in K_2} R_T^{k_2} X_T^{k_2} \ge V_T, \tag{18}$$

$$\sum_{k_1 \in K_1} E^{k_1} X^{k_1} - \sum_{k_2 \in K_2} L_T^{k_2} X_T^{k_2} \ge 0. \tag{19}$$

Scheme number 4 visually shows block-diagonal structure of (15) – (19) problem restriction matrix. It can be pointed out here two block-diagonal structures united by common (19) block. Common problem dimension is big: (*m***n*) = (200*300) even if to take into account the integrated aggregated finished product assortment.



Scheme 4. (14) – (19) problem matrix structure

My research problem included the following sections:
- to develop detailed algorithm of (14) – (19) problem step-by-step decomposition;
- to prove mathematically its application validity (local problem intermediate solution range convergence to general problem optimum);
- to develop computer program complex for algorithm realization;
- to make modelling experiment (computer calculations) on real object with the use of my investigations.

Section 6. Management decisions accommodation model algorithmization for textile branch

Economic system concerned is characterized by two schemes of interaction between elements:
1. Subsystems of the lower level co-operate with the management central body (vertical interaction).
2. Subsystems of the lower level co-operate among themselves through intermediate production deliveries (horizontal interaction).

Therefore my algorithm is based on application two principles of (14) – (19) problem decomposition at once.

The algorithm has 3 steps:

1. At first the initial problem is divided into two also "big" problems: end production and intermediate production manufacture. Particular problems are written down in the following form:

$$\begin{aligned} & Z^2EX^1 - max \\ & B^1X^1 \le M^1 \\ & L^1X^1 \le D^1 \\ & R^1X^1 \ge V^1 \\ & X^1 \ge 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} & C^2X^2 - max \\ & B^2X^2 \le M^2 \\ & R^2X^2 \ge V^2 \\ & L^2X^2 \le Y^2 \\ & X^2 \ge 0; \mathrm{Y}^2 = \mathrm{EX}^1 \end{aligned} \qquad (21)$$

Here: E – yarn manufacture technological matrix; Z^2 - prices; $Z_{i+1}^2 = Z_i^2 + \lambda_i^2$ (λ_i^2-dual variables of the third restriction group in (21) on the previous calculation iteration).

2. For each of (20), (21) problem solution decomposition on resources is applied: the (15) problem is divided into local problem K_1, the (20) problem – into local problem K_2 of the type:

$$\begin{aligned} & C^kX^k - max, \\ & B^kX^k \le M^k, \\ & L^kX^k \le D^k, \\ & R^kX^k \ge V^k, \\ & X^k \ge 0; k = k_1, k_2; k_1 \in K_1, k_2 \in K_2. \end{aligned} \qquad (22)$$

Here: D^K, V^K - the fixed parameters (raw materials and production output). They are corrected on each iteration depending on dual variables obtained on previous iteration.

The second step repeats many times ($K_1 + K_2$ of small problems are solved simultaneously), while "global" restriction dual variables ($\ldots D^k, \ldots V^k$) will be drawn together with ε given.

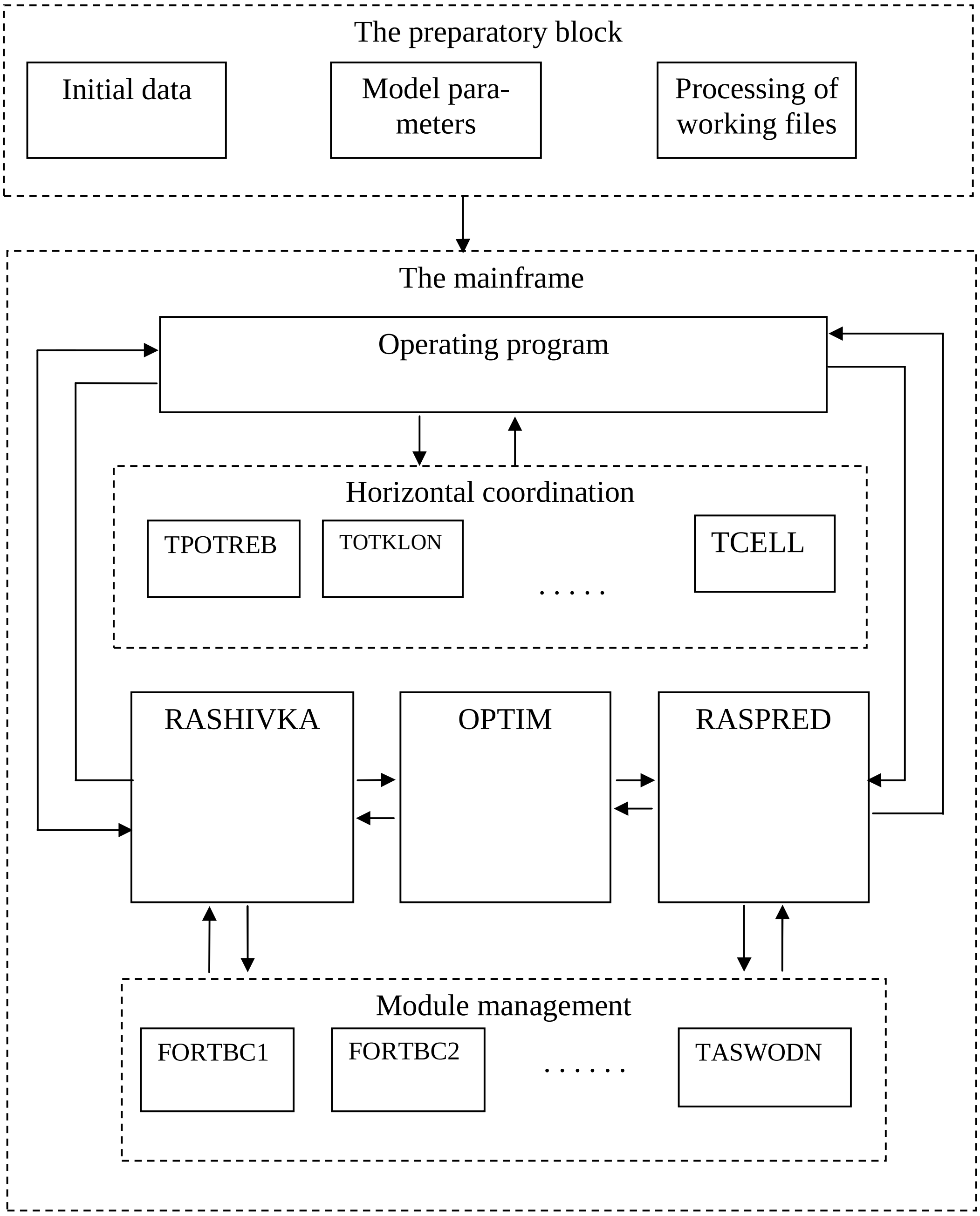
Then indicators united are transferred to the first step and all repeats. At the step one intermediate and end production manufacture volume balance and also convergence of range of local optimal solutions to global optimum are checked.

The third step is auxiliary. In order that 1 and 2 steps work, it is necessary that each local problem has the admissible solution. To provide this condition, «bottleneck elimination» algorithm is offered. All (22) local problem restrictions are divided conditionally into 3 groups (internal and external resources, manufacture volume). Three auxiliary LP problems are constructed and solved gradually (limit vector change minimum). They always have admissible solution and give values for M^k, D^k, V^k correction in order that the (22) problem should be solved and had mathematical admissible solution.

Thus, the algorithm developed theoretically allows completely automating of big dimension management problem solution. In so doing all necessary corrections for initial data (for manager informing) will be calculated. As modern computers work very quickly so all optimal solution calculation (the coordinated plan variant) will pass in normal terms for the manager. Big amount of informational conflicts (model parameter coordination) computer will solve in itself, automatically. Described three-stage algorithm of (14) – (19) problem dual decomposition reduces big dimension initial problem solution to a certain consistency of small dimension (22) local problem solutions. The procedure of step-by-step coordination of local problem solutions allows interpreting it as management decision coordination process imitation.

Section 7. Experimental computer modelling

Optimal plan coordination algorithm offered by me for a two-level control system with horizontal communications was realized in computer programs. The general scheme of calculation technology according to algorithm is presented on the scheme number 5.



Scheme 5. Program complex structure for management decision coordination model realization

After calculation completion manager receives plan for branch in whole approximate to optimal and also for each enterprise. Balanced plan allows to reveal enterprise reserves: on inner resources, on mutual production deliveries.

We shall not stop at concrete details of professional computer programming because linguistic basis changes at every turn and progresses. It is necessary to point out: it is enough of basic university preparation in programming on high level (universal) languages. At first it was FORTRAN-4 informationally compatible with MS Excel.

The program complex on scheme 5 works on “black box” principle. Manager sees only results: output data (solution) which was formed by service programs. On scheme 5 it is not shown. User’s interface programs are also not shown (in outlet of scheme 5 program complex). Service and interface programs must be adopted to operating informational system of manager specialist.

Computer experiments show that theoretical algorithm is convenient for practical use. It is enough of 3 -4 steps (iteration) for local optimal solution combination to approach to global optimum with exactness of 4 – 5 %. It is enough for economic analysis and management decision acceptance.

All complex of programs is organized so that it should be used together with any operating information system (where the primary statistical information is processed). On the scheme one can see: only block OPT1M is the standard "simplex-method" which gives direct and dual LP problem solution. All the rest are the programs of my algorithm written by me personally. Here 25 programs, they do not include primary information processing and output document issuance. In full (together with service) the complex includes about 60 programs (the group of 5 authors worked).

Coordination model practical application is fulfilled to order the USSR Ministry of Textile industry for branch perspective development calculation project for five-year period.

Later the same model was applied for RF Ivanovo region agricultural industry perspective development calculation project for the five-year period. After that the program complex was patented in USSR (the copyright certificate of 1991).

Section 8. Accommodation model extension for regional agricultural sector strategic management optimization. Responsiveness to uncertainty of weather conditions on crop capacity

Management decision coordination model or (14) – (19) problem decomposition admits restriction system widening for modeling object concrete peculiarity accounting. If in addition initial problem matrix structure remains so dual decomposition realization algorithm also remains. It means that this algorithm can be used for different double-level economic object planning process modeling.

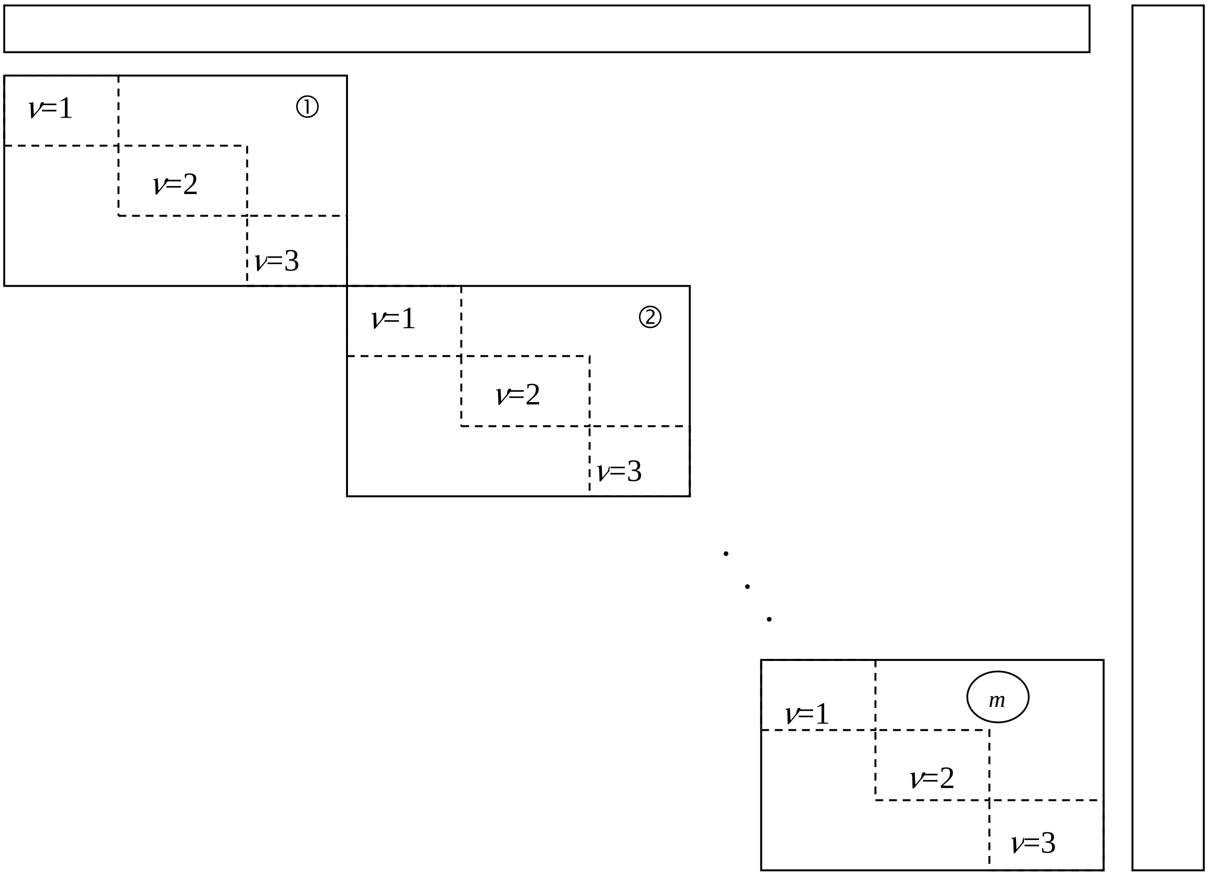
For an agricultural industry (crop production + livestock farming) it was required to complicate the basic model in order to take into account various weather conditions for 5 years forward. The model became liable (stochastic), but it was proved by us, that it can be transformed to the block-diagonal determined model. W. Kardash's approach is used for determination of full collection of N possible variant of weather conditions on future years with probability of its coming: $q^{\nu}, \nu = 1,2,..., N$. On preliminary step it is necessary to fulfil statistic processing of dynamic ranges of main agricultural cultivation productivity levels for the period of 20 – 30 years. It is enough for macroeconomics to assess probability of coming of each of three variants: high-yielding year, low-yield, middle.

For two-level agricultural complex management system (region + agricultural district) the optimal criterion is: maximum of profit in any weather condition and in production condition fulfillment. Matrix structure of such hypothetic optimal planning model is presented on scheme number 6.

Here each of *m* blocks (districts) reflects productional model of development (crop production + livestock sector) on each of tree variants of weather conditions $(\nu = 1,2,3)$. Common block (upper) is regional state regulation of production and purchase including reduced tariffs on common productional resources and purchase prices on production for state reserves (depend on weather conditions).

As the result is the optimal plan for each district (*m* = 22) and for all variant of weather conditions in order to make sure maximum of profit for region in whole (mathematical expectation).

Region and enterprise interest coordination model takes into consideration adventitious weather factor influence on production level and measures on damage prevention. Special (state) production purchase price application in low-yield years is provided.



Scheme 6. Matrix structure of optimization stochastic model

Let’s leave out full mathematical description but point out the main sense: it is clear from scheme 6 that we receive LP problem of block structure and big dimension. It can be applied for its solution the resource decomposition method and algorithm for this method realization (see section 5). The merit of decomposition algorithm is: it gives manager the possibility to work in conditions of incomplete and instable information. To receive enough suitable solution for economic analysis it will be needed only 3 – 4 “big iterations” or less then 1 hour of computer work. Common model dimension can exceed 800×1000. Manager can experiment with model within real time, receive new economic situation growth prediction variants depending on demand and supply changes.

Experimental approbation of model (1992) was fulfilled at the same time with project working out of 5 year strategy of Ivanovo region agricultural complex development (“manually”, on operating methods).

General summary: computer project has the best scientific ground, manager can work easy and quickly and more effectively.