560

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания

Иваново

2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания

Составители: С.В. Кузнецова
О.Л. Ксенофонтова

Иваново 2014

Составители: С.В. Кузнецова, О.Л. Ксенофонтова

УДК 330.4 (075.8)

Математическое обеспечение управленческих финансовых решений: метод. указания / сост.: С.В. Кузнецова, О.Л. Ксенофонтова; Иван.гос.хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2014. – 52 с.

В методических указаниях рассматриваются теоретические основы динамического программирования: задача об оптимальном распределении инвестиций, задача выбора оптимальной стратегии обновления оборудования; теории игр и принятия решений в условиях неопределенности; многомерных статистических методов – кластерный и дискриминантный анализ. Приведены примеры решения задач и практические задания, предназначенные для самостоятельной работы студентов.

Предназначены для студентов, обучающихся по магистерской программе направления «Экономика».

Рецензент
доктор экономических наук М.Б. Ермолаев (Ивановский государственный химико-технологический университет)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение и построение математических моделей в теории управления банковской, финансовой и производственной сферой является очень актуальной проблемой и приобретает, в связи с этим, особую значимость. Освоение инструментария экономико-математического моделирования и исследования операций позволяет повысить эффективность управления организацией.

Ознакомление магистрантов с основными аспектами математического обеспечения управленческих финансовых решений позволит им:

- получить и углубить знания в области математических инструментов управления;
- изучить особенности, возможности и сферы применимости экономико-математических методов и моделей для анализа финансовых проблем и разработки управленческих финансовых решений;
- овладеть навыками применения модельного подхода к обоснованию и количественному анализу управленческих финансовых решений.

1. Динамическое программирование. Постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический аппарат, позволяющий быстро находить оптимальное решение в случае, когда экономическая система не содержит факторов неопределенности, но имеется большое количество вариантов управления, приводящих к различным результатам, среди которых необходимо выбрать наилучший.

Методы динамического программирования основаны на возможности представления процесса принятия управляющих решений в виде цепочки последовательных действий или шагов, что позволяет находить оптимальное решение путем разложения исходной задачи на несколько небольших и менее сложных задач. Алгоритм пошаговой оптимизации опирается на сформулированный Р. Беллманом принцип оптимальности: не важно, какое было первоначальное состояние системы и какие ранее применялись управления, но на текущем шаге нужно выбрать такое управление, чтобы оно в совокупности с оптимальными управлениями на последующих шагах приводило к наилучшему результату.

Приведем общую постановку задачи динамического программирования. Рассматривается некая система S, которая под воздействием управления переводится из состояния S_0 в состояние $\hat{S}$. Предполагается, что управление можно разбить на n шагов, тогда переход из состояния S_0 в состояние $\hat{S}$ можно представить в виде графа (рис. 1), где X_k - управление на k – м шаге (k=1, 2,…, n), S_k – состояние системы после k-го шага управления, причем $S_n = \hat{S}$.

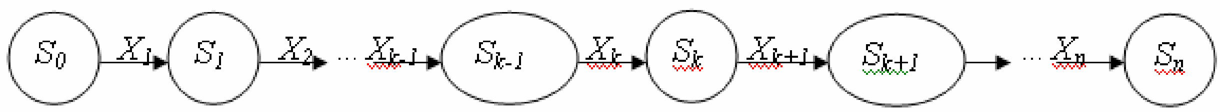


Рис. 1. Граф состояний системы при поэтапном управлении

В общем виде задачу динамического программирования можно сформулировать следующим образом: необходимо определить такое управление $X^* = (X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_n)$, переводящее систему из состояния S_0 в состояние $\hat{S}$, при котором целевая функция $Z=F(S_0,X^*)$ принимает максимальное (минимальное) значение.

Особенности модели задачи динамического программирования:

1) задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления;

2) выбор управления X_k на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу S_{k-1};

3) состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и управляющего воздействия на k-м шаге X_k и может быть записано в виде уравнения состояния системы:

$$S_k = \psi_k (S_{k-1}, X_k),\ k = \overline{1,n};$$

4) целевая функция является аддитивной от показателей эффективности каждого шага. Обозначим показатель эффективности k-го шага через $Z_k = \varphi_k (S_{k-1}, X_k)$, тогда

$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \left(S_{k-1},\ X_k\right).$$

В основе метода ДП лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р.Э. Беллманом: *каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге.*

При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое приводит к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш на каждом шаге. Однако, например, при покупке новой техники взамен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства, поэтому доход от ее эксплуатации вначале может быть небольшой, а в следующие годы новая техника будет приносить больший доход. И наоборот, если принято решение оставить старую технику для получения дохода в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам. Этот пример демонстрирует следующий факт: в многошаговых процессах управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс.

Алгоритм решения задач динамического программирования

1. Выбираем способ деления процесса управления на шаги.
2. Выбираем параметры, характеризующие состояние системы S_k, и переменные управления X_k на каждом шаге.
3. Составляем уравнения состояний.
4. Вводим целевые функции для каждого шага Z_k и суммарную целевую функцию Z.
5. Записываем уравнение Беллмана для Z_n и Z_k , $k = n-1, n-2,\dots,2,1$

$$Z_n (S_n) = \max_{X_k} \varphi_n (S_{n-1}, X_n);$$

$$Z_k (S_k) = \max_{X_k} (\varphi_k (S_{k-1}, X_k) + Z_{k+1} (\psi_k (S_{k-1}, X_k)),\ k = n-1, n-2,\dots,2,1.$$

6. При движении от n-го шага к первому (условная оптимизация), делая предположения о возможных вариантах значений переменных, характеризующих состояние системы, и возможных вариантах управления, решаем предварительно уравнения Беллмана и получаем две последовательности функций $\{Z_k^*\}$ и $\{X_k^*\}$.

7. При движении от 1-го шага к n-му (безусловная оптимизация), используя результаты условной оптимизации, получаем оптимальное решение для конкретного начального состояния S_0:

$$Z_{max} = Z_1^*,\ S_0 \Rightarrow X_1^* \rightarrow S_1 \Rightarrow X_2^* \rightarrow S_2 \Rightarrow_{\dots} X_{n-1}^* \rightarrow S_{n-1} \Rightarrow X_n^* \rightarrow S_n.$$

Рассмотрим примеры решения различных по своей природе задач с использованием динамического программирования, содержание которых требует выбора параметров состояния системы и переменных управления.

Задача об оптимальном распределении инвестиций

Требуется распределить имеющиеся C единиц денежных средств среди n предприятий таким образом, чтобы после освоения инвестиций суммарная прибыль всех предприятий была максимальной. Прибыль предприятий в зависимости от количества вложенных в них средств x_i определяется функциями

$\varphi_k,\ k = \overline{1,n}$, представленными в табл. 1.

Таблица 1

Объем инвестиций	Прибыль предприятий, ден. ед.			
$x_i,\ i = \overline{1,m}$	$\varphi_1(x_i)$	$\varphi_2(x_i)$	...	$\varphi_n(x_i)$
x_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	...	$\varphi_n(x_1)$
x_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	...	$\varphi_n(x_2)$
...	...	...	...	...
x_m	$\varphi_1(x_m)$	$\varphi_2(x_m)$	...	$\varphi_n(x_m)$

Математическая модель задачи запишется следующим образом:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\left(X_k^*\right) \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k^* = C; \\ X_k^* \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\},\ k = \overline{1,n}; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Представим эту задачу как задачу динамического программирования. В качестве системы S здесь выступает n предприятий. Состояние системы определяется количеством денежных средств, выделенных каждому предприятию – X^*_k. Управление системой заключается в распределении инвестиций в объеме C единиц среди n предприятий.

Разобьем процесс распределения инвестиций на несколько шагов:

- на первом шаге выделяем инвестиции только одному предприятию (например, последнему или первому – последовательность не имеет значения);
- на втором шаге выделяем инвестиции двум предприятиям (например, последнему и предпоследнему, первому и второму);
- и т.д.;

- на последнем шаге выделяем инвестиции всем n предприятиям.

Составим уравнение Беллмана для вычисления суммарной прибыли на каждом шаге:

$$Z_n = \varphi_n\,(C_n)\,,$$

где C_n - возможный объем инвестиций, который может быть выделен на n-м шаге (то есть n предприятиям);

$$Z_k = \max_{0 \le x_k \le C_k}\left(\varphi(x_k) + Z_{k+1}(C_k - x_k)\right), \quad k = n-1, n-2, ..., 2, 1\,;$$

C_k – возможный объем инвестиций, который может быть выделен на k – м шаге (т.е. n-му, $(n-1)$-му,…, $(n-k+1)$-му предприятям);

x_k – возможный объем инвестиций, который может быть выделен на k – м шаге k – му предприятию из суммы C_k, тогда для распределения на $(k+1)$-м шаге останется $(C_k - x_k)$ денежных средств.

Оптимальное управление на k – м шаге x_k^* определяется из соотношения:

$$x_k^* = \arg\max_{0 \le x_k \le C_k}\left(\varphi_k(C_k) + Z_{k+1}(C_k - x_k)\right), \quad k = 1, 2, ...n\,.$$

Пример 1.

Необходимо распределить 500 ден. единиц между тремя предприятиями с целью получения максимальной суммарной прибыли. Зависимость прибыли предприятий от объема вложенных средств приведена в табл. 2.

Решение.

1этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. $k = 3$. Предполагается, что все средства направляются на инвестирование 3-го предприятия. Объем инвестиций для третьего предприятия $C_3 \in \{0,100,200,300,400,500\}$. Запишем уравнение Беллмана для этого шага:

$$Z_3 = \varphi_3\,(C_3), \quad x_3^* = C_3.$$

Таблица 2

$x_i,\ (i = \overline{1,6})$	$\varphi_1(x_i)$	$\varphi_2(x_i)$	$\varphi_3(x_i)$
0	0	0	0
100	40	80	50
200	90	110	80
300	160	180	140
400	190	210	180
500	220	240	240

Результаты расчетов на данном шаге представлены в табл. 3.

Таблица 3

C_3	x_3						Z_3	x_3^*
	0	100	200	300	400	500		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
100	-	50	-	-	-	-	50	100
200	-	-	80	-	-	-	80	200
300	-	-	-	140	-	-	140	300
400	-	-	-	-	180	-	180	400
500	-	-	-	-	-	240	240	500

2-й шаг. k = 2. Предполагается, что все средства направляются на инвестирование второго и третьего предприятий. Объем инвестиций для двух предприятий может составить $C_2 \in \{0,100,200,300,400,500\}$, при этом второму предприятию из этой суммы можно выделить любое количество $x_2 \le C_2$.

Запишем уравнение Беллмана для второго шага:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le C_2} \left(\varphi_2(x_2) + Z_3(C_2 - x_2) \right);$$

$$x_2^* = \arg \max_{0 \le x_2 \le C_2} \left(\varphi(x_2) + Z_3(C_2 - x_2) \right).$$

Результаты расчетов на 2-м шаге представлены в табл. 4.

3-й шаг. k = 1. Инвестиции распределяем между первым и двумя другими предприятиями. Между ними нужно распределить все имеющиеся денежные средства, поэтому C_1 = 500, при этом первому предприятию из этой суммы можно выделить любое количество: $x_1 \le C_1$.

Таблица 4

C_2	x_2						Z_2	x_2^*
	0	100	200	300	400	500		
0	**0+0**						0	0
100	0+50	**80+0**					80	100
200	0+80	**80+50**	110+0				130	100
300	0+140	80+80	110+50	**180+0**			180	300
400	0+180	80+140	110+80	**180+50**	210+0		230	300
500	0+240	**80+180**	110+140	**180+80**	**210+50**	240+0	260	100/300/400

Уравнение Беллмана для третьего шага запишется следующим образом:

$$Z_1 = \max_{0 \le x_1 \le C_1} \left(\varphi_1(x_1) + Z_2(C_1 - x_1) \right);$$

$$x_1^* = \arg \max_{0 \le x_1 \le C_1} \left(\varphi_1(x_1) + Z_2(C_1 - x_1) \right).$$

Результаты расчетов на 3-м шаге представлены в табл. 5.

Таблица 5

C_1	x_1						Z_1	x_1^*
	0	100	200	300	400	500		
500	0+260	40+230	90+180	**160+130**	190+80	220+0	290	300

2 этап. Безусловная оптимизация.

1-й шаг. По данным табл. 5 максимальная прибыль при распределении 500 ден. ед. между тремя предприятиями составит Z_1=290 ден. ед., при этом первому предприятию нужно выделить x_1^*= 300 ден. ед.

2-й шаг. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящихся на долю второго и третьего предприятия:

$$C_2 = C_1 - x_1^* = 500 - 300 = 200 \text{ ден. ед.}$$

По данным табл. 4 находим, что при C_2 = 200 Z_2 = 130, x_2^* = 100. Это означает, что второму предприятию следует выделить 100 ден. ед., максимальная прибыль первого предприятия составит:

$$Z_1 - Z_2 = 290 - 130 = 160 = \varphi_1(300).$$

3-й шаг. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящихся на долю третьего предприятия:

$$C_3 = C_2 - x_2^* = 200\text{-}100 = 100 \text{ ден. ед.}$$

При этом максимальная прибыль второго предприятия составит:

$$Z_2 - Z_3 = 130\text{-}50 = 80 = \varphi_2(100) \text{ ден. ед.},$$

а третьего предприятия соответственно:

$$Z_3 = 50 = \varphi_3(100) \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, оптимальная стратегия распределения инвестиций $x^* = (300,100,100)$ дает возможность получить максимальную суммарную прибыль:

$$Z^* = \varphi_1\,(300) + \varphi_2\,(100) + \varphi_3\,(100) = 160 + 80 + 50 = 290 \text{ ден. ед.}$$

Задача выбора оптимальной стратегии обновления оборудования

К началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет некоторое количество лет. С течением времени из-за физического и морального износа оборудования растут затраты на его обслуживание и ремонт, при этом снижается производительность и ликвидационная стоимость оборудования. Задача заключается в определении оптимальных сроков замены оборудования в течение некоторого периода времени. Критерием оптимальности может быть либо максимум дохода от эксплуатации оборудования, либо минимум затрат на эксплуатацию оборудования в течение рассматриваемого периода.

Введем следующие обозначения:

n – продолжительность периода, для которого определяется стратегия обновления оборудования ($k = \overline{1,n}$);

t_k - возраст оборудования к началу k –го года;

t_0 - возраст оборудования к началу рассматриваемого периода ($t_0=t_1$);

$R(t_k)$ – доход, получаемый от эксплуатации оборудования через t_k лет;

$S(t_k)$ – остаточная стоимость оборудования через t_k лет;

$P\,(k)$ - стоимость нового оборудования в k – м году.

Представим задачу об определении оптимальной стратегии обновления оборудования как задачу динамического программирования. В качестве системы здесь выступает оборудование. Состояние системы определяется возрастом оборудования в году k - t_k. Управление заключается в принятии решения либо о сохранении, либо о замене оборудования, принимаемые в начале каждого года.

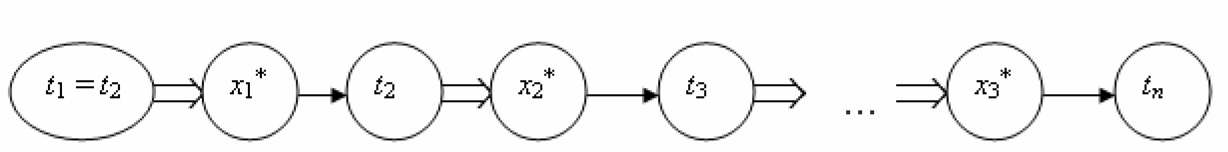
Пусть x_1 – решение о сохранении оборудования, x_2 – решение о замене оборудования.

На первом этапе решения задачи при движении от n - го года к 1 – му году для каждого допустимого состояния оборудования $t_k \in \{1, 2, ..., t_0 + k - 1\}$ находим условно-оптимальное управление x_k^*, для определения которого используем уравнение Беллмана:

$$Z_n\,(t_n) = \max \begin{cases} R(t_n), & \text{при } x_1 \\ S(t_n) - P(n) + R(0), & \text{при } x_2 \end{cases}$$

$$Z_k\ (t_k) = \max \begin{cases} R(t_k) + Z_{k+1}(t_k+1), & \text{при } x_1 \\ S(t_k) - P(k) + R(0) + Z_{k+1}(1), & \text{при } x_2 \end{cases}, \quad k = n\text{-}1,\ n\text{-}2,\ \ldots,\ 2,\ 1.$$

На втором этапе при движении от 1-го года к n – му году, учитывая возраст оборудования к началу рассматриваемого периода t_0 , из условно-оптимальных управлений $\{x_k^*\}$ составляем оптимальную стратегию обновления оборудования:



Пример 2.

К началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование. Определить оптимальную стратегию обновления оборудования в течение 6 лет, используя начальные условия, представленные в табл. 6.

Таблица 6

t	0	1	2	3	4	5	6
$R(t)$	16	15	14	12	10	8	6
$S(t)$	19	1	14	10	7	4	2
$P(t)$	-	20	21	22	23	24	25

Решение.

1-й этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. $k = 6$. Для первого шага возможные состояния системы $t_6 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_6(t_6) = \max \begin{cases} R(t_6), \text{ при } x_1 \\ S\ (t_6) - P\ (6) + R\ (0), \text{ при } x_2. \end{cases}$$

$$t_6 = 1, \quad Z_6(1) = \max \begin{cases} R(1), \text{ при } x_1 \\ S(1) - P(6) + R(0), \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 15, \quad \text{при } x_1 \\ 1 - 25 + 16, \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 15 \\ -8 \end{cases} = 15,\ x_6^* = x_1.$$

$$t_6 = 2, \quad Z_6(2) = \max \begin{cases} R(2), \text{ при } x_1 \\ S(2) - P(6) + R(0), \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 14, \quad \text{при } x_1 \\ 14 - 25 + 16, \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 14 \\ 5 \end{cases} = 14,\ x_6^* = x_1.$$

$$t_6 = 3, \quad Z_6(3) = \max \begin{cases} R(3), \text{ при } x_1 \\ S(3) - P(6) + R(0), \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 12, \quad \text{при } x_1 \\ 10 - 25 + 16, \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 12 \\ 1 \end{cases} = 12, x_6^* = x_1.$$

$$t_6 = 4, \quad Z_6(4) = \max \begin{cases} R(4), \text{ при } x_1 \\ S(4) - P(6) + R(0), \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 10, \quad \text{при } x_1 \\ 7 - 25 + 16, \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 10 \\ -2 \end{cases} = 10,\ x_6^* = x_1.$$

$$t_6 = 5, \quad Z_6(5) = \max \begin{cases} R(5), \text{ при } x_1 \\ S(5) - P(6) + R(0), \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 8, \quad \text{при } x_1 \\ 4 - 25 + 16, \text{ при } x_2 \end{cases} = \max \begin{cases} 8 \\ -5 \end{cases} = 8,\ x_6^* = x_1.$$

2-й шаг. $k = 5$. Для второго шага возможные состояния системы $t_5 \in \{1, 2, 3, 4, \}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_5(t_5) = \max\begin{cases} R(t_5) + Z_6(t_5+1), \text{ при } x_1 \\ S(t_5) - P(5) + R(0) + Z_6(1), \text{ при } x_2. \end{cases}$$

$$t_5 = 1, \quad Z_5(1) = \max\begin{cases} R(1) + Z_6(2), \text{при } x_1 \\ S(1) - P(5) + R(0) + Z_6(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 15+14, \quad \text{при } x_1 \\ 1-24+16+15, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 29 \\ 6 \end{cases} = 29, x_5^* = x_1.$$

$$t_5 = 2, \quad Z_5(2) = \max\begin{cases} R(2) + Z_6(3), \text{при } x_1 \\ S(2) - P(5) + R(0) + Z_6(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 14+12, \quad \text{при } x_1 \\ 14-24+16+15, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 26 \\ 21 \end{cases} = 26, x_5^* = x_1.$$

$$t_5 = 3, \quad Z_5(3) = \max\begin{cases} R(3) + Z_6(4), \text{при } x_1 \\ S(3) - P(5) + R(0) + Z_6(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 12+10, \quad \text{при } x_1 \\ 10-24+16+15, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 22 \\ 17 \end{cases} = 22, x_5^* = x_1.$$

$$t_5 = 4, \quad Z_5(4) = \max\begin{cases} R(4) + Z_6(5), \text{при } x_1 \\ S(4) - P(5) + R(0) + Z_6(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 10+8, \quad \text{при } x_1 \\ 7-24+16+15, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 18 \\ 14 \end{cases} = 18, x_5^* = x_1.$$

3-й шаг. k = 4. Для третьего шага возможные состояния системы $t_4 \in \{1, 2, 3\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_4(t_4) = \max\begin{cases} R(t_4) + Z_5(t_4+1), \text{ при } x_1 \\ S(t_4) - P(4) + R(0) + Z_5(1), \text{при } x_2. \end{cases}$$

$$t_4 = 1, \quad Z_4(1) = \max\begin{cases} R(1) + Z_5(2), \quad \text{при } x_1 \\ S(1) - P(4) + R(0) + Z_5(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 15+26, \quad \text{при } x_1 \\ 1-23+16+29, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 41 \\ 23 \end{cases} = 41, x_4^* = x_1.$$

$$t_4 = 2, \quad Z_4(2) = \max\begin{cases} R(2) + Z_5(3), \text{ при } x_1 \\ S(2) - P(4) + R(0) + Z_5(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 14+22, \quad \text{при } x_1 \\ 14-23+16+29, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 36 \\ 36 \end{cases} = 36, x_4^* = x_1 / x_2$$

$$t_4 = 3, \quad Z_4(3) = \max\begin{cases} R(3) + Z_5(4), \quad \text{при } x_1 \\ S(3) - P(4) + R(0) + Z_5(1), \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 12+18, \quad \text{при } x_1 \\ 10-23+16+29, \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 30 \\ 32 \end{cases} = 32, x_4^* = x_2.$$

4-й шаг. k = 3. Для четвертого шага возможные состояния системы $t_3 \in \{1, 2\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_3(t_3) = \max\begin{cases} R(t_3) + Z_4(t_3+1), & \text{при } x_1 \\ S(t_3) - P(3) + R(0) + Z_4(1), & \text{при } x_2. \end{cases}$$

$$t_3 = 1, \quad Z_3(1) = \max\begin{cases} R(1) + Z_4(2), & \text{при } x_1 \\ S(1) - P(3) + R(0) + Z_4(1), & \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 15+36, & \text{при } x_1 \\ 1-22+16+41, & \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 51 \\ 36 \end{cases} = 51, x_3^* = x_1.$$

$$t_3 = 2, \quad Z_3(2) = \max\begin{cases} R(2) + Z_4(3), & \text{при } x_1 \\ S(2) - P(3) + R(0) + Z_4(1), & \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 14+32, & \text{при } x_1 \\ 14-22+16+41, & \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 46 \\ 49 \end{cases} = 49, x_3^* = x_2.$$

5-й шаг. k = 2. Для пятого шага возможные состояния системы $t_2 \in \{1\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_2(t_2) = \max\begin{cases} R(t_2) + Z_3(t_2+1), & \text{при } x_1 \\ S(t_2) - P(2) + R(0) + Z_3(1), & \text{при } x_2. \end{cases}$$

$$t_2 = 1, \quad Z_2(1) = \max\begin{cases} R(1) + Z_3(2), & \text{при } x_1 \\ S(1) - P(2) + R(0) + Z_3(1), & \text{при } x_2 \end{cases} = \max\begin{cases} 15+49, & \text{при } x_1 \\ 16-21+16+52, & \text{при } x_2 \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 64 \\ 63 \end{cases} = 64, x_2^* = x_1.$$

6-й шаг. k = 1. Для шестого шага возможные состояния системы $t_1 \in \{0\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_1(t_1) = \max\begin{cases} R(t_1) + Z_2(t_1+1), & \text{при } x_1 \\ S(t_1) - P(1) + R(0) + Z_2(1), & \text{при } x_2. \end{cases}$$

$$t_1 = 0; \; Z_1(0) = R(0) + Z_2(1) = 16 + 64 = 80, x_1^* = x_1$$

На этом шаге не рассматривается случай замены оборудования, т.к. установлено новое оборудование и его менять нецелесообразно.

Результаты условной оптимизации сведены вместе в табл. 7.

Таблица 7

t_6	Z_6	x_6^*	t_5	Z_5	x_5^*	t_4	Z_4	x_4^*	t_3	Z_3	x_3^*	t_2	Z_2	x_2^*
1	15	x_1	1	29	x_1	1	41	x_1	1	1	x_1	1	64	x_1
2	14	x_1	2	26	x_1	2	36	x_1/x_2	2	49	x_2	-	-	-
3	12	x_1	3	22	x_1	3	32	x_2	-	-	-	-	-	-
4	10	x_1	4	18	x_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	8	x_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

2-й этап. Безусловная оптимизация.

1-й шаг. $k = 1$. t_1=0. Максимальный доход от эксплуатации оборудования за 6 лет составит $Z_1(0) = R(0) + Z_2(1) = 16 + 64 = 80, x_1^* = x_1$.

К началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование t_1=0, его целесообразно сохранить, тогда к началу второго года возраст оборудования будет равен 1 году, то есть t_2=1.

2-й шаг. $k = 2$. t_2 =1. Из табл. 7 следует, что нужно сохранить оборудование, так как $x_2^* = x_1$, тогда к началу третьего года его возраст составит 2 года, то есть t_3=2.

3-й шаг. $k = 3$. t_3 =2. Из табл. 7 следует, что оборудование следует заменить, так как $x_3^* = x_2$. Тогда к началу четвертого года возраст оборудования составит 1 год, т.е. t_4 =1.

4-й шаг. $k = 4$. t_4 =1. $x_4^* = x_1$, оборудование сохраняем, t_5 =2.

5-й шаг. $k = 5$. t_5 =2. $x_5^* = x_1$, оборудование сохраняем, t_6 =3.

6-й шаг. $k = 6$. t_6 =3. $x_6^* = x_1$, оборудование сохраняем.

Задачи для самостоятельной работы

1. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство и остаточной стоимости оборудования приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
V(t) **-** годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, усл.ед.	25	24	24	23	23	23	22	21
Z(t) **-** ежегодные затраты на производство, усл.ед.	15	15	16	16	17	17	18	19
S(t) **-** остаточная стоимость оборудования, усл.ед.	-	4	3	2	1	1	1	1

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, стоимость которого равна 10 усл.ед.

2. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общая прибыль за данный период будет максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
R(t) – ежегодный доход от производства, усл.ед.	25	24	24	23	23	23	22	21
P(t) **-** стоимость нового оборудования, усл.ед.	15	15	16	16	17	17	18	19

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, а ликвидационная стоимость оборудования равна 3 усл.ед.

3. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 6 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на производство приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
***V(t)* -** годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, усл.ед.	55	50	45	40	35	30	25	22
***Z(t)* -** ежегодные затраты на производство, усл.ед.	5	5	10	10	15	15	20	20

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 2 года, стоимость нового оборудования - 30 усл.ед., ликвидационная стоимость оборудования – 2 усл.ед.

4. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общий доход предприятия за данный период был бы максимальным. Данные о доходе предприятия, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
R(t) – ежегодный доход от производства, усл.ед.	35	32	30	28	25	23	22	20
***S(t)* -** остаточная стоимость оборудования, усл.ед.	-	12	10	8	6	4	2	2
***P(t)* -** стоимость нового оборудования, усл.ед.	-	40	41	42	43	44	45	46

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование.

5. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
***V(t)* -** годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, усл.ед.	75	70	65	60	55	50	45	40
***Z(t)* -** ежегодные затраты на производство, усл.ед.	15	20	20	25	25	30	35	36
***S(t)* -** остаточная стоимость оборудования, усл.ед.	-	10	8	6	4	2	1	1
***P(t)* -** стоимость нового оборудования, усл.ед.	-	40	41	42	43	44	45	46

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 1 год.

6. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство и остаточной стоимости оборудования приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования *t*, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
V(t) **-** годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, усл.ед.	50	45	45	40	40	35	35	30
Z(t) **-** ежегодные затраты на производство, усл.ед.	10	10	15	15	20	20	20	25
S(t) **-** остаточная стоимость оборудования, усл.ед.	-	10	8	6	4	2	1	1

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 1 год, стоимость нового оборудования равна 30 усл.ед.

7. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общий доход предприятия за данный период был бы максимальным. Данные о доходе предприятия, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования *t*, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
R(t) – ежегодный доход от производства, усл.ед.	40	38	36	34	32	30	28	26
S(t) **-** остаточная стоимость оборудования, усл.ед.	-	10	8	6	4	2	1	1
P(t) **-** стоимость нового оборудования, усл.ед.	-	30	31	32	33	34	35	36

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 1 год.

8. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на производство приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования *t*, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
V(t) **-** годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, усл.ед.	65	60	60	55	55	50	45	40
Z(t) **-** ежегодные затраты на производство, усл.ед.	10	15	15	20	25	30	35	40

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, стоимость нового оборудования - 40 усл.ед., ликвидационная стоимость оборудования – 5 усл.ед.

9. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 6 лет, при котором общая прибыль за данный период была максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
R(t) – ежегодный доход от производства, усл.ед.	85	75	65	55	45	35	25	20
P(t) - стоимость нового оборудования, усл.ед.	60	62	64	66	68	70	72	74

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 2 года, а ликвидационная стоимость оборудования равна 5 усл.ед.

10. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 6 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в таблице.

Показатели	Возраст оборудования ***t***, лет							
	0	1	2	3	4	5	6	7
V(t) - годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, усл.ед.	25	24	24	23	23	23	22	21
Z(t) - ежегодные затраты на производство, усл.ед.	15	15	16	16	17	17	18	19
S(t) - остаточная стоимость оборудования, усл.ед.	-	10	8	6	4	2	1	1
P(t) - стоимость нового оборудования, усл.ед.	-	20	21	22	23	24	25	26

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 2 года.

11. Составить оптимальный план распределения инвестиций между тремя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ - прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
200	100	140	200
400	300	280	400
600	400	380	500
800	600	560	600

12. Составить оптимальный план распределения инвестиций между четырьмя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ - прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

13. Составить оптимальный план распределения инвестиций между четырьмя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ - прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
200	100	150	100	150
400	300	250	400	350
600	400	300	450	450
800	600	500	650	650
1000	700	800	750	850

14. Составить оптимальный план распределения инвестиций между тремя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ - прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
100	10	40	50
200	50	150	100
300	100	220	250
400	200	300	350
500	250	350	400
600	400	450	500

15. Составить оптимальный план распределения инвестиций между четырьмя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ **-** прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
200	100	150	100	150
400	300	350	400	250
600	400	450	600	550
800	600	500	750	850

16. Составить оптимальный план распределения инвестиций между тремя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ **-** прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
100	60	40	50
200	50	150	100
300	150	200	250
400	250	300	300
500	350	350	450
600	500	450	550

17. Составить оптимальный план распределения инвестиций между четырьмя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ **-** прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
200	120	150	100	50
400	200	250	300	350
600	450	350	450	450
800	600	700	650	750
1000	700	850	700	950

18. Составить оптимальный план распределения инвестиций между тремя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ **-** прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
200	10	40	50
400	150	250	100
600	300	300	450
800	600	500	650

19. Составить оптимальный план распределения инвестиций между четырьмя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ - прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
20	10	15	10	15
40	30	25	40	35
60	40	30	45	45
80	60	50	65	65
100	70	80	75	85

20. Составить оптимальный план распределения инвестиций между тремя предприятиями, обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в таблице.

X_i - объем инвестиций, усл.ед.	$\varphi_j(x_i)$ - прирост выпуска продукции в зависимости от объема инвестиций, усл.ед.		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
100	10	40	50
200	250	150	100
300	300	350	250
400	400	450	350
500	450	450	550
600	750	600	800

2. Теория игр и принятие решений в условиях неопределенности. Элементы теории игр в задачах моделирования экономических ситуаций

На практике часто появляется необходимость согласования действий фирм, объединений и других участников проектов в случаях, когда интересы не совпадают, то есть возникают ситуации, в которых две (или более) сторон преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации относятся к конфликтным: результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника, цель игры – выигрыш одного из партнеров (пример, в шашках, домино, шахматах). Принятие решений в конфликтной ситуации не могут точно предсказать взаимные действия. Несмотря на такую неопределенность, принимать решения приходится каждой стороне конфликта. Необходимость обоснования оптимальных (наилучших) решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр все шире проникает в практику экономических решений и исследований. Ее можно рассматривать как инструмент, помогающий повысить эффективность управленческих решений. Это большое значение имеет при решении управленческих задач в промышленности, сельском хозяйстве, на транспорте, в торговле.

Теория игр – это математическая дисциплина, исследующая конфликтные ситуации, в которых принятие решений зависит от действий всех участников.

Интересы участников могут быть:

- антагонистические (полностью противоположные);
- неантагонистические (где исследуется вопрос о наиболее эффективных совместных действиях – кооперативные игры).

Игра – это упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации, описывающей поведение (действия) двух или более участников.

Математическая формализация означает, что выработаны определенные **правила, действия сторон в процессе игры:**

1) варианты действия сторон;
2) исход игры при данном варианте действия;
3) информация каждой стороны о поведении всех других сторон;
4) порядок информированности каждого участника о поведении всех других участников.

Развитие игры происходит последовательно, по этапам, ходам.

Игрок – это одна из сторон в игровой ситуации.

Ход игры – выбор из предусмотренных правилами игры действия и его реализация.

Ходы бывают личные и случайные. **Личный ход** – сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. **Случайный ход** – выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросанием монеты, сдача карт и т.п.).

Стратегия игрока – это совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Выигрыш или проигрыш сторон оценивается численно, другие случаи в теории не рассматриваются.

Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре. Игра называется **игрой с нулевой суммой,** если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В противном случае она называется игрой с ненулевой суммой.

Всюду далее будем рассматривать только игры двух лиц. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий. Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, которая называется **платежная матрица** или матрица игры.

Формальное описание матричной антагонистической игры

1. В игре участвуют два игрока: A и B.

2. Каждый игрок в процессе игры выбирает одну из своих стратегий (действий): $A_1, \ldots, A_m$ – стратегии для игрока A; $B_1, \ldots, B_n$ – для игроков B; (A_i, B_j) – ситуация в игре $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

3. Будем считать, что ситуация может быть оценена количественно, то есть интерес каждого из игроков в той или иной ситуации выражается **функцией выигрыша** (платежа).

Обозначим $H_A\ (A_i,\ B_j)$ – функция выигрыша игрока A ($i=\overline{1,m}$); $H_B\ (A_i,\ B_j)$ – функция выигрыша игрока B ($j=\overline{1,n}$).

Так как рассматривается антагонистическая игра, то должно выполняться условие:

$$H_A\,(A_i;B_j)=-H_B\,(A_i;B_j)\,,$$

т.е. выигрыш игрока A равен проигрышу игрока B.

Данная игра может быть записана в виде так называемой матрицы выигрыша одного из игроков (например игрока A). Платежная матрица включает все значения выигрышей игрока A (или проигрышей игрока B).

Пусть игрок A имеет m стратегий A_i (это строки), игрок B – n стратегий B_j (это столбцы). Элементы $a_{ij} = H_A\ (A_i,\ B_j)$ – значения функции выигрыша игрока A в ситуации $(A_i,\ B_j)$. Для игрока B в этом случае: a_{ij} – проигрыш.

Игрок B / Игрок A	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Тогда платежная матрица для игрока A имеет вид: $H_A=\begin{pmatrix} a_{11}\ \dots\ a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ \dots\ a_{mn}\end{pmatrix}$;

для игрока B: $H_B=\begin{pmatrix} -a_{11}\ \dots -a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ -a_{m1}\ \dots -a_{mn}\end{pmatrix}$.

Всюду далее будем рассматривать платежную матрицу игры игрока A

$H=\begin{pmatrix} a_{11}\ \dots\ a_{1n} \\ \dots\dots\dots\ \dots \\ a_{m1}\ \dots\ a_{mn}\end{pmatrix}$ - платежная матрица игры.

Пример 3. Два игрока играют в следующую игру: они независимо друг от друга кладут на стол монету в 1 и 2 рубля. Если монеты одинакового достоинства, то выигрывает игрок A, если в разных достоинствах, то выигрывает игрок B. Сумма выигрыша в обоих случаях равна сумме достоинства монет. Построить платежную матрицу игры.

Решение

Стратегии игрока A: A_1 = положить 1 рубль; A_2 = положить 2 рубля.

Стратегии игрока B: B_1 = положить 1 рубль; B_2 = положить 2 рубля.

Платежная матрица игры представлена следующей таблицей:

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}=2	a_{12}= -3
A_2	a_{21}= -3	a_{22}=4

Элемент a_{11} – соответствует ситуации (A_1, B_1), т.е. игрок A кладет 1 рубль и игрок B кладет рубль, что означает монеты одинакового достоинства, тогда выигрывает игрок A и сумма выигрыша $a_{11} = 1 + 1 = 2$. Элемент $a_{12} = (A_1, B_2)$: A – 1 рубль, B – 2 рубля, следовательно, 2 и 1 – монеты разного достоинства, то есть выигрывает игрок B (A эту сумму проигрывает), отсюда следует, что $a_{12} =- (1 + 2) = -3$. Элемент $a_{21} = (A_2, B_1)$: А – 2 рубля, B – 1 рубль, следовательно, 2 и 1 – монеты разного достоинства, то есть выигрывает игрок B (A эту сумму проигрывает), отсюда следует, что $a_{21} =- (1 + 2) = -3$. Элемент $a_{22} = (A_2, B_2)$: A – 2 рубля, B – 2 рубля, следовательно, 2 и 2 монеты одинакового достоинства, то есть выигрывает игрок A (B эту сумму проигрывает), отсюда следует, что $a_{22} =2 +2 = 4$.

Так как в антагонистических играх интересы игроков противоположные, то игрок A (первый игрок) стремится максимизировать свой выигрыш, а игрок B – минимизировать свой проигрыш. Цель игры состоит в определении наилучшей стратегии для каждого из игроков. Одним из принципов, с помощью которого игроки могут выбирать свои стратегии, является **принцип минимакса-максимина.**

Если игрок A применяет стратегию A_i, то игрок B будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш игрока A к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Игрок А (при любых исходах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i стремится к максимуму:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$$

Величина α называется **нижней ценой игры.** Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой игрок A при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α, то есть α является гарантированным выигрышем игрока A при любых стратегиях игрока B.

Аналогично определим следующие величины

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Найдем минимальное значение β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n} .$$

Величина β называется **верхней ценой игры.** Ей соответствует минимаксная стратегия игрока B, придерживаясь которой он при любых стратегиях противника обеспечит себе проигрыш, не больший β, то есть это гарантированный проигрыш игрока A при любой стратегии игрока A.

Для любой матрицы $H = (a_{ij})$ выполняется неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta$,то есть верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет **седловую точку**. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии.

Величина $\gamma = \beta = \alpha$ называется **ценой игры**. Она определяет средний выигрыш игрока A и средний проигрыш игрока В при использовании ими оптимальных стратегий.

Пример 4. Дана платежная матрица игры. Найти нижнюю и верхнюю цены игры. Найти седловую точку, если она имеется.

$$H = \begin{pmatrix} 19 & -14 & -19 & -13 \\ -20 & -5 & -5 & -6 \\ -17 & -2 & 0 & -2 \\ 7 & 12 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Решение

Представим нашу игру в виде следующей таблицы (табл. 8.)

Если игрок A выбирает первую стратегию, он может получить выигрыш в размере 19, -14, -19 или -13 (т.е. проиграть 13) в зависимости от выбранной стратегии игроком B. При этом выигрыш игрока A будет не меньше α_1 = min {19; -14; -19; -13} = -19 независимо от поведения игрока B. Аналогично при выборе игроком A второй стратегии гарантированный выигрыш α_2 = min {-20; -5; -5; -6} = -20. При выборе игроком A третьей стратегии выигрыш α_3 = min {-17; -2; 0; -2} = -17, а при выборе игроком A четвертой стратегии гарантированный выигрыш α_4 = min {7; 12; 2; -10}= -10.

Таблица 8

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				Значение	α
	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i	
A_1	19	-14	-19	-13	-19	-
A_2	-20	-5	-5	-6	-20	
A_3	-17	-2	0	-2	-17	-
A_4	7	12	2	-10	-10	**-10-**
Значение β_j	19	12	2	-2		-
β	-	-	-	**-2**	-	-

Таким образом, минимальные значения α_i, $i = \overline{1,4}$ определяют минимально гарантированный выигрыш для игрока A, если он выбирает соответствующую стратегию i. Величина $\max\limits_i \alpha_i$ = max {-19;-20;- 17;-10} = -10 будет гарантированным выигрышем игрока A при любых стратегиях игрока B. Выбранная игроком A четвертая стратегия называется **максиминной стратегией**, а соответствующее ей значение выигрыша α_4 = -10 будет нижней ценой игры.

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию β_1, игрок B может проиграть не более чем $\beta_1 = \max\{19; -20; -17; 7\} = 19$ независимо от выбора стратегии игроком A. Аналогично рассуждая, получим следующие результаты:

$$\beta_2 = \max\{-14; -5; -2; 12\} = 12;$$
$$\beta_3 = \max\{-19; -5; 0; 2\} = 2;$$
$$\beta_4 = \max\{-13; -6; -2; -10 = -2.$$

Игрок B выбирает ту стратегию, которая минимизирует его максимальные проигрыши, то есть четвертую:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min\{19;12;2;-2\} = -2.$$

Величина $\beta = -2$ будет гарантированным проигрышем игрока B при любых стратегиях игрока A. Выбранная игроком B четвертая стратегия называется **минимаксной стратегией**, а соответствующее ее значение проигрыша $\beta_4 = -2$ будет верхней ценой игры.

Так, если $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки.

Если в платежной матрице H все элементы $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$, а по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется **доминирующей,** а строка A_k – доминируемой.

Аналогичны понятия «доминирующий столбец» и «доминируемая строка».

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки; второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответсвуют доминирующие столбцы. Поэтому при решении игры можно уменьшить размер платежной матрицы путем удаления из нее доминируемых строк.

Пример 5. Для игры с платежной матрицей A найти стратегии игроков и цену игры.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение

Элемент $a_{32} = -1$ является наименьшим в третьей строке и наибольшим во втором столбце, т.е. он является седловой точкой. Поэтому цена игры равна -1, а оптимальные стратегии игроков: первого - A_3, а второго – B_2.

Используя понятия доминируемых строк и доминирующих столбцов, можно решить задачу следующим образом.

В матрице A третья строка доминирует над второй, поэтому вторую можно удалить из платежной матрицы. В результате получится матрица A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1 первый и третий столбцы доминируют над вторым, следовательно, их можно удалить. В результате платежная матрица принимает вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_2 вторая строка доминирует над первой. После вычеркивания получится матрица A_3, состоящая из одного элемента: A_3= (-1).
Элемент матрицы A_3 и определяет решение нашей задачи.

Пример 6.
Используя понятие «доминирование стратегий», уменьшите размер следующей платежной матрицы

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Рассуждая с позиций игрока 2, можно обнаружить преимущество третьей стратегии перед второй, так как -1≤3, 0,5≤2. Вторая строка доминирует над третьей. Если игрок 2 стремится играть оптимально, то он никогда не будет использовать свою вторую стратегию, поэтому ее можно исключить из игры, т.е. в исходной матрице можно исключить (вычеркнуть) 2-й столбец. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & -1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

С позиции игрока 1 его первая стратегия оказывается хуже второй, т.к. по первой он проигрывает (-0,5≤0, -1≤0,5). Поэтому первую стратегию можно исключить, а матрица примет вид:

$$(0 \quad 0,5).$$

Учитывая интересы игрока 2, следует оставить только его первую стратегию, поскольку выбирая вторую стратегию, игрок 2 оказывается в проигрыше (0≤0,5), вторую стратегию можно исключить, и матрица игры принимает простейший вид:

$$(0),$$

т.е. имеется седловая точка.

Принятие решений в условиях неопределенности. Игры с природой

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется **статистической игрой** или **«игрой с природой»**. Под природой понимается вся совокупность внешних обстоятельств, в которых принимается решение первым игроком. Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решение (ЛПР). В общем виде платёжная матрица статистической игры выглядит следующим образом:

$P =$

	$П_1$	$П_2$	...	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

В данной игре $A_1, A_2, \ldots A_m$ - возможные чистые стратегии игрока; $П_1, П_2, \ldots П_n$ - возможные состояния природы (среды); a_{ij} - выигрыш (последствие) игрока при применении им своей i-й чистой стратегии и при j-м состоянии среды.

Доминирование стратегий в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока (ЛПР) - строки, то есть A_i. Стратегии природы B_j – столбцы вычеркивать из матрицы (исключать из рассмотрения) недопустимо, так как природа не стремится к выигрышу в игре с человеком, для нее нет целенаправленно выигрышных или проигрышных стратегий, она действует неосознанно.

Возможен и другой способ задания матрицы игры с природой: не в виде матрицы выигрышей игрока, а в виде так называемой **матрицы рисков *R*** или матрицы упущенных возможностей. Величина риска – это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. Матрица $R=\left(r_{ij}\right)\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ может быть построена непосредственно из условий задачи или на основе матрицы P.

Риском r_{ij} игрока А при использовании им стратегии A_i и при состоянии среды $П_j$ будем называть разность между выигрышем, который бы получил игрок, если бы знал, что состоянием среды будет $П_j$, и выигрышем, который игрок получит, не имея этой информации, то есть

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$ при заданном j (β_j - максимальный элемент в столбце).

Пример 7. Построить для данной матрицы игры с природой матрицу рисков.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Максимальные элементы в каждом столбце соответственно равны:

$$\beta_1 = 4,\ \beta_2 = 8,\ \beta_3 = 6,\ \beta_4 = 9.$$

Тогда матрица рисков выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 4-1 & 8-4 & 6-5 & 9-9 \\ 4-3 & 8-8 & 6-4 & 9-3 \\ 4-4 & 8-6 & 6-6 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состояний среды (природы), называют «безнадежной» или «дурной». В таких случаях для определения наилучших решений используются различные критерии:

- критерий гарантированного результата (максиминный критерий Вальда) – это пессимистический по своей сути критерий, потому что принимается во внимание только самый плохой из всех возможных результатов каждой альтернативы. Этот подход устанавливает гарантированный минимум, хотя фактический результат может и не быть настолько плохим;
- критерий оптимизма (критерий максимакса) соответствует оптимистической наступательной стратегии; здесь не принимается во внимание никакой возможный результат, кроме самого лучшего;
- критерий пессимизма характеризуется выбором худшей альтернативы с худшим из всех худших значений окупаемости;
- критерий минимаксного риска Сэвнджа можно рассматривать как критерий наименьшего вреда, который определяет худшие возможные последствия для каждой альтернативы и выбирает альтернативу с лучшим из плохих значений;
- критерий обобщенного максимина (пессимизма – оптимизма) Гурвица позволяет учитывать состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом.

В определенных обстоятельствах каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки, которые могут помочь в выработке решения.

При сравнительном анализе критериев эффективности нецелесообразно останавливаться на выборе единственного критерия, так как в ряде случаев это может привести к неоправданным решениям, ведущим к значительным потерям экономического, социального и иного содержания. Поэтому в указанных ситуациях имеется необходимость применения нескольких критериев в совокупности.

Применение различных критериев эффективности для различных задач выбора оптимальных решений в условиях неопределенности показывает, что подход, базирующийся на комплексном применении указанных критериев, может стать определяющим.

1. Критерий Вальда (максиминный критерий)**.**

Он основывается на принципе пессимизма (наибольшей осторожности). При выборе решения надо рассчитывать на самый худший вариант. Оптимальной в этом случае будет та стратегия игрока, для которой достигается значение W:

$$W = \max_i \min_j a_{ij},\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша или, что то же самое, минимизацию максимальных потерь, которые могут быть при реализации одной из стратегий. Критерий прост и четок, но ориентирует принимающего решение на слишком осторожную линию поведения. Это перестраховочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай. Такая стратегия приемлема, например, когда игрок не столь заинтересован в крупной удаче, но хочет себя застраховать от неожиданных проигрышей. Выбор такой стратегии определяется отношением игрока к риску.

2. Критерий оптимизма (критерий максимакса).

При использовании данного критерия ЛПР ориентируется на то, что условия функционирования анализируемых систем будут для него наиболее благоприятными. Вследствие этого оптимальным решением является стратегия, приводящая к получению наибольшего значения критерия оптимальности в платежной матрице. Этот критерий целесообразно применять в тех случаях, когда имеется принципиальная возможность повлиять на функции противоположной стороны.

Оптимальной в этом случае будет та стратегия игрока, для которой достигается значение *O*:

$$O = \max_i \max_j a_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Отметим, что ситуации, требующие применения критерия оптимизма, в экономике, в общем, нередки и пользуются им не только безоглядные оптимисты, но и игроки, поставленные в безвыходное положение, когда они вынуждены руководствоваться принципом «или пан, или пропал».

3. Критерий пессимизма.

В отличие от критерия оптимизма, когда ЛПР ориентируется на наиболее благоприятную внешнюю среду, которая является неконтролируемой, и на оптимальное использование управляемых факторов, при использовании принципа пессимизма предполагается, что управляемые факторы могут быть использованы неблагоприятным образом.

Оптимальной в этом случае будет та стратегия игрока, для которой достигается значение *P*:

$$P = \min_i \min_j a_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Применение этого принципа может вызывать некоторое сомнение, если учесть, что факторы являются контролируемыми и их следует использовать оптимальным в том или ином смысле образом. Однако в реальных ситуациях в ряде задач может оказаться невозможным контроль за неконтролируемыми факторами. Особенно это относится к задачам, связанным с необходимостью учета фактора времени.

К этим задачам можно отнести следующие: социально-экономическое прогнозирование; долгосрочное планирование; проектирование сложных объектов и др. Например, издержки производства являются контролируемыми факторами на коротких временных интервалах. Однако при анализе длительных процессов, которые составляют несколько лет, некоторые элементы указанных издержек становятся неконтролируемыми. К таким элементам можно отнести: стоимость электроэнергии, стоимость материалов и покупных изделий и т.п. Другим примером является определение объемов производства продукции предприятия. Данный показатель также можно считать управляемым фактором. Но он зависит от различных факторов, которые могут существенным образом применяться в процессе производства. При этом указанные факторы относятся к внутренней среде предприятия: уровень конструкторской и технологической подготовки производства, тип используемого оборудования, квалификация работающих и др.

4. Критерий Гурвица.

Критерий Гурвица позволяет учитывать комбинации наихудших состояний. Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. В соответствии с этим компромиссным критерием для каждого решения определяется линейная комбинация минимального и максимального выигрышей.

При любом выборе стратегии наихудший для лица, принимающего решения, вариант реализуется с вероятностью γ, а наилучший - с вероятностью $1-\gamma$, где γ - показатель пессимизма $(0 \le \gamma \le 1)$. Оптимальной в этом случае будет та стратегия, для которой достигается значение *G*:

$$G = \max_i \left(\gamma \cdot \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \cdot \max_j a_{ij} \right), i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n} \; .$$

5. Критерий Сэвиджа.

Этот критерий является критерием крайнего пессимизма.

При использовании вышеперечисленных критериев возможны ситуации, когда неконтролируемые факторы будут действовать более благоприятным образом по сравнению с наихудшим состоянием, на которое ориентировалось ЛПР. Например, погодные условия оказываются более благоприятными по сравнению с прогнозируемыми. Количество конкурентов на тех или иных рынках оказывается существенно меньше по сравнению с теми ожиданиями, на которые ориентировались производители. В подобных ситуациях полезный результат может значительно отличаться от того, который обеспечивается при реализации критерия гарантированного результата или критерия пессимизма. Поэтому возникает необходимость определения возможных отклонений полученных результатов от их оптимальных значений. Здесь находит применение критерий Сэвиджа.

Оптимальной считается та стратегия, для которой минимизируется максимальный риск, то есть достигается значение *S*:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n}.$$

Критерий Сэвиджа минимизирует возможные потери. Основным исходным допущением этого критерия является предположение о том, что на выбор вариантов обстановки оказывают влияние действия разумных противников (природы), интересы которых прямо противоположны интересам ЛПР. Поэтому, если у противников (конкурентов) имеется возможность извлечь какие-либо преимущества, то они это обязательно сделают. Это обстоятельство заставляет ЛПР обеспечить минимизацию потерь вследствие этих действий.

6. Критерий недостаточного основания Лапласа.

Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний природы. Все вероятности состояний природы $П_j\,(j=\overline{1,n})$ полагаются равными $q_j = \dfrac{1}{n}$.

Оптимальной по данному критерию является та стратегия A_i, для которой достигается значение L:

$$L = \max_i \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right), i = \overline{1,m}.$$

Если в исходной задаче матрица результатов представлена матрицей рисков $R = (r_{ij}) \quad i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, то критерий Лапласа примет следующий вид:

$$L = \max_i \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right), i = \overline{1,m}.$$

Пример 8. Сельскохозяйственное предприятие выращивает капусту. Оно имеет возможность хранить ее в течение всего сезона реализации – с осени до начала лета следующего года. Хозяйство может выбрать одну из трёх стратегических программ реализации капусты в течение сезона реализации:

A_1 - реализовать всю капусту осенью, непосредственно после уборки;

A_2 - заложить часть капусты на хранение и реализовать её в течение осенних и зимних месяцев;

A_3 – заложить всю капусту на хранение и реализовать её в весенние месяцы.

Сумма затрат на производство, хранение и реализацию капусты для хозяйства при выборе им каждой из стратегий составляет соответственно 20, 30 и 40 тыс. денежных единиц.

На региональном рынке капусты может сложиться одна из следующих трёх ситуаций:

$П_1$ - поступление капусты на рынок происходит равномерно в течение всего сезона реализации и рынок не испытывает сезонных колебаний цен реализации продукта;

$П_2$ - в осенние месяцы на рынок поступает капусты немного больше, чем зимой и весной. В связи с этим наблюдаются небольшие сезонные колебания цен – в начале зимы цены немного возрастают по сравнению с осенним уровнем и держатся стабильными в течение всех последующих месяцев сезона реализации;

$П_3$ - в осенние месяцы на рынок поступает капусты значительно больше, чем зимой и весной. Объёмы капусты, поступающей в течение сезона реализации, постоянно уменьшаются. Поэтому рынок испытывает значительные сезонные колебания цен.

Значения суммы выручки предприятия от реализации капусты при выборе каждой из стратегий реализации и формировании различных ситуаций на рынке представлены в таблице.

Стратегии хозяйства	Выручка от реализации капусты, тыс. д.е.		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	30	25	22
$А_2$	30	40	33
$А_3$	30	40	60

Необходимо определить:

1. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если информация о вероятностях состояний рынка капусты отсутствует и предприятию необходимо:

а) получить минимально гарантированный выигрыш;

б) учесть значения риска от принятия различных решений;

в) определить наиболее выгодную стратегию, если коэффициент пессимизма равен 0,3.

Решение

1. Составим платёжную матрицу данной игры. Её коэффициентами будут значения прибыли от производства капусты, получаемые как разница суммы выручки от реализации капусты и затрат на производство, хранение и реализацию.

Платёжная матрица задачи:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	10	5	2
$А_2$	0	10	3
$А_3$	-10	0	20

2. Определим наиболее выгодные стратегии сельскохозяйственного предприятия по различным критериям

а) Критерий *Вальда.*

Необходимые результаты вычисления сведем в следующую таблицу:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$min\ a_{ij}$	$V=max\ min\ a_{ij}$
$\mathbf{А_1}$	10	5	2	2	**2**
$А_2$	0	10	3	0	-
$А_3$	-10	0	20	-10	-

Таким образом, в соответствии с критериями Вальда оптимальной (наилучшей) стратегией является стратегия A_1 – реализовать всю капусту осенью, непосредственно после уборки.

б) Критерий *Гурвица* (коэффициент пессимизма $\gamma=0,3$). Результаты вычислений сведем в следующую таблицу:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	*min* a_{ij}	*max* a_{ij}	$G = 0{,}3 \cdot \min a_{ij} + 0{,}7 \cdot \max a_{ij}$	G=maxG$_i$
A_1	10	5	2	2	10	$G_1 = 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 10 = 7{,}6$	-
A_2	0	10	3	0	10	$G_2 = 0{,}3 \cdot 0 + 10 \cdot 0{,}7 = 7$	-
A_3	-10	0	20	-10	20	$G_3 = 0{,}3 \cdot (-10) + 0{,}7 \cdot 20 = 11$	**11**

Таким образом, в соответствии с данным критерием, оптимальной (наилучшей) стратегией является стратегия A_3 – заложить всю капусту на хранение и реализовать ее в весенние месяцы.

в) Критерий *Сэвиджа.*

Вычислим элементы матрицы рисков – r_{ij} и занесем их в следующую таблицу:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	*max* r_{ij}	*S=min max* r_{ij}
A_1	0	5	18	18	-
A_2	10	0	17	17	**17**
A_3	20	10	0	20	-

Полученные результаты вычислений с использованием критерия Севиджа привели к выбору стратегии A_2 – заложить часть капусты на хранение и реализовать ее в течение осенних и зимних месяцев.

г) Критерий Лапласа.

Этот критерий предполагает, что $П_1$, $П_2$ и $П_3$ равновероятны, то есть $q = \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

Тогда:

при $A_1: \frac{1}{3} \cdot (10 + 5 + 2) = \frac{17}{3} \approx 5{,}67$;

при $A_2: \frac{1}{3} \cdot (0 + 10 + 3) = \frac{13}{3} \approx 4{,}33$;

при $A_3: \frac{1}{3} \cdot (-10 + 0 + 20) = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$.

Следовательно, L=5,67, значит наилучшей стратегией по этому критерию является A_1 – реализовать всю капусту осенью, непосредственно после уборки урожая.

Таким образом, далее ЛПР в данном примере предстоит сделать выбор, какой из возможных стратегий отдать предпочтение:

по критерию Вальда – выбор стратегии A_1;

по критерию Гурвица – выбор стратегии A_3;

по критерию Сэвиджа – выбор стратегии A_2;

по критерию Лапласа – выбор стратегии A_1.

Методы принятия решений в условиях риска разрабатываются и обосновываются в рамках так называемой теории статистических решений. При этом, когда состояниям природы поставлены в соответствие вероятности, заданные экспертно либо вычисленные, решение обычно принимается на основе критерия максимизации среднеожидаемого.

1. Критерий максимизации среднеожидаемого выигрыша используется, если заданы вероятности наступления состояний природы: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда оптимальной будет та стратегия, для которой достигается значение

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}.$$

2. Критерий минимизации среднеожидаемого риска. Он также используется при заданных вероятностях наступления состояний среды. В этом случае оптимальной будет стратегия, для которой достигается значение

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot r_{ij}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Замечание. Оптимальные стратегии по критерию максимизации среднеожидаемого выигрыша и минимизации среднеожидаемого риска совпадают.

Пример 9. В предыдущем примере определить наилучшие стратегии поведения сельскохозяйственного предприятия по критерию максимизации среднеожидаемого выигрыша (минимизации среднеожидаемого риска), если известны вероятности состояний рынка капусты региона: 0,3; 0,6 и 0,1 соответственно.

Решение. По критерию максимизации среднеожидаемого выигрыша имеем:

при A_1: $0{,}3 \cdot 10 + 0{,}6 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 2 = 6{,}2$;

при A_2: $0{,}3 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 3 = 6{,}3$;

при A_3: $0{,}3 \cdot (-10) + 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 20 = -1$.

Наибольшее значение достигается при стратегии A_2, которая будет оптимальной.

Задачи для самостоятельной работы

1. Определить нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и оптимальные решения игры, если существует седловая точка:

1.1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

1.2. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 & 3 \\ 10 & 12 & 4 & 7 & 2 \\ 15 & 10 & 8 & 7 & 4 \\ 10 & 7 & 8 & 12 & 6 \\ 7 & 10 & 11 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{pmatrix} 10 & 9 & -13 & -15 \\ 16 & 11 & 3 & 14 \\ 7 & -9 & -17 & 5 \\ -9 & 15 & -14 & -10 \\ 1 & 18 & -14 & -14 \end{pmatrix}$

1.4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.5. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 7 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3{,}5 & 4 & 8 & 9 & 2{,}5 \\ 4{,}5 & 7 & 9 & 7 & 2{,}5 & 5{,}5 \end{pmatrix}$

1.6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1.7. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

2. Используя понятие «доминирование стратегий», уменьшите размер следующей платежной матрицы:

2.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 2.2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 2.3. $\begin{pmatrix} 14 & 25 & 18 & 19 & 23 \\ 2 & 17 & 16 & 21 & 2 \\ 29 & 3 & 7 & 15 & 22 \\ 5 & 20 & 17 & 23 & 10 \end{pmatrix}$

2.4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2.5 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2.6. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3. В игре с природой дана платежная матрица и вероятности наступления состояний природы ρ_1, ρ_2, ρ_3. Найти оптимальную стратегию первого игрока, используя критерии оптимальности Вальда, Гурвица (коэффициент пессимизма *γ=0,4*), Сэвиджа, Лапласа, максимизации среднеожидаемого выигрыша и минимизации среднеожидаемого риска:

3.1. $\rho_1 = 0{,}43, \rho_2 = 0{,}16, \rho_3 = 0{,}51$

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

3.2. $\rho_1 = 0{,}23, \rho_2 = 0{,}58, \rho_3 = 0{,}19$

$$\begin{pmatrix} 48 & 12 & 24 \\ 23 & 15 & 14 \\ 34 & 45 & 32 \end{pmatrix}$$

3.3. $\rho_1 = 0{,}17, \rho_2 = 0{,}68, \rho_3 = 0{,}15$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 2 & -17 & 20 \\ 11 & 18 & -10 \end{pmatrix}$$

3.4. $\rho_1 = 0{,}43, \rho_2 = 0{,}37, \rho_3 = 0{,}2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 16 & 10 \\ -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

3.5. $\rho_1 = 0{,}19, \rho_2 = 0{,}25, \rho_3 = 0{,}56$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 17 \\ -1 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

3.6. $\rho_1 = 0{,}34, \rho_2 = 0{,}19, \rho_3 = 0{,}47$

$$\begin{pmatrix} -10 & 8 & 11 \\ 13 & -4 & 17 \\ -5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Многомерные статистические методы. Кластерный анализ

Термин кластерный анализ (впервые ввел Tryon, 1939) в действительности включает в себя набор различных алгоритмов классификации. Фактически, кластерный анализ является не столько обычным статистическим методом, сколько "набором" различных алгоритмов "распределения объектов по кластерам".

Под кластером обычно понимают группу объектов, обладающую свойством плотности (плотность объекта внутри кластера выше, чем вне него), дисперсией, отделимостью от других кластеров, формой, размером.. Существует точка зрения, что в отличие от многих других статистических процедур, методы кластерного анализа используются в большинстве случаев тогда, когда вы не имеете каких-либо априорных гипотез относительно классов, но все еще находитесь в описательной стадии исследования. Следует понимать, что кластерный анализ определяет "наиболее возможно значимое решение", поэтому проверка статистической значимости в действительности здесь неприменима.

В целом методы кластерного анализа делятся на агломеративные (от слова агломерат – скопление) и интеративные (деление, разделение). В агломеративных, или объединительных методах происходит последовательное объединение наиболее близких объектов в один кластер.

Этапы кластеризации

1. Выбор метрики и метода стандартизации исходных данных.
2. Определение количества кластеров в зависимости от того, каким способом кластерного анализа было решено производить кластеризацию.
3. Определение метода кластеризации (правила объединения или связи).
4. Анализ результатов кластеризации. Этот этап подразумевает решение таких вопросов: не является ли полученное разбиение на кластеры случайным; является ли разбиение надежным; существует ли взаимосвязь между результатами кластеризации и переменными, которые не участвовали в процессе кластеризации; можно ли интерпретировать полученные результаты кластеризации.
5. Проверка результатов кластеризации. Результаты кластеризации должны быть проверены формальными и неформальными методами. Один из вариантов проверки качества кластеризации – использование нескольких методов и сравнение полученных результатов. Отсутствие подобия не будет означать некорректность результатов, но присутствие похожих групп считается признаком качественной кластеризации.

В ходе проведения кластеризации переход от объектов к расстояниям между объектами является очень важным моментом. Если расстояния не даны сразу, то агломеративные алгоритмы начинаются с вычисления расстояний между объектами. Расстояние между объектами – одна из мер сходства. Чем меньше расстояние между объектами, тем они более схожи. Существуют следующие меры расстояния.

Евклидово расстояние. Это наиболее общий тип расстояния. Оно попросту является геометрическим расстоянием в многомерном пространстве и вычисляется следующим образом:

$$\text{расстояние}(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}\ .$$

Заметим, что евклидово расстояние (и его квадрат) вычисляется по исходным, а не по стандартизованным данным. Это обычный способ его вычисления, который имеет определенные преимущества (например, расстояние между двумя объектами не изменяется при введении в анализ нового объекта, который может оказаться выбросом). Тем не менее, на расстояния могут сильно влиять различия между осями, по координатам которых вычисляются эти расстояния. К примеру, если одна из осей измерена в сантиметрах, а вы потом переведете ее в миллиметры (умножая значения на 10), то окончательное евклидово расстояние (или квадрат евклидова расстояния), вычисляемое по координатам, сильно изменится, и, как следствие, результаты кластерного анализа могут сильно отличаться от предыдущих.

Квадрат евклидова расстояния. Иногда может возникнуть желание возвести в квадрат стандартное евклидово расстояние, чтобы придать большие веса более отдаленным друг от друга объектам. Это расстояние вычисляется следующим образом:

$$\text{расстояние}(x,y) = \sum_i (x_i - y_i)^2.$$

Расстояние городских кварталов (манхэттенское расстояние). Это расстояние является просто средним разностей по координатам. В большинстве случаев эта мера расстояния приводит к таким же результатам, как и для обычного расстояния Евклида. Однако отметим, что для этой меры влияние отдельных больших разностей (выбросов) уменьшается (так как они не возводятся в квадрат). Манхэттенское расстояние вычисляется по формуле:

$$\text{расстояние}(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|\ .$$

Расстояние Чебышева. Это расстояние может оказаться полезным, когда желают определить два объекта как "различные", если они различаются по какой-либо одной координате (каким-либо одним измерением). Расстояние Чебышева вычисляется по формуле:

$$\text{расстояние}(x,y) = max|x_i - y_i|\ .$$

Степенное расстояние. Иногда желают прогрессивно увеличить или уменьшить вес, относящийся к размерности, для которой соответствующие объекты сильно отличаются. Это может быть достигнуто с использованием степенного расстояния. Степенное расстояние вычисляется по формуле:

$$\text{расстояние}(x,y) = \sqrt[p]{\sum_i (x_i - y_i)^r}\ ,$$

где r и p - параметры, определяемые пользователем. Несколько примеров вычислений могут показать, как "работает" эта мера. Параметр p ответственен за постепенное взвешивание разностей по отдельным координатам, параметр r ответственен за прогрессивное взвешивание больших расстояний между объекта-

ми. Если оба параметра - r и p, равны двум, то это расстояние совпадает с расстоянием Евклида.
Процент несогласия. Эта мера используется в тех случаях, когда данные являются категориальными. Это расстояние вычисляется по формуле:
расстояние(x,y) = (Количество $x_i \neq y_i$)/i .

Правила объединения или связи

На первом шаге, когда каждый объект представляет собой отдельный кластер, расстояния между этими объектами определяются выбранной мерой. Однако когда связываются вместе несколько объектов, возникает вопрос, как следует определить расстояния между кластерами? Другими словами, необходимо правило объединения или связи для двух кластеров. Здесь имеются различные возможности: например, вы можете связать два кластера вместе, когда любые два объекта в двух кластерах ближе друг к другу, чем соответствующее расстояние связи. Другими словами, вы используете "правило ближайшего соседа" для определения расстояния между кластерами; этот метод называется методом одиночной связи. Это правило строит "волокнистые" кластеры, т.е. кластеры, "сцепленные вместе" только отдельными элементами, случайно оказавшимися ближе остальных друг к другу. Как альтернативу вы можете использовать соседей в кластерах, которые находятся дальше всех остальных пар объектов друг от друга. Этот метод называется методом полной связи. Существует также множество других методов объединения кластеров, подобных тем, что были рассмотрены.
Одиночная связь (метод ближайшего соседа). Как было описано выше, в этом методе расстояние между двумя кластерами определяется расстоянием между двумя наиболее близкими объектами (ближайшими соседями) в различных кластерах. Это правило должно, в известном смысле, нанизывать объекты вместе для формирования кластеров, и результирующие кластеры имеют тенденцию быть представленными длинными "цепочками".
Полная связь (метод наиболее удаленных соседей). В этом методе расстояния между кластерами определяются наибольшим расстоянием между любыми двумя объектами в различных кластерах (т.е. "наиболее удаленными соседями"). Этот метод обычно работает очень хорошо, когда объекты происходят на самом деле из реально различных "рощ". Если же кластеры имеют в некотором роде удлиненную форму или их естественный тип является "цепочечным", то этот метод непригоден.
Невзвешенное попарное среднее. В этом методе расстояние между двумя различными кластерами вычисляется как среднее расстояние между всеми парами объектов в них. Метод эффективен, когда объекты в действительности формируют различные "рощи", однако он работает одинаково хорошо и в случаях протяженных ("цепочного" типа) кластеров.
Взвешенное попарное среднее. Метод идентичен методу невзвешенного попарного среднего за исключением того, что при вычислениях размер соответствующих кластеров (т.е. число объектов, содержащихся в них) используется в

качестве весового коэффициента. Поэтому предлагаемый метод должен быть использован (скорее даже, чем предыдущий), когда предполагаются неравные размеры кластеров.

Невзвешенный центроидный метод. В этом методе расстояние между двумя кластерами определяется как расстояние между их центрами тяжести.

Взвешенный центроидный метод (медиана). Этот метод идентичен предыдущему за исключением того, что при вычислениях используются веса для учёта разницы между размерами кластеров (т.е. числами объектов в них). Поэтому, если имеются (или подозреваются) значительные отличия в размерах кластеров, этот метод оказывается предпочтительнее предыдущего.

Метод Варда. Этот метод отличается от всех других методов, поскольку он использует методы дисперсионного анализа для оценки расстояний между кластерами. Метод минимизирует сумму квадратов для любых двух (гипотетических) кластеров, которые могут быть сформированы на каждом шаге.

Пример 10. Провести классификацию п=6 объектов, каждый из которых характеризуется двумя признаками.

Номер объекта i	1	2	3	4	5	6
X_{i1}	5	6	5	10	11	10
X_{i2}	10	12	13	9	9	7

Расположение этих точек на плоскости показано на рис. 1.

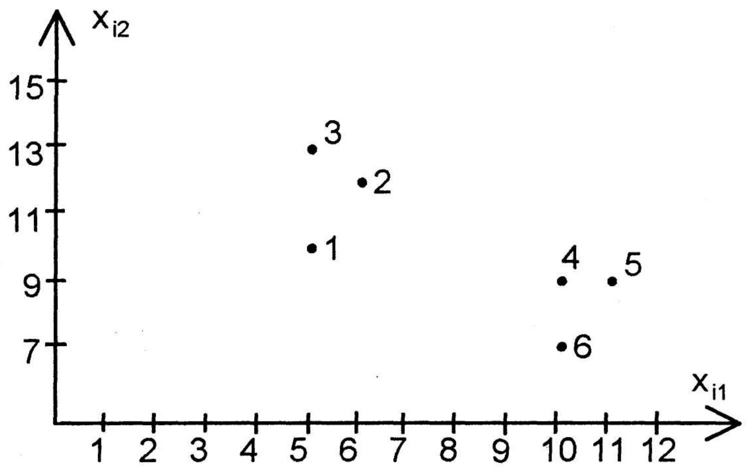


Рис. 1

Воспользуемся агломеративным иерархическим алгоритмом классификации. В качестве расстояния между объектами примем обычное евклидово расстояние. Тогда расстояние между объектами 1 и 2 равно $\rho_{12} = \sqrt{(5-6)^2 + (10-12)^2} = 2.24$,

а между объектами 1 и 3 - $\rho_{13} = \sqrt{(5-5)^2 + (10-13)^2} = 3$,

очевидно, что $\rho_{ii} = 0$.

Аналогично находим расстояния между всеми шестью объектами и строим матрицу расстояний

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2.24 & 3 & 5.10 & 6.08 & 5.83 \\ 2.24 & 0 & 1.41 & 5 & 5.83 & 6.40 \\ 3 & 1.41 & 0 & 6.40 & 7.21 & 7.81 \\ 5.10 & 5 & 6.40 & 0 & 1 & 2 \\ 6.08 & 5.83 & 7.21 & 1 & 0 & 2.24 \\ 5.83 & 640 & 7.81 & 2 & 2.24 & 0 \end{pmatrix}$$

Из матрицы расстояний следует, что объекты 4 и 5 наиболее близки $d_{4,5}$=1,00 и поэтому по методу «ближайшего соседа» объединяются в один кластер.

После объединения имеем пять кластеров

Номер кластера	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Состав кластера	(1)	(2)	(3)	(4,5)	(6)

Расстояние между кластерами будем находить по принципу "ближайшего соседа", воспользовавшись формулой пересчета

$\rho_{1,(4,5)} = \frac{1}{2}\rho_{1,4} + \frac{1}{2}\rho_{1,5} - \frac{1}{2}\left|\rho_{1,4} - \rho_{1,5}\right|$. Так, расстояние между объектом S_1 и кластером $S_{(4,5)}$ равно 5.10

Мы видим, что расстояние $\rho_{1,(4,5)}$ равно расстоянию от объекта 1 до ближайшего к нему объекта, входящего в кластер $S_{(4,5)}$, т.е. $\rho_{1,(45)} = \rho_{1,4}$ =5,10- Тогда матрица расстояний равна

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2.24 & 3 & 5.10 & 5.83 \\ 2.24 & 0 & 1.41 & 5 & 6.40 \\ 3 & 1.41 & 0 & 6.40 & 7.81 \\ 5.10 & 5 & 6.40 & 0 & 2 \\ 5.83 & 6.40 & 7.81 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Объединим объекты 2 и 3, имеющие наименьшее расстояние $\rho_{2.3}=1,41$. После объединения имеем четыре кластера: S(1), S(2,3), S(4,5), S(6).

Вновь найдем матрицу расстояний. Для этого необходимо рассчитать расстояние до кластера $S_{(2,3)}$. Для этого воспользуемся матрицей расстояний D_2. Например, расстояние между кластерами $S_{(4,5)}$ и $S_{(2,3)}$ равно 2,24.

Проведя аналогичные расчеты, получим матрицу расстояний D_3

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2.24 & 5.10 & 5.83 \\ 2.24 & 0 & 5 & 6.40 \\ 5.10 & 5 & 0 & 2 \\ 5.83 & 6.40 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Объединим кластеры $S_{(4,5)}$ и $S_{(6)}$, расстояние между которыми согласно матрице D_3 наименьшее.

В результате этого получим три кластера S(1), S(2,3) и S(4,5,6).

Матрица расстояний будет иметь вид

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2.24 & 5.10 \\ 2.24 & 0 & 5 \\ 5.10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Объединим теперь кластеры S_1 и S_{23}, расстояние между которыми равно *2,24*. В результате получим два кластера: S(1,2,3), S(4,5,6), расстояние между которыми, найденное по принципу "ближайшего соседа", равно 5

Результаты иерархической классификации объектов представлены на рис. 2 в виде дендрограммы.

Слева на рисунке приводится расстояние между объединяемыми на данном этапе кластерами (объектами).

В задаче предпочтение следует отдать предпоследнему этапу классификации, когда все объекты объединены в два кластера

S(l,2,3) и S(4,5,6), что наглядно видно на рис. 1 и 2.

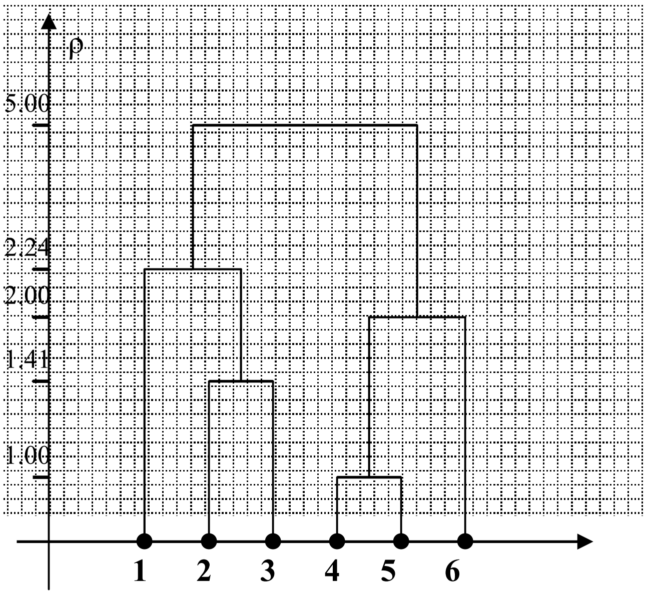


Рис. 2. Дендрограмма

Замечания.

1. Если в примере 10 расстояние между кластерами находить по принципу «дальнего соседа», то формула пересчета примет вид:

$$\rho_{1,(4,5)} = \frac{1}{2}\rho_{1,4} + \frac{1}{2}\rho_{1,5} + \frac{1}{2}\left|\rho_{1,4} - \rho_{1,5}\right|.$$

2. Если в примере 10 расстояние между кластерами находить, исходя из принципа «центра тяжести», то кластер S(4,5) характеризуется, в дальнейшем, его центром тяжести, определяемым вектором средних:

$$\overline{X}_{(4.5)} = \begin{pmatrix} 10 & ,5 \\ & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Если в примере 10 расстояние между кластерами находить по принципу «средней связи», то формула пересчета примет вид:

$$\rho_{1,(4,5)} = \frac{1}{2}\left(\rho_{1,4} + \rho_{1,5}\right).$$

4. Если в примере 10 в качестве расстояния между объектами принимать «взвешенное евклидово расстояние» с "весами" ω_1=0,05, ω_2=0,95, тогда расстояние между объектами 1 и 2 определяется по формуле: $\rho_{1,2} = \sqrt{(5-6)^2 * 0,05 + (10-12)^2 * 0,95}$.

Дискриминантный анализ

Дискриминантный анализ используется для принятия решения о том, какие переменные различают (дискриминируют) две или более возникающие совокупности (группы).

Основная идея дискриминантного анализа заключается в том, чтобы определить, отличаются ли совокупности по среднему какой-либо переменной (или линейной комбинации переменных), и затем использовать эту переменную, чтобы предсказать для новых членов их принадлежность к той или иной группе.

Если среднее значение определенной переменной значимо различно для двух совокупностей, то вы можете сказать, что переменная разделяет данные совокупности.

В случае одной переменной окончательный критерий значимости того, разделяет переменная две совокупности или нет, дает F-критерий. F статистика по существу вычисляется, как отношение межгрупповой дисперсии к объединенной внутригрупповой дисперсии. Если межгрупповая дисперсия оказывается существенно больше, тогда это должно означать различие между средними.

При применении дискриминантного анализа обычно имеются несколько переменных, и задача состоит в том, чтобы установить, какие из переменных вносят свой вклад в дискриминацию между совокупностями. В этом случае вы имеете матрицу общих дисперсий и ковариаций, а также матрицы внутригрупповых дисперсий и ковариаций. Вы можете сравнить эти две матрицы с помощью многомерного F-критерия для того, чтобы определить, имеются ли значимые различия между группами (с точки зрения всех переменных). Применимо основное правило, заключающееся в том, что если вы производите дискриминацию между совокупностями, то должно быть заметно различие между средними.

Наиболее общим применением дискриминантного анализа является включение в исследование многих переменных с целью определения тех из них, которые наилучшим образом разделяют совокупности между собой. Другими словами, вы хотите построить "модель", позволяющую лучше всего предсказать, к какой совокупности будет принадлежать тот или иной образец.

Пошаговый анализ с включением. В пошаговом анализе дискриминантных функций модель дискриминации строится по шагам. Точнее, на каждом шаге просматриваются все переменные и находится та из них, которая вносит наибольший вклад в различие между совокупностями. Эта переменная должна быть включена в модель на данном шаге, и происходит переход к следующему шагу.

Пошаговый анализ с исключением. Можно также двигаться в обратном направлении, в этом случае все переменные будут сначала включены в модель, а затем на каждом шаге будут устраняться переменные, вносящие малый вклад в предсказания. Тогда в качестве результата успешного анализа можно сохранить только "важные" переменные в модели, то есть те переменные, чей вклад в дискриминацию больше остальных.

***F* для включения, *F* для исключения.** Эта пошаговая процедура "руководствуется" соответствующим значением F для включения и соответствующим значением F для исключения. Значение F статистики для переменной указывает на ее статистическую значимость при дискриминации между совокупностями, то есть, она является мерой вклада переменной в предсказание членства в совокупности.

Расчет на случай. Пошаговый дискриминантный анализ основан на использовании статистического уровня значимости. Поэтому по своей природе пошаговые процедуры рассчитывают на случай, так как они "тщательно перебирают" переменные, которые должны быть включены в модель для получения максимальной дискриминации. При использовании пошагового метода исследователь должен осознавать, что используемый при этом уровень значимости не отражает истинного значения *альфа*, то есть, вероятности ошибочного отклонения гипотезы H_0 (нулевой гипотезы, заключающейся в том, что между совокупностями нет различия).

Дискриминантный анализ – это очень полезный инструмент для поиска переменных, позволяющих относить наблюдаемые объекты в одну или несколько реально наблюдаемых групп, а также для классификации наблюдений в различные группы.

Пример 11. Деятельность каждого производственного объединения отрасли оценивалась по следующим двум показателям:

• среднесписочной численности промышленно-производственного персонала (ППП);

• балансовой прибыли.

Исходные данные

Группа объединений	Показатели	
	численность ППП	балансовая прибыль
Передовая	17,115	22,981
	14,904	21,481
	13,627	28,669
	10,545	10,199
Остальная	4,428	11,124
	5,510	6,091
	4,214	11,842
	5,527	11,873
	4,211	12,860

В отрасли выделены две группы: передовая, состоящая из четырех объединений, и остальная, включающая пять объединений.

Отрасли передано объединение Z, у которого по принятым трем показателям получены следующие результаты: численность ППП - 9,592 тыс.человек; балансовая прибыль -12,840.

Определить, можно ли отнести новое объединение к передовой группе предприятий отрасли.

Решение

1. Запишем исходные данные в виде матриц *X и Y*:

$$X = \begin{pmatrix} 17.115 & 22.981 \\ 14.904 & 21.481 \\ 13.627 & 28.669 \\ 10.545 & 10.199 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 4.428 & 11.124 \\ 2.210 & 6.091 \\ 4.214 & 11.842 \\ 5.527 & 11.873 \\ 4.221 & 12.860 \end{pmatrix}$$

строка матрицы Z: Z= (9,592; 12,840).

2. Определим векторы средних:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 14.04775 \\ 20.8324 \end{pmatrix}; \quad \overline{\mathrm{Y}} = \begin{pmatrix} 4.778 \\ 10.758 \end{pmatrix}.$$

3. Определим оценку ковариационных матриц, где элементы матрицы S_x определяются по формуле

$$s_{jl(x)} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\right)\left(x_i^{(l)} - \overline{x}^{(l)}\right), \text{ а } \overline{x}^{(j)} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^{(j)}$$

$$S_x = \begin{pmatrix} 5.64686 & 10.27365 \\ 10.27365 & 44.87968 \end{pmatrix}; \; S_y = \begin{pmatrix} 0.37178 & -0.90248 \\ -0.90248 & 575030 \end{pmatrix};$$

Тогда вектор $\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)$ будет равен $\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) = \begin{pmatrix} 9.26975 \\ 10.0745 \end{pmatrix}$.

4. Далее найдем несмещенную оценку суммарной ковариационной матрицы

$$\widehat{S} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left[n_1 S_x + n_2 S_y\right] = \begin{pmatrix} 3.49234 & 5.22603 \\ 5.22603 & 29.75289 \end{pmatrix}.$$

5. Определим обратную матрицу

$$\widehat{S}^{-1}=\begin{pmatrix}0.38844 & -0.06823\\ -0.06823 & 0.04559\end{pmatrix}.$$

6. Найдем вектор оценок коэффициентов дискриминантной функции

$$\widehat{a}=\widehat{S}^{-1}\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\begin{pmatrix}0.38844 & -0.06823\\ -0.06823 & 0.04559\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9.26975\\ 10.0745\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.91336\\ -0.17318\end{pmatrix}.$$

7. Вычислим оценки дискриминантной функции для обучающих выборок:

$$\widehat{U}_x=X\widehat{a}=\begin{pmatrix}17.115 & 22.981\\ 14.904 & 21.481\\ 13.627 & 28.669\\ 10.545 & 10.199\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.91336\\ -0.17318\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45.882\\ 39.701\\ 34.735\\ 28.955\end{pmatrix},$$

$$\widehat{U}_y=Y\widehat{a}=\begin{pmatrix}4.428 & 11.124\\ 5.510 & 6.091\\ 4.214 & 11.842\\ 5.527 & 11.873\\ 4.211 & 12.860\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.91336\\ -0.17318\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10.947\\ 14.998\\ 10.226\\ 14.046\\ 10.041\end{pmatrix}.$$

8. Определим средние значения оценок дискриминантной функции

$$\overline{\widehat{U}_x}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\widehat{U}_{x_i}=37.318,\qquad \overline{\widehat{U}_y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\widehat{U}_{y_i}=12.057$$

9. Получим константу дискриминации

$$\widehat{c}=\frac{1}{2}\left(\overline{\widehat{U}_x}+\overline{\widehat{U}_y}\right)=24.688.$$

10. Определим, к какой группе относится объединение *Z*, подлежащее дискриминации, рассчитаем для него дискриминантную функцию:

$$\widehat{U}(z)=a_1z_1+a_2z_2=2.91336\cdot 9.592-0.17318\cdot 12.480=25.721$$

Значение дискриминантной функции $\widehat{U}(z)=25.721$ больше чем константа $\widehat{c}=24.688$, следовательно, объединение Z может быть отнесено к группе передовых предприятий.

Задачи для самостоятельной работы

1. По иерархическому агломеративному алгоритму провести классификацию n=6 предприятий машиностроения, данные о деятельности которых характеризуются следующими показателями: $x^{(1)}$- рентабельность, %, $x^{(2)}$- производительность труда, млн руб./чел, представленными в таблице:

Номер предприятия	1	2	3	4	5	6
$x^{(1)}$	23,4	17,5	9,7	18,2	6,6	8,0
$x^{(2)}$	9,1	5,2	5,5	9,4	7,5	5,7

В качестве расстояния между объектами принять:

а) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

б) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,l, ω_2=0,9, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

в) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

г) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести".

2. По агломеративному алгоритму провести классификацию n=5 хозяйств, деятельность которых характеризуется следующими показателями: $x^{(1)}$- объем реализованной продукции растениеводства, млн руб./га, $x^{(2)}$- объем реализованной продукции животноводства, млн руб./га, представленными в таблице

Номер хозяйства	1	2	3	4	5
$x^{(1)}$	2,49	1,51	1,17	1,67	2,73
$x^{(2)}$	0,38	0,51	0,28	0,29	0,34

В качестве расстояния между объектами принять:

а) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

б) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

в) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести";

в) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "средней связи".

3. По агломеративному алгоритму провести классификацию n=6 регионов по уровню медицинского обслуживания населения, который характеризуется следующими показателями: $x^{(1)}$- число врачей на 10 тыс. жителей ;$x^{(2)}$- число больничных коек на 10 тыс. жителей, представленными в таблице.

Номер региона	1	2	3	4	5	6
$x^{(1)}$	34,81	31,2	32,1	35,7	30,2	34,2
$x^{(2)}$	26,0	112,0	123,0	128,0	115,0	123,0

В качестве расстояния между объектами принять:

а) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,8, ω_2=0,2, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

б) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,8, ω_2=0,2, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

в) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,8, ω_2=0,2, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести";

г) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,8, ω_2=0,2, а расстояние между кластерами измерять по принципу "средней связи";

д) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

е) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

ж) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести";

з) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "средней связи".

4. По агломеративному алгоритму провести классификацию n=5 хозяйств, деятельность которых характеризуется следующими показателями: $x^{(1)}$ - производительность труда, млн руб./чел., $x^{(2)}$- объем реализованной продукции растениеводства, млн руб./га, $x^{(3)}$- объем реализованной продукции животноводства (млн руб./га), представленными в таблице

Номер хозяйства	1	2	3	4	5
$x^{(1)}$	8,22	4,33	6,43	6,39	4,92
$x^{(2)}$	0,25	0,49	0,51	0,27	0,32
$x^{(3)}$	0,41	0,38	0,51	0,42	0,55

В качестве расстояния между объектами принять:

а) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,1, ω_2=0,4, ω_3=0,5, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

б) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,1, ω_2=0,4, ω_3=0,5, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

в) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,1, ω_2=0,4, ω_3=0,5, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести";

г) взвешенное евклидово расстояние с "весами" ω_1=0,1, ω_2=0,4, ω_3=0,5, а расстояние между кластерами измерять по принципу "средней связи";

д) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

е) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

ж) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести";

з) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "средней связи".

5. По агломеративному алгоритму провести классификацию n=6 машиностроительных предприятий, деятельность которых характеризуется следующими показателями: $x^{(1)}$ - производительность труда, млн руб./чел., $x^{(2)}$- удельный вес потерь от брака, %, $x^{(3)}$- фондоотдача активной части основных производственных фондов, руб./руб., представленными в таблице

Номер предприятия	1	2	3	4	5	6
$x^{(1)}$	9,40	6,6	7,4	10,0	6,6	9,1
$x^{(2)}$	0,15	0,48	0,62	0,32	0,50	0,90
$x^{(3)}$	1,91	0,88	1,09	2,62	1,32	1,89

В качестве расстояния между объектами принять:

а) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "ближайшего соседа";

б) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "дальнего соседа";

в) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "центра тяжести";

г) обычное евклидово расстояние, а расстояние между кластерами измерять по принципу "средней связи".

6. По данным, представленным в таблице, провести классификацию n=5 семей по двум показателям: уровень расходов, млн руб. за летние месяцы на культурные нужды, спорт и отдых - $x^{(1)}$ и питание $x^{(2)}$:

Номер семьи	1	2	3	4	5
$x^{(1)}$	2	4	8	12	13
$x^{(2)}$	10	7	6	11	9

Классификацию провести по иерархическому агломеративному алгоритму с использованием обычного и взвешенного (ω_1=0,05, ω_2=0,95) евклидова расстояния, а также принципов: «ближайшего» и «дальнего» соседа, «центра тяжести» и «средней связи». Сравнить полученные результаты и обосновать выбор окончательного варианта классификации.

7. В таблице представлены группы машиностроительных предприятий с высоким и низким уровнями организации управления производством. Характеризуя деятельность предприятий показателями рентабельности (%) и производительности труда (млн руб./чел.), требуется с помощью дискриминантного анализа классифицировать три последних предприятия.

№ п/п	Группы предприятий	Рентабельность	Производительность труда
1	Высокий уровень (X)	23,4	9,1
2		19,1	6,6
3		17,5	5,2
4		17,2	10,0
1	Низкий уровень (Y)	5,4	4,3
2		6,6	5,5
3		8,0	5,7
4		9,7	5,5
5		9,1	6,6
1	Подлежат дискриминации (Z)	9,9	7,4
2		14,2	9,4
3		12,9	6,7

8. При оценке эффективности деятельности предприятий приборостроения были получены два класса предприятий, представленные в таблице. Используя их как обучающие выборки, провести дискриминацию трех последних предприятий по показателям фондоотдача и материалоемкость.

№ п/п	Классы предприятий	Фондоотдача	Материалоемкость
1	Класс А (X)	1,47	3,90
2		1,52	6,18
3		1,38	13,80
4		1,27	8,18
1	Класс В (Y)	0,59	9,08
2		0,57	2,10
3		0,46	6,5
4		0,53	13,13
1	Подлежат дискриминации (Z)	0,92	13,80
2		1,21	4,80
3		0,63	12,33

9. Анализ эффективности использования земельных угодий в сельскохозяйственных районах области позволил выделить регионы с низким (А) и высоким (В) и уровнями использования земли. По данным таблицы с помощью дискриминантного анализа провести классификацию трех последних районов по показателям: объем реализованной продукции растениеводства и животноводства с гектара посевной площади (млн руб./га).

№ п/п	Группы районов	Растениеводство	Животноводство
1	Группа А (X)	25	21
2		31	37
3		27	22
4		33	36
1	Группа В (Y)	47	38
2		50	67
3		52	45
4		39	46
5		66	33
1	Подлежат дискриминации (Z)	32	42
2		67	33
3		46	56

10. Анализ эффективности использования земельных угодий в сельскохозяйственных районах области позволил выделить регионы с низким (А) и высоким (В) и уровнями использования земли. По данным таблицы с помощью дискриминантного анализа провести классификацию трех последних районов по показателям: производительность труда, млн руб./чел., объем реализованной продукции растениеводства и животноводства с гектара посевной площади, млн.руб/га.

№ п/п	Группы районов	Производительность труда	Растениеводство	Животноводство
1	Группа А (X)	31	25	21
2		42	31	37
3		40	27	28
4		39	33	36
1	Группа В (Y)	62	52	49
2		64	50	61
3		49	47	48
4		61	53	46
5		59	55	50
1	Подлежат дискриминации (Z)	49	46	44
2		56	54	47
3		38	35	39

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. - М.: Высш. шк., 1986. - 319 с.
2. Арис, Р. Дискретное динамическое программирование / Р. Арис. - М.: Мир, 1969. - 172 с.
3. Бережная, Е.В. Математическое моделирование экономических систем: учеб. пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. - М.: Финансы и статистика, 2002. - 368 с.
4. Воронцовский, А.В. Управление рисками / А.В. Воронцовский. - СПб: ОЦЭиМ, 2004. - 457 с.
5. Глинский, В. В. Статистический анализ : учеб. пособие для студ. вузов экон. профиля / В. В. Глинский, В. Г. Ионин. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : ИНФРА-М;Новосибирск:Сибирское соглашение, 2002.
6. Дубров, А. М. Многомерные статистические методы: для экономистов и менеджеров: учеб. для студ. спец.вузов/ А.М. Дубров, В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин – М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. - М.: Дело и сервис, 2001. - 368 с.
8. Ильченко, А.Н. Практикум по экономико-математическим методам / А.Н. Ильченко, О.Л. Ксенофонтова, Г.В. Канакина. - М.: Финансы и статистика, 2009. - 288 с.
9. Ильченко, А.Н. Экономико-математические методы / А.Н. Ильченко. – М.: Финансы и статистика, 2006. - 224 с.
10. Ильченко, А.Н. Практикум по экономико-математическим методам: учеб. пособие / А.Н. Ильченко, О.Л. Ксенофонтова, Г.В. Канакина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009. – 288 с.
11. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2001. - 407 с.
12. Калихман, И.Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. - М.: Высш. шк., 1979.
13. Киселев, В.Ю. Экономико-математические методы и модели / В.Ю. Киселев. Иваново: ИГЭУ, 1998. - 384 с.
14. Коршунова, Л.Н. Оценка и анализ рисков: учеб. пособие / Л.Н. Коршунова, Н.А. Проданова. – Ростов н/Д: Феникс, 2007.
15. Косоруков, О.А. Исследование операций / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко. - М.: Экзамен, 2003. - 448 с.
16. Ксенофонтова, О.Л. Моделирование рисковых ситуаций в экономике: учеб. пособие / О.Л. Ксенофонтова, В.В. Михайлов, Н.В.Смирнова; Иван. гос. хим.- технол. ун-т. - Иваново, 2012. - 84 с.
17. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. - М.: Наука, 1990. - 488 с.
18. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: учеб. пособие / под ред. Б.А. Лагоши. – М.: Финансы и статистика, 2001.

19. Невежин, В.П. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование» / В.П. Невежин, С.И. Кружилов. - М.: 2005.
20. Рискология (управление рисками): учеб. пособие. – 3-е изд., испр. и доп. / В.П. Буянов, К.А. Кирсанов. – М.: Издательство «Экзамен», 2007. – 384с.
21. Федосеев, В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге / В.В. Федосеев, Н.Д. Эрнашвили. - М.: 2001.
22. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности / Г.П. Фомин. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 544 с.
23. Хедли, Дж. Нелинейное и динамическое программирование / Дж. Хедли .- М.: Мир, 1969. - 508 с.
24. Хохлов, Н.В. Управление рисками: учеб. пособие для вузов / Н.В. Хохлов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. - 239с.
25. Чернов, В.А. Анализ коммерческого риска / под. ред. М.И. Баканова. – М.: Финансы и статистика,1998.
26. Чернова, Г.В. Практика управления рисками на уровне предприятия / Г.В. Чернова. – СПб: Питер, 2000.
27. Четыркин, Е.М. Финансовые риски: науч.-практич. пособие / Е.М Четыркин. – М.: Издательство «Дело» АНХ, 2008.
28. Шапкин, А.Н. Математические методы и модели исследования операций / А.Н. Шапкин, Н.П. Мазаева. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2007. - 400с.
29. Шапкин, А.С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций / А.С Шапкин, В.А. Шапкин. - М.: Дашков и К°, 2005. – 880с.
30. Шоломицкий, А.Г. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска / А.Г. Шоломицкий. - М.: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2005. — 399 с.
31. Ильенкова, С.Д. Экономико-статистический анализ: учеб.пособие для студ. экон. спец. вузов/ С.Д. Ильенкова, Н.Д. Ильенкова, С.А. Орехов – М.: Юнити-Дана, 2002.

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 15.10.2014. Формат $60\times84\ ^1/_{16}$.
Бумага писчая. Усл. печ. л. 3,02. Уч. – изд.л. 3,35.
Тираж 50 экз. Заказ

Ивановский государственный
химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
кафедры экономики и финансов ИГХТУ

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7