

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ивановский государственный химико-технологический университет

Н.В. Твердова, В.Н. Петрова, Н.Л. Лебедева

## **КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ: ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

Учебное пособие

Под редакцией Г.В. Гиричева

Иваново 2014

УДК 53

**Твердова, Н.В.**

Краткий курс физики: теория и задачи: учеб. пособие / Н.В. Твердова, В.Н. Петрова, Н.Л. Лебедева; под ред. Г.В. Гиричева; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2014. – 191с.

ISBN 978-5-9616-0491-7

Учебное пособие содержит теоретический и практический материал по курсу физики и предназначено для самостоятельной работы студентов дневной и заочной формы обучения. Пособие содержит систематизированный, доступно изложенный материал по следующим разделам физики: механика, колебания и волны, молекулярная физика, электростатика, постоянный ток, магнетизм, геометрическая, волновая и квантовая оптика, квантовая механика, элементы физики атомного ядра. Наряду с теоретическим материалом по общему курсу физики, пособие включает примеры решения типовых задач.

Ил. 159. Библиограф.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета

Рецензенты:

доктор химических наук, проф. С.Н. Иванов (ФГБОУ ВПО Ивановский государственный университет);

доктор химических наук, проф. В.В. Рыбкин (ФГБОУ ВПО Ивановский государственный химико-технологический университет)

ISBN 978-5-9616-0491-7

© Н.В. Твердова,  
В.Н. Петрова,  
Н.Л. Лебедева,  
2014

© ФГБОУ ВПО «Ивановский  
государственный химико-  
технологический университет»,  
2014

## 1. МЕХАНИКА

### **Материальная точка. Абсолютно твердое тело. Система отчета. Траектория, пройденный путь, перемещение**

В реальных условиях движение тела трудно описать, поскольку различные его части двигаются по-разному и занимают различные положения в пространстве. С целью упрощения решения задачи при описании движения тел используют физические модели – *материальная точка, абсолютно твердое тело*.

*Материальная точка* – тело, обладающее массой, размерами которого при условиях данной задачи можно пренебречь.

*Абсолютно твердое тело* – тело, деформациями которого пренебрегают.

Любое движение тела можно представить как комбинацию *поступательного* и *вращательного* движения.

*Поступательное движение* – это движение, при котором воображаемая прямая, соединяющая любые две точки тела, остается параллельной самой себе.

*Вращательное движение* – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Для описания движения тел необходимо выбрать *систему отчета*. *Система отчета* – это система координат, связанная с телом отчета (одно или несколько тел, которые условно полагаются неподвижными) и выбранным способом измерения времени.

Положение материальной точки в пространстве может быть задано двумя способами (рис. 1.1):

1) радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала координат в данную материальную точку (т.  $A$ );

2) координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (т.е. проекциями

радиуса-вектора на оси координат).

При движении материальной точки в заданной системе отчета ее радиус-вектор и соответствующие координаты будут изменяться, т.е. они являются функциями времени.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.2)$$

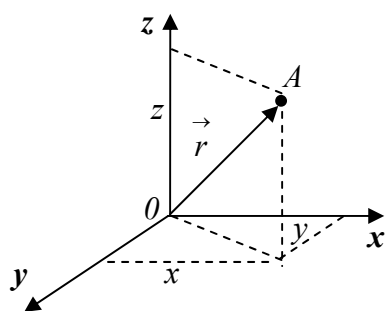


Рис. 1.1

Уравнения (1.1) и (1.2) называют *кинематическими уравнениями движения материальной точки*.

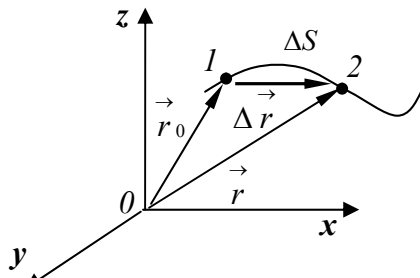


Рис. 1.2

Материальная точка при своем движении описывает линию, которую называют *траекторией*. Расстояние от точки 1 до точки 2 (рис.1.2), отсчитанное вдоль траектории представляет собой *пройденный путь* ( $\Delta S$ ) и является *скалярной* величиной.

Вектор  $\vec{\Delta r}$ , проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за время  $\Delta t$ ),

называется *перемещением*.

При прямолинейном движении модуль перемещения равен пройденному пути.

### **Линейные и угловые скорости. Ускорение**

*Вектором средней скорости*  $\vec{v}_{cp}$  называется отношение приращения  $\vec{\Delta r}$  радиуса-вектора точки к промежутку времени  $\Delta t$ .

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением  $\vec{\Delta r}$ .

*Мгновенная скорость*  $\vec{v}$  – скорость тела в данный момент времени или скорость тела в данной точке траектории. Это векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис.1.3, а).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.4)$$

Модуль мгновенной скорости можно считать равным первой производной пути по времени, поскольку при уменьшении  $\Delta t$  путь  $\Delta S$  будет приближаться к  $|\vec{\Delta r}|$

$$v = \frac{dS}{dt}. \quad (1.5)$$

Единицы измерения скорости *м/с*.

Ускорение – физическая величина, характеризующая изменение скорости по модулю и направлению.

Средним ускорением  $\vec{a}_{cp}$  называется векторная величина, равная отношению изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  к интервалу времени  $\Delta t$ :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.6)$$

Направление среднего ускорения совпадает с направлением изменения скорости  $\Delta \vec{v}$ .

Мгновенное ускорение  $\vec{a}$  – ускорение тела в данный момент времени или в данной точке траектории. Это векторная величина, равная первой производной скорости по времени. Вектор мгновенного ускорения направлен по касательной к траектории.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.7)$$

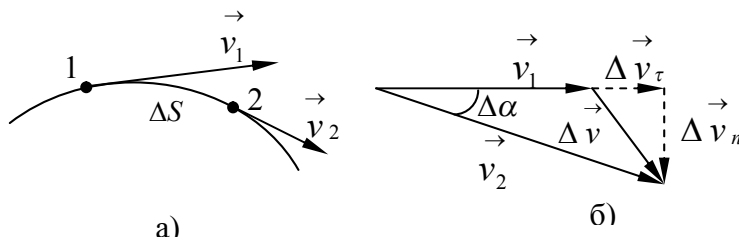


Рис. 1.3

На рис. 1.3,б вектор изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  разложили на две составляющие:

1) вектор  $\Delta v_\tau$  определяет изменение скорости по модулю за

время  $\Delta t$ ;

2) вектор  $\Delta v_n$  характеризует изменение скорости по направлению за то же время  $\Delta t$ .

В соответствии с этим рассматривают:

тангенциальное ускорение  $\vec{a}_\tau$  – изменяет скорость движения тела только по величине. Оно направлено по направлению скорости или против нее в зависимости от того, является ли движение вдоль траектории ускоренным или замедленным. Численное значение тангенциального ускорения определяется по изменению величины скорости:

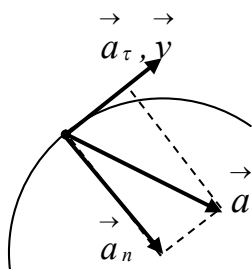


Рис. 1.4

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.8)$$

нормальное или центростремительное ускорение  $\vec{a}_n$  – вызывает изменение скорости только по направлению и поэтому отсутствует при прямолинейном движении. Оно направлено по нормали к траектории в сторону центра ее кривизны. Величина нормального ускорения в каждой точке криволинейной траектории определяется скоростью движения и радиусом кривизны траектории в этой точке.

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}. \quad (1.9)$$

Полное ускорение есть геометрическая сумма тангенциального и нормального ускорений (рис. 1.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad (1.10)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.11)$$

В зависимости от тангенциального и нормального ускорения движения можно классифицировать:

по виду траектории:

- 1)  $\vec{a}_n = 0$  – прямолинейное движение;
- 2)  $\vec{a}_n = const$  – движение по окружности;
- 3)  $\vec{a}_n \neq 0$  – криволинейное движение.

по изменению скорости:

- 1)  $\vec{a}_\tau = 0$  – равномерное движение;
- 2)  $\vec{a}_\tau = const$  – равнопеременное движение;
- 3)  $\vec{a}_\tau \neq 0$  – переменное движение.

Единицы измерения ускорения  $m/c^2$ .

### Угловая скорость. Угловое ускорение

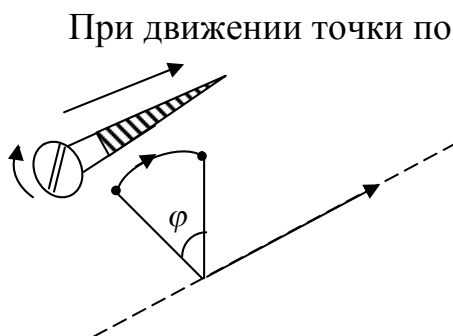


Рис. 1.5

При движении точки по окружности заданного радиуса ее положение по прошествии времени  $\Delta t$  задается углом поворота  $\Delta \varphi$ . Угол поворота рассматривается как псевдовектор  $d\vec{\varphi}$ , направление которого совпадает с осью вращения и подчиняется правилу правого винта. Модуль вектора  $d\vec{\varphi}$  равен углу поворота  $d\varphi$ . Согласно этому правилу направление отрезка (вектора) должно быть таким, чтобы, глядя вдоль

него (рис. 1.5), мы видели поворот, совершающийся по часовой стрелке (вращая головку правого винта по часовой стрелке, мы вызовем его перемещение от себя, а против часовой стрелки – на себя).

Угловой скоростью  $\vec{\omega}$  называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.12)$$

Вектор  $\vec{\omega}$  направлен вдоль оси вращения, и его направление определяется по правилу правого винта, так же как и для вектора  $d\vec{\varphi}$  (рис. 1.6). Единицы измерения угловой скорости  $rad/c$ .

Если  $\vec{\omega} = const$ , то вращение равномерное, и его можно характеризовать периодом вращения. Период вращения  $T$  – время, за которое тело совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Поскольку  $\Delta t = T$ ,  $\Delta \varphi = 2\pi$ , то  $\omega = 2\pi/T$ ;

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.13)$$

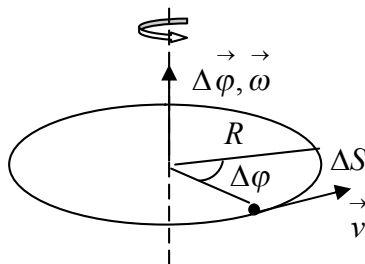


Рис. 1.6

Число оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности в единицу времени, называется частотой вращения  $n$ .

$$n = 1/T = \omega/2\pi \text{ или } \omega = 2\pi n.$$

Угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$  называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.14)$$

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора угловой скорости или против него в зависимости от того, является

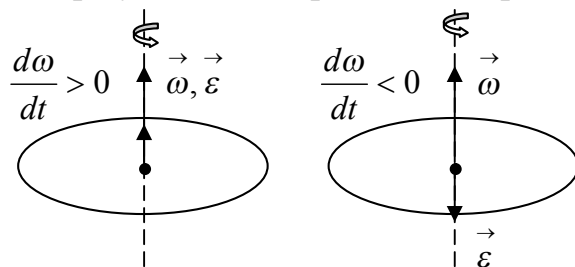


Рис. 1.7

ли движение ускоренным или замедленным: при ускоренном движении вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$ , при замедленном – противоположен ему (рис.1.7). Единицы углового ускорения  $rad/c^2$ .

**Соотношения между линейными и угловыми величинами, характеризующими движение тела по окружности**

$$S = R\varphi, \quad v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega, \quad a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

При постоянном ускорении, расчетные формулы для скорости и пройденного пути имеют вид:

$$v = v_0 \pm at, \quad S = v_0t \pm \frac{at^2}{2}.$$

При постоянном угловом ускорении, расчетные формулы для угловой скорости и угла поворота имеют вид:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \varphi = 2\pi N,$$

где  $v_0$  – и  $\omega_0$  – начальные линейная и угловая скорости;  $N$  – число оборотов.

**Сила. Масса. Законы механики Ньютона**

В механике для описания воздействия одних тел на другие пользуются понятием силы и массы.

*Силой* называется всякое воздействие на данное тело, в результате которого тело получает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

*Масса тела* – характеризует меру его инертности, т.е. свойство сохранять приобретенное движение или состояние покоя.

Основные законы механики

*Первый закон Ньютона*

**Тело, изолированное от всякого внешнего воздействия, либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно** (закон инерции).

*Второй закон Ньютона*

**Ускорение, приобретаемое телом под действием данной силы, прямо пропорционально величине этой силы и обратно пропорционально массе тела.**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1.15)$$

Второй закон механики выражает полученное на опыте соотношение между силой, сообщающей ускорение, величиной этого ускорения и массой тела, к которому приложена эта сила:



$$\vec{F} = m \vec{a} \text{ или } \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.16)$$

Произведение массы тела на скорость его движения называется *импульсом* (количеством движения) *тела*.

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (1.17)$$

С учетом формулы (1.17) *второй закон механики* можно записать:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.18)$$

Если на тело действует не одна сила, а несколько сил различной величины и направления  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots)$ , то в формулу (1.16) вместо силы

$\vec{F}$  следует подставлять *равнодействующую* (т.е. векторную сумму) всех приложенных к телу сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum \vec{F}_i.$$

Это означает, что каждая сила (любого происхождения или характера) оказывает свое действие на данное тело независимо от наличия или отсутствия других сил, приложенных к этому телу (закон независимости действия сил).

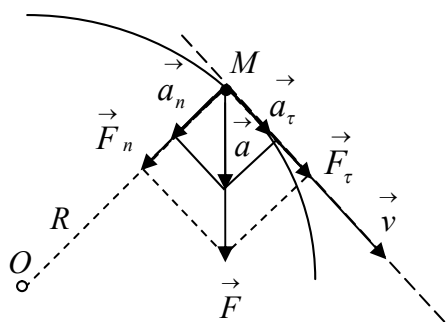


Рис. 1.8

Силу, действующую на тело можно разложить не только по координатным осям (т.е. проекции на оси:  $ox, oy, oz$ ), но также на две составляющие:

1) тангенциальную силу  $\vec{F}_\tau$ , ориентированную по направлению движения (по касательной к траектории движения);

2) нормальную  $\vec{F}_n$ , перпендикулярную направлению скорости движения (т.е. ориентированную по нормали к траектории) (рис. 1.8).

Сила, сообщающая телу тангенциальное ускорение  $F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$ , используется для расчета изменения величины скорости.

Сила, сообщающая нормальное ускорение  $F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}$ , используется для расчета радиуса кривизны траектории.

### Третий закон Ньютона

Если одно тело действует на второе с некоторой силой  $\vec{F}_{12}$  (т.е деформирует его или сообщает ему ускорение), то всегда имеет место обратное воздействие второго тела на первое с силой  $\vec{F}_{21}$ , равной  $\vec{F}_{12}$  и противоположно направленной.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.19)$$

Измерения показывают, что взаимодействующие тела сообщают друг другу ускорения, соотношения которых  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ .

Итак, законы механики Ньютона позволяют найти форму траектории тела, а также скорости и ускорения в разных точках траектории, если известны скорость тела в начальной точке траектории, и заданы силы, действующие на это тело в каждый момент времени или в каждой точке, где может находиться тело.

### Работа. Мощность

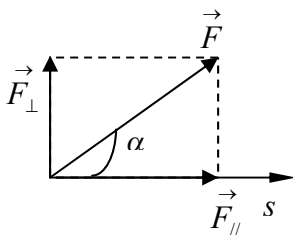


Рис. 1.9

Найдем выражение для работы. Будем считать, что сила постоянна  $\vec{F}$  (сила постоянная по модулю и направлению), а точка приложения силы движется прямолинейно (рис. 1.9). Разложим силу на две составляющие:  $\vec{F}_{\parallel}$ , направленную вдоль перемещения  $\vec{s}$ , и  $\vec{F}_{\perp}$ , перпендикулярную к перемещению  $\vec{s}$ . Пусть угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{s}$  – острый. Сила  $\vec{F}_{\perp}$  перпендикулярна к перемещению и поэтому работы не совершает. Сила  $\vec{F}_{\parallel}$  совпадает по направлению с перемещением и ее работа равна:  $A = F_{\parallel} s$ . Считая работу равнодействующей силы равной сумме работ составляющих сил, получим, что работа силы  $\vec{F}$  на перемещение  $\vec{s}$  равна  $A = F_{\parallel} s$ , где  $F_{\parallel}$  – проекция силы  $\vec{F}$  на направление  $\vec{s}$ . Обозначив эту проекцию  $F_s$ , можно записать:

$$A = F_s s.$$

Работа равна проекции силы на направление перемещения, умноженной на модуль перемещения точки приложения силы.

Если  $\alpha < \pi/2$ , то проекция  $F_s = F \cos \alpha$ . Следовательно, выражение для работы, имеет вид:

$$A = F s \cos \alpha. \quad (1.20)$$

Работу можно представить также как скалярное произведение силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\vec{s}$ :  $A = (\vec{F} \cdot \vec{s})$ .

Работа, совершаемая переменной силой на элементарном участке пути, равна:  $dA = FdS$ . Работа на всем пути может быть вычислена как сумма элементарных работ  $A = \sum dA_i$ .

Выражение (1.20) определяет работу при любых значениях угла  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\pi$ . Если угол  $\alpha$  острый, работа положительна; если этот угол тупой, работа отрицательна; когда  $\alpha = 0$ ,  $A = Fs$ ; если  $\alpha = \pi$ ,  $A = -Fs$ ; при  $\alpha = \pi/2$ ,  $A=0$ . Единица измерения работы джоуль, Дж.

Отношение совершенной работы ко времени, в течение которого эта работа произведена, называют *мощностью* и обозначают  $N$  или  $(P)$ .

$$N = \frac{A}{t}. \quad (1.21)$$

Мощность можно назвать скоростью совершения работы. Единица мощности имеет название ватт, Вт.

### **Кинетическая и потенциальная энергии**

*Энергия* – физическая величина, характеризующая способность тела (или системы взаимодействующих тел) совершать работу.

*Кинетическая энергия* – энергия, которой обладает тело вследствие его движения.

Найдем выражение для кинетической энергии. Пусть на тело массой  $m$ , находившееся в покое, начала действовать постоянная сила  $F$ ; под действием этой силы тело будет двигаться равноускоренно с ускорением  $a=F/m$ . Пройдя расстояние  $s$  в направлении действия силы, тело приобретает скорость  $v$  (т.е. приобретает кинетическую энергию), связанную с пройденным расстоянием формулой  $s=v^2/2a$ . Отсюда находим работу  $A$  силы  $F$ :  $A = F s = F \frac{v^2}{2a} = \frac{mv^2}{2}$ .

Поскольку изменение кинетической энергии равно работе, совершенной на пути  $s$ , то кинетическая энергия равна:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.22)$$

*Потенциальная энергия* – энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Для сил, зависящих только от положения тела, работа, совершаемая ими над телом, может не зависеть от формы пути, а определяться только начальным и конечным положениями тела в пространстве. В этом случае поле сил называется *потенциальным*, а сами силы – *консервативными*,

например, сила тяжести, сила упругости. Силы, работа которых зависит от формы пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, называются *неконсервативными*, например, сила трения.

В физических явлениях бывает важна не сама потенциальная энергия, а ее изменение, которым определяется совершаемая работа:

$$A = -\Delta E_n; \quad \Delta E_n = E - E_0, \quad E_0 = 0. \quad (1.23)$$

Рассмотрим примеры.

1. Потенциальная энергия тела в поле тяготения Земли равна работе силы тяжести  $A = mgh$  при падении тела с высоты  $h$  на поверхность Земли, т.е.

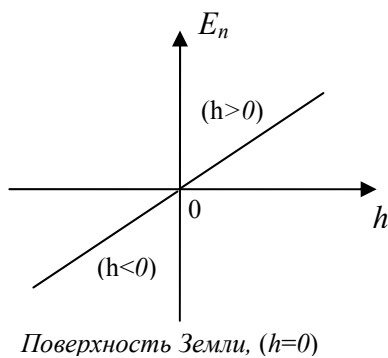


Рис. 1.10

$E_n = mgh$ , где  $h$  высота, на которую поднято тело. Высота отсчитывается от нулевого уровня, для которого потенциальная энергия принимается равной нулю (поверхность Земли). На рис. 1.10 эта зависимость показана графически.

2. Потенциальная энергия упругой деформации (например, сжатой или растянутой пружины)

Силы  $F$ , действующие на концах пружины, (силы упругости) направлены против внешних деформирующих сил и по величине пропорциональны деформации  $F = kx$ ,

где  $k$  – коэффициент упругости пружины.

Элементарная работа, совершаемая силой при бесконечно малой деформации  $dx$ , равна:  $dA = Fdx = kx dx$ , тогда полная работа равна:

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины  $E_n = \frac{kx^2}{2}$ ,

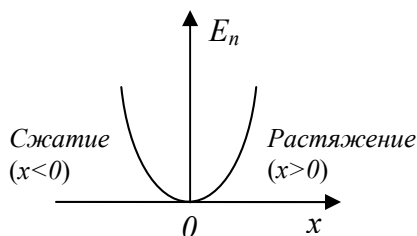


Рис. 1.11

растяжение (сжатие) пружины  $x$  отчитывают от нулевого уровня, для которого потенциальная энергия равна нулю (недеформированное состояние пружины).

Зависимость потенциальной энергии пружины от удлинения (сжатия)  $x$  показана на рис. 1.11.

Потенциальная энергия может иметь как положительное, так и отрицательное значение, поскольку начало отчета выбирается произвольно. Единица измерения энергии, как и работы Дж.

## Преобразования Лоренца

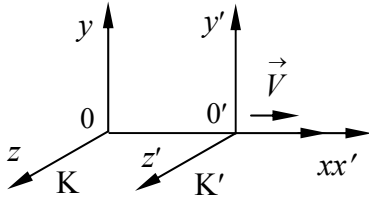


Рис. 1.12

Преобразования Лоренца связывают координаты и время в двух инерциальных системах отчета, движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга.

Пусть одна инерциальная система отчета ( $K'$ ) движется относительно другой ( $K$ ) вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью  $V$  (рис. 1.12).

Тогда координаты  $x, y, z$  и время  $t$  какого-то события в системе  $K$  связаны с координатами  $x', y', z'$  и временем  $t'$  этого же события в системе  $K'$  формулами:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'; \quad (1.24)$$

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (1.25)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.

Следствием из преобразований Лоренца является релятивистское сокращение продольных размеров движущихся объектов. Если, например, неподвижный в системе  $K'$  и ориентированный вдоль оси  $X'$  стержень имеет в этой инерциальной системе отчета длину  $l_0$  (собственная длина), то длина того же стержня в системе  $K$  будет короче (Лоренцево сокращение длины):

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.26)$$

Отметим, что поперечные размеры движущихся объектов не изменяются.

Другим следствием из преобразований Лоренца является замедление хода движущихся часов относительно неподвижных. В частности, если  $\Delta t_0$  – промежуток времени между двумя событиями, совершающимися в какой-то точке инерциальной системы отчета  $K'$ , измеренный по часам, неподвижным в этой инерциальной системе отчета (собственный промежуток времени), то промежуток времени  $\Delta t$  между этими же событиями, измеренный по аналогичным часам, неподвижным в системе  $K$ , определяется формулой:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.27)$$

Тот факт, что  $\Delta t > \Delta t_o$ , интерпретируется как более медленный ход движущихся часов.

Преобразования Лоренца приводят к иному, по сравнению с галилеевским ( $v = v' + V$ ), закону сложения скоростей. Пусть в системе  $K'$  объект движется со скоростью  $v'$  вдоль оси  $X'$ , а система  $K'$ , в свою очередь, движется относительно системы  $K$  вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью  $V$ . Тогда скорость объекта в системе  $K$  определяется формулой:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}. \quad (1.28)$$

Из этой формулы видно, что если  $v' = c$ , то  $v = c$ , т.е. скорость света действительно одна и та же в разных инерциальных системах отчета.

### Момент инерции

*Моментом инерции* тела относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс элементарных («точечных») частей тела на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси (рис. 1.13).

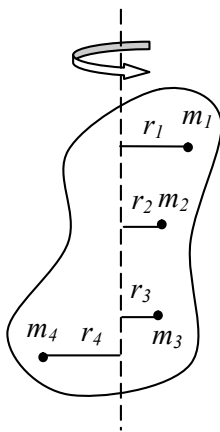


Рис. 1.13

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (1.29)$$

Более точно  $J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$ , где

интегрирование производится по всему объему тела. Единицы измерения момента инерции  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Момент инерции зависит от распределения массы рассматриваемого тела относительно заданной оси (т.е. от формы и размеров тела) и от расположения оси, относительно которой определяется момент инерции.

*Моменты инерции тел правильной формы относительно осей симметрии (осей, проходящих через*

*центр масс):*

1) момент инерции материальной точки с массой  $m$ , находящейся на расстоянии  $r$  от заданной оси.

$$J = mr^2;$$

2) момент инерции однородного сплошного шара

$$J = \frac{2}{5} mR^2, \text{ где } R \text{ – радиус шара;}$$

3) момент инерции однородного сплошного цилиндра или диска относительно его оси

$$J = \frac{1}{2} mR^2, \text{ где } R - \text{ радиус цилиндра (диска);}$$

4) момент инерции тонкостенного цилиндра или кольца

$$J = mR^2, \text{ где } R - \text{ радиус цилиндра (кольца);}$$

5) момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину

$$J = \frac{1}{12} ml^2, \text{ где } l - \text{ длина стержня.}$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется *теоремой Штейнера*:

***Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, параллельной заданной и проходящей через центр масс этого тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.***

$$J = J_0 + ma^2, \quad (1.30)$$

где  $J$  – момент инерции относительно произвольной оси;  $J_0$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;  $a$  – расстояние между осями.

### ***Кинетическая энергия вращающегося тела***

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные части с массами  $m_i$  описывают окружности различных радиусов  $r_i$  и имеют различные линейные скорости  $v_i$ . Однако угловая скорость вращения  $\omega$  всех этих точек одинакова.

Кинетическую энергию вращающегося тела  $W_k$  найдем как сумму кинетических энергий его составных элементарных частей:

$$W_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots = \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2} + \dots = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots),$$

где выражение, стоящее в скобках  $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ , является

*моментом инерции тела относительно оси вращения.*

Тогда выражение для кинетической энергии:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (1.31)$$

В случае плоского движения (например, шар, катящийся без скольжения) энергия движущегося тела равна сумме энергий поступательного и вращательного движений:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (1.32)$$

### Момент силы

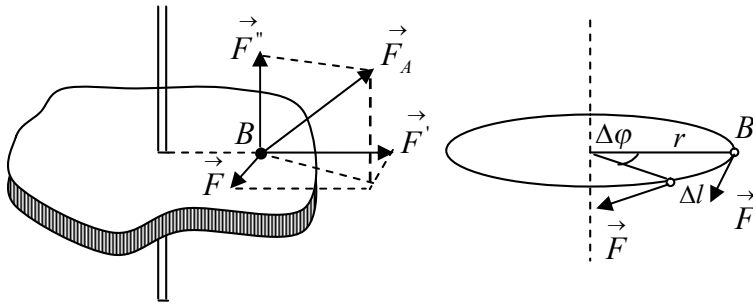


Рис. 1.14

Допустим, что твердое тело (рис. 1.14) может вращаться вокруг неподвижной оси. Для того чтобы вызвать вращение тела (изменить его угловую скорость), необходимо внешнее воздействие.

Однако сила  $F'$ , направление которой проходит через ось вращения, или сила  $F''$ , параллельная этой оси, не могут изменить угловую скорость тел. Поэтому из приложенной к телу внешней силы  $F_A$  можно выделить составляющие  $F'$  и  $F''$ , не вызывающие вращения. Вращение может быть вызвано только силой  $F$  (*вращающей силой*), лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения и направленной по касательной к окружности, которую описывает точка ее приложения (т.  $B$ ).

Произведение радиуса  $r$  (расстояние от оси до точки приложения силы) на силу  $F$  есть *момент вращающей силы  $M$* , или *момент силы*, действующий на данное тело.

Моменту силы можно дать еще и другое определение.

*Моментом силы относительно неподвижной точки  $O$*  (рис. 1.15) является физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $B$  приложения силы,

на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (1.33)$$

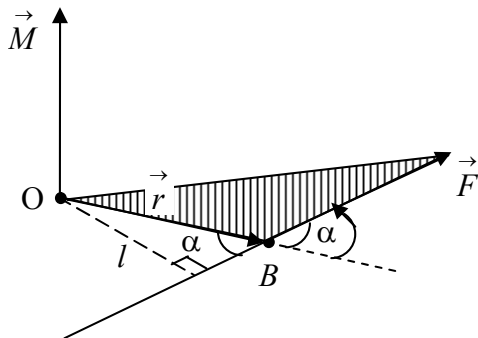


Рис. 1.15

Момент силы является векторной величиной. Его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении так, чтобы направление вектора  $\vec{r}$  приближалось к направлению вектора  $\vec{F}$ .



Единицы измерения момента силы  $H \cdot m$ .

Модуль момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = F l,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ,  $r \sin \alpha = l$  – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O).

Момент силы относительно неподвижной оси  $z$  (рис. 1.16) есть скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента силы  $M$ , определенного относительно произвольной точки O данной оси  $z$ .

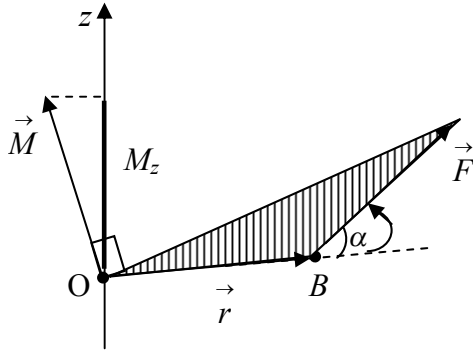


Рис. 1.16

Вращающий момент  $M$ , приложенный к телу, сообщает ему некоторое угловое ускорение  $\varepsilon$ . Найдем связь между величиной вращающего момента и величиной сообщаемого им углового ускорения.

Момент вращающей силы  $M$  равен сумме моментов сил, которые сообщают отдельным составным частям тела  $m_1, m_2, m_3, \dots$  тангенциальные ускорения  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ; эти силы можно представить как  $m_i a_i$ , а их моменты – как  $m_i a_i r_i$ :

$$M = m_1 a_1 r_1 + m_2 a_2 r_2 + m_3 a_3 r_3 + \dots$$

Заменим тангенциальное ускорение на угловое ускорение, которое одинаково для всех частиц вращающегося тела:  $a_1 = r_1 \varepsilon$ ,  $a_2 = r_2 \varepsilon$ ,  $a_3 = r_3 \varepsilon$ , .... Тогда  $M = \varepsilon (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) = J \varepsilon$  или

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \varepsilon. \quad (1.34)$$

Формула (1.34) выражает **основной закон динамики вращательного движения твердых тел**, для которых  $J = \text{const}$ .

### Работа при вращении тела

Определим величину работы, которую совершает вращающая сила, если точка приложения ее перемещается по окружности радиуса  $r$  на расстояние  $\Delta l$  (рис. 1.14). Предположим, что величина силы  $F$  остается постоянной, тогда

$$\Delta A = F \Delta l = F r \Delta \varphi.$$

Произведение силы на радиус есть момент силы, действующий на данное тело. Следовательно, работа, совершаемая вращающим моментом, равна произведению этого момента на угол поворота тела:

$$\Delta A = M \Delta \varphi. \quad (1.35)$$

Если сила  $F$  или ее плечо  $r$  с течением времени изменяются, то совершаемая работа определяется как сумма:

$$A = \sum M_i \Delta \varphi_i; \quad A = \int_0^\alpha M(\varphi) d\varphi.$$

### Момент импульса

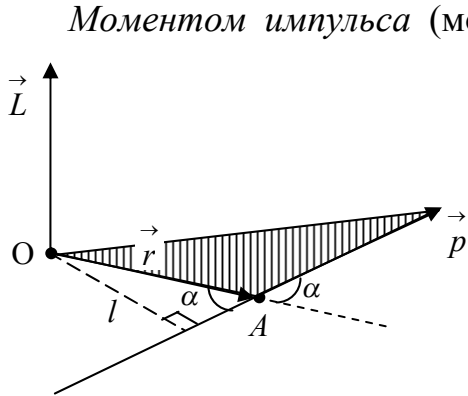


Рис. 1.17

Моментом импульса (момент количества движения) материальной точки  $A$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением (рис. 1.17):

$$\vec{L} = \left[ \vec{r} \times \vec{p} \right], \quad (1.36)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ,  $\vec{p} = m \vec{v}$  – импульс материальной точки. Момент импульса

есть векторная величина, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при таком его вращении, что направление вектора  $\vec{r}$  приближается к направлению вектора  $\vec{p}$ .

Модуль вектора момента импульса  $L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = pl$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ ,  $r \sin \alpha = l$  – плечо вектора  $\vec{p}$  относительно точки  $O$ .

Момент импульса относительно неподвижной оси  $z$  есть скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса  $L$ , определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$ .

Момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции вращающегося тела на угловую скорость вращения:

$$\vec{L} = J \vec{\omega}. \quad (1.37)$$

Вектор момента импульса  $\vec{L}$ , ориентирован по направлению вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Единицы измерения момента импульса  $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$ .

Еще одну форму основного закона механики для тел, вращающихся относительно неподвижной оси, можно записать, если учесть выражение (1.37):

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{dt}. \quad (1.38)$$

## **Законы сохранения в системе**

Силы, действующие в системе, условно делят на две группы: *внутренние силы* – это силы взаимодействия между составными частями системы; *внешние силы* – это силы, приложенные к составным частям системы со стороны тел, не включенных в систему.

Систему, на которую внешние силы не действуют, называют *замкнутой*.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия равна сумме кинетической и потенциальной энергий  $E = E_k + E_n$ .

*Закон сохранения механической энергии.*

***Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.***

$$E_k + E_n = const. \quad (1.39)$$

Если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют также неконсервативные силы, например, силы трения, то полная механическая энергия не сохраняется. Действие сил трения приводит к превращению механической энергии в другие виды энергии (немеханические). В этом случае выполняется *общий закон сохранения энергии*.

***В изолированной системе сумма всех видов энергии с течением времени не изменяется.***

$$E_1 + E_2 + E_3 + \dots = const. \quad (1.40)$$

*Закон сохранения импульса.*

Рассмотрим механическую систему из нескольких тел. Пусть  $f_1, f_2, \dots$  – внутренние силы взаимодействия между телами, а  $F_1, F_2, \dots$  – внешние силы (или равнодействующие внешних сил, если их несколько). Допустим, что  $\Delta t$  – промежуток времени, в течение которого каждую из этих сил можно считать постоянной. Тогда на основании формулы  $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$  для каждого из тел можно записать

$$\left( \vec{F}_1 + \vec{f}_1 \right) \Delta t = m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_{10},$$

$$\left( \vec{F}_2 + \vec{f}_2 \right) \Delta t = m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_{20},$$

.....

где  $v_{10}, v_{20}$  – начальные скорости тел;  $v_1, v_2$  – их скорости по истечении времени  $\Delta t$ . Правые части уравнений выражают изменение импульса тел за время  $\Delta t$ . Сложив левые и правые части уравнений, найдем суммарное изменение импульса в системе:

$$\left( \sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i \right) \Delta t = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_{i0}.$$

Векторная сумма всех внутренних сил в системе равна нулю по третьему закону механики, поэтому суммарный импульс в системе может быть изменен только под действием внешних сил, т.е.:

$$\sum \vec{F}_i \Delta t = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_{i0}.$$

На основе этого выражения можно сформулировать закон сохранения импульса.

**Если на систему внешние силы не действуют или их векторная сумма равна нулю, то суммарный импульс в системе с течением времени не изменяется:**

$$\sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{v}_{i0}, \quad \sum m_i \vec{v}_i = const. \quad (1.41)$$

*Закон сохранения момента импульса.*

Рассмотрим систему из двух взаимодействующих тел, прилегающих друг к другу, согласно выражению  $\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$ , равные по величине и

противоположно направленные вращающие моменты  $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ . Для каждого из этих тел можно написать уравнение:

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 \Delta t &= J_1 \vec{\omega}_1 - J_1 \vec{\omega}_{10}, \\ \vec{M}_2 \Delta t &= J_2 \vec{\omega}_2 - J_2 \vec{\omega}_{20}, \end{aligned}$$

где  $\omega_{10}, \omega_{20}$  – начальные угловые скорости тел;  $\omega_1, \omega_2$  – их скорости по истечении времени  $\Delta t$ . Сложив эти уравнения и учитывая, что  $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$ , получим  $J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2 = J_1 \vec{\omega}_{10} + J_2 \vec{\omega}_{20}$ , т.е. за время взаимодействия  $\Delta t$  суммарный момент импульса в системе не изменился. Этот результат можно получить для любой механической системы, состоящей из многих вращающихся тел.

**Если на механическую систему внешние вращающиеся моменты не действуют, то векторная сумма моментов импульсов составных частей системы с течением времени не изменяется:**

$$\sum J_i \vec{\omega}_i = const. \quad (1.42)$$

Это выражение называют законом сохранения момента импульса.

## 2. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### Гармонические колебания и их характеристики

*Колебаниями* называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Простейшим типом колебаний являются *гармонические колебания* – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.1)$$

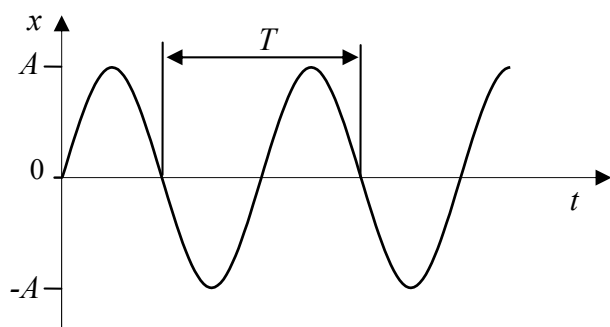


Рис. 2.1

где  $x$  – колеблющаяся величина (смещение, скорость, сила и т.д.);  $A$  – максимальное значение колеблющейся величины, называемое *амплитудой колебаний*;  $(\omega_0 t + \varphi)$  – *фаза колебаний*;  $\omega_0$  – *круговая (циклическая) частота*;  $t$  – время;  $\varphi$  – начальная фаза колебаний (рис.2.1). Фаза колебания определяет значение

колеблющейся величины в данный момент времени. Начальная фаза колебания определяет значение  $x$  в начальный момент времени: для синусоидального колебания при  $t=0$ ,  $x = A \sin \varphi$ .

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени  $T$ , называемый *периодом колебаний*, за который фаза колебаний получает приращение  $2\pi$ . Если в момент времени  $t$  фаза колебаний какой-либо величины была равна  $\omega_0 t + \varphi$ , то через время  $T$  фаза оказывается равной  $\omega_0(t+T) + \varphi$ .

Приравняв изменение фазы к  $2\pi$ , получим:

$$[\omega_0(t+T) + \varphi] - (\omega_0 t + \varphi) = 2\pi;$$

$$\omega_0 T = 2\pi;$$

и окончательно, соотношение между частотой и периодом:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.2)$$

Величина, обратная периоду колебаний,  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$  т.е. число колебаний, совершаемых в единицу времени, называется *частотой колебаний*. Величина  $\nu$  имеет единицы измерения  $1/c = Гц$ .

Для описания колебательного движения сплошного твердого тела удобнее измерять углы поворота  $\alpha$  от равновесного состояния. Гармонические колебания для углов поворота имеют вид  $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $\alpha_0$  – амплитуда угла поворота.

## **Скорость, ускорение колеблющегося тела. Сила, действующая на колеблющееся тело**

Допустим, что  $x$  – смещение колеблющегося тела относительно положения равновесия, причем начало отчета времени выбрано так, чтобы  $\varphi=0$ . Тело совершает гармонические колебания, если  $x=A \sin\omega_0 t$ , причем  $A$  и  $\omega$  должны быть постоянными величинами.

Скорость тела найдем как производную от  $x$  по времени:  $v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos\omega_0 t$ ;

$$v = v_0 \cos\omega_0 t = v_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2), \quad (2.3)$$

где  $v_0=A\omega_0$  – максимальное значение (т.е. амплитуда) скорости. Выражение для скорости показывает, что скорость тела, так же как и смещение, изменяется со временем по гармоническому закону с той же частотой  $\omega_0$ , но имеет фазу, отличающуюся от фазы смещения на  $\pi/2$ ; в моменты времени, когда смещение  $x$  равно нулю, скорость тела приобретает наибольшие значения.

Так как скорость тела при гармоническом колебании непрерывно изменяется, то это движение является ускоренным; при этом величина ускорения изменяется со временем также по гармоническому

закону:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega_0 \cos\omega_0 t) = -A\omega_0^2 \sin\omega_0 t$ ;

$$a = -a_0 \sin\omega_0 t = a_0 \sin(\omega_0 t + \pi), \quad (2.4)$$

где  $a_0=A\omega_0^2=v_0\omega$  – максимальное (амплитудное) значение ускорения. Фаза ускорения отличается от фазы смещения на  $\pi$ , а от фазы скорости на  $\pi/2$ .

Перепишем выражение  $a=-A\omega_0^2 \sin\omega_0 t$  с учетом  $x=(A\sin\omega_0 t)$ , тогда ускорение  $a = -\omega_0^2 x$ . *Итак, при гармоническом колебательном движении, ускорение тела прямо пропорционально смещению от положения равновесия и имеет противоположный ему знак.*

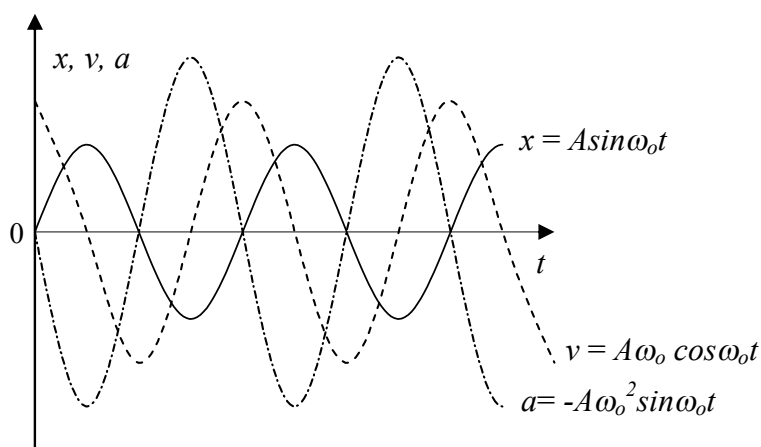


Рис. 2.2

На рис. 2.2 показаны изменения смещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  с течением времени. Запишем в формуле  $a=-\omega_0^2 x$  ускорение  $a$  как  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  и получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний; оно связывает колеблющуюся величину  $x(t)$  с ее второй производной по времени. Можно утверждать, что если  $x(t)$  изменяется со временем согласно (2.1), то она удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.5). И обратно: если какая-либо переменная физическая величина  $x(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.5), то она изменяется по гармоническому закону с постоянными значениями  $A$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi$ .

Всякое колебательное движение есть движение, происходящее с ускорением, поэтому на колеблющиеся тела должны действовать силы, сообщающие им эти ускорения. Согласно второму закону механики, на точечное тело массой  $m$ , совершающее гармонические колебания, действует сила, равная (с учетом  $a = -\omega_0^2 x$ ):

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx, \text{ где } k = m\omega_0^2 \text{ – силовая постоянная.}$$

Таким образом, для того чтобы тело совершало гармоническое колебательное движение, на него должна действовать сила, всегда направленная к положению равновесия, а величина этой силы – прямо пропорциональна смещению от этого положения.

Из соотношения  $k = m\omega_0^2$  можно вычислить частоту и период колебания.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

### **Энергия при гармонических колебаниях**

Колебательные движения в механических системах сопровождаются периодическими превращениями кинетической энергии колеблющихся тел в потенциальную энергию взаимодействия частей системы и обратно. Энергией колебаний называют ту часть полной энергии системы, которая участвует в этих превращениях.

*Кинетическая энергия* материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.6)$$

или с учетом выражения  $k = m\omega_0^2$

$$W_k = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.7)$$

*Потенциальная энергия* материальной точки, совершающей гармонические колебания, равна:



$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.8)$$

Сложив (2.6) и (2.8), получим формулу для *полной энергии*:

$$W = W_k + W_n, \\ W = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (2.9)$$

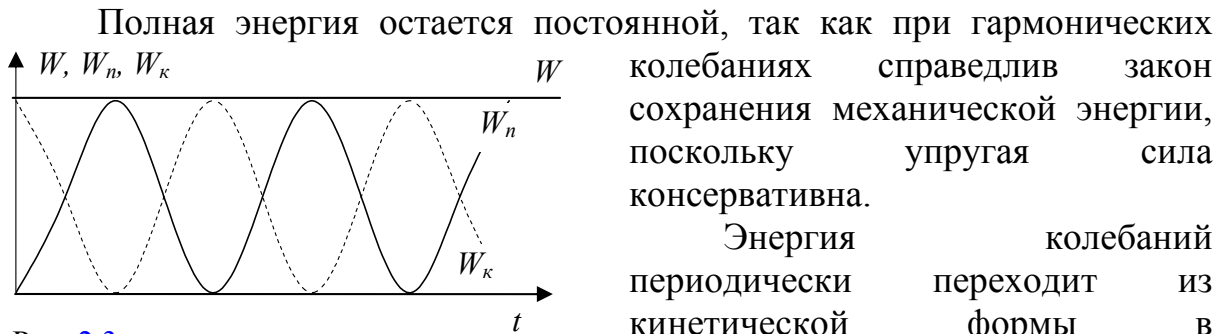


Рис. 2.3

колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Энергия колебаний периодически переходит из кинетической формы в потенциальную; период этих

превращений вдвое меньше периода самих колебаний, так как амплитудные значения смещения  $\pm x$  или скорости  $\pm v$  появляются два раза за период, а энергия не зависит от знака этих величин.

На рис. 2.3 представлены графики зависимости  $W_k$ ,  $W_n$  и  $W$  от времени.

### Пружинный, физический и математический маятники

*Пружинный маятник* — это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$ , где  $k$  — коэффициент упругости, в случае пружины называемый жесткостью.

Период колебания пружинного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.10)$$

*Физический маятник* — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела.

При крутильных (поворотных) колебаниях на тело действует возвращающий момент, приостанавливающий отклонение тела от состояния равновесия и затем сообщающий ему обратное движение. При малых углах отклонения этот момент прямо пропорционален углу отклонения.

Если крутильные колебания гармонические, т.е.

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega_0 t, \quad (2.11)$$

$\alpha_0$  — амплитуда угла поворота,



то угловая скорость и угловое ускорение  $\varepsilon$  при повороте также изменяются по гармоническому закону:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_0 \omega_0 \cos \omega_0 t; \quad \varepsilon = -\alpha_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t \text{ с учетом формулы (2.11), получим}$$

$$\varepsilon = -\omega_0^2 \alpha.$$

Возвращающий момент найдем как произведение углового ускорения на момент инерции колеблющегося тела:

$$M = J\varepsilon = -J\omega_0^2 \alpha = -D\alpha, \quad (2.12)$$

где  $D = J\omega_0^2$  – постоянная величина (если момент инерции тела при колебаниях не изменяется)

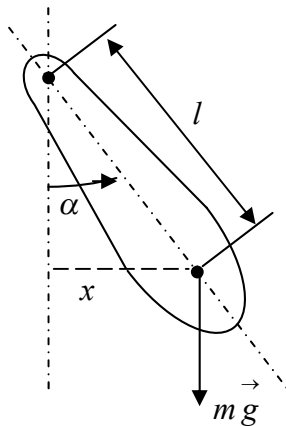


Рис. 2.4

В случае физического маятника (рис. 2.4) возвращающим моментом является момент силы тяжести, имеющий знак, противоположный знаку угла отклонения  $\alpha$  и равный

$M = -mgx = -mgl \sin \alpha$ , где  $l$  – расстояние от точки опоры до центра тяжести тела.

При малых углах отклонения  $\sin \alpha \approx \alpha$ , возвращающий момент пропорционален углу отклонения и с учетом формулы (2.12)

$$M = -mgl\alpha = -J\omega_0^2 \alpha,$$

$mgl = J\omega_0^2$ , отсюда найдем частоту и период колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (2.13)$$

Если  $L = \frac{J}{ml}$  – приведенная длина физического маятника, то выражение для периода колебаний физического маятника можно переписать  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ .

*Математический маятник* – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Примером математического маятника может служить небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

Поскольку математический маятник считают частным случаем *физического маятника*, то, используя формулу (2.13), можно найти выражение для периода колебаний математического маятника. Подставим выражение  $J=ml^2$  в формулу (2.13) и получим выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.14)$$

### **Затухающие колебания. Вынужденные колебания**

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, в которой колебания происходят вдоль оси ОХ. Согласно второму закону механики, движение тела должно определяться уравнением:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_i. \quad (2.15)$$

Правая часть этого уравнения есть сумма всех сил, действующих на тело; допустим, что в этой сумме содержатся только три силы:

1) сила упругости, пропорциональная смещению тела от положения равновесия  $F_1 = -kx$ ;

2) сила трения, пропорциональная скорости тела  $F_2 = -rv = -r \frac{dx}{dt}$ ,

$r$  – коэффициент сопротивления среды; (знак минус указывает, что направление силы трения всегда противоположно направлению скорости движения);

3) внешняя сила, непрерывно изменяющаяся со временем по какому-нибудь закону, в частности, предположим, что внешняя сила является синусоидальной  $F_3 = F_o \sin \Omega t$ .

Если силы трения и внешняя периодическая сила отсутствуют, то формула (2.15) преобразуется в дифференциальное уравнение

$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$ , полученное нами ранее (2.5), которое имеет решение в виде  $x = A \sin(\omega_o t + \varphi)$ .

Колебания, происходящие при отсутствии внешних сил и трения, называются *собственными*; частота собственных колебаний  $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$  зависит только от свойств системы.

Колебания, совершающиеся в системе при отсутствии внешних сил (но при наличии потерь на трение) называют *свободными затухающими колебаниями*.

В случае действия в системе двух сил  $F_1$  и  $F_2$ , уравнение движения тела будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (2.16)$$

Разделим это уравнение на массу тела и обозначим  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,

$$\frac{r}{m} = 2\delta.$$

Получим *дифференциальное уравнение*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.17)$$

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin \omega t, \quad (2.18)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,  $\omega_0$  – циклическая частота незатухающих колебаний той же колебательной системы, которые совершались бы при отсутствии сил трения (собственная частота колебательной системы);  $\delta$  – коэффициент затухания.

График этой функции изображен на [рис. 2.5](#).

Итак, если на тело кроме силы упругости действует сила трения, то тело будет совершать колебательное движение с частотой, зависящей от  $m$ ,  $k$  и  $\delta$ . Амплитуда колебаний (т.е.  $x$  при  $\sin \omega t = 1$ ) будет с течением времени изменяться (убывать) по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\delta t}. \quad (2.19)$$

Колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается, называются *затухающими колебаниями*.

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (2.20)$$

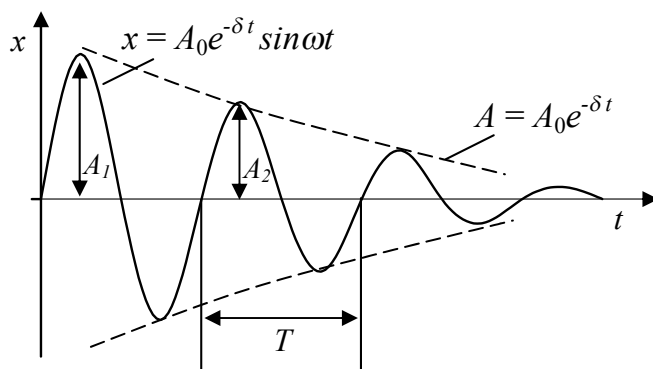


Рис. 2.5

Величина  $\delta = \frac{r}{2m}$ ,

определяющая быстроту убывания амплитуды с течением времени, называется *коэффициентом затухания*; ее размерность  $1/\text{с}$ . Промежуток времени  $\tau = \frac{1}{\delta}$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется *временем релаксации*.

Произведение коэффициента затухания на период колебания  $T$ , равное натуральному логарифму отношения двух амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, есть безразмерная величина и называется *логарифмическим декрементом затухания*.

$$D = \ln \frac{A_{(t)}}{A_{(t+T)}} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (2.21)$$

где  $N_e$  – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы величина.

В случае действия в системе всех трех вышеупомянутых сил уравнение движения тела будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \Omega t. \quad (2.22)$$

Разделим левую и правую части этого уравнения на массу тела и наряду с обозначениями  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  и  $\frac{r}{m} = 2\delta$  примем  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ .

Тогда уравнение (2.22) запишется:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t. \quad (2.23)$$

Если на колеблющееся тело действует периодически изменяющаяся сила с частотой  $\Omega$ , то тело совершает колебания с той же частотой, причем амплитуда колебаний будет зависеть от амплитуды и частоты внешней силы, коэффициента затухания, упругих свойств системы и массы колеблющегося тела; такие колебания называются *вынужденными колебаниями*.

$$\text{Амплитуда вынужденных колебаний } A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\delta^2}}, \quad (2.24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

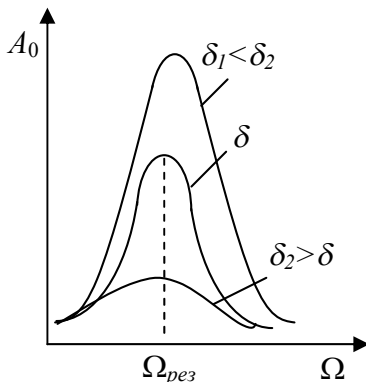


Рис. 2.6

При некоторой частоте внешней силы  $\Omega$  знаменатель в формуле (2.24) будет иметь минимальное, а амплитуда вынужденных колебаний  $A_0$  – максимальное значение. Частота  $\Omega_{рез}$ , при которой амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение, называется *резонансной частотой*.

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (2.25)$$

Итак, для данной колебательной системы, имеющей собственную частоту колебаний  $\omega_0$ , резонансная частота внешней силы зависит от коэффициента затухания. Наименьшая частота  $\Omega_{рез} \approx 0$  соответствует

предельному соотношению  $2\delta^2 \approx \omega_0^2$ ,  $\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ ; при этом период внешней силы  $T=2\pi/\Omega$  равен бесконечности, а  $A_0 = f_0/\omega_0^2$ . По мере уменьшения коэффициента затухания  $\delta$  резонансная частота внешней силы увеличивается, а при  $\delta = 0$ ,  $\Omega_{рез} = \omega_0$ ,  $A_0 \rightarrow \infty$ . На [рис. 2.6](#) показан характер изменения амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от  $\Omega$  и  $\delta$  при данном  $\omega_0$ . Чем меньше коэффициент затухания, тем резче изменяется амплитуда вынужденных колебаний при приближении частоты внешней силы к резонансному значению, т.е. тем выше является максимум  $A_0$ . При  $\Omega \approx 0$  амплитуда вынужденных колебаний одинакова для всех  $\delta$  и равна  $A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{mf_0}{k} = \frac{F_0}{k}$  т.е. соответствует тому отклонению колеблющейся системы от равновесного положения, которое вызывает при  $\Omega=0$  статическая сила  $F_0$ .

### **Сложение гармонических колебаний**

В некоторых системах колеблющееся тело может одновременно участвовать в двух независимых колебательных движениях. В связи с этим возникает необходимость найти результирующее движение тела. Рассмотрим некоторые простые случаи сложения гармонических колебаний.

1. *Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.*

Сложим два колебания, описываемые уравнениями:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Уравнение результирующего колебания будет:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  задаются соотношениями:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (2.26)$$

Итак, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает такое же гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Но амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  складываемых колебаний:

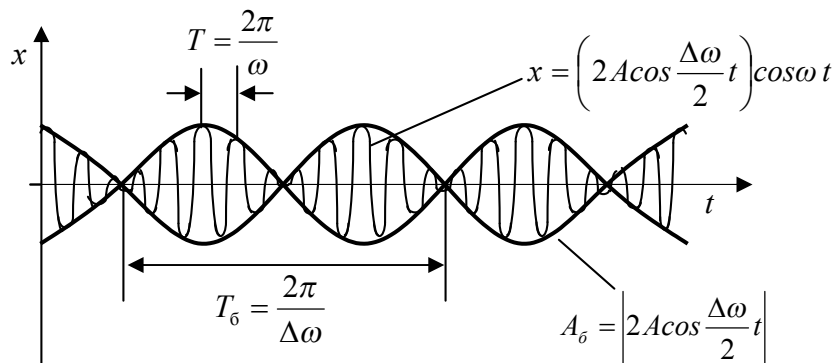
а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), тогда  $A = A_1 + A_2$ , т.е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний.

б)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n+1)\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), тогда  $A = A_1 - A_2$ , т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

2. Сложение гармонических колебаний одного направления и мало отличающихся по частоте.

Сложим два колебания, описываемые уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \omega t, \\ x_2 &= A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{aligned}$$



Амплитуды складываемых колебаний равны  $A$ , частоты равны  $\omega$  и  $(\omega + \Delta\omega)$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Пусть начальные фазы обоих колебаний равны нулю.

Рис. 2.7

Уравнение результирующего колебания:

$$x = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (2.27)$$

Результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$ , амплитуда  $A_б$  которого изменяется по периодическому закону  $A_б = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$ .

Итак, в результате сложения колебаний, мало отличающихся по частоте, получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются *биениями*. Характер зависимости (2.27) показан на рис. 2.7.

3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Сложим два колебания, описываемые уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Колебания происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$ . Амплитуды складываемых колебаний равны  $A$  и  $B$ , частоты равны  $\omega$ , разность фаз колебаний  $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ .

Уравнение результирующего колебания:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \Delta\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \Delta\varphi. \quad (2.28)$$

Траектория результирующего колебания имеет форму эллипса. Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз. Рассмотрим примеры:

а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi/2$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), тогда уравнение примет вид  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ . Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам. Если  $A=B$ , тогда эллипс вырождается в окружность.

б)  $\varphi_2 - \varphi_1 = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), тогда эллипс вырождается в отрезок прямой  $y = \pm(B/A)x$ .

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания является сложной. Замкнутые траектории, описываемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются *фигурами Лиссажу*.

### Волновые процессы

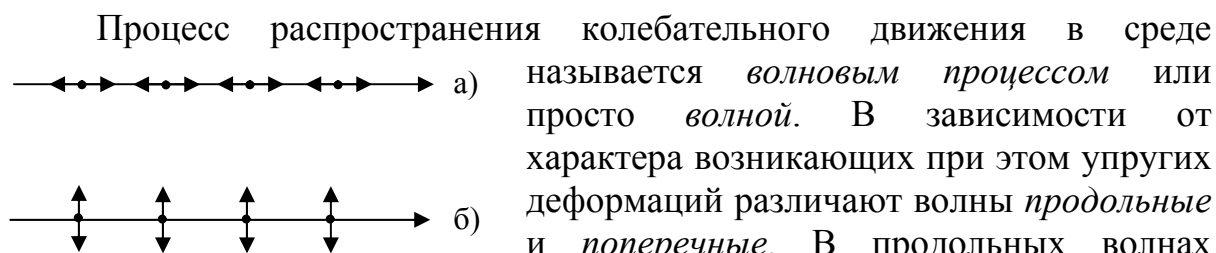


Рис. 2.8

Жидкие и газообразные среды не обладают сопротивлением сдвига, поэтому в них возбуждаются только продольные волны. Волны, возбуждаемые на поверхности воды, являются поперечными; они обязаны своим существованием земному тяготению. В твердых телах могут быть вызваны продольные и поперечные волны.

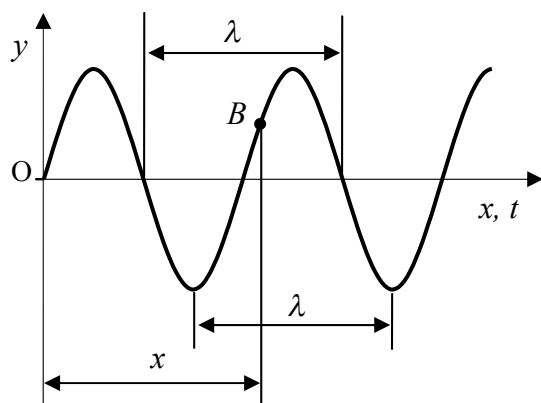


Рис. 2.9

График гармонической поперечной волны, распространяющейся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , представлен на рис. 2.9. Он показывает зависимость между  $y$  — смещением частиц среды от своих



положений равновесия, участвующих в волновом процессе, и расстоянием  $x$  этих частиц (например, частицы  $B$ ) от источника колебаний  $O$  для какого-то фиксированного момента времени  $t$ . Приведенный график  $y(x,t)$  похож на график гармонического колебания, однако они различны по своей сути. График волны дает зависимость смещения *всех частиц среды* от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний – зависимость смещения *данной (одной) частицы* от времени.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны* ( $\lambda$ ). *Длина волны* равна расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период:  $\lambda = vT$ .

При более внимательном рассмотрении волнового процесса становится понятным, что колеблются не только частицы, расположенные на оси  $x$ , а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, охваченном волновым процессом. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется *фронтом волны*. Форма волновой поверхности и фронта волны определяется конфигурацией источника колебаний и свойствами среды.

### Уравнение плоской бегущей волны

Пусть волновой процесс распространяется вдоль оси  $Ox$ . Обозначим через  $y$  колеблющуюся величину – смещение частиц среды относительно

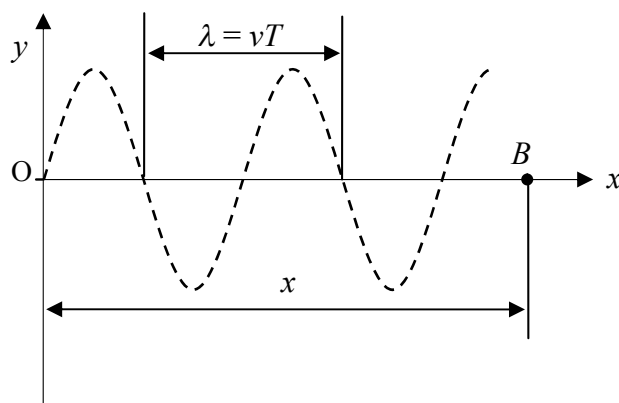


Рис. 2.10

их положения равновесия. Предположим, что распространяющаяся волна – синусоидальная, т.е. в каждой точке среды величина  $y$  изменяется во времени по гармоническому закону. Выберем начало отчета времени так, чтобы в точке  $O$  в момент времени  $t = 0$  начальная фаза  $\varphi = 0$ . Тогда колебания частиц при начальной координате  $x=0$

запишутся как  $y=A \sin \omega t$ , где  $A$  – амплитуда колебаний;  $\omega = 2\pi/T$ ;  $\omega t$  – фаза колебаний в точке  $O$ . Найдем фазу колебаний в любой произвольной точке, например, т.  $B$ , отстоящей от начала координат (т.  $O$ ) на расстоянии  $x$  (рис. 2.10). Поскольку точка  $B$  расположена относительно  $O$  дальше, то колебания в точке  $B$  начнутся с запозданием на время  $\tau$ , которое нужно, чтобы волна прошла расстояние  $x$ . Если обозначить скорость



распространения фазы колебаний в направлении ОХ (скорость волны) через  $v$ , то время запаздывания  $\tau = x/v$ . Таким образом, время от начала колебаний в точке  $B$  по сравнению с колебаниями в точке  $O$  будет меньше времени  $t$  на величину запаздывания  $\tau = x/v$ , и фаза колебаний в точке  $B$  в момент  $t$  будет равна  $\omega(t-x/v)$ .

Тогда колебания в точке  $B$  будут описываться уравнением:

$$y = A \sin \omega(t - x/v) \quad \text{или} \quad y = A \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{Tv} \right). \quad (2.29)$$

Очевидно, что подобные рассуждения можно провести для любой произвольной точки среды, т.е. уравнения (2.29) описывают колебания любых точек среды, вовлеченных в волновой процесс. Поэтому уравнения (2.29) могут быть названы уравнениями волны.

Для характеристики волн используется *волновое число*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Перепишем уравнение волны (2.29) с учетом выражения для волнового числа  $k$ , тогда *уравнение бегущей волны в общем виде* запишется как

$$y(x,t) = A \sin(\omega t \pm kx), \quad (2.30)$$

где знак минус берется для волны, распространяющейся в направлении возрастания  $x$ , а плюс – в обратном направлении.

При выводе формулы волны предполагалось, что амплитуда колебаний  $A$  по мере распространения волны не изменяется и среда однородна. Эти два предположения означают, что волна – плоская. У сферической бегущей волны амплитуда колебаний уменьшается обратно пропорционально расстоянию, и формула волны имеет вид:

$$y = \frac{A}{x} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad \text{или} \quad y = \frac{A}{x} \sin(\omega t - kx). \quad (2.31)$$

### Поток энергии в волновых процессах

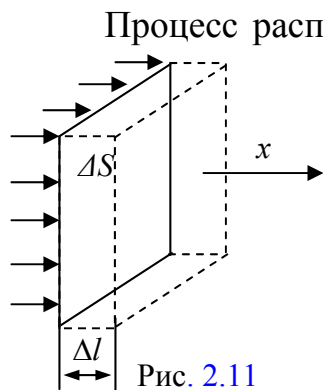


Рис. 2.11

Процесс распространения волны в каком-либо направлении в среде сопровождается переносом энергии колебаний в этом направлении. Пусть площадка  $\Delta S$  есть часть фронта плоской волны в некоторый момент  $t$  (рис. 2.11). По истечении времени  $\Delta t$  фронт волны переместится на расстояние  $\Delta l = v\Delta t$ , вследствие чего частицы среды в объеме  $\Delta V = \Delta S \Delta l$  придут в колебательное движение. Обозначим через  $w$  энергию колебаний частиц в среде, содержащихся в единице объема (плотность энергии); допустим, что объем  $\Delta S \Delta l$  очень мал, и

поэтому в пределах этого объема плотность энергии  $w$  можно считать одинаковой.

Определим *поток энергии волны* как энергию  $\Delta E$ , переносимую волной через площадку  $\Delta S$  ( $\Delta S$  ориентируют перпендикулярно направлению распространения волны) за единицу времени:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Определим *плотность потока энергии* как энергию, переносимую волной в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной направлению распространения волны.

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S}.$$

Умножим числитель и знаменатель на расстояние  $\Delta l$ , проходимое волной за время  $\Delta t$ , и, приняв во внимание, что  $\frac{\Delta l}{\Delta t} = v$ ,  $\Delta S \Delta l = \Delta V$  и  $\frac{\Delta E}{\Delta V} = w$ , получим:

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} = \frac{\Delta E \Delta l}{(\Delta S \Delta l) \Delta t} = wv. \quad (2.32)$$

Величина  $j$  является вектором, направленным так же как и вектор скорости  $v$ , и называется вектором Умова-Пойнтинга.

Плотность энергии  $w$  изменяется по периодическому закону. Поэтому величина  $j$  также изменяется по периодическому закону. Если усреднить эту величину по времени, то получим величину  $I$ , называемую *интенсивностью волны*:

$$\langle j \rangle = I = \frac{\rho A^2 \omega^2 v}{2}, \quad (2.33)$$

где  $\rho$  – плотность среды.

Поток энергии выражается в  $Вт$ , плотность потока – в  $Вт/м^2$ .

### **Стоячие волны**

*Стоячие волны* – волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн с одинаковыми частотами и амплитудами, распространяющихся навстречу друг другу. Стоячая волна наблюдается при интерференции бегущей и отраженной волн.

Уравнение волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  и удаляющейся от источника:

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx).$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  навстречу первой:

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx).$$

Сложив левые и правые части этих уравнений, получим уравнение стоячей волны:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos(\omega t). \quad (2.34)$$

Из уравнения стоячей волны вытекает, что каждая материальная точка среды совершает гармонические колебания с той же частотой  $\omega$ , что и у встречных волн, но с амплитудой  $A_{cm} = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ , зависящей от координаты  $x$  рассматриваемой точки.

Для точек среды, где  $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi$  ( $n=0,1,2,\dots$ ), амплитуда колебаний достигает максимального значения  $A_{cm}=2A$ ; геометрические места, где расположены эти точки, называют *пучностями стоячей волны*.

Геометрические места, для которых выполняется условие  $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi$  ( $n=0,1,2,\dots$ ), называются *узлами стоячей волны*.

Амплитуда колебаний точек среды в узлах обращается в нуль  $A_{cm}=0$ .

Координаты пучностей и узлов:

$$x_{пуч} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$x_{узел} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

График стоячей волны изображен на [рис. 2.12](#).

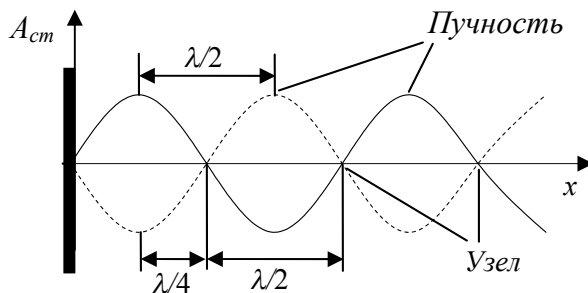


Рис. 2.12

Образование узла или пучности на границе, где происходит отражение волны, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность, если более плотная – узел.

Расстояние между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаково и носит название *длина стоячей волны*  $\lambda_{cm}$ . Между длинами стоячей и бегущей волн существует соотношение:

$$\lambda_{cm} = \lambda/2.$$

Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно  $\lambda/4$ .

Отметим характерные различия стоячей и бегущей волны:

1. В стоячей волне амплитуды колебаний различны в разных местах среды: имеются узлы и пучности колебаний. В бегущей волне эти амплитуды везде одинаковы.

2. В пределах участка среды от одного узла до соседнего все точки среды колеблются в одинаковой фазе, при переходе к соседнему участку фазы колебаний меняются на обратные. В бегущей волне фазы колебаний, зависят от координат точек.

3. В стоячей волне нет направленного переноса энергии и импульса, как это имеет место в бегущей волне.

### 3. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

#### ***Уравнение состояния. Законы идеального газа***

Физические величины, характеризующие то или иное состояние вещества, называют *параметрами состояния*. Основными параметрами являются объем  $V$ , внешнее давление  $p$  и температура  $T$ . Если между параметрами состояния существует определенное однозначное соотношение, которое сохраняется при переходе из одного состояния в другое, то это соотношение называется *уравнением состояния*:  $f(p, V, T) = 0$ . В этом выражении каждая из переменных является функцией двух других.

*Температура* – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Для измерения температуры применяют, в основном, две температурные шкалы – *термодинамическую* и *Международную практическую*, градуированные соответственно в кельвинах ( $K$ ) и в градусах Цельсия ( $^{\circ}C$ ).

*Термодинамическая температура  $T$  и температура по Международной практической шкале  $t$  связаны соотношением:*

$$T = 273,15 + t.$$

*Давлением* называют отношение силы давления, действующей на участок, к площади этого участка:  $p = F/S$ . Единицами давления являются  $1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$ . внесистемными единицами измерения давления являются физическая или нормальная атмосфера (*атм*), давление, измеряемое в миллиметрах ртутного столба (*мм рт. ст.*). Соотношения между единицами измерения давления:

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133,0 \text{ Н/м}^2, 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

*Удельный объем* – это объем, занимаемый единицей массы  $v = V/m = 1/\rho$  (где  $\rho$  – удельная плотность).

Закон Бойля – Мариотта: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const} \text{ при } T = \text{const}, m = \text{const}. \quad (3.1)$$

Закон Гей – Люссака: при постоянном давлении объём постоянной массы газа пропорционален абсолютной температуре:

$$\frac{V}{T} = const \quad \text{при } p=const, m=const. \quad (3.2)$$

Закон Шарля: давление газа данной массы и данного объема прямо пропорционально абсолютной температуре газа:

$$\frac{p}{T} = const \quad \text{при } V=const, m=const. \quad (3.3)$$

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы; при нормальных условиях этот объем равен  $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

В одном моле различных веществ содержится одинаковое число молекул, называемое числом Авогадро (постоянной Авогадро):

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль.}$$

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:  $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$ , где  $p_1, p_2, p_3, \dots$  – парциальное давление газа – давление, которое оказывал бы газ смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

Уравнение Клапейрона–Менделеева называют уравнением состояния идеального газа.

$$pV = \nu RT, \quad (3.4)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная. Ее значение можно вычислить на основании закона Авогадро, подставив в формулу  $\frac{pV_m}{T} = R$  значения давления, температуры и объема при нормальных условиях для одного моля газа:

$$R = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 22,4}{273} \frac{(\text{Н/м}^2) \text{ м}^3}{\text{град} \cdot \text{кмоль}} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{град} \cdot \text{моль}},$$

$\nu$  – количество вещества (число молей), выражается в молях

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}, \quad (3.5)$$

где  $m = Nm_0$  – масса газа, кг;  $N$  – число молекул;  $m_0$  – масса одной молекулы;  $M$  – молярная масса (масса одного моля вещества), кг/моль;  $N_A$  – постоянная Авогадро.

Учитывая формулу (3.5), уравнение Клапейрона–Менделеева можно записать:

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M} RT = \frac{N}{N_A} RT. \quad (3.6)$$

Поскольку  $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К есть *постоянная Больцмана*, то

уравнение (3.6) можно переписать:

$$pV = NkT. \quad (3.7)$$

Разделив выражение (3.7) на объем  $V$ , получим еще один вид уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$p = nkT, \quad (3.8)$$

где  $n = \frac{N}{V}$  – число молекул в единице объема.

### Основное уравнение кинетической теории газов

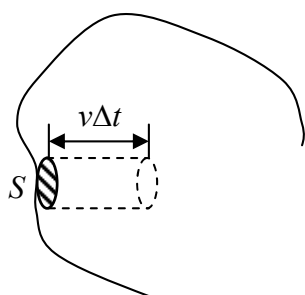


Рис. 3.1

При беспорядочном движении частицы газа сталкиваются между собой и со стенками сосуда. Механическое действие этих ударов о стенки сосуда воспринимается как давление на эти стенки. Рассчитаем это давление. Выделим на стенке сосуда (рис. 3.1) некоторую элементарную площадку  $S$  и найдем давление, оказываемое на эту площадку. Обозначим через  $v$  среднюю скорость частиц,  $N$  – число частиц газа,  $V$  – объем газа,  $n$  – число частиц в

единице объема ( $n=N/V$ ).

Построим на площадке  $S$  цилиндр с высотой  $v\Delta t$  и объемом  $Sv\Delta t$ , где  $\Delta t$  – малый промежуток времени, за который частицы достигнут площадки  $S$ . Число частиц в этом объеме равно  $\Delta N = nSv\Delta t$ . За время  $\Delta t$  некоторая часть частиц дойдет до площадки  $S$  и ударится об нее. При каждом ударе одной частицы о площадку  $S$  произойдет передача импульса стенке и импульс частицы изменится. Пусть столкновения частиц со стенкой носят упругий характер (т.е. обмена энергией между частицей и стенкой не происходит и, следовательно, при отражении от стенки меняется только направление импульса частицы, а модуль импульса остается неизменным).

Рассчитаем суммарное изменение импульса всех частиц, которые за единицу времени ударились и отскочили от площадки  $S$ , и приравняем эту величину силе, действующей на площадку  $S$ , поскольку, согласно формуле (1.18),  $dp = Fdt$ .

Для упрощения рассуждений и расчетов, опишем беспорядочное движение частиц следующим образом. Допустим, что движение частиц происходит по трем взаимно перпендикулярным направлениям, так что вдоль каждого из них движется  $1/3$  частиц, причем половина молекул  $1/6$  движется вдоль данного направления в одну сторону, другая половина в противоположную. Таким образом, за время  $\Delta t$  число ударов частиц о площадку  $S$  будет равно  $\frac{1}{6}nSv\Delta t$ . При каждом (абсолютно упругом) ударе

частицы о стенку импульс этой частицы изменяется на  $m_0v - (-m_0v) = 2m_0v$ , где  $m_0$  – масса частицы. Общее изменение импульса частиц газа на этой площадке равно:

$$\Delta p = 2m_0v \frac{1}{6} nSv\Delta t = \frac{1}{3} nm_0v^2 S\Delta t.$$

Сила, действующая на площадку  $S$  со стороны газа, равна изменению импульса всех частиц в единицу времени:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{3} nm_0v^2 S.$$

Давление газа, оказывающего действие на поверхность стенок сосуда, будет равно  $p = F/S$ :

$$p = \frac{1}{3} nm_0v^2. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) называется *основным уравнением кинетической теории газов*.

Заменим  $n$  на  $N/V$  в формуле (3.9):

$$pV = \frac{1}{3} Nm_0v^2.$$

Если скорости движения молекул разные, то

$$pV = \sum \left( \frac{1}{3} N_1 m_0 v_1^2 + \frac{1}{3} N_2 m_0 v_2^2 + \dots \right) = \frac{1}{3} m_0 \sum N_i v_i^2 = \frac{1}{3} m_0 N v_{кв}^2,$$

где  $\sum N_i v_i^2 = N v_{кв}^2$ ,  $v_{кв} = \sqrt{\frac{N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2 + \dots}{N}}$  – называется *средней квадратичной скоростью* молекул. *Средняя квадратичная скорость* отличается от *средней арифметической скорости*  $\langle v \rangle = \frac{N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots}{N}$ .

Тогда

$$pV = \frac{1}{3} m_0 N v_{кв}^2. \quad (3.10)$$

Учитывая, что  $E = N \frac{m_0 v_{кв}^2}{2}$  представляет собой суммарную кинетическую энергию поступательного движения всех молекул, выражение (3.10) можно переписать:

$$pV = \frac{2}{3} E.$$

Для одного моля газа ( $m = M$ ,  $M$  – молярная масса) выражение (3.10) будет иметь вид:

$$pV_M = \frac{1}{3} m_0 N_A v_{кв}^2,$$



где  $V_M$  – молярный объем газа;  $m_o$  – масса одной молекулы;  $N_A$  – число Авогадро;  $m$  – масса газа, которая рассчитывается  $m = m_o N_A$ .

По уравнению Клапейрона - Менделеева  $pV_M = RT$ , тогда

$$\frac{1}{3} m_o N_A v_{\text{кв}}^2 = RT \quad \text{или} \quad \frac{2}{3} N_A \bar{\varepsilon} = RT,$$

где  $\bar{\varepsilon}$  – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

Поскольку  $k=R/N_A$ , тогда *средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы* может быть записана как:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T \quad \text{или} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT. \quad (3.11)$$

### **Распределение энергии по степеням свободы**

Выражение  $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$  учитывает только энергию поступательного движения молекул. Однако наряду с поступательным движением возможны также вращение молекулы и колебания атомов, входящих в состав молекулы. Оба эти вида движения связаны с запасом энергии, рассчитать который позволяет положение о равномерном распределении энергии по степеням свободы. *Числом степеней свободы ( $i$ )* называется число независимых координат, однозначно определяющих положение молекулы в пространстве.

Энергию теплового движения системы можно рассчитать, зная число степеней свободы молекул, составляющих эту систему. *«Молекула» одноатомного газа (т.е. атом) обладает тремя степенями свободы, причем все они поступательные (т.е. отражают возможность атома поступательно перемещаться в трехмерном пространстве). Двухатомная молекула имеет три степени свободы поступательного (такие же, как и у одноатомного газа) и две степени свободы вращательного движения (отражающие возможность двухатомной молекулы вращаться вокруг осей, перпендикулярных линии, соединяющей оба атома, третья степень свободы, соответствующая вращению вокруг оси, проходящей через центры атомов, не учитывается). Молекулы, содержащие три и больше атомов, обладают тремя поступательными и тремя вращательными степенями свободы.*

*Общее число степеней свободы, которыми обладает молекула, рассчитывается как сумма поступательных, вращательных, колебательных степеней свободы:*

$$i = i_n + i_v + i_k.$$

Общее число степеней свободы молекулы, состоящей из  $N$  атомов также можно рассчитать по формуле:  $i = 3N$ . Число степеней свободы



колебательного движения рассчитывается как:  $3N-5$  и  $3N-6$  в случае линейной и нелинейной молекул, соответственно.

Рассмотрим отдельно поступательное, вращательное и колебательное движения молекул, можно найти среднюю энергию, которая приходится на каждую степень свободы. Рассмотрим сначала поступательное движение молекул. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, так как любое направление движения молекулы в пространстве равновероятно, поэтому на каждую из поступательных степеней свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная:

$$\overline{\varepsilon_n} = \frac{\overline{\varepsilon}}{3} = \frac{1}{2}kT. \quad (3.12)$$

Согласно теореме Больцмана-Максвелла, средняя энергия всех видов теплового движения молекул связана с температурой, и на каждую степень свободы поступательного и вращательного движений молекул в среднем приходится одна и та же энергия, равная:

$$\overline{\varepsilon_n} = \overline{\varepsilon_\sigma} = \frac{1}{2}kT. \quad (3.13)$$

Заметим, что на колебательную степень свободы приходится вдвое большая энергия  $\overline{\varepsilon_\kappa} = kT$ , потому что колебательная энергия складывается как из кинетической, так и потенциальной энергии  $\varepsilon_\kappa = kT$ .

Если молекула газа обладает  $i_n$  степенями свободы поступательного,  $i_\sigma$  степенями свободы вращательного и  $i_\kappa$  степенями свободы колебательного движения, то полная энергия теплового движения всех молекул будет равна:

$$U = N(i_n \overline{\varepsilon_n} + i_\sigma \overline{\varepsilon_\sigma} + i_\kappa \overline{\varepsilon_\kappa}). \quad (3.14)$$

Отметим, что равенство  $\varepsilon_\kappa = kT$  называется классическим пределом и хорошо выполняется лишь при достаточно высоких температурах.

### **Распределение молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла)**

Состояние идеального газа характеризуется не только занимаемым объемом  $V$ , давлением  $p$  и температурой  $T$ , но и распределением молекул по скоростям. В неравновесных состояниях газа это распределение может быть любым, однако в равновесном состоянии, как показывает опыт, устанавливаются вполне определенные соотношения между количествами молекул, имеющими различные скорости. При обосновании закона распределения молекул по скоростям используются следующие предположения:

1) в состоянии равновесия все направления движения молекулы равновероятны;

2) число молекул  $\Delta N$ , скорости которых лежат в узком интервале между  $v$  и  $v+\Delta v$ , прямо пропорционально общему числу молекул  $N$ , ширине интервала  $\Delta v$  и зависит от скорости  $v$ :

$$\Delta N = N f(v) \Delta v. \quad (3.15)$$

Функцию  $f(v) = \frac{dN}{N dv}$  называют *функцией распределения молекул газа по скоростям*. Она показывает относительное число молекул, приходящихся на единицу интервала скоростей при некотором значении  $v$ .

Функция  $f(v)$  для равновесных состояний газа была теоретически получена Максвеллом и проверена путем измерений:

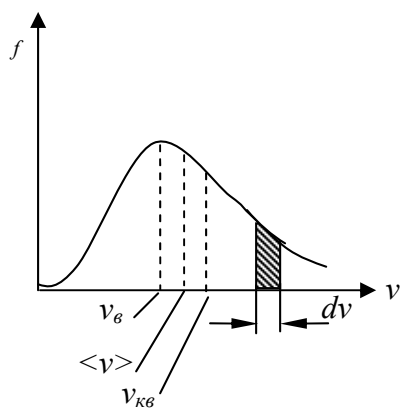


Рис. 3.2

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_o}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_o v^2 / (2kT)}. \quad (3.16)$$

График функции  $f(v)$  представлен на [рис.3.2](#). Заштрихованная площадка  $f(v)dv$  равна  $\frac{dN}{N}$ , т.е. относительному числу частиц, скорости которых лежат в пределах от  $v$  до  $v+\Delta v$ . Скорость, соответствующая максимуму функции распределения молекул по скоростям называется *наиболее вероятной скоростью* молекул газа. Эта скорость обозначена на [рис. 3.2](#) ( $v_с$ ).

Выражение (3.16) показывает, что *функция распределения молекул газа по скоростям* зависит от рода газа (от массы молекулы) и от температуры.

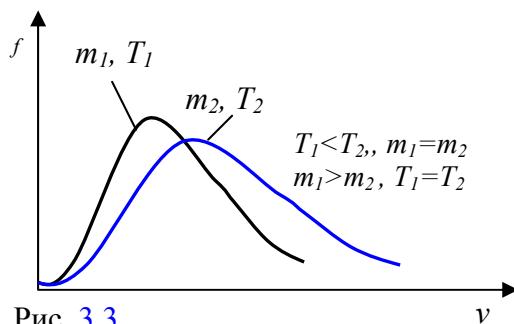


Рис. 3.3

Зависимость функции  $f(v)$  от температуры и массы молекулы показана на [рис. 3.3](#). При повышении температуры (или уменьшении массы молекул) *наиболее вероятная скорость увеличивается и максимум функции  $f(v)$  смещается вправо*.

Поскольку площадь под кривой остается неизменной и численно равной единице, при повышении температуры (или уменьшении массы молекул) кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться вдоль координаты  $v$  и понижаться.

Используя формулу (3.16) можно рассчитать наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорости молекул:

1) *наиболее вероятная скорость*:

$$v_с = \sqrt{\frac{2kT}{m_o}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1,41 \sqrt{\frac{RT}{M}},$$

где  $m_0$  и  $M$  – масса молекулы и молярная масса соответственно;

2) *средняя арифметическая скорость*:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1,60 \sqrt{\frac{RT}{M}};$$

3) *средняя квадратичная скорость*:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1,73 \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

### **Барометрическая формула. Распределение Больцмана**

*Барометрическая формула* показывает, как меняется с высотой давление газа  $p = nkT$  при постоянной температуре  $T$ :

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT}, \quad (3.17)$$

где  $M$  – молярная масса газа;  $p$  – давление на высоте  $h$ .

Из формулы (3.17) следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ.

Барометрическую формулу можно преобразовать, если воспользоваться выражением  $p = nkT$ :

$$n = n_0 e^{-Mgh/RT}, \quad (3.18)$$

где  $n$  – концентрация молекул на высоте  $h$ ;  $n_0$  – концентрация молекул на высоте  $h=0$ .

Заменив в формуле (3.18) отношение  $M/R$  равным ему отношению  $m_0/k$ , где  $m_0$  – масса одной молекулы;  $k$  – постоянная Больцмана, получим:

$$n = n_0 e^{-m_0gh/RT} \quad \text{или} \quad n = n_0 e^{-E_n/RT}, \quad (3.19)$$

где  $n$  – концентрация молекул на высоте  $h$ ,  $n_0$  – концентрация молекул с нулевой потенциальной энергией  $E_n = 0$ ;  $E_n = m_0gh$  – потенциальная энергия молекулы в поле сил тяготения.

Выражение (3.19) называется *распределением Больцмана* во внешнем потенциальном поле. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

### **Свойства термодинамических систем**

*Термодинамической системой* называется всякая физическая система, состоящая из большого числа частиц – атомов, молекул, которые совершают тепловое движение и, взаимодействуя между собой, обмениваются энергией. Примером простейшей термодинамической системы являются газы, молекулы которых совершают беспорядочное

поступательное и вращательное движения и при столкновении обмениваются энергией.

Важным свойством термодинамических систем является существование у них *равновесных состояний*. *Равновесным состоянием* называется состояние, в котором *параметры состояния* (температура, давление и объем), характеризующие систему, *не изменяются* с течением времени. Если *параметры состояния не сохраняются*, то такое состояние называется *неравновесным*. Система, первоначально находящаяся в неравновесном состоянии, с течением времени самопроизвольно переходит в равновесное состояние. Обратный переход из равновесного состояния в неравновесное может быть осуществлен при помощи внешних воздействий на систему.

Переход системы из одного состояния в другое через какую-то последовательность промежуточных состояний называется *процессом*.

Процесс называется *обратимым*, если выполняются два условия: 1) если изменения в системе можно провести в обратном направлении через те же промежуточные состояния, через которые проходила система в прямом направлении; 2) если при обратном переходе не только сама система, но и все связанные с ней окружающие тела в точности возвращаются в первоначальное состояние. Процесс, не удовлетворяющий этим условиям, называется *необратимым*.

Процесс называется *равновесным*, если начальное, конечное и все промежуточные состояния системы являются равновесными.

### ***Внутренняя энергия термодинамической системы. Первое начало термодинамики***

Термодинамическая система обладает некоторым запасом энергии, которую обычно называют *внутренней энергией*. В понятие *внутренней энергии* включаются кинетическая энергия хаотического движения молекул, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами и внутримолекулярная энергия.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют) то внутренняя энергия газа определяется только кинетической энергией теплового движения молекул:  $U = N(i_n \overline{\varepsilon_n} + i_g \overline{\varepsilon_g})$  или  $U = N \frac{i}{2} kT$ , где  $N$  – число молекул газа;  $i$  – сумма числа поступательных и числа вращательных степеней свободы ( $i = i_n + i_g$ ).

С учетом того, что  $k=R/N_A$  и  $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$ , выражение для внутренней энергии можно записать:

$$U = \frac{i}{2} \frac{N}{N_A} RT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (3.20)$$

Внутренняя энергия системы является *однозначной функцией ее состояния*, т.е. в каждом определенном состоянии система обладает вполне определенным значением внутренней энергии. При переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода. Изменение внутренней энергии может произойти, если:

1) *система получает извне или отдает окружающим телам некоторую энергию в виде теплоты;*

2) *система совершает работу против действующих на нее внешних сил или внешние силы совершают работу над системой.*

Допустим, что некоторая система (например, газ, заключенный в цилиндре под поршнем), обладая внутренней энергией  $U_1$ , получила некоторое количество теплоты  $Q$  и перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией  $U_2$ , совершила работу против внешних сил. В соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил. (Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе. Работа считается положительной, когда система совершает ее против внешних сил.)

$$\Delta U = Q - A \quad \text{или} \quad Q = \Delta U + A. \quad (3.21)$$

Полученная формула (3.21) выражает *первое начало термодинамики: количество теплоты, переданное системе, расходуется на увеличение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.*

Для бесконечно малых значений этих величин  $dQ = dU + dA$ .

### **Работа, совершаемая газом при изменении его объема**

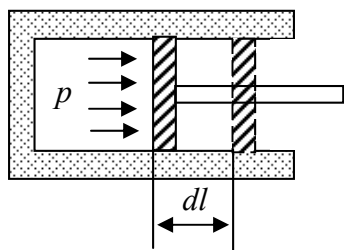


Рис. 3.4

Пусть газ заключен в цилиндрический сосуд с поршнем (рис. 3.4). При сообщении газу некоторого количества теплоты он станет расширяться и перемещать поршень, совершая работу против сил, действующих на поршень извне. Элементарная работа, совершаемая газом при перемещении поршня на отрезок  $dl$ , равна

$dA = Fdl$ , где  $F$  – сила, с которой газ действует на поршень.

Учитывая, что  $F = pS$ , получим  $dA = pS dl = pdV$ , где  $dV = S dl$  – приращение объема газа.

Если давление газа остается постоянным, работа, совершаемая при изменении объема равна:

$$A = p\Delta V. \quad (3.22)$$

Если при изменении объема давление не остается постоянным, работа, совершаемая при конечных изменениях объема, вычисляется как сумма элементарных работ  $\delta A = pdV$ , т.е. посредством интегрирования.

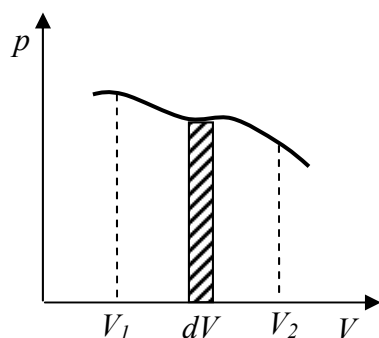


Рис. 3.5

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

Совершенную работу можно изобразить графически (рис. 3.5). На графике элементарной работе  $\delta A = pdV$  соответствует площадь узкой заштрихованной полоски. Полная работа, совершаемая газом при расширении от объема  $V_1$  до  $V_2$  определяется площадью, ограниченной кривой, осью абсцисс

и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ .

### Количество теплоты

Для характеристики *процесса теплопередачи* вводится понятие *количества теплоты*. *Процесс теплопередачи* – это такой процесс, при котором внутренняя энергия одних тел уменьшается, а других – увеличивается, причем механическая энергия тел не изменяется и никакая работа не совершается. Тогда *количеством теплоты* называется изменение внутренней энергии тела, которое происходит при теплопередаче при данных условиях. Единицы количества теплоты: джоуль *Дж*, калория *кал*;  $1 \text{ кал} = 4.184 \text{ Дж}$ .

### Теплоемкость

*Теплоемкость* – величина, равная количеству теплоты, которое необходимо для нагревания тела на  $1 \text{ K}$  (или  $1 \text{ град}$ ). Теплоемкость обозначается буквой  $c$  и равна, *Дж/К*:

$$c_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}. \quad (3.23)$$

Выделяют *удельную* и *молярную* теплоемкости.

*Удельная теплоемкость* – величина, равная количеству теплоты, которое необходимо для нагревания  $1 \text{ кг}$  вещества на  $1 \text{ K}$ , *Дж/(кг·К)*:

$$c_{y\delta} = \frac{dQ}{mdT}. \quad (3.24)$$

*Молярная теплоемкость* – величина, равная количеству теплоты, которое необходимо для нагревания 1 моля вещества на 1 К, Дж/(моль·К):

$$c_{\mu} = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (3.25)$$

*Удельная теплоемкость* связана с молярной теплоемкостью соотношением:

$$c_{\mu} = \frac{dQ}{\nu dT} = \frac{MdQ}{mdT} = Mc_{y\delta}, \quad c_{\mu} = Mc_{y\delta}, \quad (3.26)$$

где  $M$  – молярная масса вещества.

Различают *теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении*, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается, соответственно, постоянным.

Для идеального газа при постоянном объеме молярная теплоемкость равна

$$c_{\mu,V} = \frac{i}{2} R. \quad (2.27)$$

С учетом уравнения Р. Майера  $c_{\mu,p} = c_{\mu,V} + R$  молярная теплоемкость газа при постоянном давлении равна

$$c_{\mu,p} = c_{\mu,V} + R = \frac{i}{2} R + R = \frac{(i+2)}{2} R. \quad (3.28)$$

Из формул (3.27) и (3.28) следует, что молярные теплоемкости определяются только числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение справедливо в довольно широком интервале температур только для одноатомных газов. Это объясняется тем, что у двухатомных и многоатомных газов, наряду с поступательными и вращательными степенями свободы, есть и колебательные, на которые приходится тем больше энергии, чем выше температура. Так, при невысоких температурах основной вклад в теплоемкость дает поступательное и вращательное движение молекул, а при высоких добавляется еще и вклад от колебаний молекул.

Воспользовавшись формулами (3.27) и (3.28), определим *показатель адиабаты процесса  $\gamma$*  через число степеней свободы, как отношение  $\frac{c_p}{c_v}$ :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (3.29)$$



## **Изопроцессы. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам**

Равновесные процессы, происходящие с термодинамическими системами, при которых один из основных параметров состояния (объем, давление, температура) сохраняется *постоянным* называют *изопроцессами*.

1. **Изохорный процесс** – процесс при котором объем системы остается постоянным ( $V=const$ ). Уравнение изохорного процесса можно получить, разделив почленно уравнения состояния идеального газа для начального  $p_1V = \frac{m}{M}RT_1$  и конечного состояния  $p_2V = \frac{m}{M}RT_2$ :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ или } \frac{p}{T} = const, p = constT,$$

т.е. при изохорном процессе давление газа прямо пропорционально абсолютной температуре.

Соотношение  $\frac{p}{T} = const$  называется законом Шарля.

Изменение внутренней энергии газа можно рассчитать по формуле:

$$\Delta U = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \Delta T = c_{\mu,V} \frac{m}{M} \Delta T. \quad (3.30)$$

**Заметим, что эта формула применима для всех без исключения процессов, поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры и изменяется прямо пропорционально температуре.**

Работа при изохорном процессе  $A = p\Delta V = 0$ , так как  $V=const$ .

При изохорном процессе система не совершает работы, следовательно, выражение для первого начала термодинамики принимает вид:  $Q = \Delta U, A = 0$ .

Тогда теплообмен с окружающей средой можно рассчитать по формулам:

$$Q = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \Delta T = c_{\mu,V} \frac{m}{M} \Delta T = c_{y\delta,V} m \Delta T. \quad (3.31)$$

2. **Изобарный процесс** – процесс, при котором давление, оказываемое со стороны системы на окружающие тела, остается постоянным ( $p=const$ ). Уравнение процесса при  $p=const$  можно получить аналогично уравнению для изохорного процесса, используя уравнение  $pV = \frac{m}{M}RT$  для двух состояний газа.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ или } \frac{V}{T} = const, V = constT,$$

т.е при изобарном процессе объем газа прямо пропорционален его абсолютной температуре.

Соотношение  $\frac{V}{T} = const$  называется законом Гей-Люссака.

Работа при изобарном процессе может быть рассчитана по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \quad (3.32)$$

Воспользовавшись уравнениями  $pV_1 = \frac{m}{M}RT_1$ ,  $pV_2 = \frac{m}{M}RT_2$  для двух состояний газа, выразим работу при изобарном процессе через изменение температуры газа:

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

С учетом формулы (3.32) получим

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \quad (3.33)$$

Теплообмен с окружающей средой можно рассчитать, если воспользоваться выражениями для молярной и удельной теплоемкостей при постоянном давлении.

$$Q = c_{уд,p} m\Delta T = c_{\mu,p} \frac{m}{M} \Delta T. \quad (3.34)$$

Первое начало термодинамики при изобарном процессе имеет вид:

$$\Delta Q = \Delta U + A, \quad A \neq 0, \quad \Delta U \neq 0.$$

Соотношение между теплоемкостями при постоянном объеме и постоянном давлении можно получить, применив первое начало термодинамики к изобарному процессу:

$$c_{\mu,p} \frac{m}{M} \Delta T = c_{\mu,V} \frac{m}{M} \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T, \\ c_{\mu,p} = c_{\mu,V} + R. \quad (3.35)$$

Выражение (3.35) называется уравнением Р. Майера.

Это выражение показывает, что  $c_p$  всегда больше  $c_V$  на величину универсальной газовой постоянной  $R$ . Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа.

**3. Изотермический процесс** – процесс, при котором температура системы остается постоянной ( $T=const$ ). Уравнение процесса ( $T=const$ ) можно получить на основании уравнения состояния:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad T=const, \quad pV = const, \quad p_1V_1 = p_2V_2, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1},$$

т.е. при изотермическом процессе давление газа изменяется обратно пропорционально его объему.

Согласно формуле (3.30), изменение внутренней энергии газа при изотермическом процессе равно нулю.

Работа при изотермическом процессе может быть рассчитана по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{при вычислении была проведена замена } p = \frac{mRT}{MV}).$$

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3.36)$$

Воспользовавшись заменой  $\frac{m}{M} RT$  на  $p_1 V_1$  ( $p_2 V_2$ ) или  $\frac{V_2}{V_1}$  на  $\frac{p_1}{p_2}$ , формулу (3.36) можно переписать:

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (3.37)$$

Первое начало термодинамики при изотермическом процессе имеет вид:

$$\Delta Q = A, \quad \Delta U = 0.$$

Теплообмен с окружающей средой выражается формулой:

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3.38)$$

**4. Адиабатический процесс**, процесс при котором теплообмен с окружающей средой отсутствует ( $\Delta Q = 0$ ,  $Q = \text{const}$ ).

Уравнение адиабатического процесса можно получить, воспользовавшись первым законом термодинамики в дифференциальном виде:  $dQ = dU + dA$ ,

$$dQ = 0, \quad dU = c_{\mu, V} \frac{m}{M} dT, \quad dA = p dV.$$

Следовательно, для адиабатического процесса:  $dA = -dU$  или

$$p dV = -c_{\mu, V} \frac{m}{M} dT. \quad (3.39)$$

Продифференцировав уравнение состояния идеального газа  $pV = \frac{m}{M} RT$ , получим:

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (3.40)$$

Поделив, соответственно, левые и правые части уравнений (3.39) и (3.40) друг на друга, получим:

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{c_{\mu,V}} = -\frac{c_{\mu,p} - c_{\mu,V}}{c_{\mu,V}}.$$

Разделив переменные и учитывая, что  $\frac{c_{\mu,p}}{c_{\mu,V}} = \gamma$ , найдем

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от  $p_1$  до  $p_2$  и соответственно от  $V_1$  до  $V_2$ , а затем потенцируя, придем к выражению:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (3.41)$$

Полученное выражение называется *уравнением Пуассона*.

Это уравнение представлено через  $T, V$  и  $p, T$ :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}.$$

Отношение  $\frac{c_p}{c_V} = \gamma$  называется *показателем адиабаты процесса*.

Значение  $\gamma$ , согласно формуле  $\gamma = \frac{i+2}{i}$ , зависит от числа степеней свободы:

для одноатомного газа  $i=3$ ,  $\gamma = 5/3 \approx 1,67$ ;

двухатомного  $i=5$ ,  $\gamma = 7/5 \approx 1,4$ ;

многоатомного  $i=6$ ,  $\gamma = 8/6 \approx 1,33$ .

Изменение внутренней энергии газа рассчитывается по общей формуле (3.30), если известны начальная и конечная температуры газа. Это изменение можно также определить из первого закона термодинамики, если известна работа, совершаемая газом:  $\Delta A = -\Delta U$ .

Работу при адиабатическом процессе можно рассчитать на основании первого закона термодинамики и уравнения состояния:

$$A = U_1 - U_2 = \frac{m}{M} \frac{iR}{2} (T_1 - T_2) = \frac{i}{2} \left( \frac{m}{M} RT_1 - \frac{m}{M} RT_2 \right) = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2). \quad (3.42)$$

Поскольку  $\frac{i}{2} = \frac{1}{\gamma-1}$ , то выражение для работы можно записать:

$$A = \frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2). \quad (3.43)$$

Первое начало термодинамики при адиабатическом процессе имеет вид:

$$A = -\Delta U, \quad \Delta Q = 0.$$

## Графическое изображение изопроцессов

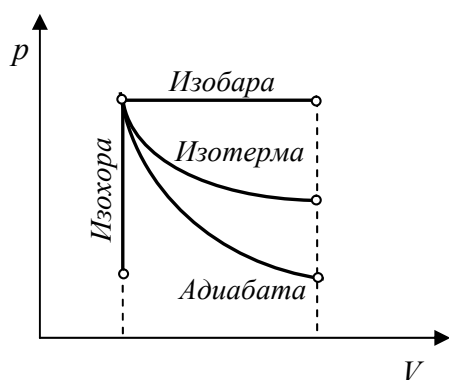


Рис. 3.6

Изопроцессы могут быть изображены графически в плоских координатных системах, по осям которых отложены параметры состояния: давление и объем, температура и объем или температура и давление. Задание только двух параметров газа полностью определяет его состояние, поскольку третий параметр состояния (при постоянной массе) можно рассчитать при помощи уравнения состояния ( $pV/T=const$ ). На рис. 3.6 приведены графики изопроцессов в координатах  $p$  и  $V$  для одного и того же начального состояния. Кривая адиабатического процесса (адиабата) идет круче, чем кривая изотермического процесса (изотерма). Это обстоятельство можно объяснить на основании уравнения состояния для газов:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = const, \quad p_1 = \frac{const T_1}{V_1} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{const T_2}{V_2}.$$

Разность давлений при расширении газа от объема  $V_1$  до  $V_2$  равна

$$p_1 - p_2 = const \left( \frac{T_1}{V_1} - \frac{T_2}{V_2} \right). \quad (3.44)$$

При адиабатическом расширении работа совершается только за счет внутренней энергии газа, вследствие чего внутренняя энергия, а вместе с ней и температура газа уменьшаются ( $T_1 > T_2$ ); при изотермическом процессе  $T_1 = T_2$ . Поэтому в формуле (3.44) разность давлений будет при адиабатическом расширении больше, чем при изотермическом.

## Энтропия

*Энтропия* есть функция состояния системы, элементарное изменение которой при равновесном переходе системы из одного состояния в другое равно полученному или отданному количеству теплоты, деленному на температуру, при которой произошел этот процесс:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (3.45)$$

Изменение энтропии при переходе системы из равновесного состояния 1 в состояние 2 через последовательность промежуточных равновесных состояний рассчитывается по формуле:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}. \quad (3.46)$$

Во всех случаях, когда система получает теплоту извне, величина  $Q$  положительна, следовательно,  $S_2 > S_1$  и энтропия системы увеличивается. Если система отдает теплоту, то  $Q$  имеет отрицательный знак и, следовательно,  $S_2 < S_1$ , энтропия системы уменьшается.

*Энтропия замкнутой системы при протекании в ней необратимых процессов возрастает,  $\Delta S > 0$ .* Это утверждение можно представить в виде неравенства Клаузиуса:  $\Delta S > 0$ .

Если система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом.

При равновесных адиабатических процессах  $dQ=0$ ,  $S_2=S_1$ ; следовательно, равновесные адиабатические процессы есть *изоэнтропийные процессы*, т.е. при протекании которых энтропия не изменяется ( $S=const$ ).

При других процессах (изохорном, изобарном, изотермическом) энтропия изменяется.

Для равновесных *изотермических* процессов ( $T=const$ ;  $Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ ,  $\Delta U=0$ ) изменения энтропии рассчитывается как

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} \text{ или } S_2 - S_1 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Для равновесных *изохорных* процессов ( $V=const$ ;  $dQ = dU = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} dT$ ,  $A=0$ )

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \ln \frac{T_2}{T_1} \text{ или } S_2 - S_1 = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \ln \frac{T_2}{T_1} = c_{\mu,V} \frac{m}{M} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Для равновесных *изобарных* процессов ( $p=const$ ;  $dQ=dU+dA$ ,  $dU = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} dT$ ,  $dA = pdV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}$ )

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T} = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{iR}{2} \frac{m}{M} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left( \frac{iR}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{m}{M} \left( c_{\mu,V} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Энтропия обладает свойством *аддитивности*: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему. *Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем.*

Другое определение *энтропии* (определение, которое охватывает все возможные состояния термодинамических систем) было предложено *Л. Больцманом*:

$$S = k \ln W \quad (3.47)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $W$  – термодинамическая вероятность данного состояния системы или число способов, которыми может быть реализовано состояние макроскопической системы.

Состояние, при котором в каждом определенном месте объема системы находится частица с определенным номером и энергией, назовем *микросостоянием*. Состояние, фиксируемое термодинамическими величинами - давлением, температурой, объемом (соответствующее им), называют *макросостоянием*.

Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование энтропии: *энтропия является мерой неупорядоченности системы*. В состоянии равновесия число микросостояний максимально, значит максимальна и энтропия.

### **Второе начало термодинамики**

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса  $\Delta S > 0$ , второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах: ***любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.***

Второе начало термодинамики определяет направление развития процессов.

### **Третье начало термодинамики**

Первые два начала термодинамики дают недостаточно сведений о поведении термодинамических систем при нуле Кельвина. Они дополняются третьим началом термодинамики (теорема Нернста–Планка): ***энтропия всех тел при температуре 0 К равна нулю:***

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (3.48)$$

Из теоремы Нернста – Планка следует, что теплоемкости  $c_v$  и  $c_p$  при 0 К равны нулю.

### **Длина свободного пробега. Явления переноса**

Расстояние, которое проходят молекулы между двумя последовательными столкновениями, называют *средней длиной свободного пробега* ( $\lambda$ ). Средняя длина свободного пробега рассчитывается по формуле:



$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d^2 n}, \quad (3.49)$$

где  $n$  – концентрация молекул;  $d$  – эффективный диаметр молекулы.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром молекулы*. Эффективный диаметр молекулы зависит от температуры (с ростом температуры немного уменьшается)

Концентрация молекул пропорциональна давлению  $p = nkT$ , следовательно,  $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} d^2 p}$ .

*Явлениями переноса* называют необратимые процессы в термодинамических неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос *энергии, массы, импульса*. К явлениям переноса относятся: *теплопроводность* (обусловлена переносом энергии в виде теплоты), *диффузия* (обусловлена переносом массы), *внутреннее трение* (обусловлено переносом импульса).

*Перенос тепловой энергии подчиняется закону Фурье:*

$$j_E = -\chi \frac{dT}{dx},$$

где  $j_E$  – плотность теплового потока;  $\frac{dT}{dx}$  – градиент температуры;  $\chi$  – коэффициент теплопроводности.

*Явление диффузии подчиняется закону Фика:*

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx},$$

где  $j_m$  – плотность потока массы;  $\frac{d\rho}{dx}$  – градиент плотности;  $D$  – коэффициент диффузии.

*Явление внутреннего трения подчиняется закону Ньютона:*

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx},$$

где  $j_p$  – плотность потока импульса;  $\frac{dv}{dx}$  – градиент скорости;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости.

*Коэффициенты: теплопроводности ( $\chi$ ), диффузии ( $D$ ) и динамической вязкости ( $\eta$ ) рассчитываются по формулам:*

$$\chi = \frac{1}{3} c_{vd,v} \rho \langle v \rangle \lambda,$$

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda,$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda,$$

где  $c_{уд,V}$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $\rho$  – плотность газа;  $\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового движения молекул;  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега.

Формулы, связывающие коэффициенты переноса:

$$\eta = \rho D,$$

$$\chi / (\eta c_{уд,V}) = 1.$$

### Циклы

Циклом называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. Если за цикл совершается положительная работа (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется *прямым*, если за цикл совершается отрицательная работа (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется *обратным*.

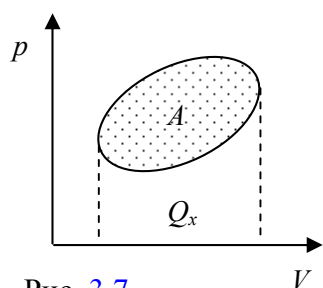


Рис. 3.7

Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* (периодически действующие двигатели, совершающие работу за счет полученной извне теплоты). Обратный цикл используется в *холодильных машинах* (периодически действующие

установки, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой).

Циклическая тепловая машина (тепловой двигатель) совершает механическую работу  $A$  за счет тепловой энергии  $\Delta Q = Q_n - Q_x$ , где  $Q_n$  – тепло, полученное от нагревателя;  $Q_x$  – тепло, переданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия теплового двигателя:

$$\eta = \frac{Q_n - Q_x}{Q_n} = 1 - \frac{Q_x}{Q_n} = \frac{A}{Q_n}.$$

Рис. 3.7 показывает один цикл работы тепловой машины (изображается замкнутой фигурой). Площадь фигуры равна работе  $A$ , а площадь под фигурой – теплу, отданному холодильнику  $Q_x$ .

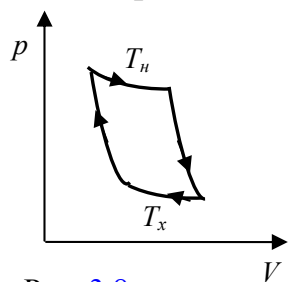


Рис. 3.8

Обратимый цикл Карно (рис. 3.8) состоит из двух изотермических процессов, происходящих при температурах  $T_n$ ,  $T_x$  и двух адиабатических процессов, во время которых происходит нагревание или охлаждение рабочего тела в пределах  $T_n \leftrightarrow T_x$ .

Цикл Карно имеет максимально возможный коэффициент полезного действия, который может быть достигнут при тех же температурах нагревателя и холодильника:

$$\eta_k = \frac{T_n - T_x}{T_n} = 1 - \frac{T_x}{T_n}.$$

Обратимый цикл Карно является идеальным. В начале и конце этого цикла энтропия системы одна и та же, т.е. изменения энтропии за цикл Карно не происходит. Реальные циклические машины имеют меньший коэффициент полезного действия за счет необратимости термодинамических процессов. Энтропия реальной тепловой машины за цикл увеличивается.

Холодильные установки – это те же циклические машины, но работающие в обратной последовательности процессов. Холодильный коэффициент:

$$\eta' = \frac{Q_x}{A} = \frac{Q_x}{Q_n - Q_x}, \text{ где } Q_n - \text{ количество теплоты, переданное}$$

нагревателю;  $Q_x$  – количество теплоты, забранное у холодильника.

Коэффициент полезного действия холодильной установки:

$$\eta_x = \frac{Q_x}{Q_n} = \frac{Q_x}{Q_x + A} = \frac{\eta'}{1 + \eta'}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 1.** На тело массой 100 кг, лежащее на наклонной плоскости, которая образует с горизонтом угол  $40^\circ$ , действует горизонтальная сила 1500 Н. Определить: 1) силу, прижимающую тело к плоскости; 2) силу трения тела о плоскость; 3) ускорение, с которым поднимается тело. Коэффициент трения  $k=0,1$ ,  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ .

Дано:

$$m=100 \text{ кг}$$

$$k=0,1$$

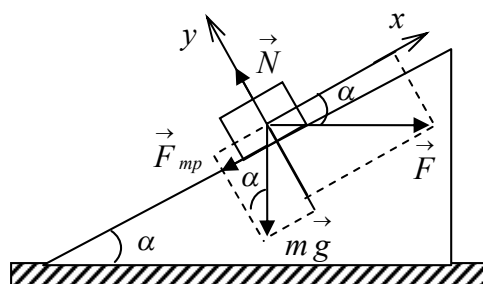
$$g \approx 10 \text{ м/с}^2$$

$$F=1500 \text{ Н}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

---


$$N - ? \quad F_{mp} - ? \quad a - ?$$



Решение

Выберем направление координатных осей, так чтобы одна из них была направлена вдоль наклонной плоскости (OX), другая – перпендикулярно наклонной плоскости (OY) (см. рис.). На тело действует горизонтальная сила  $\vec{F}$ , сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{mp}$ .

Запишем второй закон Ньютона с учетом действия всех сил:

$$m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{mp} = m \vec{a}.$$

Для перехода к скалярной форме, найдем проекции всех действующих сил на координатные оси:

$$OX: F \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_{mp} = ma, \quad (1)$$

$$OY: N - F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдем

$$N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha, \\ N = 1500 \cdot 0,643 + 100 \cdot 10 \cdot 0,766 = 1,7 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Силу трения определим по формуле:

$$F_{mp} = k N, \\ F_{mp} = 0,1 \cdot 1,7 \cdot 10^3 = 1,7 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Ускорение тела вдоль оси OX найдем из соотношения (1):

$$a = (F \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_{mp}) / m, \\ a = (1500 \cdot 0,766 - 100 \cdot 10 \cdot 0,643 - 1,7 \cdot 10^2) / 100 = 3,4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $N = 1,7 \cdot 10^3 \text{ Н}$ ,  $F_{mp} = 1,7 \cdot 10^2 \text{ Н}$ ,  $a = 3,4 \text{ м/с}^2$ .

**Задача 2.** Два неупругих шара с массами  $m_1 = 0,6 \text{ кг}$  и  $m_2 = 0,4 \text{ кг}$ , движущиеся по горизонтальной плоскости со скоростями  $v_1 = 5 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 10 \text{ м/с}$ , направленными под углом  $\alpha = 90^\circ$  друг к другу, сталкиваются и после удара движутся как единое целое. Определить: 1) импульс системы после удара; 2) скорость системы после удара; 3) угол между первоначальным направлением движения первого шара и направлением движения системы. Сопротивлением движению пренебречь.

Дано:

$$m_1 = 0,6 \text{ кг}$$

$$m_2 = 0,4 \text{ кг}$$

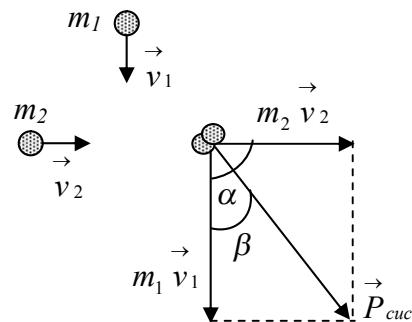
$$v_1 = 5 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 10 \text{ м/с}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

---


$$P_{сис} - ? \quad V - ? \quad \beta - ?$$



Решение

При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса в отсутствие внешних сил. Запишем закон сохранения импульса для двух тел:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V},$$

где  $\vec{P}_{сис} = (m_1 + m_2) \vec{V}$  – импульс системы после удара.

В скалярной форме, используя теорему Пифагора, получим:

$$(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = [(m_1 + m_2) V]^2.$$

Определим из полученного выражения  $P_{сис}$  :

$$P_{сис} = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2} = \sqrt{(0,6 \cdot 5)^2 + (0,4 \cdot 10)^2} = 5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Скорость системы:

$$V = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{P_{сис}}{(m_1 + m_2)}, \quad V = \frac{5}{(0,6 + 0,4)} = 5 \text{ м/с}.$$

Используя [рис.](#) определим угол  $\beta$ :

$$\cos \beta = \frac{m_1 v_1}{P_{сис}}, \quad \cos \beta = \frac{0,6 \cdot 5}{5} = 0,60, \quad \beta \approx 54^\circ.$$

Ответ:  $P_{сис} = 5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ ,  $V = 5 \text{ м/с}$ ,  $\beta \approx 54^\circ$ .

Задача 3. Автомобиль массой 1500 кг начинает разгоняться из состояния покоя по горизонтальному пути с ускорением  $1 \text{ м/с}^2$ . Коэффициент сопротивления движению 0,02. Определить работу, совершенную за первые 10 с движения, и среднюю мощность, развиваемую за этот промежуток времени.

Дано:

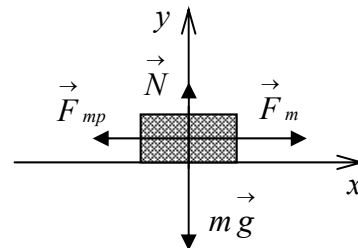
$$m = 1500 \text{ кг}$$

$$a = 1 \text{ м/с}^2$$

$$k = 0,02$$

$$t = 10 \text{ с}$$

A - ? N - ?



Решение

Работа определяется по формуле  $A = F s \cos \alpha$ . Поскольку работу выполняет сила тяги, направление которой совпадает с направлением движения, то  $A = F_m s$ .

Рассмотрим силы, действующие на автомобиль ([рис.](#)). Для сил, действующих на тело, запишем второй закон Ньютона:

$$m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_m + \vec{F}_{mp} = m \vec{a}.$$

Для перехода к скалярной форме найдем проекции всех действующих сил на координатные оси:

$$\text{OX: } F_m - F_{mp} = ma, \quad (1)$$

$$\text{OY: } N - mg = 0, \quad N = mg \quad (2)$$

$$\text{т.к. } F_{mp} = kN \text{ или } F_{mp} = kmg. \quad (3)$$

Перепишем уравнение (1) с учетом формулы (3):

$$F_m - kmg = ma \text{ или } F_m = m(a + kg).$$

Путь, пройденный при разгоне, найдем по формуле  $S = \frac{at^2}{2}$ , тогда работа равна:

$$A = m(a + kg) \frac{at^2}{2}, \quad A = 1500(1 + 0,02 \cdot 9,8) \frac{1 \cdot 10^2}{2} = 89,7 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Найдем среднюю мощность:

$$N = \frac{A}{t}, \quad N = \frac{89,7 \cdot 10^3}{10} = 8,97 \cdot 10^2 \text{ Вт.}$$

Ответ:  $A = 89,7 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ ,  $N = 8,97 \cdot 10^2 \text{ Вт}$ .

Задача 4. Пуля массой 10 г, летевшая горизонтально, попадает в подвешенный на нити шар массой 2 кг и пробив его, вылетает со скоростью 400 м/с, причем шар поднимается на высоту 0,2 м. Определить: 1) с какой скоростью летела пуля; 2) какая часть кинетической энергии пули перешла во внутреннюю.

Дано:

$$m_1 = 10^{-2} \text{ кг}$$

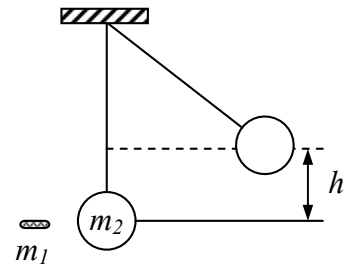
$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$V_1 = 400 \text{ м/с}$$

$$h = 0,2 \text{ м}$$

---


$$v_1 - ? \Delta E/E_k - ?$$



Решение

Зная высоту подъема шара  $h$ , найдем его скорость после удара  $V_2$ . Запишем законом сохранения энергии

$$m_2 gh = \frac{m_2 V_2^2}{2}, \quad V_2 = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

По закону сохранения импульса найдем скорость пули  $v_1$  до удара:

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \text{ или } v_1 = (m_1 V_1 + m_2 V_2) / m_1,$$

где  $m_1 v_1$  – импульс пули до удара;  $m_1 V_1$  – импульс пули после удара;  $m_2 V_2$  – импульс шара, полученный при ударе ( $m_2 v_2$  – импульс шара до удара по условию равен нулю).

С учетом формулы (1) получаем:

$$v_1 = \frac{(m_1 V_1 + m_2 \sqrt{2gh})}{m_1}, \quad v_1 = \frac{(10^{-2} \cdot 400 + 2\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2})}{10^{-2}} = 800 \text{ м/с.}$$

Запишем уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + m_2 gh + \Delta U.$$

Рассчитав кинетическую энергию пули до удара

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad E_k = \frac{10^{-2} \cdot 800^2}{2} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$\text{и } \Delta U = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 V_1^2}{2} - m_2 g h, \quad \Delta U = 3,2 \cdot 10^3 - \frac{10^{-2} \cdot 400^2}{2} - 2 \cdot 10 \cdot 0,2 = 2,4 \cdot 10^3 \text{ Дж,}$$

$$\text{найдем } \frac{\Delta U}{E_k} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{3,2 \cdot 10^3} = 0,75.$$

Ответ:  $v_1 = 800 \text{ м/с}$ ,  $\Delta E/E_k = 0,75$ .

**Задача 5.** Вал в виде сплошного цилиндра массой  $m_1 = 10 \text{ кг}$  насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой  $m_2 = 2 \text{ кг}$ . С каким ускорением будет опускаться гиря, если систему предоставить самой себе ?

Дано:

$$m_1 = 10 \text{ кг}$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$a = ?$

Решение

Линейное ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек вала, лежащих на его цилиндрической поверхности, и связано с угловым ускорением соотношением:  $a_\tau = \varepsilon R$ , где  $R$  – радиус вала.

Угловое ускорение вала выразим из основного уравнения динамики вращающегося тела:

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \quad (1)$$

где  $M$  – вращающий момент, действующий на вал;  $J$  – момент инерции вала.

Рассмотрим вал как однородный цилиндр, для которого

$$J = \frac{m_1 R^2}{2}. \quad (2)$$

Вращающий момент, действующий на вал (рис.), равен произведению силы натяжения шнура на радиус вала.

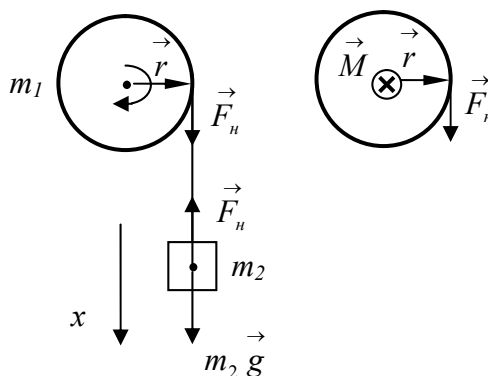
$$M = F_n R. \quad (3)$$

Силу натяжения шнура найдем по второму закону Ньютона. Запишем второй закон Ньютона для падающего груза массой  $m_2$  (рис.):

$$m_2 \vec{g} + \vec{F}_n = m_2 \vec{a}.$$

Перейдем к скалярной форме, для этого найдем проекции всех действующих сил на тело  $m_2$ .

$$m_2 g - F_n = m_2 a, \quad F_n = m_2 (g - a).$$





Подставим в формулу (3) выражение для силы натяжения шнура

$$M = m_2(g-a)R. \quad (4)$$

Перепишем выражение (1) с учетом формулы (2) и (4):

$$\varepsilon = \frac{m_2(g-a)2R}{m_1R^2} = \frac{2m_2(g-a)}{m_1R}. \quad (5)$$

В формуле (5) заменим угловое ускорение с учетом формулы  $\varepsilon = \frac{a}{R}$ .

Тогда,

$$a = \frac{2m_2(g-a)}{m_1} \quad \text{или} \quad am_1 = 2m_2g - 2m_2a.$$

$$a = \frac{2m_2g}{m_1 + 2m_2}, \quad a = \frac{2 \cdot 2 \cdot 9,8}{10 + 2 \cdot 2} = 2,8 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $a = 2,8 \text{ м/с}^2$ .

Задача 6. Однородный диск радиусом  $R=0,2$  м и массой  $m=5$  кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости от времени определяется выражением  $\omega=A+Bt$ , где  $A=4$  рад/с,  $B=8$  рад/с<sup>2</sup>. Определить касательную силу, приложенную к ободу диска.

Дано:

$$R=0,2 \text{ м}$$

$$m=5 \text{ кг}$$

$$\omega = A + Bt$$

$$A=4 \text{ рад/с}$$

$$B=8 \text{ рад/с}^2$$

---

$F - ?$

Решение

Запишем основной закон динамики для вращательного движения:

$$M = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Перепишем это выражение с учетом  $M=FR$  и выразим силу:

$$FR = J \frac{d\omega}{dt}, \quad F = \frac{J}{R} \frac{d\omega}{dt}.$$

Поскольку  $J = \frac{mR^2}{2}$ , тогда  $F = \frac{mR}{2} \frac{d\omega}{dt}$ .

Дифференцируем угловую скорость  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(A+Bt)}{dt} = B$  и подставляем в формулу для силы:

$$F = \frac{mRB}{2}, \quad F = \frac{0,2 \cdot 5 \cdot 8}{2} = 4 \text{ Н.}$$

Ответ:  $F = 4 \text{ Н.}$

Задача 7. Сплошной и полый цилиндры, имеющие одинаковые массы и радиусы, вкатываются без проскальзывания на горку. Определить, какое тело поднимется выше, если начальные скорости их одинаковые.

Дано:

$$m_{с.ц} = m_{п.ц} = m$$

$$v_{с.ц} = v_{п.ц} = v$$

Определить, какое тело поднимется выше.

Решение

Согласно закону сохранения энергии в механике, полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная:

$$E = E_k + E_n = const.$$

В начальном состоянии полная энергия каждого тела определяется кинетической энергией, которая равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

В конечном состоянии полная энергия каждого тела равна потенциальной энергии  $mgh$ , т.е. характеризуется высотой, на которую поднимается тело.

В начальном состоянии тела имеют одинаковые массы и скорости. Учитывая, что тела движутся без проскальзывания, связь между угловой и линейной скоростью дается формулой  $\omega = \frac{v}{R}$ . Моменты инерции сплошного

и полого цилиндров  $J = \frac{mR^2}{2}$  и  $J = mR^2$ , соответственно.

Запишем выражения для кинетической энергии этих тел.

$$E_{к,с.ц} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{2} \left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad (1)$$

$$E_{к,п.ц} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = 2 \left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) показывают, что в начальном состоянии полый цилиндр обладает большей кинетической энергией, поэтому в конечном

состоянии он должен обладать большей потенциальной энергией, т.е. он поднимется на большую высоту.

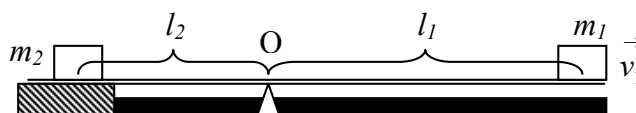
Ответ: выше поднимется полый цилиндр.

Задача 8. Тело массой  $m_1$  вертикально падает на свободный конец рычага с плечом  $l_1 (l_1 = 2l_2)$  и теряет скорость. Какую скорость приобретает масса  $m_2 (m_2 = 4m_1)$  после удара?

Дано:

$$l_1 (l_1 = 2l_2)$$

$$m_2 (m_2 = 4m_1)$$



---


$$v_2 - ?$$

Решение

Для замкнутой системы суммарный момент импульса системы сохраняется. Начальный момент импульса рассматриваемой системы относительно точки «O» равен

$$L_1 = m_1 v_1 l_1.$$

После соударения масса  $m_1$  теряет скорость, и конечный момент импульса определяется:

$$L_2 = m_2 v_2 l_2.$$

Следовательно, из закона сохранения момента импульса имеем

$$m_2 v_2 l_2 = m_1 v_1 l_1$$

или 
$$v_2 = \frac{m_1 v_1 l_1}{m_2 l_2} = \frac{m_1 v_1 2l_2}{4m_1 l_2} = \frac{1}{2} v_1.$$

Ответ: 
$$v_2 = \frac{1}{2} v_1.$$

Задача 9. Четыре маленьких шарика одинаковой массы, жестко закрепленные невесомыми стержнями, образуют квадрат. Определить отношение моментов инерции системы  $I_1/I_2$ , если ось вращения совпадает со стороной квадрата  $I_1$  или с его диагональю  $I_2$ .

Дано:

$I_1$  – момент инерции относительно оси, проходящей через одну из сторон квадрата;

$I_2$  – момент инерции относительно оси, проходящей через диагональ квадрата.

---


$$I_1/I_2 - ?$$

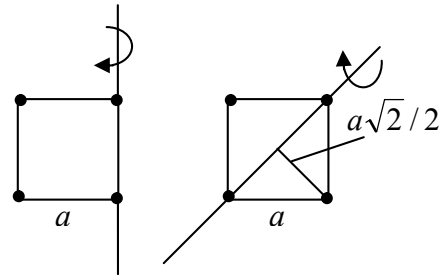
### Решение

Момент инерции определяется суммой произведений масс шариков на квадраты их расстояний от оси вращения:

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad \text{Для оси}$$

вращения, совпадающей со стороной квадрата, момент инерции равен:  $I_1 = ma^2 + ma^2 = 2ma^2$ .

(Шарики рассматриваются как материальные точки, для которых момент инерции равен  $J = mr^2$ , где  $r$  – расстояние до оси вращения.) Моменты инерции шариков, лежащих на оси вращения, равны нулю, т.к.  $r = 0$ . Если ось совпадает с диагональю квадрата, то момент инерции равен:  $I_2 = 2m(a/\sqrt{2})^2 = ma^2$ . Таким образом,  $I_1/I_2 = 2$ .



Ответ:  $I_1/I_2 = 2$ .

Задача 10. Обруч массой  $m = 0,3$  кг и радиусом  $R = 0,5$  м привели во вращение, сообщив ему энергию вращательного движения  $E_{вр} = 1200$  Дж, и опустили на пол так, что его ось вращения оказалась параллельной плоскости пола. Определить работу силы трения, если обруч начал двигаться без проскальзывания, имея кинетическую энергию поступательного движения  $E_n = 200$  Дж.

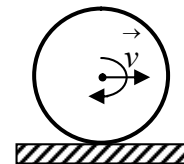
Дано:

$$m = 0,3 \text{ кг}$$

$$R = 0,5 \text{ м}$$

$$E_{вр} = 1200 \text{ Дж}$$

$$E_n = 200 \text{ Дж}$$



А - ?

### Решение

Изменение кинетической энергии равно работе всех сил, действующих на рассматриваемую систему:

$$\Delta A = E_2 - E_1,$$

где  $E_2$  и  $E_1$  – конечная и начальная кинетические энергии системы.

В начальном состоянии кинетическая энергия определяется энергией вращательного движения:

$$E_1 = E_{вр} = \frac{J\omega_1^2}{2} = 1200 \text{ Дж}.$$

В конечном состоянии кинетическая энергия обруча равна сумме энергии поступательного и вращательного движения:

$$E_2 = E_{ep} + E_n = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

где  $v$  – скорость вращательного движения обруча (т.к. обруч движется без скольжения, то точка соприкосновения обруча с полом является мгновенным центром вращения и  $\omega$  связана с  $v$  соотношением:  $\omega = \frac{v}{R}$ ). Моменты обруча  $J = mR^2$ .

Таким образом,

$$E_2 = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = 2E_n$$

в конечном состоянии кинетическая энергия обруча равна удвоенной энергии поступательного движения:  $E_2 = 2E_n = 400$  Дж.

Тогда работа сил трения равна:  $\Delta A = E_2 - E_1 = 1200 - 400 = 800$  Дж.

Ответ: 800 Дж.

Задача 11. Шарик массой 100 г, подвешенный к невесомой пружине с коэффициентом жесткости  $k=10$  Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой  $A = 4 \cdot 10^{-2}$  м. Считая колебания незатухающими и начальную фазу равной нулю, определить: 1) смещение шарика через время  $t_1=30$  с после начала колебаний; 2) полную энергию колебательного движения шарика и его кинетическую энергию в момент прохождения положения равновесия; 3) кинетическую и потенциальную энергию через время  $t_2=T/6$  после начала колебаний.

Дано:

$$m=0,1 \text{ кг}$$

$$k=10 \text{ Н/м}$$

$$A = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$t_1=30 \text{ с}$$

$$t_2=T/6$$

---


$$x - ? \quad W - ? \quad W_k - ? \quad W_n - ?$$

Решение

1. Смещение при гармонических колебаниях определяется по формуле:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right).$$

По условию задачи  $\varphi=0$ , тогда  $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ .

Период гармонических колебаний определяется соотношением  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ , где  $m$  – масса колеблющегося тела;  $k$  – коэффициент жесткости.

Подставим выражение для периода в формулу для смещения и получим:

$$x = A \sin(\sqrt{k/m} t), \quad x = 4 \cdot 10^{-2} \sin(\sqrt{10/0,1} \cdot 30) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

2. Полную энергию колебательного движения и равную ей максимальную кинетическую энергию колеблющейся материальной точки определим по формуле:  $W = \frac{kA^2}{2}$  (в момент прохождения равновесия вся энергия колебательного движения переходит в кинетическую, поэтому  $W = W_{0,k} = \frac{kA^2}{2}$ , где  $W_{0,k}$  – кинетическая энергия тела в момент прохождения положения равновесия).

$$W = \frac{10(4 \cdot 10^{-2})^2}{2} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

3. Кинетическую и потенциальную энергии шарика находим из формул:

$$W_k = \frac{kA^2}{2} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \text{ и } W_n = \frac{kA^2}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Потенциальную энергию можно найти и из закона сохранения энергии  $W_n = W - W_k$ :

$$W_k = \frac{10(4 \cdot 10^{-2})^2}{2} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6}\right) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж,}$$

$$W_n = 8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Ответ:  $x = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $W = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ ,  $W_k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ ,  $W_n = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ .

**Задача 12.** Определить период колебаний физического маятника, совершающего малые колебания, состоящего из однородного стержня длиной 30 см, точка подвеса находится на расстоянии 10 см от центра масс стержня.

Дано:

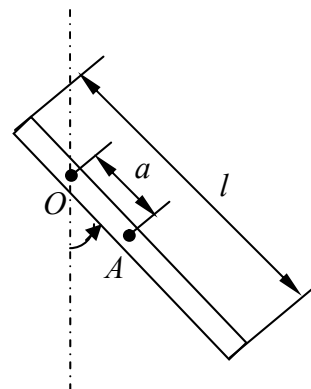
$$l = 0,3 \text{ м}$$

$$a = 0,1 \text{ м}$$

Т - ?

Решение

При малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает



гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$ , где  $J$  – момент инерции относительно точки подвеса  $O$ ;  $l$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до центра тяжести тела  $A$ ;  $m$  – масса маятника.

Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$ , найдем по теореме Штейнера:  $J = J_0 + ma^2$ , где  $J$  – момент инерции относительно произвольной оси (в нашем случае относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$ );  $J_0$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;  $a$  – расстояние между осями:

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \text{ где } J = \frac{1}{12}ml^2 - \text{ момент инерции стержня относительно}$$

оси перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

Тогда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + ma^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)}{gl}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)}{gl}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{0,3^2}{12} + 0,1^2\right)}{9,8 \cdot 0,3}} = 0,5 \text{ с.}$$

Ответ:  $T=0,5 \text{ с.}$

Задача 13. Логарифмический декремент затухания  $D=0,003$ . Сколько полных колебаний должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в 2 раза.

Дано:

$$D=0,003$$

$$\frac{A_0}{A_t} = 2$$

---

$N$  -?

Решение

Амплитуда затухающих колебаний в момент времени  $t$  определяется выражением:  $A_t = A_0 e^{-\delta t}$ , где  $\delta$  – коэффициент затухания, который связан с логарифмическим декрементом соотношением  $D = \delta T$ .



Число колебаний определим из формулы  $N = \frac{t}{T}$ , где  $t$  – время, за которое было совершено  $N$  колебаний, тогда  $A_t = A_0 e^{-\frac{Dt}{T}} = A_0 e^{-DN}$ .

$$\frac{A_0}{A_t} = e^{DN}, \quad \ln \frac{A_0}{A_t} = DN, \quad N = \frac{\ln \frac{A_0}{A_t}}{D},$$

$$N = \frac{\ln 2}{0,003} = 230 \quad \text{колебаний.}$$

Ответ:  $N=230$ .

Задача 14. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами  $A_1=10$  см и  $A_2=6$  см складываются в одно колебание с амплитудой  $A_{рез}=14$  см. Определить разность фаз  $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)$  складываемых колебаний.

Дано:

$$A_1=10 \text{ см}$$

$$A_2=6 \text{ см}$$

$$A_{рез}=14 \text{ см}$$

---

$\Delta\varphi$  -?

Решение

Воспользуемся формулой  $A_{рез}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ , позволяющей определить амплитуду результирующего колебания.

$$\text{Получим } \cos\Delta\varphi = \frac{A_{рез}^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}, \quad \cos\Delta\varphi = \frac{14^2 - 10^2 - 6^2}{2 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Этому значению косинуса соответствует  $\Delta\varphi = \pi/3$ .

Ответ:  $\Delta\varphi = \pi/3$ .

Задача 15. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, имеет вид  $y=0,01\sin(10^3t-2x)$ . Определить скорость распространения волны.

Дано:

$$y = 0,01\sin(10^3t - 2x)$$

---

$v$  - ?

### Решение

Уравнение плоской волны в среде имеет вид:

$$y = A \sin(\omega t \pm kx), \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\omega$  – циклическая частота;  $k$  – волновое число, которое рассчитывается по формуле:  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$ ,  $\lambda$  – длина волны;  $v$  – скорость распространения волны.

Сопоставляя общий вид уравнения плоской волны (1) и уравнения волны в условии задачи  $y = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$ , получаем

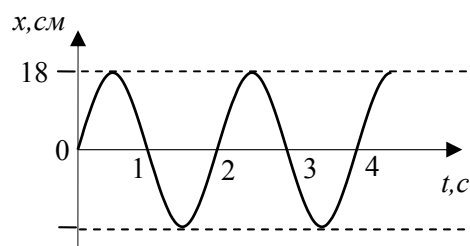
$A = 10^{-2}$  м,  $\omega = 10^3$  с<sup>-1</sup>,  $k = 2$  м<sup>-1</sup>. Из соотношения  $k = \frac{\omega}{v}$  находим скорость

распространения волны  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{10^3}{2} = 500$  м/с.

Ответ:  $v = 500$  м/с.

Задача 16. На рис. представлен график колебания материальной точки. Определить скорость точки в момент времени  $t = 1/3$  с.

Дано:



$t = 1/3$  с

$v = ?$

### Решение

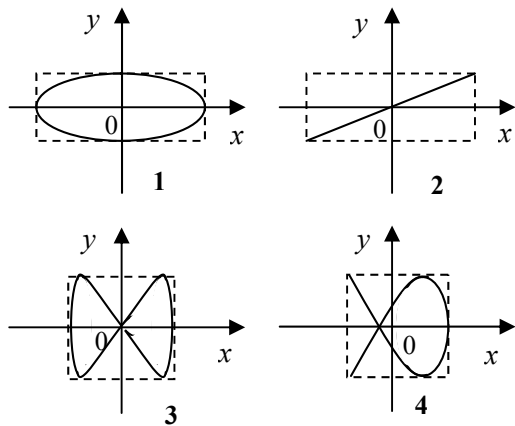
Период гармонического колебания, изображенного на рисунке, равен 2 секундам. Амплитуда этого колебания 18 см. Поэтому зависимость  $x(t)$ , с учетом  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , можно записать в виде  $x(t) = 18 \sin(\pi t)$ . Скорость равна производной от функции  $x(t)$  по времени  $v(t) = 18\pi \cos(\pi t)$ . Подставив  $t = 1/3$  с, получим  $v(t) = 18\pi \cos(\pi/3) = 9\pi$ .

Ответ:  $v = 9\pi$  м/с.

Задача 17. Точка  $M$  одновременно колеблется по гармоническому закону вдоль осей координат  $OX$  и  $OY$  с различными амплитудами, но

одинаковыми частотами. Определить, какая из траекторий, представленных на рисунке, отвечает условию задачи, если разность фаз  $\Delta\varphi = \pi/2$ .

Дано:



$$\Delta\varphi = \pi/2$$

Определить траекторию точки  $M$ .

Решение

Уравнение результирующего колебания имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos\Delta\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \Delta\varphi .$$

При заданной в условии разности фаз уравнение траектории будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

или  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$  и является уравнением эллипса.

Ответ: 1 – эллипс.

Задача 18. Вычислить для нормальных условий и для температуры  $100^\circ\text{C}$  среднее значение квадратичной скорости и энергии поступательного движения молекул углекислого газа. Найти среднюю длину свободного пробега молекул при нормальных условиях, если число столкновений каждой молекулы с другими в среднем за 1 с равно  $9,12 \cdot 10^9$  (плотность  $\text{CO}_2$  при нормальных условиях  $1,98 \text{ кг/м}^3$ ).

Дано:

$$t = 100^\circ\text{C}, T = 373 \text{ К}$$

$$z = 9,12 \cdot 10^9 \text{ 1/с}$$

$$T_0 = 273 \text{ К}$$

$$p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$M_{(CO_2)} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\rho_{(CO_2)} = 1,98 \text{ кг/м}^3$$

---

$$v_{кв,0} - ? \quad v_{кв} - ? \quad E_0 - ? \quad E - ? \quad \lambda_0 - ?$$

### Решение

Средняя квадратичная скорость молекул при заданной температуре  $T$  определяется:

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad v_{кв} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 373}{44 \cdot 10^{-3}}} = 460 \text{ м/с.}$$

Средняя квадратичная скорость молекул при нормальных условиях равна:

$$v_{кв,0} = \sqrt{\frac{3p_0}{\rho_0}}, \quad \text{где } p_0 = \frac{\rho_0 RT}{M} \text{ согласно уравнению Клапейрона – Менделеева,}$$

$$v_{кв,0} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{1,98}} = 392 \text{ м/с.}$$

Среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы газа равно  $E = \frac{i}{2} kT$ , где  $i$  – число степеней свободы. Для всех газов число степеней свободы, приходящееся на поступательное движение, равно  $i=3$ .

$$E_0 = \frac{3}{2} kT_0, \quad E_0 = \frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{2} = 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ Дж,}$$

$$E = \frac{3}{2} kT, \quad E = \frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{2} = 7,72 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Средняя длина свободного пробега молекул при нормальных условиях равна

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{z}, \quad \text{где } \langle v \rangle \text{ средняя арифметическая скорость молекул газа.}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}} = 362 \text{ м/с,}$$

$$\lambda = \frac{362}{9,12 \cdot 10^9} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Ответ:  $v_{кв,0} = 392 \text{ м/с}$ ,  $v_{кв} = 460 \text{ м/с}$ ,  $E_0 = 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ ,  $E = 7,72 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ ,  $\lambda_0 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ .

Задача 19. Найти молярную массу смеси, состоящей из 25 г кислорода и 75 г азота.

Дано:

$$m_1 = 25 \text{ г} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$$

$$m_2 = 75 \text{ г} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$$

$$M_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

---

$M_{\text{смесь}} - ?$

Решение

Для смеси газов, если она находится под давлением, не превышающем значительно нормальное атмосферное давление, справедливо уравнение Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT .$$

Запишем уравнение для смеси газов и для каждого газа смеси:

$$p_{\text{см}} V = \frac{m_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} RT , \quad (1)$$

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT , \quad (2)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT . \quad (3)$$

Объем во всех трех случаях одинаков и равен объему сосуда, в котором смешаны смеси.

Сложив равенства (2) и (3), получим:

$$V(p_1 + p_2) = RT \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) . \quad (4)$$

Левые части равенств (1) и (4) равны. Поскольку по закону Дальтона  $p = p_1 + p_2$ , то

$$\frac{m_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} RT = RT \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) ,$$

$$\frac{m_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) ,$$

$$M_{\text{см}} = \frac{m_{\text{см}}}{\left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right)} , \quad M_{\text{см}} = \frac{(2,5 + 7,5) \cdot 10^{-2}}{\left( \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{7,5 \cdot 10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}} \right)} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} .$$

Ответ:  $M_{\text{смесь}} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} .$

Задача 20. Молярная масса газа равна  $M=44 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, отношение

$$\frac{c_p}{c_v} = 1,33. \text{ Вычислить по этим данным удельные теплоемкости: } c_v, c_p$$

Дано:

$$M = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = 1,33$$

---


$$c_{уд,v} - ? \quad c_{уд,p} - ?$$

Решение

Удельные теплоемкости газов рассчитываются по формулам:

$$c_{уд,V} = \frac{iR}{2M} \text{ и } c_{уд,p} = \frac{(i+2)R}{2M}.$$

Число степеней свободы, найдем из соотношения:  $\frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$ .

Решим уравнение  $\frac{i+2}{i} = 1,33$ ,  $i=6$ .

Подставляя числовые значения  $i$ ,  $R$ ,  $M$  в первые два уравнения, получим:

$$c_{уд,V} = \frac{6 \cdot 8,31}{2 \cdot 44 \cdot 10^{-3}} = 567 \text{ Дж/(кгК)},$$

$$c_{уд,p} = \frac{(6+2)8,31}{2 \cdot 44 \cdot 10^{-3}} = 755 \text{ Дж/(кгК)}.$$

Ответ:  $c_{уд,v} = 567 \text{ Дж/(кгК)}$ ,  $c_{уд,p} = 755 \text{ Дж/(кгК)}$ .

Задача 21. Азот, занимающий при давлении в 1 атм объем  $V_1=10$  л, расширяется вдвое. Найти конечное давление и работу, совершенную газом при следующих процессах: 1) изобарном, 2) изотермическом, 3) адиабатическом.

Дано:

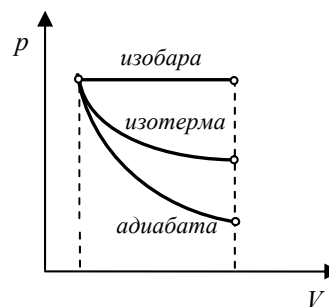
$$p_1 = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

$$V_1 = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$V_2 = 20 \text{ л} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

---


$$p_2 - ? \quad A - ?$$



### Решение

Из графиков видно, что работа будет тем больше, чем выше пойдет кривая, т.е. больше давление в течение процесса.

1) Изобарный процесс,  $p=const$ , значит  $p_1=p_2=1,013 \cdot 10^5$  Н/м.

Работа при изобарном процессе вычисляется по формуле:  $A = p(V_2 - V_1)$ ,

$$A = 1,013 \cdot 10^5 (20 - 10) 10^{-3} = 1013 \text{ Дж.}$$

2) Изотермический процесс,  $T=const$ .

Согласно уравнению  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , давление газа после его расширения

равно  $p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}$ :

$$p_2 = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м.}$$

Работу при изотермическом расширении найдем по формуле:

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$A = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \ln \frac{20 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 698 \text{ Дж.}$$

3) Адиабатический процесс,  $Q=const$ .

Конечное давление может быть найдено из уравнения Пуассона:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Показатель адиабаты рассчитаем по формуле:  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$ , где  $\gamma=5$ ,

так как азот – двухатомный газ.  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5+2}{5} = 1,4$ .

$$\text{Тогда } p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \text{ или } p_2 = 1,013 \cdot 10^5 \left( \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} \right)^{1,4} = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Н/м.}$$

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении, равна убыли внутренней энергии.

$A = -\Delta U$  (первое начало термодинамики для адиабатического процесса),

$$A = U_1 - U_2 = \frac{m}{M} \frac{iR}{2} (T_1 - T_2) = \frac{i}{2} \left( \frac{m}{M} RT_1 - \frac{m}{M} RT_2 \right) = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2),$$

$$A = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{5}{2} (1,013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} - 0,38 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) = 607 \text{ Дж.}$$

Ответ: 1)  $p_2=1,013 \cdot 10^5$  Н/м,  $A=1013$  Дж; 2)  $p_2=0,5 \cdot 10^5$  Н/м,  $A=698$  Дж; 3)  $p_2=0,38 \cdot 10^5$  Н/м,  $A=607$  Дж.



Задача 22. Два грамма гелия, расширяясь адиабатически, совершили работу  $A=249,3$  Дж. Чему равно изменение температуры в этом процессе?

Дано:

$$m=2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$A=249,3 \text{ Дж}$$

---

$\Delta T$  - ?

Решение

В адиабатическом процессе работа равна изменению внутренней энергии со знаком «минус»  $A = -\Delta U$ . С другой стороны, изменение внутренней энергии всегда связано с изменением температуры:  $\Delta U = \frac{m}{M} \frac{iR}{2} (T_1 - T_2)$ . Таким образом,

$$\Delta T = \frac{2M \Delta U}{iRm} = \frac{2M A}{iRm}, \quad \Delta T = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 249,3}{3 \cdot 8,31 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 40 \text{ К.}$$

Ответ:  $\Delta T = 40 \text{ К.}$

Задача 23. На какой высоте над уровнем моря давление воздуха уменьшается в 2,718 раза? Температуру считать постоянной и равной 300 К. Молярная масса воздуха  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Дано:

$$\frac{p_0}{p} = 2,718$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

---

$h$  - ?

Решение

Воспользуемся барометрической формулой:  $p = p_0 e^{-Mgh/RT}$ , где  $M$  – молярная масса газа;  $p$  – давление на высоте  $h$ . Прологарифмируем барометрическую формулу:

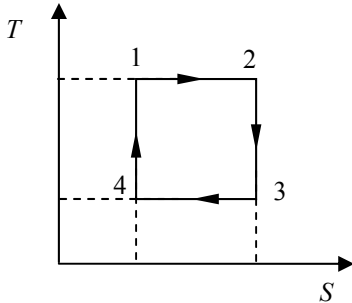
$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{Mgh}{RT}.$$

Значение 2,718 является основанием натуральных логарифмов, поэтому  $1 = \frac{Mgh}{RT}$ , тогда,  $h = \frac{RT}{Mg}$ ,  $h = \frac{8,31 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 8772 \text{ м.}$

Ответ:  $h = 8772 \text{ м.}$

Задача 24. На [рис.](#) изображен цикл Карно в координатах  $(T, S)$ , где  $S$  – энтропия. Указать участок, на котором теплота подводится к системе.

Дано:



Определить участок, на котором теплота подводится к системе.

Решение Цикл Карно изображен в координатах  $(T, S)$ :

- (1→2) - изотермическое расширение;
- (2→3) - адиабатическое расширение;
- (3→4) - изотермическое сжатие;
- (4→1) - адиабатическое сжатие.

При адиабатических процессах энтропия не изменяется ( $S=const$ ) так как  $dQ=0$ , следовательно, теплота подводится на изотермическом участке с максимальной температурой (1→2) (участок, где энтропия растет).

Ответ: теплота подводится на изотермическом участке (1→2).

#### 4. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

*Электростатика* – раздел физики, изучающий свойства неподвижных электрических зарядов. Экспериментально установлено, что все электрические заряды, встречающиеся в природе, образуются совокупностью элементарных зарядов, величина элементарного заряда равна  $q=1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл. Такой заряд, отрицательный по знаку ( $-q_e$ ), несет электрон. Протон является носителем положительного заряда ( $+q_{np}$ ). Таким образом, важно помнить, что любой заряд  $Q$  кратен  $q$ :

$$Q=Nq,$$

где  $N$  – число элементарных зарядов.

Принято считать, что тело электрически заряжено, если оно имеет избыток зарядов одного знака.

**В электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется:**

$$\sum_i \pm q_i = const.$$

Это положение называется *законом сохранения электрического заряда*.

### **Закон Кулона (1785 г.)**

Если размеры заряженного тела очень малы по сравнению с рассматриваемыми расстояниями, то такое тело называется *точечным зарядом*. Сила взаимодействия точечных зарядов зависит как от величины зарядов, так и от расстояния между ними, а также от электрических свойств среды. Это отражает закон Кулона:

$$F = \frac{kq_1q_2}{\epsilon r^2}. \quad (4.1)$$

Формулировать закон следует так:

***сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов прямо пропорциональна величине этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и зависит от среды.***

$k$  – коэффициент пропорциональности – величина, которая зависит от системы единиц (в системе СИ  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ );  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в среде меньше, чем в вакууме (в вакууме  $\epsilon = 1$ ; для других веществ, например, для керосина  $\epsilon = 2$ ; для воска  $\epsilon = 7,8$ );

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Закон Кулона в системе СИ можно записать:

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (4.2)$$

Направление силы совпадает с соединяющей заряды прямой (центральная сила). На рис. 4.1 показаны направления сил:  $\vec{F}_{12}$  – сила, действующая на заряд  $q_1$  со стороны заряда  $q_2$  и  $\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ .

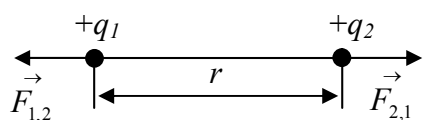


Рис. 4.1

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}.$$

Напомним, что одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

### **Электрическое поле**

Каждое заряженное тело окружено электрическим полем. Электрическое поле – это *одна из форм существования материи*.

Основное свойство электрического поля – действие на заряженные тела. Для обнаружения и исследования электрического поля пользуются некоторым «пробным» точечным положительным зарядом. Обозначим его  $q_0$ . Величина его должна быть мала, чтобы не изменить заметно исследуемое поле.

В качестве силовой характеристики электрического поля принимают величину

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (4.3)$$

$\vec{E}$  – напряженность электрического поля в данной точке;

$\vec{F}$  – сила, действующая на пробный положительный заряд  $q_0$ , помещенный в рассматриваемую точку.

Так как сила  $\vec{F}$  пропорциональна  $q_0$ , то отношение  $\frac{\vec{F}}{q_0}$  не зависит от величины пробного заряда.

*Напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный положительный заряд, находящийся в данной точке поля.*

Используя формулу закона Кулона, легко найти формулу для расчета напряженности поля точечного заряда  $q$ :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (4.4)$$

Если электрическое поле образовано не одним, а несколькими зарядами, то следует применять, *принцип суперпозиции* (наложения полей), который формулируется следующим образом:

***Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создал бы каждый из зарядов системы в отдельности:***

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (4.5)$$

Примеры:

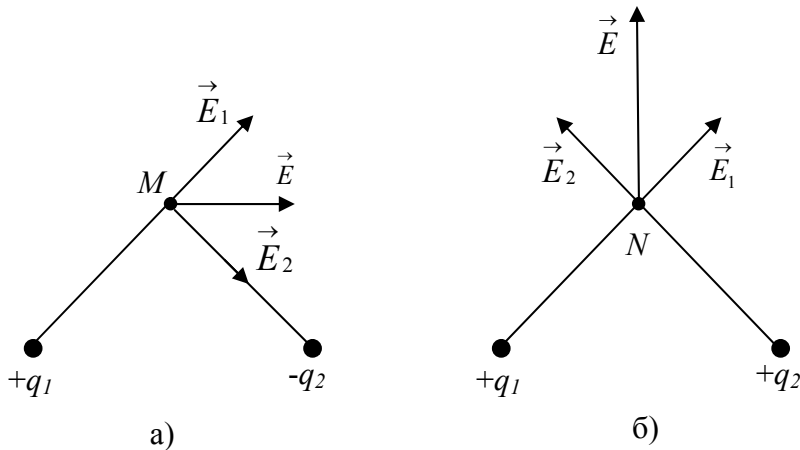


Рис. 4.2. Наложение полей двух разноименных зарядов в точке  $M$  (а) и двух одноименных зарядов в точке  $N$  (б).

Электрические поля принято изображать с помощью так называемых силовых линий. *Силовые линии (линии напряженности)* проводят таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора  $\vec{E}$ . Густота линий пропорциональна величине напряженности. На поверхности раздела двух сред величина напряженности  $E$  испытывает скачок. Следовательно, густота силовых линий напряженности также изменяется скачком, что неудобно при графическом изображении полей. Необходимо иметь такую характеристику электрического поля, которая не зависит от электрических свойств среды. Это – *вектор индукции электрического поля  $\vec{D}$  (электрическое смещение)*, который вводится с помощью соотношения:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}. \quad (4.6)$$

Данное соотношение справедливо лишь для однородной изотропной среды, в которой вектора  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  совпадают по направлению. Силовые линии индукции  $\vec{D}$  везде непрерывны, а величина индукции электрического поля не испытывает скачка на границах раздела сред.

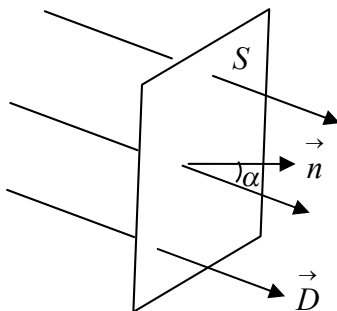


Рис. 4.3

*Потоком индукции  $N$*  называется число линий индукции электрического поля, проходящее сквозь какую-либо поверхность.

В однородном электрическом поле ( $\vec{D} = const$ ) через плоскую площадку  $S$  (рис. 4.3) проходит поток индукции

$$N = DS \cos\alpha = D_n S, \quad (4.7)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{D}$  и единичным вектором нормали к площадке  $\vec{n}$ ;  $D_n$  – проекция вектора  $\vec{D}$  на направление нормали.

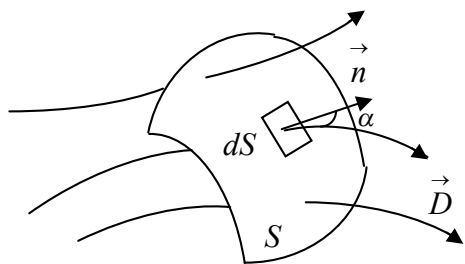


Рис. 4.4

В неоднородном электрическом поле ( $\vec{D} \neq const$ ) через элементарную площадку  $dS$  (рис. 4.4) проходит поток  $dN = D_n dS$ . Чтобы найти поток индукции, проходящий через произвольную поверхность  $S$ , необходимо взять интеграл  $N = \int_S D_n dS$ .

### Теорема Остроградского-Гаусса

По рис. 4.5 нетрудно убедиться, что поток индукции, проходящий через поверхность сферы, в центре которой находится точечный заряд, равен потоку индукции  $N$ , проходящему через произвольную замкнутую поверхность, окружающую этот заряд. Тогда получим:

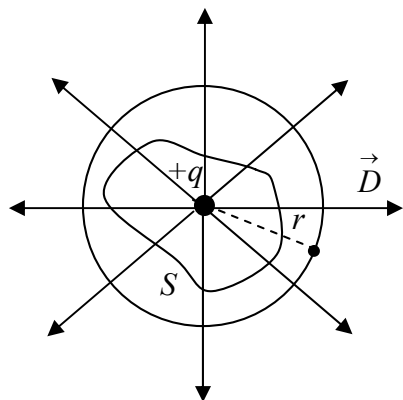


Рис. 4.5

$$N_{сф} = N = DS_{сф} = \frac{q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = q; D - \text{индукция поля точечного заряда на расстоянии } r.$$

Принято считать поток линий индукции, выходящих из объема, ограниченного данной поверхностью, положительным, входящих – отрицательным.

Если замкнутая поверхность охватывает произвольную систему точечных зарядов (рис. 4.6), то поток вектора индукции равен:

$$N = \sum_i \pm q_i. \quad (4.8)$$

Формулировка теоремы:

**поток индукции электрического поля, проходящий через произвольную замкнутую поверхность, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности.**

Из формулировки теоремы следует, что поток электрической индукции измеряется в кулонах Кл, а индукция  $D$  в Кл/м<sup>2</sup>.

### Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

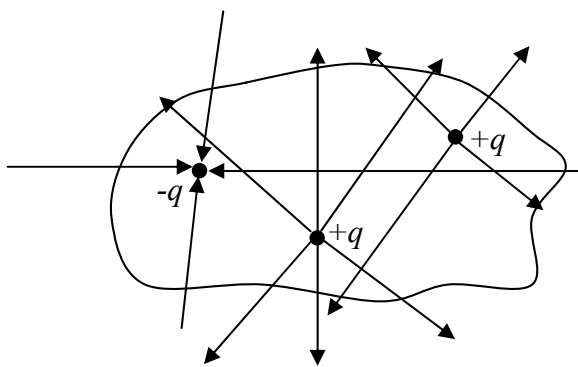


Рис. 4.6

1. Поле заряженного шара (для случая  $r \geq R$ ). Шар радиусом  $R$

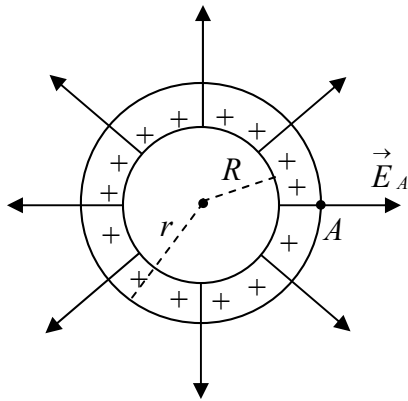


Рис. 4.7

зарядили так, что его заряд равномерно распределен по поверхности. Определим напряженность  $E$  поля шара в точке  $A$  (рис. 4.7). Опишем вокруг заряженного шара через точку  $A$  сферу радиусом  $r$ . Вычислим через нее поток индукции:

$$N = DS_{сф} = \varepsilon\varepsilon_0 E 4\pi r^2. \quad (4.9)$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$N = q. \quad (4.10)$$

Приравняв правые части (4.9) и (4.10), получим

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \quad (4.11)$$

Изобразим графически зависимость  $E=f(r)$  поля заряженного шара (рис. 4.8). Внутри проводящего шара  $E=0$ , поле отсутствует.

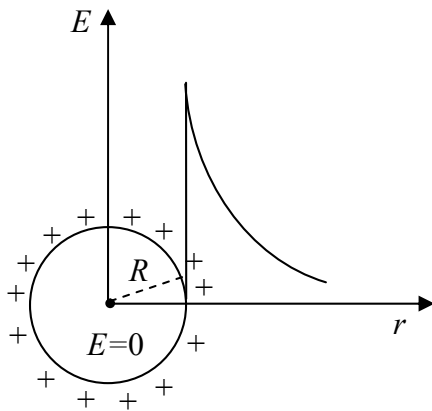


Рис. 4.8

2. Поле бесконечно длинной равномерно заряженной проволоки. Имеется длинная равномерно заряженная проволока с линейной

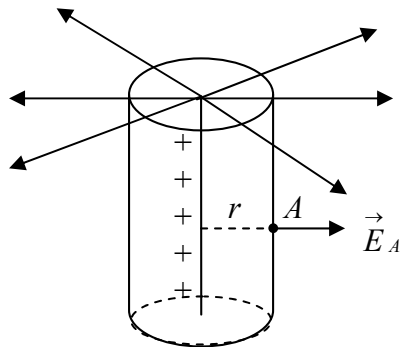


Рис. 4.9

плотностью заряда  $\tau = \frac{q}{l}$ . Определим

напряженность поля  $\vec{E}$  в точке  $A$  (рис. 4.9). Для этого окружим нить цилиндрической поверхностью, проходящей через точку  $A$ . Весь поток проходит через боковую поверхность:

$$N = N_{бок} = DS_{бок} = D 2\pi r l = \varepsilon\varepsilon_0 E 2\pi r l = q,$$

откуда

$$E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi r l} = \frac{\tau}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi r}. \quad (4.12)$$

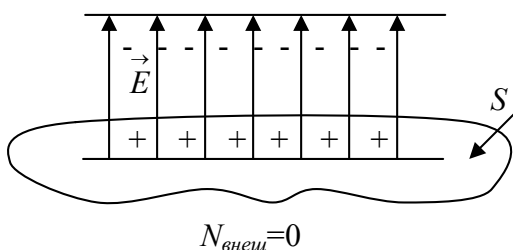


Рис. 4.10

3. Поле плоского конденсатора. Пластины заряжены равномерно с

поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{q}{S}$ . Окружим положительно заряженную пластину замкнутой поверхностью. Все электрическое поле сосредоточено между пластинами конденсатора:

$$N = N_{\text{внутри}} = DS = q,$$

откуда следует

$$D = \frac{q}{S} = \sigma \text{ или } \varepsilon\varepsilon_0 E = \sigma,$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (4.13)$$

$E = \text{const}$  поле однородное.

4. Поле равномерно заряженной плоскости. Из условия симметрии следует, что линии индукции параллельны друг другу и перпендикулярны

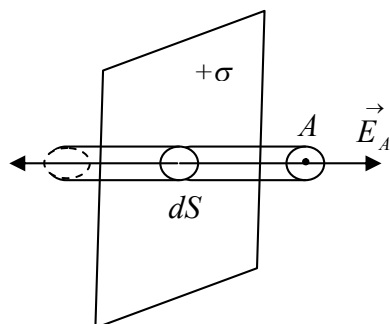


Рис. 4.11

заряженной плоскости. Для определения напряженности в точке  $A$  применим теорему Гаусса к замкнутой цилиндрической поверхности с основанием  $dS$ . Поток индукции  $N$  через замкнутую поверхность равен

$$N = 2N_{\text{осн}} = 2DdS$$

Согласно теореме Гаусса,  $2DdS = dq = \sigma dS$ .

$$\text{Следовательно, } D = \frac{\sigma}{2}, \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4.14)$$

### Теорема Кулона

(следствие теоремы Остроградского-Гаусса)

Возьмем в качестве замкнутой поверхности поверхность прямого цилиндра, проведенного через элементарную площадку  $\Delta S$  на заряженной поверхности проводника (рис. 4.12). Цилиндр построен так, что линии индукции проходят лишь через площадку  $\Delta S$  в направлении от поверхности.<sup>1</sup>

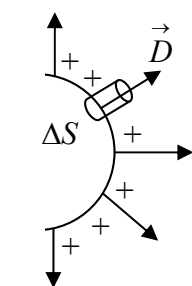


Рис. 4.12

Следовательно,  $\Delta N = D\Delta S$ .

По теореме Остроградского-Гаусса  $\Delta N = \Delta q$ , где  $\Delta q$  – заряд, распределенный на площадке  $\Delta S$  с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$ .

Получаем  $D\Delta S = \Delta q$  или  $D = \frac{\Delta q}{\Delta S} = \sigma$ ,

$$D = \sigma \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (4.15)$$

<sup>1</sup> Электрическое поле внутри заряженного проводника отсутствует.



Теорема Кулона формулируется как:  
**вблизи заряженной поверхности индукция электрического поля численно равна поверхностной плотности заряда.**

**Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Потенциал электрического поля**

Энергетической характеристикой электрического поля является *потенциал*. Потенциальный характер электрического поля обусловлен независимостью работы по перемещению электрического заряда из одной точки поля в другую от формы пути. *Потенциал  $\varphi$*  в данной точке электрического поля численно равен потенциальной энергии единичного точечного положительного заряда, помещенного в эту точку:

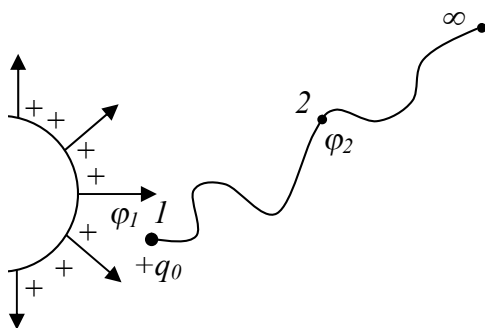


Рис. 4.13

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0}. \quad (4.16)$$

В бесконечно удаленной точке потенциал принимают равным нулю  $\varphi_\infty=0$ .

Потенциал

$$\varphi_1 = \frac{W_{n1}}{q_0} = \frac{W_{n1} - W_\infty}{q_0} = \frac{A_{1\infty}}{q_0}.$$

*Потенциал электрического поля в данной точке численно равен работе, которую совершают силы поля, перемещая единичный положительный заряд из данной точки в бесконечность:*

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_0}, \quad \varphi_2 = \frac{A_{2\infty}}{q_0}. \quad (4.17)$$

На практике пользуются понятием разности потенциалов двух точек поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}.$$

Разность потенциалов двух точек поля численно равна работе, которую совершает электрическое поле за счет своей потенциальной энергии, перемещая единичный положительный заряд из одной точки в другую. Следовательно, работа поля по перемещению заряда  $q_0$  из одной точки поля в другую равна:

$$A = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.18)$$

Разность потенциалов двух точек электрического поля называют напряжением и обозначают  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ .

**Потенциал поля точечного заряда**

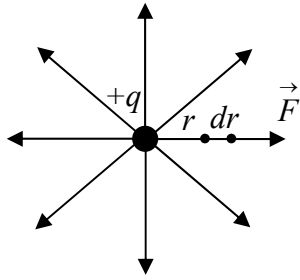


Рис. 4.14

Работу при бесконечно малом перемещении  $dr$  положительного заряда  $q_0$  вдоль силовых линий поля, созданного зарядом  $q$  (рис. 4.14), можно записать так:  $dA = Fdr$ ,

где  $F$ , по закону Кулона: 
$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

Следовательно, 
$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \int_r^\infty \frac{Fdr}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Полученное выражение  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$  справедливо для точечного заряда и заряженного шара при  $r \geq R_{шара}$  ( $r$  – расстояние от центра шара) (рис. 4.15).

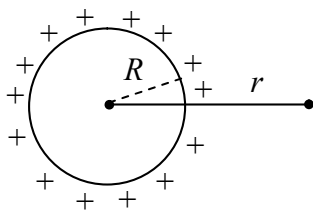


Рис. 4.15

Если поле создано несколькими зарядами, то результирующий потенциал в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, созданных отдельными зарядами в этой точке: 
$$\varphi = \sum_i \pm \varphi_i$$

(потенциал поля, созданного положительным зарядом имеет знак «+», отрицательного «-»).

### Эквипотенциальные поверхности

Эквипотенциальная поверхность – это геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал:  $\varphi = const$ . Для поля точечного заряда

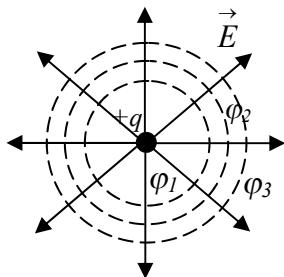


Рис. 4.16

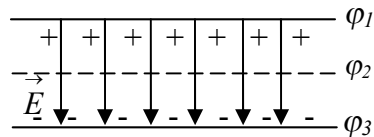


Рис. 4.17

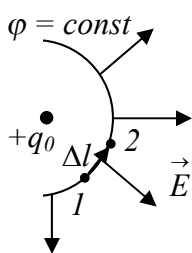


Рис. 4.18

эквипотенциальные поверхности имеют форму сферы (рис. 4.16). В поле плоского конденсатора эквипотенциальные поверхности – это плоскости, параллельные пластинам конденсатора (рис. 4.17).

Работа перемещения заряда (рис. 4.18) по эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0(\varphi - \varphi) = 0.$$

С другой стороны, эта работа может быть представлена как работа электрической силы  $F$  на

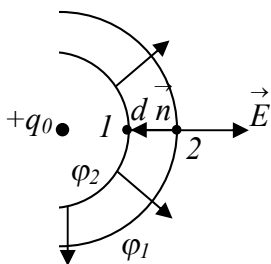
отрезке  $\Delta l$  и может быть записана как

$$A_{12} = F\Delta l \cos(\vec{F}, \Delta \vec{l}) = q_0 E \Delta l \cos(\vec{E}, \Delta \vec{l}) = 0,$$

так как  $q \neq 0$ ,  $E \neq 0$ ,  $\Delta l \neq 0$ , то  $\cos(\vec{E}, \Delta \vec{l}) = 0$ , т.е.  $(\vec{E}, \Delta \vec{l}) = 90^\circ$  и  $\vec{E} \perp \Delta l$ .

Таким образом, **вектор напряженности электрического поля всегда направлен перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.**

### Связь напряженности и потенциала электрического поля



$$\varphi_2 = \varphi_1 + d\varphi$$

Рис. 4.19

Рассмотрим две эквипотенциальные поверхности с потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2 = \varphi_1 + d\varphi$  (рис. 4.19). Работа перемещения заряда из точки с  $\varphi_1$  в точку с  $\varphi_2$ , равна:

$$dA = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0[\varphi_1 - (\varphi_1 + d\varphi)] = -q_0 d\varphi. \quad (4.19)$$

$$\text{С другой стороны, } dA = q_0 E dn \quad (4.20)$$

( $dn$  – бесконечно малое перемещение по нормали к эквипотенциальной поверхности).

Сравнение выражений (4.19) и (4.20) дает

$E = -\frac{d\varphi}{dn}$ . В векторной форме

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n} \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (4.21)$$

Величина  $\frac{d\varphi}{dn}$  называется **градиентом потенциала**. Она характеризует изменение потенциала на единицу длины вдоль силовой линии. Знак минус означает, что в направлении вектора  $\vec{E}$  потенциал  $\varphi$  убывает.

### Электрический диполь

**Электрический диполь** – это система двух равных по величине разноименных точечных зарядов, находящихся на некотором малом расстоянии друг от друга. Характеристикой диполя является **дипольный момент**, равный  $\vec{p} = q \vec{l}$ . Вектор  $\vec{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному, также направлен и вектор дипольного момента  $\vec{p}$ .

Рассмотрим электрическое поле диполя (рис. 4.20):

$$\varphi = \varphi_{+q} - \varphi_{-q} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{q(r_1 - r_2)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}.$$

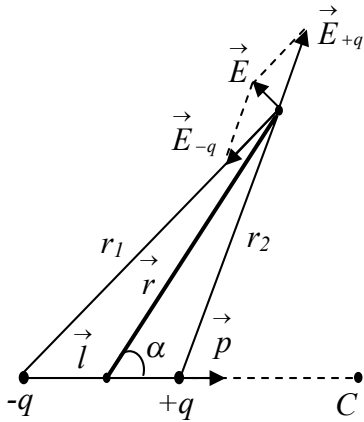


Рис. 4.20

На большом удалении от него  $r_i \gg l$ , тогда можно положить  $r_1 \approx r_2 \approx r$ ,  $r_1 r_2 \approx r^2$ ,  
 $r_1 - r_2 = \Delta r \cong l \cos \alpha$

$$\text{и получить } \varphi \cong \frac{ql \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad (4.22)$$

$p$  – абсолютная величина дипольного момента;  
 $\alpha$  – угол между направлением  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$  ( $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный в рассматриваемую точку из середины диполя).

Напряженность электрического поля диполя в произвольной удаленной от диполя точке вычисляется как

$$E_c = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}. \quad (4.23)$$

Таким образом, для точек на оси диполя (например, в точке C) напряженность находится по формуле:  $E_c = \frac{2p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}$ .

Для точек, лежащих на прямой, перпендикулярной оси диполя и проходящей через середину, напряженность равна:

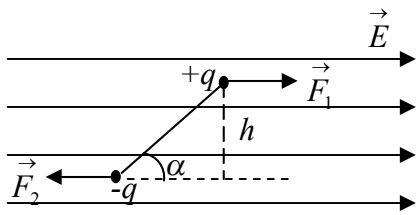


Рис. 4.21

$$E_M = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}.$$

Если диполь поместить в однородное электрическое поле (рис. 4.21), то заряды  $+q$  и  $-q$  окажутся под действием сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , образующих пару сил:

$$\left| \vec{F}_1 \right| = \left| \vec{F}_2 \right| = F = qE.$$

Следовательно, на диполь действует момент пары сил  $M = Fh = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$ .

$$\text{В векторной форме имеем: } \vec{M} = \left[ \vec{p} \times \vec{E} \right]. \quad (4.24)$$

Момент  $\vec{M}$  стремится повернуть диполь так, чтобы его дипольный момент  $\vec{p}$  установился в направлении поля  $\vec{E}$ . Можно показать, что

потенциальная энергия диполя во внешнем электрическом поле определяется по формуле  $W_p = -pE \cos\alpha$  или  $W_p = -\vec{p} \vec{E}$ .

### **Емкость проводника**

Зарядим уединенный проводник, сообщив ему некоторый заряд  $q$ . При этом заряд распределится так, что все точки проводника приобретут определенный одинаковый потенциал  $\varphi$ . Поместив на тот же проводник другой заряд  $q'$ , получим другой потенциал  $\varphi'$ , который будет отличаться от потенциала  $\varphi$  во столько же раз, во сколько заряд  $q'$  отличается от  $q$ . Другими словами, отношение  $\frac{q}{\varphi}$  не изменится. Для данного уединенного проводника  $\frac{q}{\varphi}$  есть величина постоянная, называемая *емкостью*.

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (4.25)$$

В общем случае  $C = \frac{dq}{d\varphi}$ ,  $d\varphi$  – изменение потенциала тела при сообщении ему заряда  $dq$ .

*Емкость проводника* численно равна величине заряда, который нужно сообщить, чтобы увеличить потенциал проводника на единицу.

В системе СИ единица емкости – 1 фарад  $\Phi$ . Так как фарад – очень большая величина, то на практике используют микрофарад  $\text{мк}\Phi$ , пикофарад  $\text{п}\Phi$ :  $1\text{мк}\Phi = 10^{-6} \Phi$ ;  $1\text{п}\Phi = 10^{-12} \Phi$ .

Широкое практическое применение получили конденсаторы. *Конденсатором* называется устройство – состоящее из двух близко расположенных проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. В заряженном состоянии заряды обкладок равны по величине но противоположны по знаку.

Конденсатор при своих малых размерах имеет большую емкость, практически не зависящую от окружающих тел.

В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические, цилиндрические конденсаторы.

### **Емкость сферического конденсатора**

Емкость конденсатора  $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{C}{U}, \quad (4.26)$

где  $q$  – заряд на обкладках конденсатора;  $\varphi_1 - \varphi_2$  – соответствующая разность потенциалов или напряжение на конденсаторе  $U$ .

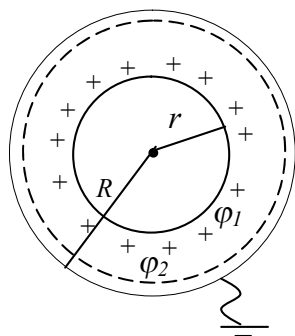


Рис. 4.22

Найдем разность потенциалов для сферического конденсатора (рис. 4.22).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} = \frac{q(R-r)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 Rr}.$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора равна

$$C_{сф.к} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{Rr}{R+r}, \quad (4.27)$$

при  $R \rightarrow \infty$  емкость сферического конденсатора стремится к емкости проводника, имеющего форму шара, т.е.  $C_{шар} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ .

### Емкость плоского конденсатора

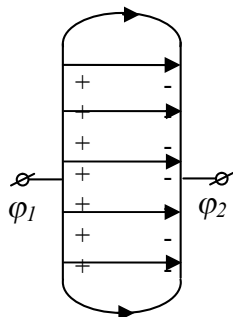


Рис. 4.23

Обозначим:  $S$  – площадь пластин (обкладок) конденсатора (рис. 4.23);  $d$  – расстояние между пластинами. По теореме Кулона  $D = \sigma = \frac{q}{S}$ .

С другой стороны,  $D = \epsilon\epsilon_0 E$ , тогда  $\epsilon\epsilon_0 E = \frac{q}{S}$ ,  $q = \epsilon\epsilon_0 ES$ .

Для однородного поля  $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$ , откуда  $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$ .

Таким образом, емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 SE}{Ed} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (4.28)$$

Как видно из полученных формул емкости для сферических и плоских конденсаторов, емкость конденсатора зависит от геометрических параметров (формы, размеров обкладок, расстояния между ними), а также от диэлектрических свойств среды, заполняющей пространство между обкладками.

### Соединение конденсаторов в батарее

Параллельное соединение трех конденсаторов в батарею показано на (рис. 4.24). Суммарная емкость системы конденсаторов при их параллельном соединении вычисляется как

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n, \quad (4.29)$$

где  $C$  – емкость батареи,  $n$  – число соединенных в батарее конденсаторов

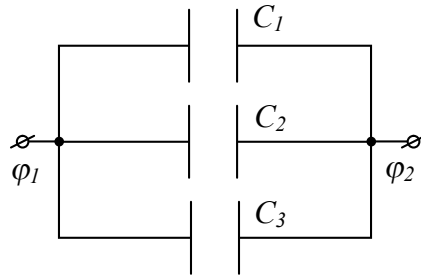


Рис. 4.24

Последовательное соединение показано на рис. 4.25.

Суммарная емкость  $C$  системы конденсаторов при их последовательном соединении связана с емкостью отдельных конденсаторов  $C_i$  как

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (4.30)$$

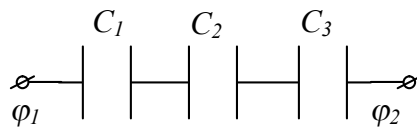


Рис. 4.25

### Энергия электрического поля

При увеличении заряда проводника на элементарную величину  $dq$  потенциальная энергия поля возрастает на величину  $dW$ , равную работе  $dA$ , совершенной внешними силами при перемещении заряда из бесконечности на поверхность проводника:

$$dW = dA = \varphi dq = \frac{q}{C} dq.$$

Полную энергию поля заряженного проводника найдем путем интегрирования:

$$W = \int_0^q dW = \int_0^q \frac{1}{C} q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

Используя связь величин  $C$ ,  $q$  и  $\varphi$ , получим формулу для вычисления энергии уединенного заряженного проводника:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (4.31)$$

Энергия заряженного конденсатора равна:

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{CU^2}{2}, \quad (4.32)$$

где  $U$  – электрическое напряжение<sup>1</sup>.

Отметим, что носителем энергии является электрическое поле конденсатора.

Рассмотрим простейший случай: однородное поле плоского конденсатора (рис. 4.26). Подставим в формулу энергии поля выражение емкости:

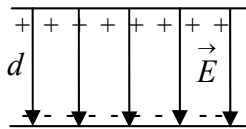


Рис. 4.26

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{d \cdot 2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

$V = Sd$  – объем электрического поля конденсатора.

Следовательно, *плотность энергии* (энергия, приходящаяся на единицу объема) электрического поля равна,  $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$ :

$$\rho_w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2}. \quad (4.33)$$

### **Диэлектрики в электрическое поле**

Диэлектрики можно разделить на две группы: *полярные* и *неполярные*. Если молекулы диэлектриков в отсутствие внешнего поля не обладают дипольным моментом ( $\vec{p} = 0$ ), такие диэлектрики называются *неполярными* ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ , парафин, бензол и др.) Если молекулы диэлектрика обладают собственным дипольным моментом ( $\vec{p} \neq 0$ ), это – *полярные* диэлектрики ( $\text{CO}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{HBr}$  и т.п.).

Под действием внешнего электрического поля ядра атомов и электроны в неполярной молекуле смещаются в противоположные стороны (говорят, молекула поляризуется), и в результате молекула приобретает дипольный момент  $\vec{p}$ .

$$\vec{p} = \beta\varepsilon_0 \vec{E}, \text{ где } \beta \text{ – поляризуемость молекулы.}$$

При снятии внешнего поля поляризация исчезает и дипольный момент снова становится равным нулю.

Полярную молекулу во внешнем поле можно рассматривать как жесткий диполь, стремящийся ориентироваться вдоль поля. Однако тепловое движение молекул препятствует идеальной ориентации.

В обоих случаях на противоположных гранях диэлектрика за счет ориентации молекул появляются избыточные принадлежащие этим

<sup>1</sup> Понятие электрического напряжения (или разности потенциалов) не следует путать с понятием напряженности электрического поля в данной точке.



молекулам заряды, т.н. связанные заряды, т.е. происходит поляризация диэлектрика. Для количественной характеристики поляризованного состояния диэлектрика вводится вектор поляризации  $\vec{P}$ :

$$P = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}, \quad (4.34)$$

где  $\sum_i \vec{p}_i$  – векторная сумма дипольных моментов молекул диэлектрика в объеме  $V$ .

Физический смысл вектора поляризации: вектор поляризации численно равен суммарному дипольному моменту единицы объема диэлектрика.

Для изотропных диэлектриков  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ , где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

### **Связь векторов электрической индукции $\vec{D}$ , напряженности $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$**

Рассмотрим диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$  (рис. 4.27). Связанные заряды на гранях диэлектрика создают поле напряженностью  $\vec{E}_p$ , направленное противоположно внешнему полю  $\vec{E}_0$ . Тогда вектор напряженности результирующего

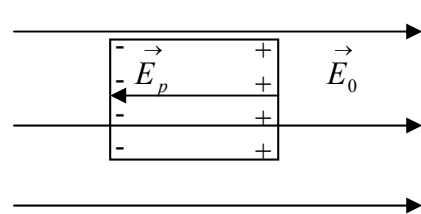


Рис. 4.27

электрического поля внутри диэлектрика  $\vec{E}$  равен векторной сумме  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ .

В скалярной форме получаем  $E = E_0 - E_p$ .

Так как  $E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0}$ ,  $D_p = \sigma_p$  (теорема Кулона) и  $E_p = \frac{D_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$ , то

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{P}{\varepsilon_0}; \quad \varepsilon_0 E = D - P,$$

где  $D$  – индукция внешнего электрического поля;  $D_p$  – индукция поля поляризационных зарядов.

Откуда  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}$  – это формула, связывающая вектор индукции, вектор напряженности электрического поля и вектор поляризованности диэлектрика.

Далее, учитывая, что  $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$  и  $P = \chi \varepsilon_0 E$ , находим  $\varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E$  и получаем формулу, связывающую диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  и электрическую восприимчивость  $\chi$  диэлектрика:  $\varepsilon = 1 + \chi$ .

## 5. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### Электрический ток плотность тока

*Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов в пространстве.

*Носителями тока* могут быть электроны, ионы или микроскопические частицы, несущие на себе электрический заряд.

*За направление электрического тока* принимается направление движения положительных зарядов, которое, в свою очередь, совпадает с направлением электрического поля. Ток возникает при условии, что внутри тела существует электрическое поле. Электрический ток характеризуют *силой и плотностью*.

*Силой тока* через некоторую поверхность  $S$  называется скалярная величина  $I$ , равная первой производной по времени от заряда  $q$ , проходящего через эту поверхность. По физическому смыслу сила тока численно равна заряду, проходящему в единицу времени через данную поверхность:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (5.1)$$

*Ток называется постоянным*, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени:

$$I = \frac{q}{t} \quad (5.2)$$

Единица силы тока – ампер (А). При силе тока, равной 1 А, через поперечное сечение проводника за 1 с проходит заряд, равный 1 Кулону. Распределение электрического тока по сечению  $S$  характеризуется

*вектором плотности тока*  $\vec{j}$ . Он направлен в сторону движения положительных зарядов и численно равен силе тока  $dI$  через расположенную перпендикулярно к направлению движения носителей тока площадку  $dS_{\perp}$ , отнесенной к величине этой площадки. Понятие плотности тока вводится тогда, когда ток по поверхности распределен неравномерно.

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (5.3)$$

Плотность тока  $j$  численно равна заряду, проходящему за 1 с через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к линиям тока.

$$j = \frac{I}{S} = n_0 q v, \quad (5.4)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения проводника;  $n_0$  – число свободных электронов в единице объема;  $q$  – заряд электрона;  $v$  – скорость электронов вдоль линии тока. В качестве единицы плотности тока принимают  $\frac{A}{m^2}$ .

Если известен вектор  $\vec{j}$  в каждой точке, то можно вычислить силу тока  $I$  через любую поверхность  $S$  по формуле:

$$I = \int_S \vec{j} dS, \quad (5.5)$$

т.е. сила тока есть поток вектора плотности тока через данную поверхность.

### **Электродвижущая сила**

Одной из важнейших характеристик источника электрического тока является ЭДС – *электродвижущая сила*. Существует несколько физических толкований этой величины:

- ЭДС равна разности потенциалов на зажимах источника тока при разомкнутой внешней цепи (*статическое толкование*);
- ЭДС равна сумме падений напряжения во внешней и внутренней частях цепи (*динамическое толкование*);
- ЭДС численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда по всей цепи (*энергетическое толкование*);
- наконец, работа по перемещению единичного положительного

заряда по всей цепи может быть записана как циркуляция вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру, т.е. ЭДС численно равна циркуляции вектора напряженности по замкнутому контуру:  $\varepsilon = \oint_l \vec{E}_l dl$ .

В отличие от электростатического поля, интеграл не равен нулю вследствие действия в источнике сил неэлектростатического происхождения, вызывающих разделение зарядов (химические реакции в гальванических элементах, диффузия электронов в случае термопар и т.д.). Единицей измерения ЭДС является вольт  $V$ .

### Закон Ома для участка цепи не содержащего ЭДС (однородный участок цепи)

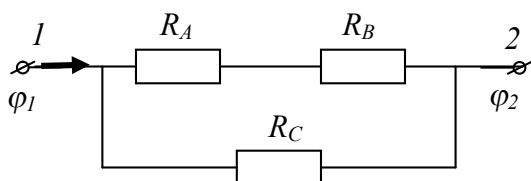


Рис. 5.1

Сила тока  $I$  в цепи, не содержащей ЭДС (рис.5.1), пропорциональна разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (напряжению  $U$ ) на концах проводника и обратно пропорциональна сопротивлению  $R$  проводника.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} \text{ или } I = \frac{U}{R}, \quad (5.6)$$

где  $U$  – напряжение на участке цепи;  $R$  – сопротивление участка цепи, заключенного между точками 1 и 2.

### Закон Ома в дифференциальной форме для участка цепи, не содержащего ЭДС

Закон Ома в дифференциальной форме можно сформулировать так: *плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля в проводнике:*

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{d\varphi}{dn}, \quad (5.7)$$

где  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость,  $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ .

### Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС (неоднородный участок цепи)

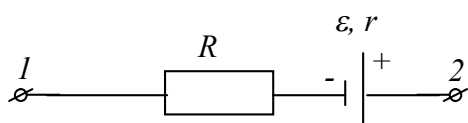


Рис. 5.2

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{(R + r)}, \quad \varphi_1 > \varphi_2 \text{ или } I = \frac{U \pm \varepsilon}{(R + r)}. \quad (5.8)$$

При вычислениях величину  $\varepsilon$  берут со знаком «+», когда направление действия ЭДС совпадает с направлением тока) и со знаком «-», когда направления действия ЭДС противоположны направлению тока, (рис. 5.2).

### Закон Ома для замкнутой цепи

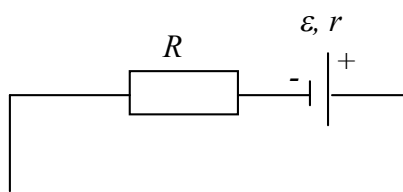


Рис. 5.3

Сила тока в замкнутом контуре, содержащем ЭДС (рис. 5.3), прямо пропорциональна величине ЭДС источника тока  $\varepsilon$  и обратно пропорциональна сумме сопротивления  $R$  внешней части контура и внутреннего сопротивления  $r$  самого источника.

$$I = \frac{\varepsilon}{(R + r)}. \quad (5.9)$$

### Сопротивление проводников.

#### Параллельное и последовательное соединение

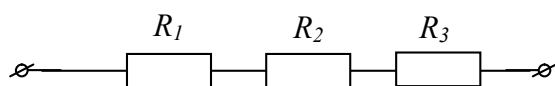


Рис. 5.4

Общее сопротивление цепи при последовательном соединении проводников (рис. 5.4) равно сумме сопротивлений отдельных проводников:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (5.10)$$

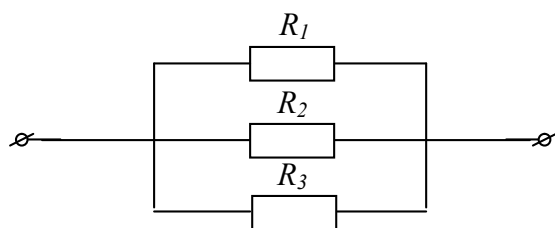


Рис. 5.5

Величина, обратная общему сопротивлению цепи при параллельном соединении (рис. 5.5), равна сумме величин обратных сопротивлению отдельных проводников:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (5.11)$$

В случае смешанного соединения отдельных проводников (рис. 5.1), общее сопротивление участка цепи можно вычислить так:

$$R_I = R_A + R_B, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_C}, \quad R = \frac{R_1 R_C}{R_1 + R_C} = \frac{(R_A + R_B) R_C}{R_A + R_B + R_C}.$$

Сопротивление  $R$  однородного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  вычисляется по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (5.12)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление проводника, Ом·см

Единица измерения сопротивления Ом.

Зависимость удельного сопротивления проводника от температуры в нешироком температурном интервале близка к прямо пропорциональной и может быть выражена формулой:

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (5.13)$$

где  $\rho_0$  – удельное сопротивление при температуре, соответствующей началу интервала;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления.

### **Закон Джоуля-Ленца. Мощность электрического тока**

Работу электрического тока можно вычислить как

$$A = Q = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t, \quad (5.14)$$

где  $I$  – сила тока в проводнике;  $R$  – сопротивление проводника;  $U$  – напряжение на концах проводника;  $t$  – время прохождения тока;  $Q$  – количество теплоты, выделяющееся на участке цепи за время  $t$ . Единица работы электрического тока *Дж*.

### **Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме**

Энергия, выделяемая в единицу времени в каждой единице объема проводника при прохождении по нему тока, пропорциональна квадрату напряженности  $E$  электрического поля:

$$w = \sigma \cdot E^2. \quad (5.15)$$

*Мощность электрического тока*

$$N = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (5.16)$$

Единица мощности электрического тока *Вт*.

### **Правила Кирхгофа для расчета разветвленных электрических цепей**

Расчет разветвленных цепей постоянного тока проводится с помощью правил Кирхгофа.

#### 1 правило

*Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

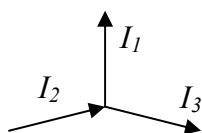


Рис. 5.6

$$\sum_{i=1}^n \pm I_i = 0.$$

Узлом называется точка, в которой сходятся три и более проводников. Токи, входящие в узел, берутся со знаком «+», токи, выходящие из узла, берутся со знаком «-». Число уравнений, составляемых по первому правилу

Кирхгофа при расчете цепей, должно быть на единицу меньше, чем число узлов. Например, для схемы на рис. 5.6 первое правило Кирхгофа запишем:

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0.$$

## 2 правило

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения (т.е. произведений сил токов  $I_i$  на соответствующее сопротивление  $R_i$  или  $r_i$ ) равна алгебраической сумме ЭДС ( $\varepsilon_i$ ), встречающихся в этом контуре:

$$\sum_{i,j} \pm I_i R_j + \sum_{i,j} \pm I_i r_j = \sum_i \pm \varepsilon_i .$$

При расчете цепей по второму правилу Кирхгофа уравнения составляются только для независимых контуров. Контур является независимым, если уравнение, написанное для него, не является линейной комбинацией уже написанных уравнений для других контуров. При составлении уравнений по второму правилу Кирхгофа произвольно выбирают направление обхода контуров (по часовой или против часовой стрелки) и соблюдают следующее правило знаков: если направление тока  $I_i$  в сопротивлении  $R_i$  совпадает с направлением обхода, то падение напряжения  $I_i R_i$  берут со знаком плюс, если противоположно направлению обхода, то со знаком минус. Если источник ЭДС включен так, что в направлении обхода контура при переходе внутри источника от одной его клеммы к другой потенциал возрастает, то величина этого ЭДС берется со знаком плюс.

### **Закон Фарадея для электролиза**

При прохождении электрического тока через электролит масса вещества, выделившегося на одном из электродов, пропорциональна заряду  $q$ , прошедшему через электролит:

$$m = kq = \frac{A}{nF} q = \frac{A}{nF} It, \quad (5.17)$$

где  $F$  – число Фарадея;  $A$  – молярная (атомная) масса вещества;  $n$  – валентность элемента (число электронов на один ион);  $\frac{A}{n}$  – химический

эквивалент вещества;  $k = \frac{A}{nF}$  – электрохимический эквивалент.

Плотность тока  $j$  в электролите пропорциональна напряженности электрического поля  $E$ , сумме подвижностей отрицательных и положительных ионов ( $U_+ + U_-$ ) и числу пар ионов  $n_0$  в единице объема электролита:

$$j = qn_0 (U_+ + U_-) E, \quad (5.18)$$

где  $q$  – заряд иона.

Подвижность  $U$  ионов – физическая величина, численно равная скорости  $v$ , которую приобретает ион того или другого знака в поле с направленностью, равной единице напряженности ( $U = \frac{v}{E}$ ).

## 6. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Опыты Эрстеда (1820 г.) показали, что электрический ток порождает вокруг себя магнитное поле. Магнитное поле – это особая форма существования материи. Материальность магнитного поля проявляется в действии на намагниченные тела, электрические токи, движущиеся электрические заряды. Как и другие виды материи, магнитное поле обладает энергией. Графически магнитное поле принято изображать магнитными силовыми линиями, касательные к которым в любой точке совпадают с направлением векторной характеристики поля – *вектора магнитной индукции*.

### **Действие магнитного поля на электрический ток. Магнитная индукция. Напряженность магнитного поля**

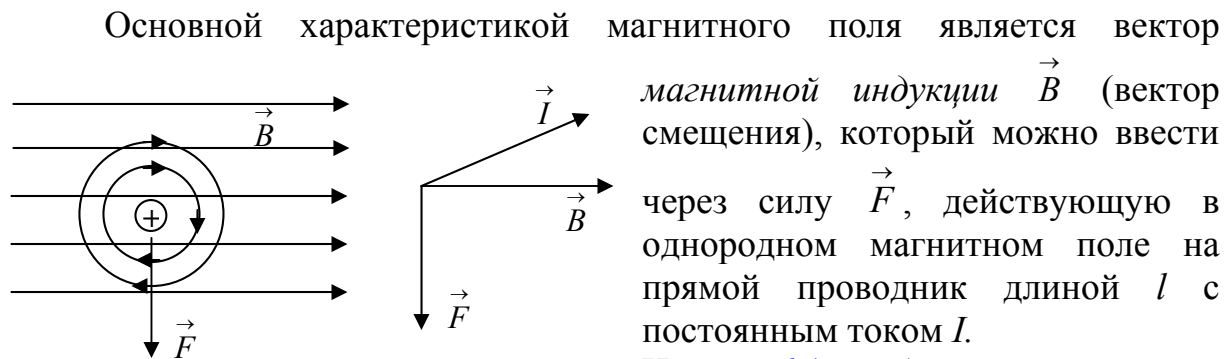


Рис. 6.1

На рис. 6.1 изображены магнитные поля: 1) внешнее однородное  $\vec{B}$  и 2) поле прямого тока направленного от нас (в виде концентрических окружностей).

На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила Ампера  $\vec{F}$ , которая рассчитывается по формуле:

$$\vec{F} = l \left[ \vec{I} \times \vec{B} \right] \quad (6.1)$$

или в скалярной форме

$$F = IBl \sin \left( \vec{I} \wedge \vec{B} \right). \quad (6.2)$$



Направление силы Ампера определяется по правилу векторного произведения или по правилу левой руки (рис. 6.1).

Правило левой руки: *если ладонь левой руки расположить так, что в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток.*

Из формулы (6.2) при условии  $\vec{I} \perp \vec{B}$  получаем

$$B = \frac{F}{Il}. \quad (6.3)$$

Магнитная индукция  $\vec{B}$  численно равна силе, с которой однородное магнитное поле действует на ток единичной силы и единичной длины, помещенный перпендикулярно магнитным силовым линиям. Единица индукции тесла Тл.

Второй характеристикой магнитного поля является *напряженность магнитного поля*  $\vec{H}$ , которая вводится через выражение:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad (6.4)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная, равная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ ;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды (показывает, во сколько раз магнитное поле усиливается или ослабляется за счет влияния среды по сравнению с полем в вакууме).

Векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  совпадают по направлению, если среда изотропна. В отличие от вектора индукции  $\vec{B}$ , вектор напряженности  $\vec{H}$  не зависит от магнитных свойств среды. Величина напряженности магнитного поля измеряется в  $\frac{А}{м}$ .

### Действие магнитного поля на рамку с током

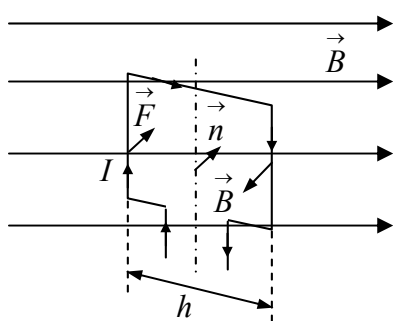


Рис. 6.2

Рассматривая стороны квадратной рамки как прямые проводники с током и применяя к ним формулы 6.1 и 6.2, можно предсказать поведение этой рамки во внешнем магнитном поле. Силы Ампера  $\vec{F}$ , действующие на противоположные стороны рамки, перпендикулярные силовым линиям внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ , образуют пару сил (рис. 6.2, где  $\vec{F}$  – сила Ампера,  $h$  – плечо пары сил).

Момент пары сил равен

$$\vec{M} = [\vec{P}_m \times \vec{B}] \quad (6.5)$$

или в скалярной форме

$$M = P_m B \sin(\vec{P}_m \wedge \vec{B}), \quad (6.6)$$

где  $\vec{P}_m = I S \vec{n}$ , (6.7)

$\vec{P}_m$  – магнитный момент контура с током;  $S$  – площадь контура (рамки);  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности рамки.

Направление векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{P}_m$  связано с направлением тока в контуре по правилу буравчика.

Согласно формуле (6.6), момент пары сил максимален, когда плоскость рамки параллельна силовым линиям, и равен нулю, когда плоскость рамки перпендикулярна силовым линиям.

### **Действие магнитного поля на движущийся заряд.**

#### **Сила Лоренца**

Если частица, несущая заряд  $q$ , движется в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , то на нее действует сила, называемая *магнитной силой* или *силой Лоренца*.

$$\vec{F} = q [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (6.8)$$

В скалярной форме

$$F = qvB \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (6.9)$$

Если заряд  $q$  положителен, то направление силы Лоренца  $\vec{F}$  определяется по правилу векторного произведения или правилу левой

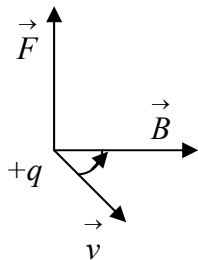


Рис. 6.3

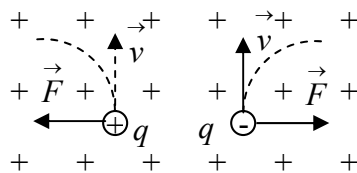


Рис. 6.4

руки. Если заряд  $q$  отрицателен, то направление

силы  $\vec{F}$  противоположно. (рис. 6.3, 6.4). «+» –

означает, что вектор  $\vec{B}$

направлен перпендикулярно к плоскости чертежа от нас.

Пунктиром изображены

траектории движения заряженных частиц в магнитном поле.

Траектория движущейся частицы зависит от угла между векторами  $(\vec{v}, \vec{B}) = \alpha$ . Если угол между вектором скорости и магнитной индукции  $\alpha$  равен 0 или  $\pi$ , тогда сила Лоренца равна нулю. В этом случае магнитное поле не действует на заряженную частицу, и она движется равномерно и прямолинейно вдоль силовых линий поля.

Если частица движется в магнитном поле с вектором скорости, перпендикулярным вектору магнитной индукции, то сила Лоренца  $F = qvB$  постоянна по модулю и перпендикулярна к траектории частицы. В этом случае частица будет двигаться по окружности, радиус которой определяется из условия  $qvB = mv^2/r$ , т.е.  $r = \frac{mv}{qB}$ . Период вращения частицы

$$T = 2\pi r/v \text{ или } T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Если скорость движения частицы направлена под углом  $\alpha$  к вектору магнитной индукции, то ее движение представляют в виде суперпозиции а) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  и б) равномерного движения со скоростью  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  по окружности. В результате сложения двух движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю. Шаг винтовой линии равен  $h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha$ .

Если на движущуюся заряженную частицу помимо магнитного поля действует электрическое поле, то результирующая сила, приложенная к частице, равна векторной сумме сил:  $\vec{F} = \vec{F}_{эл} + \vec{F}_л$ , т.е.  $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$ , и это будет истинной силой Лоренца.

### Поток магнитной индукции

Для однородного магнитного поля магнитный поток  $\Phi$  через площадку  $S$  (рис. 6.5) определяется формулой:

$$\Phi = BS \cos \alpha = B_n S, \text{ где } B_n = B \cos \alpha, \quad (6.10)$$

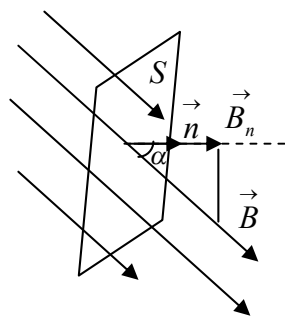


Рис. 6.5

$\vec{n}$  – единичный вектор нормали к площадке.

Единица потока  $\Phi$  в системе СИ вебер Вб.

В неоднородном магнитном поле элементарный магнитный поток  $d\Phi$ , проходящий через элементарную площадку, равен

$$d\Phi = B_n dS. \quad (6.11)$$

Полный магнитный поток находится интегрированием

по поверхности  $S$ :  $\Phi = \int_S B_n dS$ .

## Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

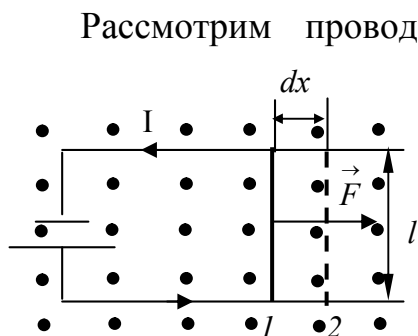


Рис. 6.6

Рассмотрим проводник длиной  $l$  с током  $I$ , помещенный в однородное магнитное поле, который может свободно перемещаться по проводам, подключенным к источнику ЭДС. Пусть магнитное поле однородно и его силовые линии перпендикулярны плоскости образованного таким способом контура (рис. 6.6).

Под действием силы Ампера  $F=IBl$  проводник переместится параллельно самому себе на отрезок  $dx$  из положения 1 в положение 2. Совершаемая при этом работа будет равна

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi,$$

где,  $ldx = dS$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $d\Phi$  – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

$$dA = Id\Phi. \quad (6.12)$$

*Работа по перемещению проводника (контура) с током в магнитном поле равна произведению силы тока на изменение магнитного потока.*

Заметим, формула (6.12) справедлива не только для проводника, но и замкнутого контура любой формы. Отметим также, что работа по перемещению проводника совершается не магнитным полем, а за счет энергии источника ЭДС.

### Закон Био-Савара-Лапласа

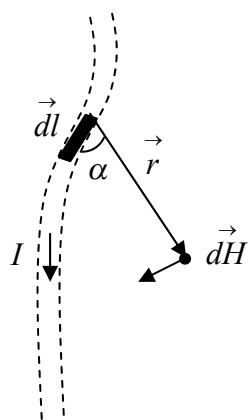


Рис. 6.7

Рассмотрим проводник, по которому течет ток силой  $I$ . Напряженность магнитного поля, создаваемого элементарным отрезком проводника  $\vec{dl}$  на расстоянии  $r$  от него, находится по формуле:

$$\vec{dH} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \left[ \vec{dl} \times \vec{r} \right]}{r^3}. \quad (6.13)$$

В скалярной форме

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin\alpha}{r^2}, \quad (6.14)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{dl}$  и  $\vec{r}$  (рис. 6.7).

Направление  $\vec{dH}$  определяется по правилу векторного произведения.  
 Формулы (6.13) и (6.14) выражают закон Био-Савара-Лапласа.

### Частные случаи закона Био-Савара-Лапласа

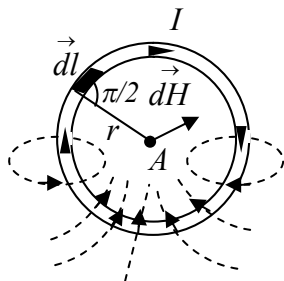


Рис. 6.8

1. Напряженность магнитного поля в центре кругового тока

$$H = \frac{I}{2r}. \quad (6.15)$$

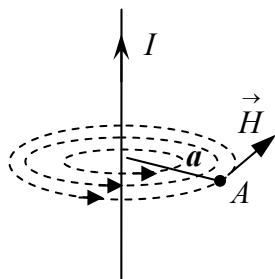


Рис. 6.9

2. Напряженность магнитного поля прямого бесконечного длинного проводника с током

$$H = \frac{I}{2\pi a}. \quad (6.16)$$

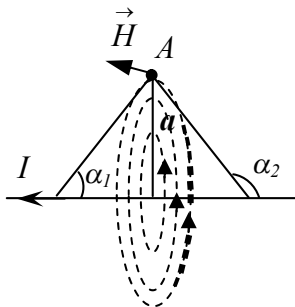


Рис. 6.10

3. Напряженность магнитного поля проводника конечной длины, по которому протекает ток силой I

$$H = \frac{I}{4\pi a} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (6.17)$$

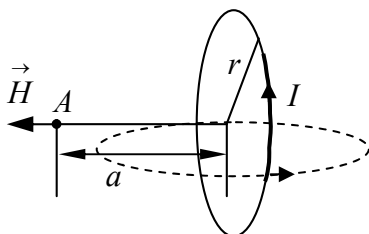


Рис. 6.11

4. Напряженность магнитного поля на оси кругового тока

$$H = \frac{IR^2}{2\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}. \quad (6.18)$$

## Взаимодействие двух параллельных токов

Электрические токи действуют друг на друга посредством своих магнитных полей с силой

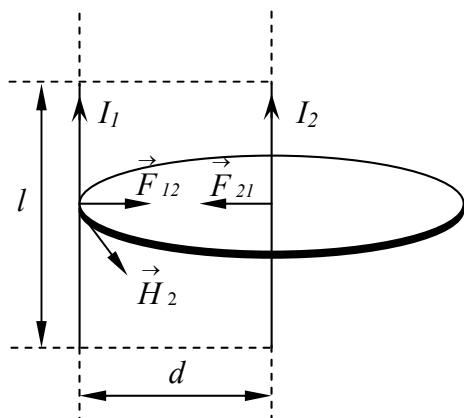


Рис. 6.12

$$F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi d} \quad (6.19)$$

На рис. 6.12 показано, как поле тока  $I_2$ , действует на ток  $I_1$ .

$l$  – длина проводников, на которой рассматривается взаимодействие;  $d$  – расстояние между проводниками.

Из формулы (6.19) дается определение единицы силы тока в системе СИ.

*Ампер* – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и пренебрежимо малого круглого сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает силу взаимодействия  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины,  $\mu = 1$ ,  $d = 1$  м,  $l = 1$  м,  $F = 2 \cdot 10^{-7}$  Н,  $I_1 = I_2 = 1$  А.

### Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ (закон полного тока)

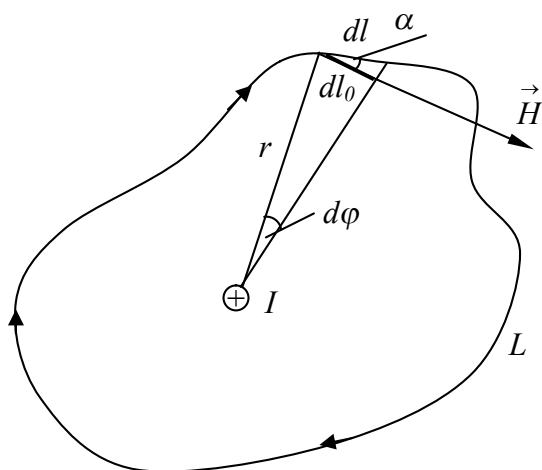


Рис. 6.13

Рассмотрим циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  вокруг прямого бесконечно длинного проводника с током  $I$ .

На рис. 6.13  $I$  – ток, протекающий по проводнику, перпендикулярному плоскости чертежа,  $dl$  – элемент контура;  $dl_0$  – его проекция на направление вектора  $\vec{H}$ :

$$dl_0 = dl \cos \alpha, \quad dl_0 = r d\varphi$$

Запишем циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по

контур  $L$ :

$$\oint \vec{H}_1 d\vec{l} = \oint H dl \cos \alpha = \oint H dl_0 = \oint H r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = I.$$

В общем случае  $I = \pm \sum_i I_i$  – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром.

Итак,

$$\oint H_l dl = \pm \sum_i I_i. \quad (6.20)$$

Закон полного тока: *циркуляция вектора напряженности  $\vec{H}$  по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.*

### Магнитное поле соленоида

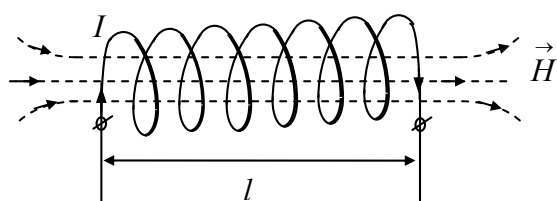


Рис. 6.14

Напряженность однородного магнитного поля внутри длинного соленоида рассчитывается по формуле:

$$H = \frac{IN}{l}, \quad (6.21)$$

$N$  – полное число витков соленоида;  $l$

– длина соленоида.

Индукция магнитного поля соленоида

$$B = \frac{\mu\mu_0 IN}{l}. \quad (6.22)$$

Магнитный поток через соленоид

$$\Phi = \frac{\mu\mu_0 IN}{l} S. \quad (6.23)$$

### Закон Ома для магнитной цепи

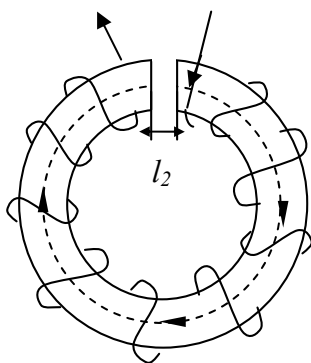


Рис. 6.15

Магнитная цепь – это цепь из элементов с различными сечениями и относительной магнитной проницаемостью, через которые проходит магнитный поток  $\Phi$ . По аналогии с законом Ома для силы тока электрической цепи, для магнитного потока  $\Phi$  может быть записано выражение:

$$\Phi = \frac{IN}{\frac{l_1}{\mu_0\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_0\mu_2 S}}, \quad (6.24)$$

где  $l_1$  – длина средней линии (пунктир) сердечника с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ ;  $l_2$  – длина (ширина) зазора;  $\mu_2$  – магнитная проницаемость в зазоре.

Выражение  $R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu S}$  – называется *магнитным сопротивлением*.

### **Магнитное поле в веществе**

В атомах и молекулах вещества имеются движущиеся заряды (электроны), на которые магнитное поле действует с силой Лоренца. Общее воздействие магнитного поля на тело определяется характером движения этих зарядов, их скоростями, формой и расположением траекторий их движения. Таким образом, магнитное поле намагничивает вещество, вследствие чего тела создают свое собственное магнитное поле, которое складывается с основным (внешним) полем, давая результирующее поле внутри магнетика. В этом случае вектор  $\vec{B}$  магнитного поля в веществе будет складываться из векторов  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$  намагничивающего (внешнего) поля и вектора  $\vec{B}'$  собственного магнитного поля намагнитившегося вещества  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ .

#### **Классификация веществ по магнитным свойствам:**

- 1) диамагнетики ( $\mu \leq 1$ );
- 2) парамагнетики ( $\mu \geq 1$ );
- 3) ферромагнетики ( $\mu \gg 1$ ,  $\mu = f(H)$ ).

У диамагнетиков вектор собственного индуцированного магнитного поля  $\vec{B}'$  направлен против вектора внешнего поля  $\vec{B}_0$ , у парамагнетиков и ферромагнетиков вектор  $\vec{B}'$  имеет одинаковое направление с вектором  $\vec{B}_0$ .

Для характеристики намагничивания веществ вводится понятие *вектора намагниченности*  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{P}_m}{V}, \quad (6.25)$$

где  $\vec{P}_m$  – элементарный магнитный момент.

Таким образом, *вектор намагниченности*  $\vec{J}$  равен суммарному магнитному моменту единицы объема.

Если напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  невелика, то  $\vec{J} \approx \chi \vec{H}$ , где  $\chi$  – *магнитная восприимчивость вещества*.



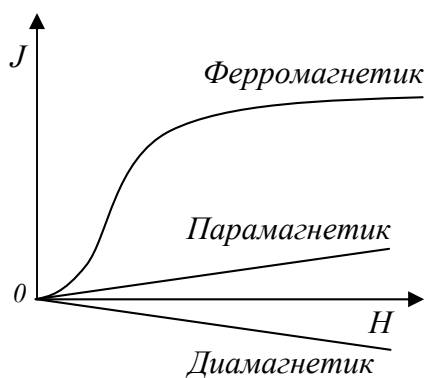


Рис. 6.16

Вектора  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$  связаны между собой соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}. \quad (6.26)$$

Атомы и молекулы *диамагнетиков* (в отличие от парамагнетиков и ферромагнетиков) не имеют собственного магнитного момента и диамагнитный эффект является единственной реакцией вещества на воздействие внешнего магнитного поля.

Атомы и молекулы *парамагнетиков* имеют некоторый магнитный момент в отсутствие внешнего магнитного поля. Однако тепловое движение создает беспорядок в ориентации магнитных моментов атомов и молекул парамагнетиков, поэтому при отсутствии внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент в веществе равен нулю. Намагничивание парамагнетиков обусловлено упорядочением расположения магнитных моментов вдоль поля.

*Ферромагнетик* – твердое тело – в отсутствие внешнего магнитного поля, состоит из микроскопических областей, намагниченных до состояния насыщения, т.е. в пределах каждой такой микрообласти магнитные моменты всех атомов ориентированы строго параллельно друг другу. Эти области «спонтанного» намагничения называются *доменами*. Поскольку в соседних доменах вектора магнитных моментов ориентированы различно, то суммарный магнитный момент всех доменов в отсутствие поля равен нулю. Внешнее магнитное поле стремится сориентировать магнитные моменты по полю, т.е. происходит перестройка доменов и вещество намагничивается.

Важные свойства ферромагнетиков:

- 1) ферромагнетик в отличие от парамагнетика намагничивается до насыщения уже в слабых полях;
- 2) магнитная проницаемость  $\mu$  и восприимчивость  $\chi$  зависят от напряженности внешнего поля;
- 3) ферромагнитные тела сохраняют состояние намагниченности после удаления их из пределов намагничивающего поля;

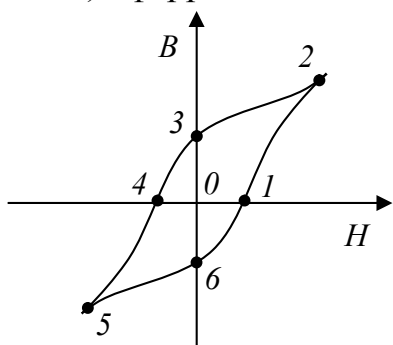


Рис. 6.17

- 4) при намагничивании и размагничивании ферромагнитные тела изменяют свои размеры; это явление называется *магнитоstrictionей*;

- 5) при перемагничивании обнаруживается магнитный «гистерезис» (рис. 6.17), т.е. намагничивание происходит

при одной зависимости  $B$  от  $H$  (кривые 1-2 и 4-5), а размагничивание – при другой зависимости (кривые 2-3-4 и 5-6-1). Чтобы размагнитить вещество, необходимо приложить внешнее поле обратного направления с напряженностью  $H_0$ , соответствующей отрезку 0-4; эта величина называется коэрцитивной силой и является одной из основных характеристик магнитных свойства вещества.

### Электромагнитная индукция. Теория Максвелла

В опытах Эрстеда (1820 г.) было открыто явление возникновения магнитного поля вокруг проводника с током. Обратное явление (возбуждение тока под действием магнитного поля) было открыто в результате 10-ти летних поисков М. Фарадеем (1831 г.) и получило название явление электромагнитной индукции.

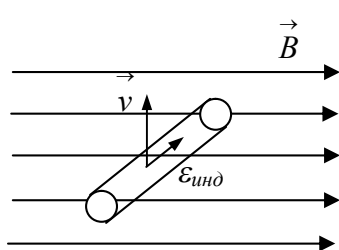
На современном языке результаты опытов Фарадея можно сформулировать так: *при всяком изменении магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего контур, в последнем наводится ЭДС индукции; величина ЭДС прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока:*

$$\varepsilon_{\text{инд}} \sim \frac{d\Phi}{dt}.$$

Общее правило для нахождения направления индукционных токов было сформулировано Э.Х. Ленцем.

Правило Ленца: *индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток; или в перефразированной форме: индукционный ток имеет такое направление, при котором его магнитное поле стремится препятствовать вызвавшему его изменению магнитного потока.*

Формула ЭДС (электродвижущей силы) индукции:



$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.27)$$

Рис. 6.18

Знак «-» (минус) выражает математически правило Ленца. Таким образом, ЭДС индукции ( $\varepsilon_{\text{инд}}$ ) равна скорости изменения потока индукции  $\Phi$ , взятого со знаком минус. В случае движения прямого проводника длиной  $l$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис. 6.18) в проводнике наводится ЭДС индукции, определяемая по формуле:

$$\vec{\varepsilon}_{\text{инд}} = l \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right]. \quad (6.28)$$

В скалярной форме

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -vBl \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (6.29)$$

Направление ЭДС индукции на рис. 6.18 может быть определено по правилу векторного произведения (6.28) или по правилу правой руки:

*если ладонь правой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а отогнутый большой палец расположить по направлению движения проводника, то четыре вытянутых пальца покажут направление индукционного тока.*

*Явление самоиндукции* – это частный случай явления электромагнитной индукции. Оно возникает в цепи при изменении собственного тока. Величина магнитного потока  $\Phi$  прямо пропорциональна величине тока  $I$ , текущего по замкнутому контуру и индуктивности этого контура:

$$\Phi = LI, \quad (6.30)$$

где  $L$  – индуктивность контура или коэффициент самоиндукции, численно равный магнитному потоку через контур, вызванному протекающим по контуру током 1 А. Единица индуктивности  $L$ , генри Гн.

Величина индуктивности  $L$  зависит как от геометрических параметров контура, так и от магнитных свойств среды  $\mu$ , находящейся *внутри контура* (например, сердечника).

Для соленоида или тороида без зазора в системе СИ индуктивность равна:

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2}{l} S, \quad (6.31)$$

где  $N$  – полное число витков;  $l$  – длина;  $S$  – площадь поперечного сечения.

Изменение собственного тока  $I$  в контуре сопровождается изменением пронизывающего контур магнитного потока  $\Phi$ , а следовательно, наведением в контуре ЭДС индукции, которую в данном случае называют самоиндукцией.

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \varepsilon_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6.32)$$

Итак, ЭДС самоиндукции равна:

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6.33)$$

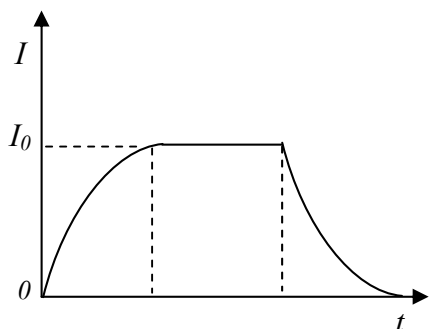


Рис. 6.19

Знак «-» (минус) означает в соответствии с правилом Ленца, что направление  $\varepsilon_L$  и индукционного тока  $I_L$  всегда препятствуют изменению собственного тока в цепи.

Явление самоиндукции наблюдается не только в цепях переменного тока, но и в

цепях постоянного при замыкании и размыкании тока. Токи самоиндукции, возникающие при замыкании и размыкании цепей, носят название *экстраток* и могут достигать больших величин. Закон изменения величины тока со временем при размыкании цепи выражается формулой:

$$I_{\text{разм}} = I_0 e^{-\frac{R \cdot t}{L}}, \quad (6.34)$$

где  $I_0$  – значение тока в момент размыкания,  $t=0$ ;  $R$  и  $L$  – соответственно сопротивление и индуктивность цепи;  $I_{\text{разм}}$  – величина тока в цепи через время  $t$  после размыкания.

Закон нарастания тока при замыкании до величины установившегося тока  $I_0$  записывается формулой:

$$I_{\text{замык}} = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R \cdot t}{L}}\right). \quad (6.35)$$

График изменения тока при замыкании и размыкании цепи показан на (рис. 6.19).

В случае, если изменяющийся магнитный поток одного контура пронизывает другой контур, имеет место явление *взаимной индукции*.

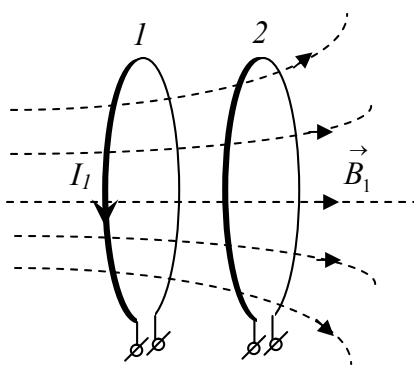


Рис. 6.20

При изменении магнитного потока первого контура во втором возникает ЭДС индукции и наоборот (см. рис. 6.20)

Характеристикой магнитной связи контуров служит коэффициент взаимной индукции  $M$ , зависящий от размеров, формы, взаимного расположения контуров и магнитных свойств среды в контурах.

ЭДС взаимной индукции, например во втором контуре, находится по формуле:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}. \quad (6.36)$$

Аналогично для первого контура

$$\varepsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (6.37)$$

Явление взаимной индукции лежит в основе принципа действия трансформаторов переменного тока.

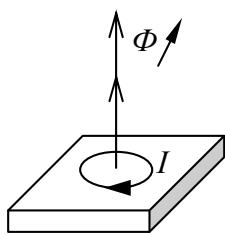


Рис. 6.21

При изменении магнитных потоков, пронизывающих сплошные массивные проводники, индукционные токи наводятся в толще этих проводников. При этом индуцированное в проводниках электрическое поле имеет вихревой характер, т.е. силовые линии электрического поля замкнуты и индукционные токи, возникающие в сплошных проводниках, получили название вихревых или

токов Фуко (рис. 6.21). Токи Фуко приводят к выделению тепла, что с одной стороны используется в медицине, в технике, например при индукционном нагреве или плавке металлов, а с другой, вызывает нежелательные явления (нагревание сердечников трансформаторов и увеличение потерь энергии и т.д.).

### Энергия магнитного поля

Энергия магнитного поля, возникающего вокруг контура с индуктивностью  $L$  при прохождении тока  $I$  равна, Дж:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (6.38)$$

Плотность энергии магнитного поля,  $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$ :

$$\rho_w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (6.39)$$

### Теория Максвелла

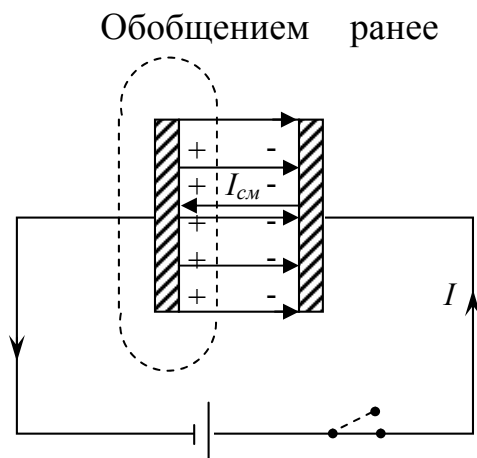


Рис. 6.22

Обобщением ранее установленных законов электричества и магнетизма явилась теория единого электромагнитного поля, созданная Д. К. Максвеллом (1863 г.). Теория Максвелла объяснила огромный круг вопросов и явлений от электростатического поля до природы света. В основе теории Максвелла лежат две гипотезы, являющиеся дальнейшим развитием и обобщением идей Эрстеда и Фарадея.

Первая гипотеза: *вокруг всякого тока существует магнитное поле, или в другой формулировке: ток смещения так же, как и ток проводимости, создает магнитное поле.*

Вторая гипотеза: *явление электромагнитной индукции имеет место независимо от наличия проводящего контура, т.е. вокруг меняющегося магнитного потока существует вихревое электрическое поле.*

#### Ток смещения

Рассмотрим процесс разрядки конденсатора большой емкости.

По проводнику течет ток проводимости  $I = \frac{dq}{dt}$ . Течет ли ток через диэлектрик в конденсаторе или ток разрывается? Максвелл предположил, что все электрические токи в природе замкнуты. Следовательно, через

диэлектрик якобы «течет» ток. Этот ток формально пропорционален скорости убывания заряда на пластинках  $\frac{dq}{dt}$  и обусловлен изменением электрического поля между пластинами. По теореме Остроградского-Гаусса поток электрической индукции  $N$  связан с величиной заряда на пластине  $q$  (будем рассматривать  $+q$  заряд) соотношением  $N=q$ .

Поделив левую и правую части уравнения на  $dt$  получим  $\frac{dq}{dt} = \frac{dN}{dt}$ , т.е. скорость изменения потока электрической индукции можно принять за особый вид электрического «тока» – ток смещения  $I_{см} = \frac{dN}{dt}$ .

На рис. 6.22. ток смещения  $I_{см}$  направлен противоположно силовым линиям электрического поля, т.к.  $\frac{dN}{dt} < 0$  ( $N$  убывает). Следовательно, ток в цепи можно считать формально замкнутым.

Физический смысл понятия «ток смещения» выясняется при рассмотрении составляющих плотности тока смещения  $J_{см}$ .

$$\vec{J}_{см} = \frac{\vec{I}_{см}}{S} = \frac{(\frac{dN}{dt})}{S} = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Используя связь вектора индукции  $\vec{D}$  с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и вектором поляризованности диэлектрика  $\vec{P}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

получим  $\vec{J}_{см} = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt}$

Изменение вектора поляризованности связано со смещением зарядов в диэлектрике,  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  – одна из составляющих плотности тока смещения.

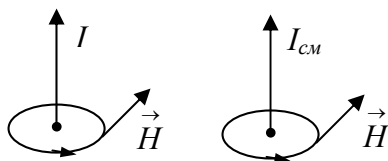


Рис. 6.23

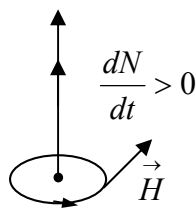


Рис. 6.24

Для вакуума  $\vec{P} = 0$  и  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ , следовательно, в вакууме

$$\vec{J}_{см} = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (6.40)$$

Ток смещения в вакууме действительно существует (см. опыты А.А.Эйхенвальда) и создает в окружающем пространстве магнитное поле, но не сопровождается выделением тепла.

Итак, всякое изменение электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля (магнитные силовые линии замкнуты).

На основании своей первой гипотезы Д.К. Максвелл обобщил закон полного тока:

$$\oint H_l dl = (I + I_{cm}).$$

Первое уравнение Максвелла.

$$\oint H_l dl = I + \frac{dN}{dt},$$

где  $I$  – ток проводимости;  $\frac{dN}{dt}$  – ток смещения

Частный случай.  $I=0$ , тока проводимости нет.

Вокруг изменяющегося электрического поля существует вихревое магнитное поле.

$$\frac{dN}{dt} = \oint H_l dl.$$

Если  $N$  растет, то  $\frac{dN}{dt} > 0$  и направление магнитных силовых линий определяется по правилу буравчика.

Второе уравнение Максвелла является обобщением формулы ЭДС электромагнитной индукции.

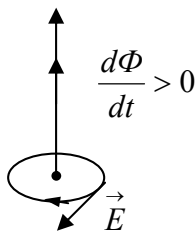


Рис. 6.25

По определению электродвижущей силы

$$\varepsilon = \oint E_l dl$$

(работа по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру).

С другой стороны, ЭДС индукции

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.41)$$

Таким образом, можно записать, что

$$\oint E_l dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (6.42)$$

т.е. изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля. Наличие проводящего контура не обязательно.

Формула  $\oint E_l dl = -\frac{d\Phi}{dt}$  – интегральная запись второго уравнения

Максвелла.

Направление электрического поля определяется по правилу Ленца.

Следствием уравнений Максвелла явилось предсказание существования электромагнитных волн.



Пусть  $I=0$ , тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \oint H_l dl \\ \frac{d\Phi}{dt} = -\oint E_l dl \end{cases}$$

Эта система двух уравнений доказывает неразрывную связь переменных вихревых электрического и магнитного полей. То есть имеем единое электромагнитное поле, не связанное с зарядами и токами проводимости.

В отличие от других форм существования материи, электромагнитное поле не может находиться в покое, а распространяется по всем направлениям со скоростью света, т.е. возникают электромагнитные волны. Уравнения Максвелла описывают структуру электромагнитного поля. Максвелл установил следующие законы для электромагнитной волны в однородной среде:

1) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в одинаковых фазах во взаимно перпендикулярных плоскостях;

2) скорость электромагнитной волны в некоторой среде равна  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ,  $c$  – скорость света в вакууме. Для любой среды  $\epsilon\mu > 1$ ,

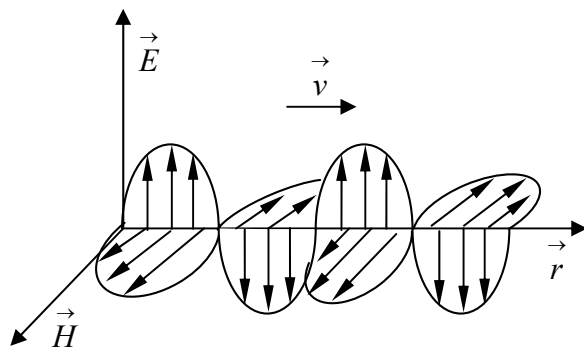


Рис. 6.26

следовательно,  $v < c$  т.е.  $c$  – максимальная скорость распространения электромагнитных волн. Электрические и магнитные силовые линии всегда лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения электромагнитных колебаний.

Следовательно, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны  $\vec{v}$ , т.е. колебания поперечные (рис. 6.26).

Электромагнитная волна описывается системой двух уравнений:

$$\begin{cases} E = E_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \\ H = H_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \end{cases} \quad (6.43)$$

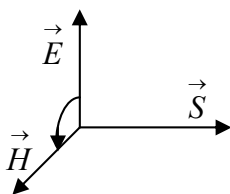


Рис. 6.27

Плотность потока энергии электромагнитных волн т.е. энергию, переносимую за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной



направлению потока, определяет вектор Умова-Пойнтинга  $\vec{S}$ :

$$\vec{S} = \left[ \vec{E} \times \vec{H} \right]. \quad (6.44)$$

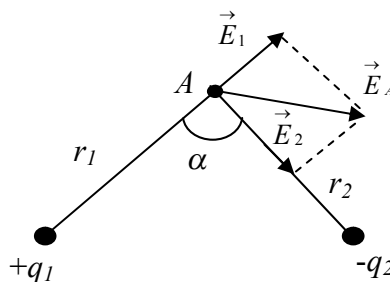
Предсказанные Максвеллом в 1863 году электромагнитные волны были получены на опыте Г. Герцем в 1888 году и впервые практически применены А.С. Поповым в 1896 году. В 1900 году П.Н. Лебедев обнаружил и измерил давление электромагнитных волн (света).

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Два точечных заряда  $q_1 = 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$  Кл находятся в воздухе на расстоянии  $d=10$  см друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке  $A$  (рис.), если расстояние  $r_1 = 9$  см,  $r_2 = 7$  см.

Дано:

$q_1 = 10^{-9}$  Кл  
 $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$  К  
 $d = 10$  см = 0,1 м  
 $r_1 = 9$  см = 0,09 м  
 $r_2 = 7$  см = 0,07 м  
 $\epsilon = 1$




---

$E_A$  -?,  $\phi_A$  -?

### Решение

Применим принцип суперпозиции полей. Общая (результатирующая) напряженность  $\vec{E}_A$  в точке  $A$  равна геометрической сумме напряженности двух полей, создаваемых зарядами  $q_1$  и  $q_2$  т.е.

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1)$$

где  $\vec{E}_1$  – напряженность поля заряда  $q_1$ ;  $\vec{E}_2$  – напряженность поля заряда  $q_2$ . Направление  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  легко определить, если представить в точке  $A$  заряд  $+1$ .

На рисунке вектор  $\vec{E}_1$ , направлен от заряда  $q_1$ , т.к. этот заряд положительный,  $\vec{E}_2$  – вектор направлен в сторону заряда, т.к. этот заряд отрицательный. Результирующий вектор  $\vec{E}_A$  совпадает по величине и направлению с диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах. Абсолютное значение этого вектора найдем из соотношения (теорема косинусов):

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}. \quad (2)$$

Абсолютную величину напряженностей  $E_1$  и  $E_2$ , а также  $\cos\alpha$  определим по формулам:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1^2}, \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2^2}, \quad (4)$$

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}. \quad (5)$$

Подставив числовые значения в формулы (2), (3), (4) и (5), получим:

$$E_1 = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (0,09)^2} = 1,11 \cdot 10^3 \text{ В/м},$$

$$E_2 = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (0,07)^2} = 3,68 \cdot 10^3 \text{ В/м},$$

$$\cos\alpha = \frac{(0,09)^2 + (0,07)^2 - (0,1)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = 0,238,$$

$$E_A = \sqrt{(1,11 \cdot 10^3)^2 + (3,68 \cdot 10^3)^2 - 2 \cdot 1,11 \cdot 10^3 \cdot 3,68 \cdot 10^3 \cdot 0,238} = 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Потенциал  $\varphi_A$  результирующего поля, созданного двумя зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , равен алгебраической сумме потенциалов, т.е.

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (6)$$

Потенциал  $\varphi_1$  является положительным, т.к. поле создано положительным зарядом  $q_1$ ; потенциал  $\varphi_2$  является отрицательным, т.к. поле создано отрицательным зарядом  $q_2$ . Численное значение потенциала поля, созданного точечным зарядом, определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

Подставив в (7) численные значения величин, получим:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,09} = 100 \text{ В},$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} = \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,07} = -257 \text{ В}.$$

Подставив в выражение (6) численные значения потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с учетом их знаков, получим:

$$\varphi_A = 100 - 257 = -157 \text{ В}.$$

Ответ:  $E_A = 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м}$ ,  $\varphi_A = -157 \text{ В}$ .

Задача 2. Пылинка массой  $10^{-8}$  г находится между пластинами плоского конденсатора, к которому приложено напряжение  $U = 5000$  В. Расстояние между пластинами 4,9 см. Каков заряд пылинки, если она висит в воздухе? Сколько электронов содержит заряд? С каким ускорением будет двигаться пылинка, лишившись половины электронов в результате фотоэффекта?

Дано:

$$m = 10^{-11} \text{ кг}$$

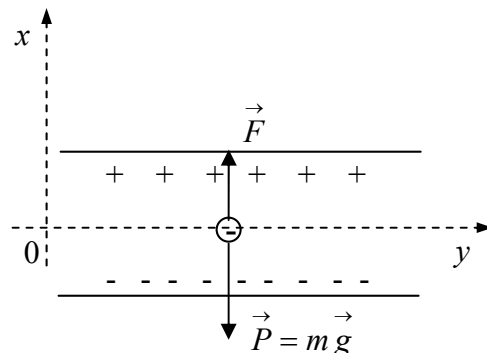
$$U = 5 \cdot 10^3 \text{ В}$$

$$d = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\varepsilon = 1$$

---


$$q - ?, n - ?, a - ?$$



Решение

На пылинку действуют две силы: вес пылинки  $\vec{P}$  и сила электрического поля  $\vec{F}$  (см. рис.). Поскольку пылинка находится в равновесии, то

$$\vec{P} + \vec{F} = 0. \quad (1)$$

Проектируя (1) на выбранное направление ОХ, получаем  $F - P = 0$ ,  $F = P$ .

По определению напряженности  $E = \frac{F}{q}$ , следовательно,

$$F = qE.$$

С другой стороны,  $E = \frac{U}{d}$  тогда,  $F = \frac{qU}{d}$ , откуда

$$\frac{qU}{d} = P, \quad q = \frac{Pd}{U} = \frac{mgd}{U},$$

$$q = \frac{9,8 \cdot 10^{-11} \cdot 4,9 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^3} = 9,6 \cdot 10^{-16} \text{ Кл.}$$

Заряд электрона  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Число электронов на пылинке

$$n = \frac{9,6 \cdot 10^{-16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6 \cdot 10^3 \text{ электронов.}$$

Если пылинка потеряет половину электронов:  $q_2 = \frac{q_1}{2}$ , то сила, действующая со стороны электростатического поля, станет в 2 раза меньше веса, и пылинка начнет падать вниз с ускорением, которое можно определить из закона Ньютона:

$$m \vec{a} = \vec{P} - \vec{F}_2 \quad \text{или} \quad ma = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} \quad \text{отсюда}$$

$$a = \frac{g}{2} = 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $q = 9,6 \cdot 10^{-16}$  Кл,  $n = 6 \cdot 10^3$  электронов,  $a = 4,9 \text{ м/с}^2$ .

Задача 3. При радиоактивном распаде из ядра атома полония вылетает  $\alpha$  - частица со скоростью  $1,6 \cdot 10^7$  м/с. Какую разность потенциалов надо приложить к обкладкам конденсатора, чтобы сообщить  $\alpha$  - частице такую же скорость?

Дано:

$\alpha$  - частица – ядро атома гелия  ${}^4_2\text{He}$

$$m = 4 \text{ а.е.м.} = 4 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$q_\alpha = 2 \times q_e = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$v = 1,6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$$

---

$U - ?$

Решение

Чтобы сообщить  $\alpha$  - частице скорость  $1,6 \cdot 10^7$  м/с и соответствующую этой скорости кинетическую энергию, силы электрического поля должны совершить работу  $A = qU$ .

$$\text{Согласно закону сохранения энергии } A = E_k, \quad qU = \frac{mv^2}{2}$$

$$\text{откуда } U = \frac{mv^2}{2q} = \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (1,6 \cdot 10^7)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,66 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

Ответ:  $U = 2,66 \cdot 10^6 \text{ В.}$

Задача 4. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Определить линейную плотность заряда, если напряженность поля на расстоянии 0,5 м от проволоки (ее середины) равна 1,2 В/см.

Дано:

$$r = 0,5 \text{ м}$$

$$E_A = 1,2 \text{ В/см} = 120 \text{ В/м}$$

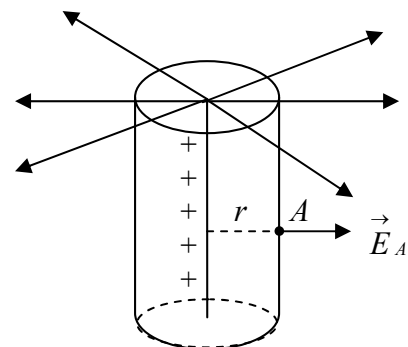
$$\epsilon = 1$$

---


$$\tau = \frac{q}{l} - ?$$

Решение

Проведем через точку  $A$  цилиндрическую поверхность радиусом  $r$  (рис.). Из условия симметрии следует, что силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных к образующей цилиндра, и направлены радиально от оси цилиндра (от проволоки).



По теореме Остроградского-Гаусса  $N=q$ . (1)

С другой стороны,  $N=N_{бок}=DS_{бок}=\varepsilon\varepsilon_0E2\pi rl$ . (2)

Из (1) и (2) следует

$$\tau = \frac{q}{l} = \varepsilon\varepsilon_0E2\pi r = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 120 \cdot 2\pi \cdot 0,5 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м.}$$

Ответ:  $\tau = \frac{q}{l} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м.}$

Задача 5. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами  $d = 1$  см заряжен до разности потенциалов  $U=10^3$  В. Определить объемную плотность энергии поля конденсатора. Диэлектрик – стекло.

Дано:

$$U=10^3 \text{ В}$$

$$d = 0,01 \text{ м}$$

$$\varepsilon = 7 \text{ (берем из таблицы)}$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

---

$\rho_w - ?$

Решение

Объемная плотность  $\rho_w$  энергии поля конденсатора есть энергия, заключенная в единице объема поля, поэтому может быть определена по формуле:

$$\rho_w = \frac{W}{V}, \quad (1)$$

где  $W$  – энергия поля конденсатора;  $V$  – объем, занимаемый полем.

Энергия поля конденсатора определяется по формуле:

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad (2)$$

где  $U$  – разность потенциалов, до которой заряжены пластины конденсатора;  $C$  – его емкость.

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0S}{d}, \quad V = Sd.$$

Подставив выражение  $C$  в (2) и затем выражения  $W$  и  $V = Sd$  в (1), получим

$$\rho_w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0U^2}{2d^2} = \frac{7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,309 \text{ Дж/м}^3.$$

Ответ:  $\rho_w = 0,309 \text{ Дж/м}^3.$

Задача 6. Три конденсатора емкостью 1 мкФ, 2 мкФ, 3 мкФ соединены последовательно и присоединены к источнику напряжения с разностью потенциалов 220 В. Каковы заряд и напряжение на каждом конденсаторе?

Дано:

$$C_1 = 1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$C_2 = 2 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

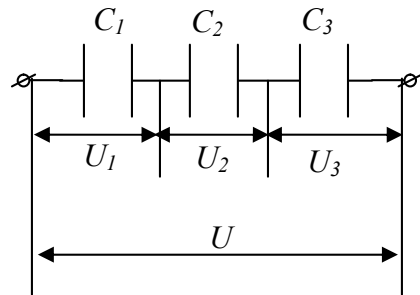
$$C_3 = 3 \text{ мкФ} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$U = 220 \text{ В}$$

---

$$q_1 - ? \quad q_2 - ? \quad q_3 - ?$$

$$U_1 - ? \quad U_2 - ? \quad U_3 - ?$$



Решение

При последовательном соединении конденсаторов:

1) заряды на любом конденсаторе одинаковы  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ ;

2)  $U = U_1 + U_2 + U_3$ ;

$$3) \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Величину заряда  $q$ , можно найти из соотношения:

$$q = CU = \frac{U}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{220}{\frac{1}{10^{-6}} + \frac{2}{10^{-6}} + \frac{3}{10^{-6}}} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Из определения емкости конденсаторов следует

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{q}{C_3} \text{ или}$$

$$U_1 = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{10^{-6}} = 120 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = 60 \text{ В}, \quad U_3 = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ В}$$

Проверка решения:  $120 \text{ В} + 60 \text{ В} + 40 \text{ В} = 220 \text{ В}.$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторы разной емкости, находятся под разным напряжением. Чем меньше емкость, тем больше напряжение на обкладках конденсатора.

Ответ:  $q_1 = q_2 = q_3 = q = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}, \quad U_1 = 120 \text{ В}, \quad U_2 = 60 \text{ В}, \quad U_3 = 40 \text{ В}.$

Задача 7. Точечный заряд  $Q = 531 \text{ нКл}$  помещен в центре куба с длиной ребра,  $a = 10 \text{ см}$ . Определить поток вектора напряженности электрического поля через одну грань куба.

Дано:

$$Q = 531 \text{ нКл} = 531 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$a = 10 \text{ см}$$

---

$$N - ?$$

### Решение

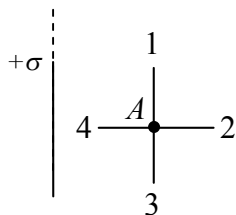
Поток вектора напряженности электрического поля не зависит от формы замкнутой поверхности и определяется только зарядом, находящимся внутри этой поверхности, деленным на  $\epsilon_0$ ,  $N = \frac{Q}{\epsilon_0}$ . Из соображений симметрии видно, что поток через одну грань куба в шесть раз меньше, чем поток через всю поверхность куба.

Искомый поток равен:  $N = \frac{Q}{6\epsilon_0} = \frac{531 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 10^4 \text{ В}\cdot\text{м}$ .

Ответ:  $N = 10^4 \text{ В}\cdot\text{м}$ .

Задача 8. Поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$ . Укажите направление вектора градиента потенциала в точке  $A$ .

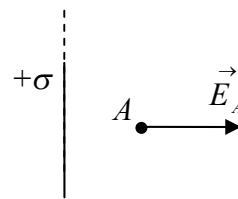
Дано:



Направление градиента потенциала в точке  $A$  -?

### Решение

Бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$  создает в пространстве однородное электрическое поле с напряженностью  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$ , направленной от плоскости



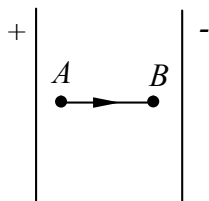
(рис.).

Напряженность электрического поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала поля. Следовательно, вектор градиента потенциала в точке  $A$  направлен к плоскости по направлению «4»

Ответ: Вектор градиента потенциала в точке  $A$  направлен к плоскости по направлению «4».

Задача 9. В электрическом поле плоского конденсатора перемещается заряд  $+q$  в направлении, указанном стрелкой. Определить работу сил поля на участке  $AB$  (отрицательная, положительная, равна нулю).

Дано:



Работа сил поля на участке  $AB$  - ?

Решение

Работа сил поля по перемещению в нем заряда определяется выражением  $A = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{l}$ . Напряженность поля направлена от «плюса» к «минусу», следовательно, положительный заряд  $+q$  перемещается вдоль поля. При этом совершается положительная работа.

Ответ: Совершается положительная работа.

Задача 10. В схеме, изображенной на рис., напряжение на зажимах батареи  $U = 100$  В,  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 200$  Ом,  $R_3 = 300$  Ом. Какое напряжение показывает вольтметр, если его сопротивление  $R_V = 2000$  Ом ?

Дано:

$$U = 100 \text{ В}$$

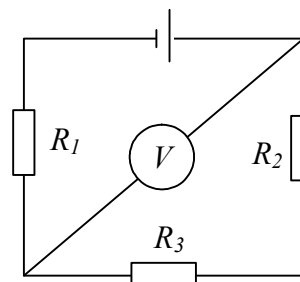
$$R_1 = 100 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 200 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 300 \text{ Ом}$$

$$R_V = 2000 \text{ Ом}$$

$U_V$  - ?



Решение

Сопротивление контура, содержащего  $R_V$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , найдем по формуле:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_2 + R_3} \quad R_A = \frac{R_V(R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3} \quad (1)$$

Сопротивление внешней цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и подключенного параллельно к  $R_2$  и  $R_3$  вольтметра,

$$R = R_1 + R_A \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) формулу (1), получим



$$R = R_1 + \frac{R_V(R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3}.$$

Применив закон Ома к внешнему участку, цепи, определим ток, текущий через  $R_1$ :

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_V \cdot (R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3}}. \quad (3)$$

Из закона Ома для участка цепи, содержащего  $R_1$ , находим  $U_1$ :

$$U_1 = I_1 R_1 = \frac{U R_1}{R_1 + \frac{R_V (R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3}}. \quad (4)$$

Поскольку для последовательного соединения  $R_1$  и участка, содержащего  $R_V, R_2, R_3$ , можно записать:

$$U = U_1 + U_V, \quad (5)$$

где  $U_1$  и  $U_V$  – падение напряжений на резисторе и на вольтметре, то, используя формулу (5) и (4), находим искомую величину  $U_V$ :

$$U_V = U - U_1 = U - \frac{U R_1}{R_1 + \frac{R_V (R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3}},$$

$$U_V = 100 - \frac{100 \cdot 100}{100 + \frac{2000 \cdot (300 + 200)}{2000 + 200 + 300}} = 80 \text{ В}.$$

Ответ:  $U_V = 80 \text{ В}$ .

**Задача 11.** В схему, приведенную на рис., включены два элемента с ЭДС  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2 \text{ В}$  и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 1 \text{ Ом}$  и  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ . Чему равно сопротивление  $R$ , если  $I_1 = 1 \text{ А}$ ? Найти значения  $I$  и  $I_2$ .

Дано:

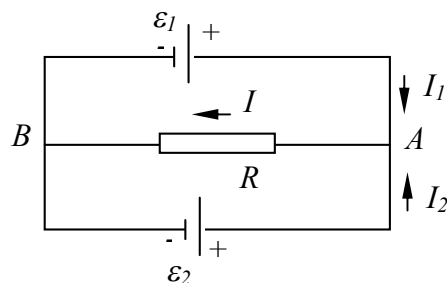
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2 \text{ В}$$

$$r_1 = 1 \text{ Ом}$$

$$r_2 = 2 \text{ Ом}$$

$$I_1 = 1 \text{ А}$$

$$I - ? \quad I_2 - ? \quad R - ?$$



Решение

Такая задача решается с помощью правил Кирхгофа. При составлении уравнений следует придерживаться следующих рекомендаций.

1. Перед составлением уравнений произвольно выбрать и указать стрелками на чертеже:

а) направления токов (если они не заданы по условию задачи) во всех сопротивлениях, входящих в цепь;

б) направление обхода контуров.

2. При составлении уравнений на основании первого правила Кирхгофа считать токи, подходящие к узлу, положительными, а токи, отходящие от узла, отрицательными. Число независимых уравнений должно быть на единицу меньше числа узлов, содержащихся в цепи.

3. При составлении уравнений на основании второго правила Кирхгофа нужно считать:

а) токи в отдельных участках замкнутого контура положительными, если они совпадают с выбранным направлением обхода контура, в противном случае токи будут отрицательными;

б) ЭДС принимается положительной, если она повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе приходится идти от минуса к плюсу внутри источника тока, в противном случае ЭДС будет отрицательной. Число независимых уравнений, составляемых по второму правилу Кирхгофа, должно быть меньше числа замкнутых контуров, имеющих в цепи.

Для составления уравнений по второму правилу Кирхгофа первый контур выбирается произвольно. Все последующие контуры выбираются так, чтобы в каждый новый контур входил хотя бы один участок цепи, не участвовавший ни в одном из ранее использованных контуров.

Если при решении уравнений будут получены отрицательные значения силы тока, то это значит, что ток через данное сопротивление в действительности течет в направлении, противоположном выбранному.

Пользуясь указанной методикой, решим данную задачу.

Поскольку направления токов нам заданы, условимся обходить контуры по часовой стрелке.

В данной задаче имеется два узла  $A$  и  $B$ . Составим уравнение по первому правилу Кирхгофа для узла  $A$ :

$$I_1 + I_2 - I = 0.$$

Составим уравнения по второму правилу Кирхгофа. Для контура  $B\varepsilon_1AB$

$$I_1 r_1 + IR = \varepsilon_1.$$

Для контура  $B\varepsilon_2AB$

$$I_2 r_2 + IR = \varepsilon_2.$$

В полученные уравнения подставим известные числовые значения, получим

$$1 + IR = 2, \tag{1}$$

$$2I_2 + IR = 2, \tag{2}$$

$$1 + I_2 = I. \tag{3}$$

Из первого уравнения определим  $IR = 1$ . Полученное значение подставим во второе уравнение, получим

$$2I_2 + 1 = 2, \text{ отсюда } I_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ A.}$$

Полученное значение  $I_2$  подставим в третье уравнение, получим  $I = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ A}$ . Значение  $I$  подставим в первое уравнение:

$$R = \frac{1}{1,5} = 0,6 \text{ Ом.}$$

Ответ:  $I = 1,5 \text{ A}, I_2 = 0,5 \text{ A}, R = 0,6 \text{ Ом}$

Задача 12. На концах провода (нихром) длиной  $l = 1,5 \text{ м}$  и диаметром сечения  $d = 0,6 \text{ мм}$  поддерживается напряжение  $10 \text{ В}$ . Определить: а) мощность, потребляемую в проводе; б) количество теплоты, выделяемое в проводе за  $1 \text{ час}$ .

Дано:

$$l = 1,5 \text{ м}$$

$$d = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$U = 10 \text{ В}$$

$$\rho = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$t = 3600 \text{ с}$$

---

$P - ? \quad Q - ?$

Решение

Мощность  $P$ , выделяемая в проводе, определяется по формуле:

$$P = UI, \tag{1}$$

где  $I$  – сила тока в проводе;  $U$  – напряжение на его концах

Силу тока находим по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{2}$$

Поскольку сопротивление проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{3}$$

то подставив формулу (3) в формулу (2) и учтя, что  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ,

$$\text{получим } I = \frac{US}{l\rho} = \frac{U\pi d^2}{4l\rho}. \tag{4}$$

Из уравнений (1) и (4) найдем искомую величину:

$$P = \frac{U^2 \pi d^2}{4l\rho}.$$

$$\text{Тогда } P = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 36 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 1,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5} = 17,1 \text{ Вт.}$$

Количество теплоты, выделяющееся в проводнике, определяется по формуле

$$Q=IUt=Pt \text{ и } Q=17,1 \cdot 3600=6,2 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Ответ:  $P = 17,1 \text{ Вт}, Q = 6,2 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$

Задача 13. Воздух между плоскими электродами ионизационной камеры ионизируется рентгеновскими лучами. Сила тока, текущего через камеру, равна  $1,2 \cdot 10^{-6} \text{ А}$ . Площадь каждого электрода  $300 \text{ см}^2$ , расстояние между ними  $2 \text{ см}$ , разность потенциалов  $100 \text{ В}$ . Определить концентрацию ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. Заряд каждого иона равен элементарному заряду.

Дано:

$$I=1,2 \cdot 10^{-6} \text{ А}$$

$$S=300 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$d=0,02 \text{ м}$$

$$U=100 \text{ В}$$

$$q=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$n - ?$

Решение

В случае, когда ток в газе далек от насыщения, плотность тока подчиняется закону Ома:

$$j=qn(U_+ + U_-)E,$$

где  $j$  – плотность тока;  $q$  – величина заряда иона;  $U_+$  и  $U_-$  – подвижности положительных и отрицательных ионов;  $E$  – напряженность электрического поля;  $n$  – концентрация ионов.

$$\text{Отсюда найдем } n = \frac{j}{q(U_+ + U_-)E}. \quad (1)$$

Напряженность электрического поля связана с напряжением на электродах и расстоянием между ними соотношением:

$$E = \frac{U}{d}. \quad (2)$$

Плотность тока по определению выражается формулой:

$$j = \frac{I}{S}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в формулу (1), получим

$$n = \frac{Id}{Sq(U_+ + U_-)U}.$$

Значения  $U_+$  и  $U_-$  для воздуха найдем из справочника:

$$U_+ = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}),$$

$$U_- = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}),$$

$$n = \frac{1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,02}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} (1,4 \cdot 10^{-4} + 1,9 \cdot 10^{-4}) 100} = 1,52 \cdot 10^{14} \text{ 1/м}^3.$$

Ответ:  $n = 1,52 \cdot 10^{14} \text{ 1/м}^3.$

Задача 14. Сила тока равномерно возрастает от 1 А до 3 А. Определить заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время 10 с.

Дано:

$$I_0 = 1 \text{ А}$$

$$I = 3 \text{ А}$$

$$t = 10 \text{ с}$$

---

$q - ?$

Решение

Сила тока равна скорости переноса заряда через поперечное сечение проводника  $I = \frac{dq}{dt}$ .

Зависимость силы тока от времени описывается выражением

$$I = I_0 + kt, \quad (1)$$

где  $I_0 = 1 \text{ А}, I = 3 \text{ А}$ .

Тогда из (1)  $k = 0,2 \text{ А/с}$ .

$$\text{Поэтому } q = \int_0^{10} (I_0 + kt) dt = \left( I_0 t + \frac{kt^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = 20 \text{ Кл.}$$

Ответ:  $q = 20 \text{ Кл.}$

Задача 15. По проводу длиной 80 см, согнутому в виде квадрата, течет ток 10 А. Определить индукцию магнитного поля в центре квадрата. Для сравнения определить индукцию поля в центре кругового тока, вписанного в квадрат.

Дано:

$$l = 0,8 \text{ м}$$

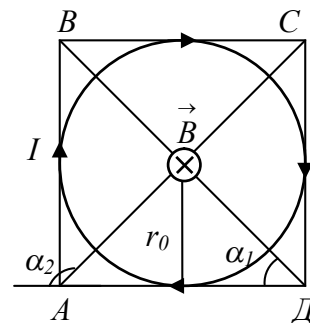
$$I = 10 \text{ А}$$

---

$B_{кв} - ? B_{кр} - ?$

Решение

Индукция магнитного поля в центре квадрата с током равна векторной сумме индукций, создаваемых всеми его сторонами:



$$\vec{B}_{\text{кв}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 .$$

Все эти вектора в центре квадрата имеют одинаковое направление. Они перпендикулярны плоскости чертежа и направлены от нас (см. рис.).

Из условий симметрии видно, что  $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$ , т.е.  $B_{\text{кв}} = 4B$ .

Магнитная индукция поля, создаваемая отрезком проводника АД, равна

$$B_1 = \mu_0 \mu H_1 = \mu_0 \mu \frac{I}{4\pi \cdot r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \quad (1)$$

$r_0 = \frac{l}{8}$ ,  $\alpha_1 = 45^\circ$ . Из чертежа видно, что  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ ,  $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$ .

$$\text{Откуда } B_{\text{кв}} = 4\mu_0 \mu \frac{8I}{4\pi l} 2\cos\alpha_1 = \frac{16\mu_0 \mu I}{\pi l} \cos\alpha_1 . \quad (2)$$

Подставляя данные в формулу (2), получим

$$B_{\text{кв}} = \frac{16 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot 0,8 \cdot 2} = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

Индукция в центре кругового тока по закону Био-Савара-Лапласа равна

$$B_{\text{кр}} = \mu_0 \mu \frac{I}{2r_0} = \frac{8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot 0,1} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Ответ:  $B_{\text{кв}} = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ ,  $B_{\text{кр}} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$ .

**Задача 16.** Рамка длиной 3 см и шириной 2 см, содержащая  $N=400$  витков проволоки, находится в магнитном поле с напряженностью  $H=16 \cdot 10^4$  А/м. По рамке течет ток  $I = 10^{-7}$  А. Определить магнитный момент рамки  $p_m$  и вращающий момент  $M$ , действующий на нее со стороны поля, если плоскость рамки составляет угол  $60^\circ$  с направлением магнитного поля.

Дано:

$$a = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

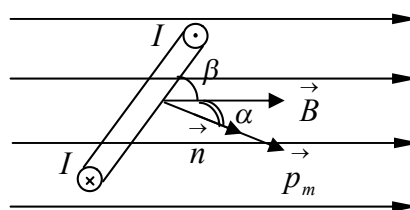
$$b = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$N=400$$

$$H=16 \cdot 10^4 \text{ А/м}$$

$$I=10^{-7} \text{ А}$$

$$\beta=60^\circ$$



$p_m$  - ?  $M$  - ?

Решение

Магнитный момент рамки с током равен

$$p_m = ISN,$$

где  $S=ab$  площадь рамки, следовательно

$$p_m = INab. \quad (1)$$

Вращающий момент, действующий на рамку с током со стороны магнитного поля, равен

$$M = p_m B \sin \alpha = INBab \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости рамки ( $\alpha = 30^\circ$ ),  $B$  – магнитная индукция, равная  $B = \mu_0 \mu H$ .

Тогда  $M = p_m \mu_0 \mu H \sin \alpha$ . (2)

Подставляя числовые значения в формулы (1) и (2) получим

$$p_m = 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ Ам}^2,$$

$$M = 2,4 \cdot 10^{-8} \cdot 4,3 \cdot 10^{-7} \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 0,5 = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ:  $p_m = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ Ам}^2$ ,  $M = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**Задача 17.** Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов 2000 В, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению его движения. Индукция магнитного поля равна  $1,5 \cdot 10^{-2}$  Тл. Найти радиус кривизны траектории электрона.

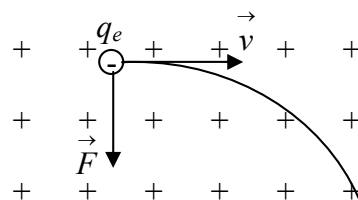
Дано:

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$U = 2000 \text{ В}$$

$$B = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$$



R - ?

Решение

Сила Лоренца, действующая на движущийся электрон в магнитном поле, равна  $F = q_e v B \sin(\vec{v}, \vec{B})$  и является центростремительной силой  $F = F_{ц.с.}$ ,

$$q_e v B \sin(\vec{v}, \vec{B}) = m_e a_{ц.с.} \text{ или } q_e v B \sin(\vec{v}, \vec{B}) = m_e \frac{v^2}{R}$$

$$(\sin \alpha = 1 \text{ т.к. } v \perp B), q_e v B = m_e \frac{v^2}{R}. \quad (1)$$

Из (1) радиус траектории

$$R = \frac{m_e v}{q_e B}. \quad (2)$$

Скорость движения электрона можно узнать из формулы кинетической энергии, учитывая, что эта энергия получена за счет работы сил электрического поля:

$$\frac{m_e v^2}{2} = q_e U, v = \sqrt{\frac{2q_e U}{m_e}}. \quad (3)$$

Из (3) и (2) следует  $R = \frac{m_e}{q_e B} \sqrt{\frac{2q_e U}{m_e}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e U}{q_e}}$ .

После подстановки численных значений величин получаем

$$R = \frac{1}{1,5 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2000}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 0,01 \text{ м.}$$

Ответ:  $R=0,01 \text{ м.}$

Задача 18. В однородном магнитном поле с индукцией  $B=0,1 \text{ Тл}$  равномерно вращается рамка, содержащая  $N = 1000$  витков. Площадь рамки  $S = 150 \text{ см}^2$ . Рамка вращается с частотой  $\nu = 10 \text{ об/с}$ . Определить мгновенное значение ЭДС, соответствующее углу поворота рамки  $30^\circ$  и максимальное значение ЭДС.

Дано:

$$B=0,1 \text{ Тл}$$

$$N = 1000$$

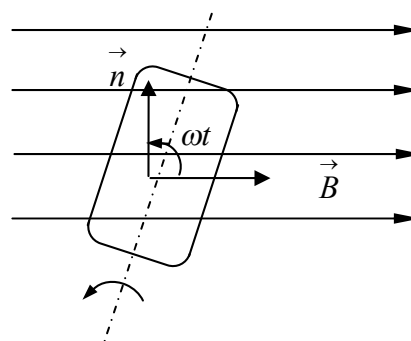
$$S = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$\nu = 10 \text{ об/с}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

---


$$\varepsilon_i - ? \quad \varepsilon_{\max} - ?$$



Решение

Мгновенное значение ЭДС определяется из закона Фарадея:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

При вращении рамки (**рис.**) магнитный поток, вращающий рамку, изменяется по закону  $\Phi = BS \cos \omega t$ .

Взяв производную от выражения  $\Phi$  по времени подставим в формулу (1):

$$\varepsilon_i = N BS \omega \sin \omega t.$$

Циклическая частота  $\omega$  связана с числом оборотов в секунду соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ , следовательно,

$$\varepsilon_i = N BS 2\pi\nu \sin \omega t \quad (\alpha = \omega t = 30^\circ),$$

$$\varepsilon_{\max} = N BS 2\pi\nu,$$

$$\varepsilon_i = 1000 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 0,5 = 47,1 \text{ В},$$

$$\varepsilon_{\max} = 1000 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 94,2 \text{ В}.$$

Ответ:  $\varepsilon_i = 47,1 \text{ В}, \quad \varepsilon_{\max} = 94,2 \text{ В}.$

Задача 19. Соленоид содержит  $N=1200$  витков проволоки, прилегающих друг к другу. При силе тока  $I=4 \text{ А}$  магнитный поток витка  $\Phi=6 \text{ мкВб}$ . Определить: 1) индуктивность соленоиды  $L$ ; 2) энергию магнитного поля соленоиды  $W$ .

Дано:



$$N=1200$$

$$I=4 \text{ A}$$

$$\Phi=6 \text{ мкВб}=6 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$$

$L$  - ?  $W$  - ?

Решение

1) Индуктивность  $L$  связана с магнитным потоком и силой тока соотношением:

$$N \Phi = LI. \quad (1)$$

Из (1) находим 
$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{1200 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

2) Энергия  $W$  магнитного поля соленоида с индуктивностью  $L$  при силе тока  $I$ , протекающего по его обмотке, может быть вычислена по формуле:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{N\Phi I}{2} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{2} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

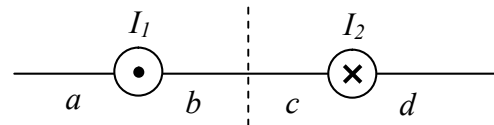
Ответ:  $L = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $W = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$ .

Задача 20. На [рис.](#) изображены сечения двух параллельных прямоугольных длинных проводников с противоположно направленными токами, причем  $I_1=2I_2$ . Определить, на каком интервале лежит точка, в которой индукция результирующего магнитного поля равна нулю.

Дано:

$$I_1=2I_2$$

$$B=0$$



Определить, на каком интервале лежит точка, где  $B=0$ .

Решение

Индукция магнитного поля, создаваемая током, текущим по тонкому прямолинейному проводу бесконечной длины, равна  $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$ ,  $\mu=1$ ,

где  $r$  – расстояние от провода.

Направление индукции  $\vec{B}$  определяется правилом правого винта. Линии индукции магнитного поля прямого тока представляют собой систему концентрических окружностей, охватывающих провод. Индукция результирующего магнитного поля определяется векторной суммой индукций магнитных полей, создаваемых отдельными проводниками.

В точках интервалов  $b$  и  $c$  индукции магнитных полей, создаваемых токами  $I_1$  и  $I_2$ , направлены вверх и не могут дать нулевую индукцию результирующего магнитного поля. В точках интервалов  $a$  и  $d$  магнитные поля, создаваемые токами  $I_1$  и  $I_2$ , направлены в противоположные стороны.

В интервале  $a$ , индукция результирующего поля равна:

$$B_p = -\mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} + \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2} = -\mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} \left\{ 1 - \frac{r_1}{2r_2} \right\},$$

где  $r_1$  – расстояние от какой-то точки интервала  $a$  до первого проводника;  $r_2$  – расстояние этой же точки до второго проводника.

Так как  $r_1 > r_2$ , то выражение в фигурных скобках в нуль не обращается. Поэтому в любой точке интервала  $a$  (левее первого проводника) результирующая индукция магнитного поля не равна нулю.

В точках интервала  $d$  индукция результирующего магнитного поля может быть записана в виде:

$$B_p = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} - \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} \left\{ 1 - \frac{r_1}{2r_2} \right\},$$

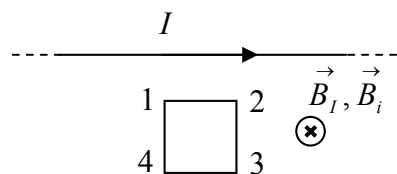
где  $r_1$  – расстояние от какой-то точки интервала до первого проводника;  $r_2$  – расстояние этой же точки до второго проводника.

Выбирая  $r_1 = 2r_2$ , мы получаем нулевую результирующую индукцию магнитного поля.

Ответ: Точка, в которой индукция результирующего магнитного поля равна нулю ( $B=0$ ) лежит на интервале  $d$ .

**Задача 21.** На [рис.](#) показан длинный проводник с током, в одной плоскости с которым находится небольшая проводящая рамка. Что будет происходить с рамкой при выключении в проводнике тока заданного направления.

Дано:



Что будет происходить с рамкой при выключении в проводнике тока заданного направления ?

Решение

Когда по проводнику идет ток заданного направления, в пространстве вокруг проводника возникает магнитное поле с замкнутыми силовыми линиями в виде окружностей, охватывающих проводник. В том месте, где находится рамка, магнитная индукция перпендикулярна плоскости рамки и направлена от «нас».

При выключении тока магнитное поле уменьшается, но не сразу, а постепенно из-за того, что явление самоиндукции мешает магнитному полю

изменяться. Для нахождения направления индукционного тока в рамке используют правило Ленца: индукционный ток имеет такое направление, чтобы обусловленное им магнитное поле препятствовало уменьшению тока провода. Это значит, что индукционное поле должно быть направлено так же, как и уменьшающееся поле тока в проводе. Поэтому индукционный ток в рамке должен протекать в направлении 1-2-3-4.

Ответ: *Индукционный ток в рамке должен протекать в направлении 1-2-3-4.*

## 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Раздел физики, занимающийся изучением природы света, закономерностей его испускания, распространения и взаимодействия с веществом, называется *оптикой*.

Согласно современным представлениям, в *световых явлениях наблюдается дуализм волновых и корпускулярных свойств*, т.е. свет представляет собой единый процесс распространения электромагнитных волн и особых частиц – фотонов, которые обладают энергией, массой и импульсом.

Для объяснения световых явлений в физике используется *две теории света: волновая и корпускулярная*. При помощи волновой теории объясняют законы распространения света (отражение, преломление, дифракция, интерференция, поляризация и т.д.); при помощи корпускулярной теории объясняют законы взаимодействия света с веществом (поглощение, рассеяние, фотоэффект и т.д.).

Еще до установления природы света были известны основные законы оптики.

Основные законы оптики:

1) **закон прямолинейного распространения света:** *свет в изотропной (однородной) оптической среде распространяется прямолинейно;*

2) **закон независимости световых пучков:** *эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они отсутствуют;*

3) **закон отражения:** *отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол падения равен углу отражения (рис. 7.1)*

$$\alpha = \alpha';$$

4) **закон преломления:** *луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред (рис. 7.1)*

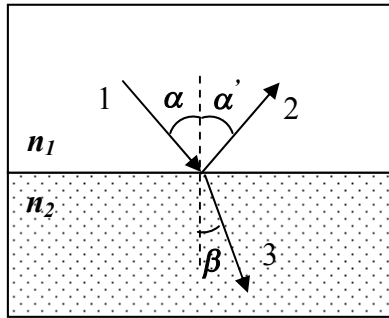


Рис. 7.1

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1},$$

где  $n_{2,1}$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

На рис. 7.1 изображены: 1 – падающий луч, 2 – отраженный луч, 3 – преломленный луч;  $\alpha$  – угол падения,  $\alpha'$  – угол отражения,  $\beta$  – угол преломления;  $n_1$  и  $n_2$  – абсолютные показатели преломления сред.

*Замечание:* Угол падения (отражения, преломления) – это угол, образованный падающим (отраженным, преломленным) лучом и перпендикуляром (пунктирная линия) в точке падения.

Абсолютным показателем преломления среды называется величина  $n$ , равная отношению скорости  $c$  электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости  $v$  в среде  $n=c/v$ . Согласно электромагнитной теории Максвелла,  $\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} = n$ , где  $c$  и  $v$  – соответственно скорости распространения света в вакууме и среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Это соотношение связывает оптические, электрические и магнитные постоянные вещества.

Относительный показатель преломления есть отношение абсолютных показателей преломления двух сред  $n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$ . Выражение для

относительного показателя преломления можно переписать, если учесть,

что  $n_1 = \frac{c}{v_1}$  и  $n_2 = \frac{c}{v_2}$  или  $v_1 = \lambda_1 v$  и  $v_2 = \lambda_2 v$ ,

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

### Явление полного внутреннего отражения

При переходе света из более плотной среды в менее плотную ( $n_1 > n_2$ ) угол преломления  $\beta$  будет больше угла падения ( $\alpha < \beta$ ) рис. 7.2,а. При увеличении угла падения  $\alpha$ , угол преломления  $\beta$  увеличивается и при некотором угле падения  $\alpha_{np}$  угол преломления станет равным  $\beta=90^\circ$  рис. 7.2,б. Угол  $\alpha_{np}$ , удовлетворяющий условию:  $\sin \alpha_{np} = n_2/n_1$ , при котором  $\beta=90^\circ$ ,  $\sin \beta=1$ , называется предельным углом падения луча или углом полного внутреннего отражения. Если при  $\alpha_1 < \alpha_{np}$  падающий луч частично отражается, частично проходит во вторую среду, испытыв

преломление, то при  $\alpha_2 > \alpha_{np}$  луч не преломляется, а полностью отражается обратно в первую среду.

Явление, при котором луч, падающий на границу раздела двух сред, не преломляется, а полностью отражается обратно, называется *явлением полного внутреннего отражения*.

Явление полного внутреннего отражения используется в стеклянных

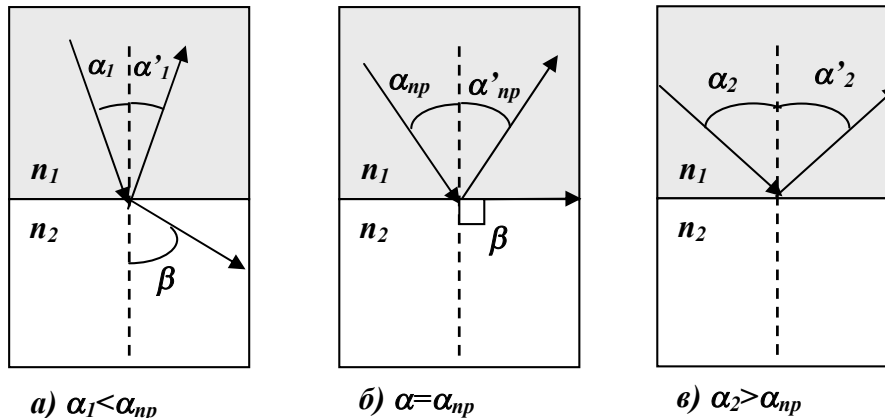


Рис. 7.2

отражающих призмах, с успехом заменяющих зеркала.

Замечание: если луч идет из оптически менее плотной среды в оптически более плотную, то угол преломления  $\beta$  меньше угла падения  $\alpha$ ; т.е. если  $(n_1 < n_2)$ , то  $\beta < \alpha$ .

### Принцип Гюйгенса

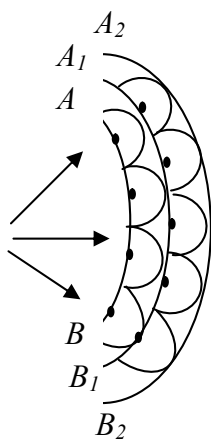


Рис. 7.3

Для количественных расчетов преломления и отражения света Х.Гюйгенс использовал представления о распространении волн в среде. Им сформулирован общий принцип, которому подчиняется распространение волн.

*Каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, сама становится источником вторичных сферических волн, огибающая которых в каждый момент времени представляет фронт распространяющейся волны.*

Допустим, что волновое возбуждение дошло до поверхности АВ (рис. 7.3). Каждая точка этой поверхности является источником вторичных сферических волн. Для каждой такой точки проводят волновую поверхность. Огибающая этих волновых поверхностей есть фронт волны  $A_1B_1$  ( $A_2B_2$ ) в момент времени  $t_1$  ( $t_2$ ).

Принцип Гюйгенса позволяет найти: 1) положение фронта распространяющейся волны в каждый последующий момент времени; 2) направление перемещения фронта волны.

### Дисперсия света

Световые волны с различными частотами колебаний распространяются в вакууме с одинаковыми скоростями ( $c=3 \cdot 10^8$  м/с). В то же время, в оптически прозрачных средах скорость распространения световой волны зависит от частоты (длины волны). Например, в стекле красный свет распространяется с большей скоростью, чем фиолетовый. Вследствие этого показатель преломления оказывается различным для света различных частот или длин волн.

*Дисперсией света* называется зависимость скорости распространения этих волн от частоты колебаний или длины волны. Вследствие этого абсолютный показатель преломления данного вещества также зависит от частоты или длины волны проходящего через него света. *Дисперсия света представляется в виде зависимости:*

$$n=f(\nu) \text{ или } n=f(\lambda).$$

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка интегрального (белого) света при прохождении его через призму. Первые

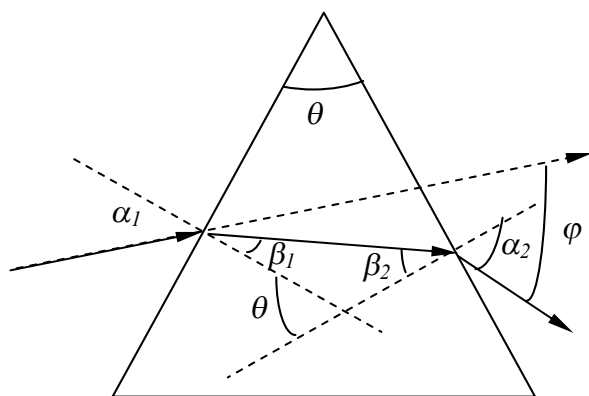


Рис. 7.4

экспериментальные наблюдения дисперсии света принадлежат Ньютону.

Пусть монохроматический пучок света ( $\lambda=const$ ) падает на призму с показателем преломления  $n$  под углом  $\alpha$  (рис. 7.4). После двукратного преломления луч оказывается отклоненным от первоначального направления на угол  $\varphi$ . Этот угол можно рассчитать по формуле:

$$\varphi = \theta(n-1).$$

Это выражение показывает:

1) угол отклонения лучей  $\varphi$  призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы  $\theta$ ;

2) угол отклонения лучей  $\varphi$  призмой зависит от величины  $(n-1)$ , где  $n$  – показатель преломления, является функцией длины волны. Поэтому лучи разных длин волн после прохождения призмы окажутся отклоненными на разные углы, т.е. пучок белого света за призмой разлагается в спектр.

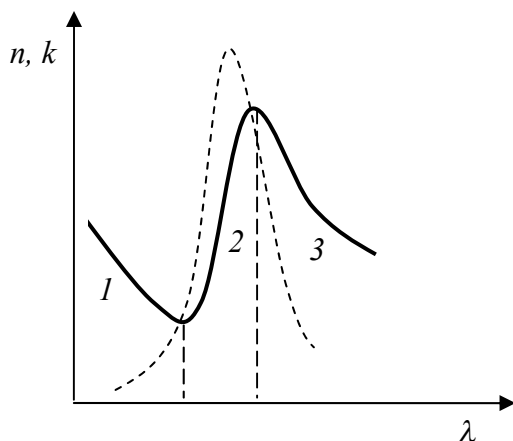


Рис. 7.5

Величина  $D = \frac{dn}{d\lambda}$  называется дисперсией вещества, показывает, как быстро изменяется показатель преломления с длиной волны. Если показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны монотонно увеличивается, т.е. величина  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ , такая дисперсия называется нормальной. Если показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны монотонно уменьшается, т.е. величина  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ , такая

дисперсия называется аномальной. Аномальная дисперсия наблюдается вблизи линий и полос поглощения. На рис. 7.5 изображен ход зависимости  $n=f(\lambda)$  (сплошная линия), в которой выделяют области нормальной (1,3) и аномальной (2) дисперсий. Пунктирной линией показана зависимость коэффициента поглощения  $k$  от длины волны света  $\lambda$ .

### Поглощение света

Поглощением света называется явление потери энергии световой волной, проходящей через вещество, вследствие преобразования энергии волны в другие формы. В результате поглощения интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается.

Поглощение света в веществе описывается законом П. Бугера:

$$I = I_0 e^{-kx},$$

где  $I_0$  и  $I$  – интенсивности световой волны на входе и выходе из слоя поглощающего вещества;  $x$  – толщина слоя;  $k$  – коэффициент поглощения.

Коэффициент поглощения зависит от длины волны, химической природы и состояния вещества. При  $x=1/k$  интенсивность света  $I$  по сравнению с  $I_0$  уменьшается в  $e$  раз.

Наряду с коэффициентом поглощения для характеристики оптических свойств веществ используют понятия оптической плотности и прозрачности.

Оптической плотностью (поглощением) называют десятичный логарифм отношения интенсивности света, падающего на вещество, к интенсивности света, вышедшего из вещества:



$$E = \lg \frac{I_0}{I}.$$

*Прозрачностью* называется доля интенсивности света, вышедшего из вещества, выраженная в процентах:

$$D = \frac{I}{I_0} 100.$$

## 8. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

В *волновой оптике* рассматриваются оптические явления, в которых проявляется волновая природа света: интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия.

Свет представляет собой электромагнитные волны с длинами, лежащими в диапазоне 380-760 нм ( $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$ ).

Уравнения электромагнитной волны:

$$E = E_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right), \quad (8.1)$$

$$H = H_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

где  $E$  – напряженность электрического поля;  $H$  – напряженность магнитного поля;  $T$  – период колебаний;  $r$  – расстояние до начала координат (до источника волн).

Волны одинаковой частоты, приходящие в какую-либо точку пространства, называются *когерентными*, если разность их фаз в этой точке с течением времени не меняется.

*Интерференцией волн* называется процесс наложения когерентных волн, приводящий к усилению колебаний в одних точках пространства и к ослаблению в других.

Амплитуда результирующих колебаний вектора  $\vec{E}$  при сложении двух когерентных волн равна:

$$E_{0 \text{ рез}} = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \Delta\varphi}, \quad (8.2)$$

где  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$  – разность фаз колебаний;  $\Delta r = r_2 - r_1$  – геометрическая разность хода волн.

*Условие образования максимумов и минимумов при интерференции.*

***Если в разности хода двух волн до некоторой точки пространства укладывается четное число полуволн, то в этой точке наступает усиление света – образуется максимум интенсивности.***



$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2k \frac{\lambda}{2}; \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (8.3)$$

В этом случае, когда  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2\pi k$ ,  $\cos 2\pi k = 1$  и амплитуда колебаний светового вектора максимальна,  $E_{0\text{рез}} = E_{01} + E_{02}$ .

**Если в разности хода волн укладывается нечетное число полуволен, то наступает ослабление света – образуется минимум:**

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (8.4)$$

$$\Delta\varphi = (2k + 1)\pi, \quad \cos(2k + 1)\pi = -1 \quad \text{и} \quad E_{0\text{рез}} = E_{01} - E_{02}.$$

Пусть одна из волн проходит путь  $\ell_1$  в среде с коэффициентом (показателем) преломления  $n_1$ , а другая волна проходит путь  $\ell_2$  в среде с коэффициентом  $n_2$ . Тогда разность фаз равна:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\ell_2 n_2 - \ell_1 n_1}{\lambda}, \quad (8.5)$$

где  $\ell_i n_i$  – оптическая длина пути, а

$$\Delta = \ell_2 n_2 - \ell_1 n_1 \quad (8.6)$$

– оптическая разность хода двух световых волн.

Таким образом, максимальное усиление света при интерференции наблюдается в тех точках пространства, в которые приходят волны с оптической разностью хода:

$$\Delta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (8.7)$$

т.е. в которой укладывается четное число длин полуволен.

Условие максимального ослабления света (образования минимумов интенсивности):

$$\Delta = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (8.8)$$

Для получения когерентных световых волн от обычных источников применяют метод деления света на две или несколько систем волн. Каждая из них состоит из излучения одних и тех же атомов источника, поэтому из-за общности происхождения эти системы волн когерентны и при наложении интерферируют.

Получить когерентные волны и наблюдать интерференцию света можно с помощью щелей, зеркал и преломляющих тел (щели Юнга, зеркала Френеля, бипризма Френеля, билинза Бийе).

### **Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников (для однородной среды)**

Если на пути между источником света  $S$  и экраном поместить непрозрачную преграду с небольшими отверстиями  $S_1$  и  $S_2$ , то эти отверстия будут играть роль когерентных источников света.

Рассмотрим лучи, падающие от этих источников на экран под углами  $0^\circ$  и  $\varphi^\circ$  (рис. 8.1). Лучи I и I\* после преломления в линзе соберутся на оптической оси в точке O и сформируют центральный максимум, так как разность хода этих лучей равна нулю. Лучи II и II\*

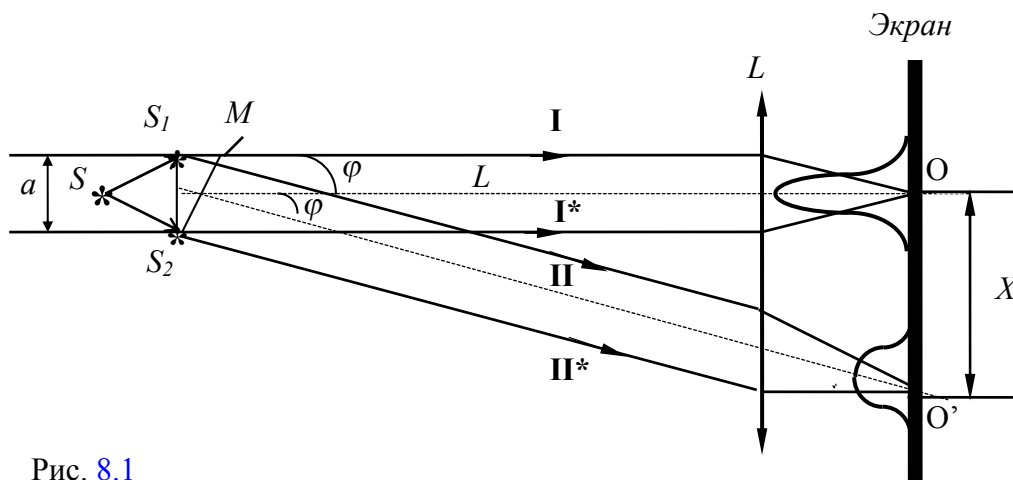


Рис. 8.1

после преломления соберутся в точке O'. Разность хода лучей II:

$$\Delta = S_1 M = a \sin \varphi,$$

где  $a$  – расстояние между щелями.

Если угол  $\varphi$  – мал, то  $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{L}$ . Следовательно,  $\Delta = a \frac{X}{L}$ .

Если  $\Delta = a \frac{X}{L} = 2k \frac{\lambda}{2}$ , то, согласно (8.7), в точке O' образуется максимум. Координаты максимумов, образующихся при  $k = 1, 2, 3 \dots$  и т.д., можно вычислить по формуле:

$$X_{MAX} = \frac{Lk\lambda}{a}. \quad (8.9)$$

Если  $\Delta = a \frac{X}{L} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , то, согласно (8.8), в точке O' образуется минимум интенсивности света. Координаты минимумов:

$$X_{MIN} = \frac{(2k+1)L\lambda}{2a}. \quad (8.10)$$

На экране будет наблюдаться чередование светлых и темных полос, т.е. образуется *интерференционная картина*.

При использовании белого света интерференционные максимумы для различных длин волн будут смещены относительно друг друга. Таким образом, светлые полосы примут радужную окраску и на экране образуются интерференционные спектры, примыкающие к центральному ахроматическому максимуму своими фиолетовыми частями. Согласно

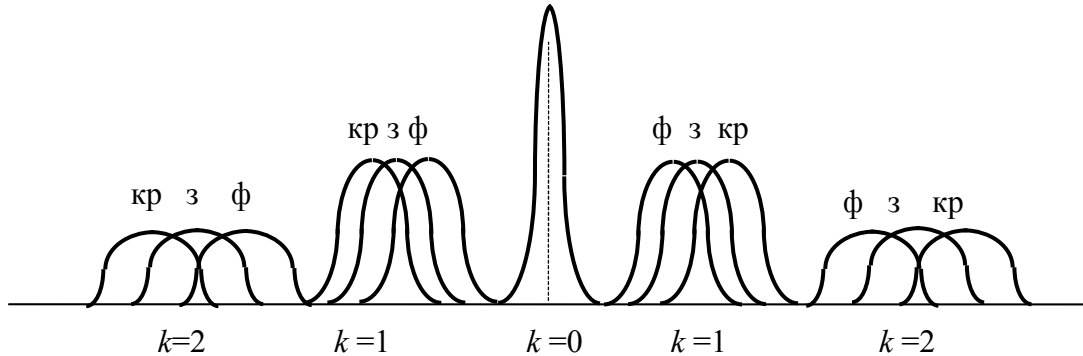


Рис. 8.2

(8.9), чем меньше  $\lambda$ , тем ближе данный максимум будет располагаться к центру экрана. Следовательно,  $\lambda_{\phi} < \lambda_{кр}$  и  $X_{\phi} < X_{кр}$  (рис. 8.2).

### Интерференция в тонких пленках в отраженном свете

В естественных условиях можно наблюдать интерференцию в тонких пленках (мыльные пузыри, пленки нефти или масла на поверхности воды, пленки оксидов на поверхности металла и т.п.).

Образование когерентных волн, интерферирующих друг с другом при наложении, происходит в этом случае вследствие отражения падающего на пленку света от ее внешней и внутренней поверхностей

Рассмотрим интерференцию света в тонкой пленке (рис.8.3).

Оптическая разность хода лучей 1 и 2:

$$\Delta = 2n_{21}h \cos \beta - \frac{\lambda}{2} = 2h \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (8.11)$$

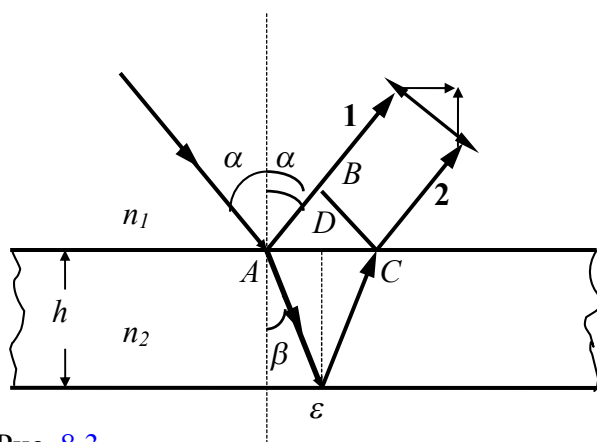


Рис. 8.3

При отражении волны от оптически более плотной среды (на рис.8.3 это верхняя поверхность пленки) происходит изменение фазы на противоположную, то есть теряется  $\lambda/2$ , что и учтено в уравнении (8.11). При освещении пленки монохроматическим светом и при выполнении условия максимумов:

$$2h n_{21} \cos \beta - \frac{\lambda}{2} = \frac{2k\lambda}{2} \quad (8.12)$$

пленка будет восприниматься ярко окрашенной в цвет, соответствующий длине падающей волны. При выполнении условия минимумов  $\Delta = \frac{(2k+1)\lambda}{2}$  пленка будет восприниматься темной. Если менять угол падения лучей, то пленка будет восприниматься то светлой, то темной.

При освещении пленки белым светом и при разных углах падения  $\alpha$  или толщине  $h$  цвет пленки будет меняться и она воспринимается радужной.

Если толщина пленки не изменяется,  $h = const$ , то разность хода лучей будет зависеть только от угла падения  $\alpha$ .

Интерференционные полосы, соответствующие одним и тем же углам падения, называются *полосами равного наклона*.

Если углы падения лучей одинаковы  $\alpha = const$ , разность хода зависит от толщины пленки  $h$ . Интерференционные полосы, соответствующие одной и той же толщине пленки, называются *полосами равной толщины*.

Классическим примером полос равной толщины являются *кольца Ньютона*. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной пластинки и плосковыпуклой линзы с большим радиусом кривизны  $R$  (рис. 8.4).

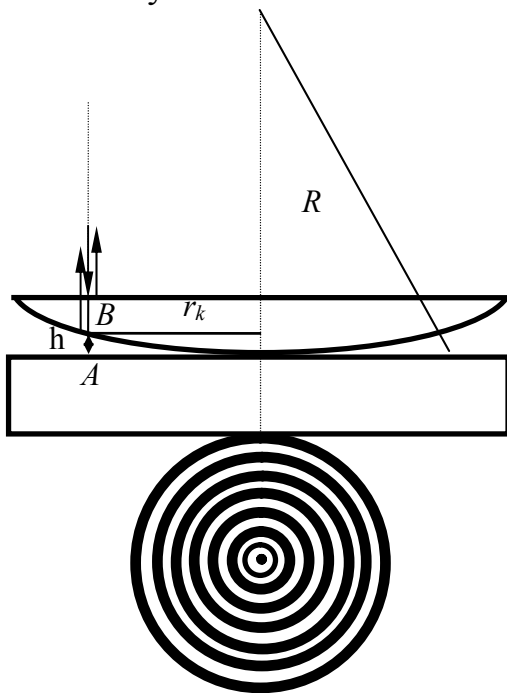


Рис. 8.4

Роль тонкой пленки, на которой происходит интерференция когерентных волн, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой. При наложении волн, отраженных в точках  $A$  и  $B$  этого зазора, возникнет интерференционная картина.

Разность хода отраженных лучей  $\Delta = 2AB$ . При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид светлых и темных колец, ибо все точки кольца с радиусом  $r_k$  имеют одинаковую разность хода и дают либо усиление, либо ослабление света. Так как при отражении света в точке  $A$  происходит потеря полуволны, то в том случае, когда  $2AB$  будет равно нулю или целому числу волн  $\lambda$ , отраженные от  $A$  и  $B$  волны будут гасить друг друга. Следовательно,  $O$  – место соприкосновения поверхности линзы с пластинкой будет в отраженном свете темным (рис. 8.4).

Радиус темных колец в отраженном свете: 
$$r_k^T = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}. \quad (8.13)$$

Радиус светлых колец в отраженном свете:

$$r_k^{cs} = \sqrt{(2k-1)R \frac{\lambda}{2n}}, \quad (8.14)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  – номер кольца;  $n$  – показатель преломления среды.

### Дифракция света

*Дифракцией света* называют огибание волнами препятствий, размеры которых соизмеримы с длиной волны. При дифракции происходит отклонение света от распространения по прямой, свет заходит в область геометрической тени. Распределение интенсивности света в дифракционной картине можно объяснить на основе принципа Гюйгенса-Френеля с помощью метода зон Френеля.

Принцип Гюйгенса - Френеля гласит:

*каждая точка, до которой дошла световая волна, становится источником вторичных волн, интерференция которых дает наблюдаемый световой эффект в любой другой точке.*

Пусть из точечного источника  $S'$  вышла сферическая световая волна (рис. 8.5,а).

В течение промежутка времени  $\Delta t$  волна распространится по всем

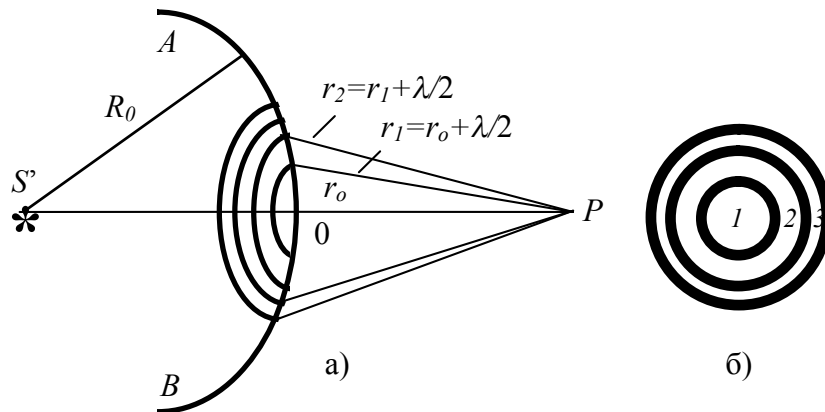


Рис. 8.5

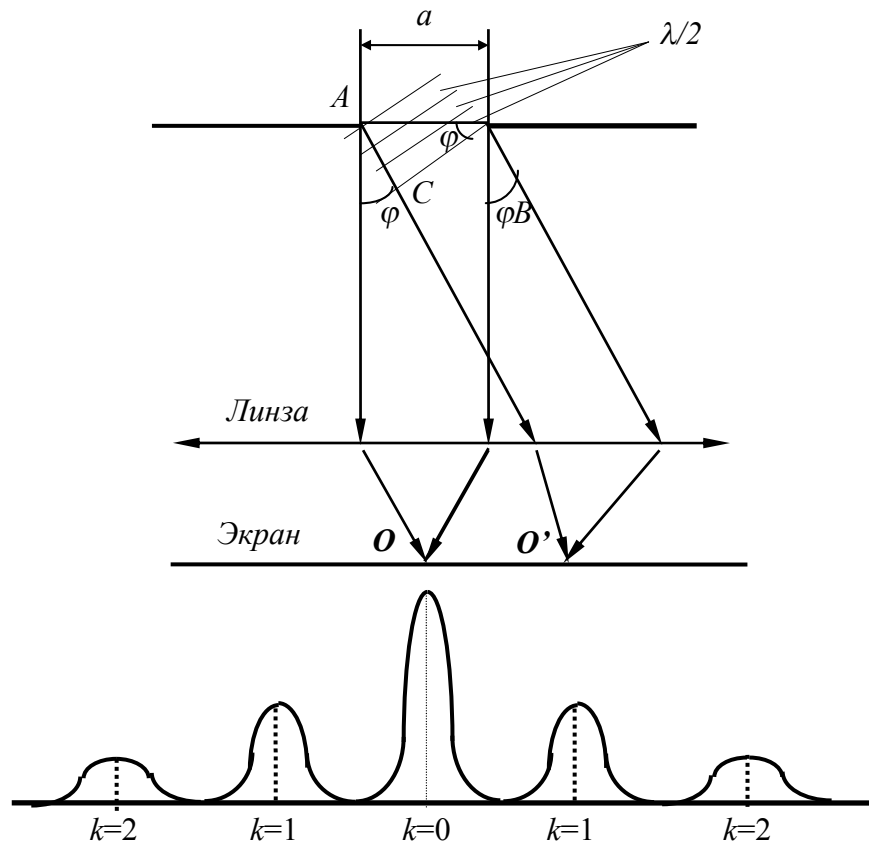
направлениям на расстояние  $R_0 = S'O = c\Delta t$  (среда предполагается изотропной), где  $c$  – скорость распространения волны. Фронт волны будет представлен сферой радиуса  $R_0$ . Согласно принципу Гюйгенса во всех точках этой сферы в момент времени  $\Delta t$  возникнут колебания, которые начнут распространяться по всем направлениям (*вторичные волны*) и через некоторое время достигнут точки  $P$ , световой эффект в которой мы и наблюдаем.

Амплитуда колебаний в этой точке определяется наложением вторичных волн. Для определения результата сложения этих волн Френель предложил поступить следующим образом. Из точки  $P$  проводят систему радиусов так, чтобы каждый последующий был длиннее предыдущего на  $\frac{\lambda}{2}$ :  $OP = r_0$ ,  $r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$ , ...,  $r_n = r_0 + n \frac{\lambda}{2}$ .

При вращении системы радиусов вокруг оси  $OP$  фронт волны  $AB$  оказывается разделенным на равновеликие элементы поверхности, называемые зонами Френеля (рис. 8.5,б показаны только три первых зоны). Характерно, что любые соседние зоны посылают волны, которые придут в точку  $P$  в противоположных фазах, ибо разность хода от точки  $P$  до этих зон отличается, согласно сделанному построению, на  $\frac{\lambda}{2}$ . Поэтому при наложении таких волн происходит ослабление их действия на экране – они «гасят» друг друга.

### Дифракция света от узкой щели

Если на узкую щель шириной  $a$  падает нормально к поверхности щели плоская световая волна, то фокусируя на экран при помощи линзы



Распределение интенсивности на экране

Рис. 8.6

свет, прошедший через щель, будем наблюдать чередование максимумов и минимумов освещенности (рис. 8.6).

Наличие максимумов и минимумов объясняется интерференцией испытывающих дифракцию волн, идущих от разных точек щели в разных направлениях.

Выясним, при каких условиях для лучей, идущих под углом дифракции  $\varphi$ , на экране будут образовываться максимумы и минимумы освещенности.

Разобьем плоский фронт волны в пределах щели на зоны Френеля. Для этого проведем ряд плоскостей, параллельных  $CB$  и отстоящих друг от друга на  $\frac{\lambda}{2}$ . Плоскости делят фронт волны на зоны Френеля, которые будут иметь вид полосок, ориентированных вдоль щели (рис. 8.7).

Напомним, что на экране соседние зоны «гасят» друг друга. Поэтому, если в разности хода крайних лучей  $\Delta = a \sin \varphi$  укладывается четное число  $\frac{\lambda}{2}$ , то есть в пределах щели уложится четное число зон Френеля, в точке  $O'$  будет наблюдаться минимум интенсивности света.

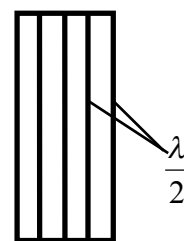


Рис. 8.7

*Условие образования минимумов:*

$$\Delta = a \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2}. \quad (8.15)$$

Если число зон Френеля нечетное, то одна зона останется не погашенной, и в точке  $O'$  будет наблюдаться свет – максимум.

*Условие образования максимумов:*

$$\Delta = a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (8.16)$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

Лучи, распространяющиеся в первоначальном направлении (под углом дифракции  $\varphi = 0$ ), имеют разность хода  $\Delta = 0$  и при интерференции дают центральный максимум – образуют изображение светящейся щели.

### **Дифракционная решетка**

Наиболее важное практическое значение имеет дифракция, наблюдаемая при прохождении света через дифракционную решетку. Дифракционная решетка представляет собой совокупность большого числа узких щелей одинаковой ширины  $a$ , разделенных между собой непрозрачными промежутками шириной  $b$ . Сумму  $a+b=d$  называют периодом решетки.

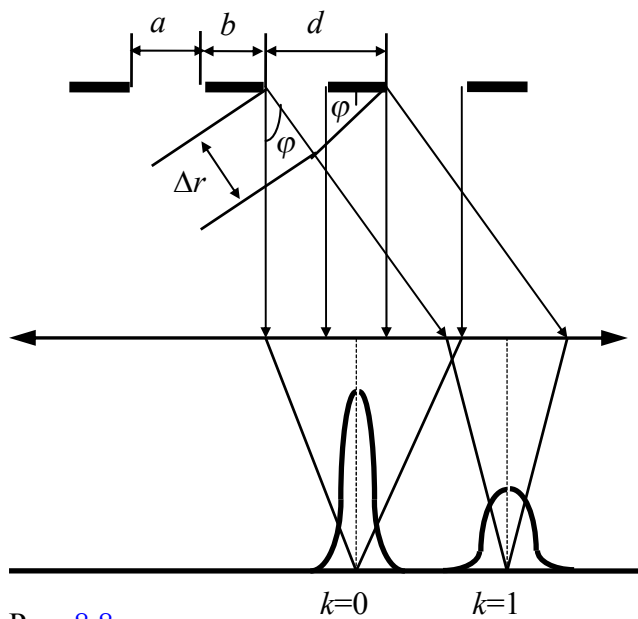


Рис. 8.8

Формула (8.17) называется *формулой главных максимумов* дифракционной решетки.

Если на решетку падает интегральный свет, то максимумы для различных длин волн располагаются под разными углами к первоначальному направлению распространения света, поэтому дифракционная решетка разлагает интегральный свет в спектр и на практике используется как диспергирующий элемент.

*Разрешающая способность* – способность диспергирующего устройства (в рассматриваемом случае – дифракционной решетки) давать в спектре отдельно две спектральные линии с мало отличающимися длинами волн, определяется формулой:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \quad (8.18)$$

где  $N$  – общее число щелей решетки;  $k$  – порядок спектра,  $\lambda$  и  $(\lambda' + \Delta\lambda)$  – длины волн двух близких спектральных линий, которые воспринимаются как отдельные.

*Угловой дисперсией* называется величина, показывающая изменение угла  $\varphi$  (отклонение луча с данной длиной волны от первоначального направления) при изменении длины волны на  $1 \text{ \AA}$ :

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Из условия главных максимумов для дифракционной решетки следует:

$d = \frac{\ell}{N}$ , где  $\ell$  – длина решетки;  $N$  – число щелей.

Если на решетку нормально к ее поверхности падает свет длиной волны  $\lambda$ , то лучи, идущие от соответствующе одинаковых мест соседних щелей, обладают разностью хода  $\Delta r = d \sin \varphi$  (рис. 8.8). Волны усиливают друг друга при интерференции, если эта разность хода равна целому числу длин волн.

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad (8.17)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$  – номер (порядок) максимума.



$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{(a+b)\cos\varphi} = \frac{k}{\sqrt{(a+b)^2 - k^2\lambda^2}}, \quad (8.19)$$

где  $k$  – порядок спектра;  $(a+b) = d$  – период решетки;  $\lambda$  – длина волны.

### **Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа – Брегга**

Длины волн рентгеновских лучей  $0,1 - 20 \text{ \AA}$  сравнимы с величинами межплоскостных расстояний в кристаллах. Поэтому кристаллическая решетка представляет собой пространственную дифракционную решетку для рентгеновских лучей, и они способны испытывать дифракцию на кристаллах. Если пучок параллельных рентгеновских лучей падает под углом  $\theta$  к кристаллической плоскости (рис. 8.9), то максимумы интенсивности дифрагированных лучей от соседних плоскостей будут наблюдаться при таких углах  $\theta$ , для которых разность хода этих лучей равна целому числу длин волн. Это нашло отражение в формуле Вульфа – Брегга:

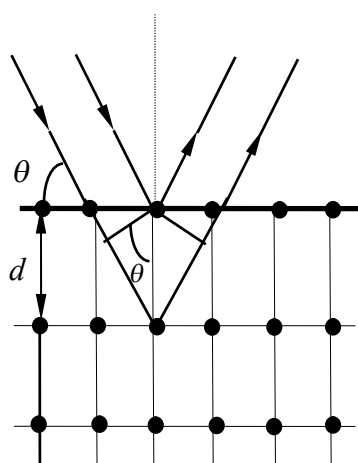


Рис. 8.9

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3\dots). \quad (8.20)$$

Дифракция рентгеновских лучей используется для исследования структуры кристаллов (рентгеноструктурный анализ). Если в формуле Вульфа – Брегга известна длина волны рентгеновских лучей  $\lambda$ , то измерив углы  $\theta$ , под которыми наблюдаются максимумы, можно рассчитать период кристаллической решетки  $d$ .

### **Поляризация света**

Электромагнитная волна является поперечной волной, в которой вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и вектор напряженности

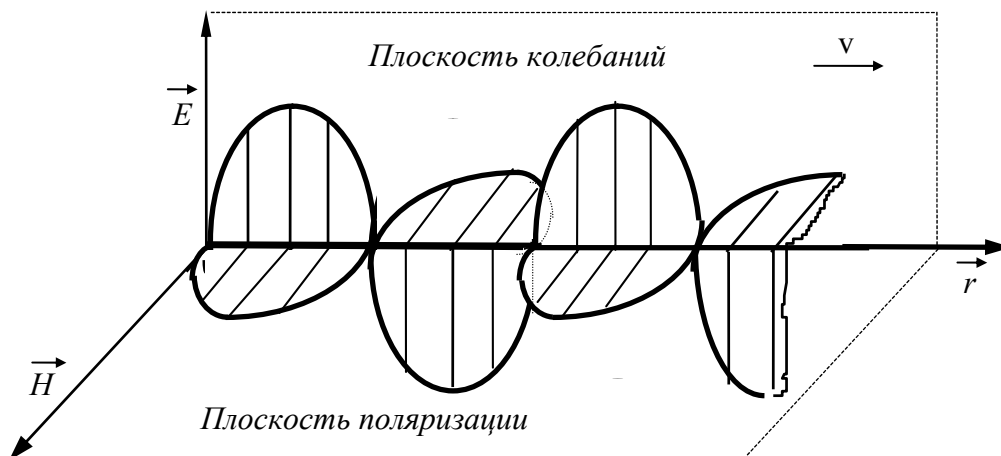


Рис. 8.10

магнитного поля  $\vec{H}$  колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях.

График электромагнитной волны показан на [рис.8.10](#).

$\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля (вектор колебаний, световой вектор);  $\vec{H}$  – вектор напряженности магнитного поля (вектор поляризации).

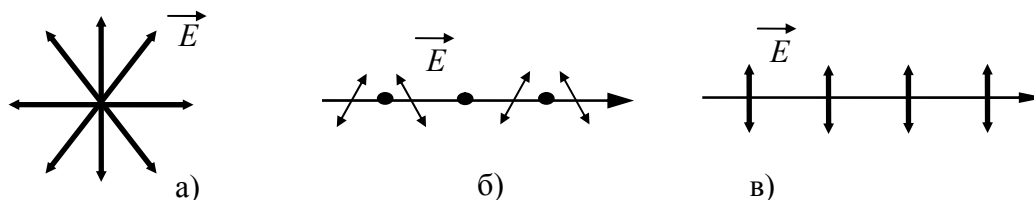


Рис. 8.11

*Естественный свет* – совокупность световых волн, векторы колебаний  $\vec{E}$  которых имеют всевозможную ориентацию, причем ни одно из направлений не является преимущественным ([рис. 8.11,а,б](#)).

*Плоскополяризованный свет* – совокупность световых волн, векторы колебаний которых параллельны и имеют в пространстве строго определенное фиксированное направление ([рис. 8.11,в](#)).

*Поляризация света* – выделение из пучка естественного света лучей, поляризованных в определенной плоскости или по эллипсу.

### Способы поляризации света

#### 1. Поляризация света при отражении и преломлении на изотропных кристаллах.

Отраженный и преломленный лучи поляризуются во взаимно перпендикулярных плоскостях ([рис. 8.12](#)).

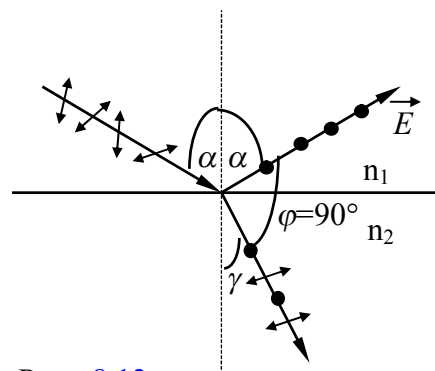


Рис. 8.12

Степень поляризации отраженного света зависит от угла падения.

**Закон Брюстера:** *отраженный луч поляризован полностью, а поляризация преломленного луча достигает некоторой максимальной степени, если тангенс угла падения луча равен показателю преломления второй среды относительно первой.*

$$\operatorname{tg} \alpha = n_{21}. \quad (8.21)$$

#### 2. Поляризация света при двойном лучепреломлении.

Если луч света падает на поверхность анизотропного кристалла ([рис. 8.13](#)), то в результате его преломления образуются два плоскополяризованных луча, распространяющиеся в кристалле в разных направлениях и с разными скоростями. Один из них подчиняется

обычному закону преломления и называется *обыкновенным* (*o* – лучом).

Для него  $n_{21} = \frac{c}{v_0} = const$ ,  $v_0 = const$ . При любом направлении

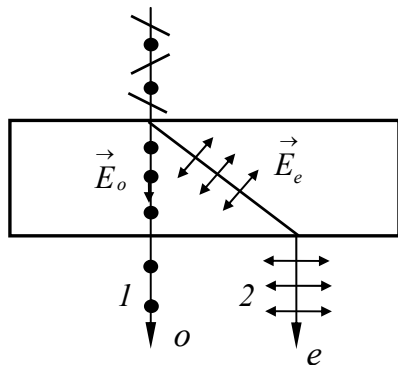


Рис. 8.13

обыкновенного луча в кристалле световой вектор  $\vec{E}_0$  перпендикулярен плоскости главного сечения кристалла (любой плоскости, проведенной через оптическую ось кристалла).

На рис.8.13  $\vec{E}_0$  показан точками.

Второй луч называют *необыкновенным* (*e* – луч), световой вектор которого  $\vec{E}_e$  лежит в плоскости главного сечения кристалла, не подчиняется обычному закону преломления. Для

необыкновенного луча  $n_{21} = \frac{c}{v_e} \neq const$ ,  $v_e \neq const$  и зависит от направления

луча в кристалле. На рис. 8.13 векторы  $\vec{E}_e$  показаны поперечными двусторонними стрелками.

Кристаллы, для которых наблюдается описанное явление, называются *одноосными*.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропностью кристаллов, т.е. различием физических свойств по разным направлениям. В кристалле можно выделить направление, вдоль которого скорость распространения обыкновенных и необыкновенных лучей одинакова  $v_0 = v_e$ . Такое направление называют *оптической осью кристалла*. Оптическая ось кристалла параллельна кристаллографической оси – оси высшей симметрии кристалла. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главным сечением* или *главной плоскостью кристалла*. Обычно пользуются главным сечением, проходящим через световой луч.

Различают положительные и отрицательные одноосные кристаллы. У положительных кристаллов (например, кварц)

$$v_e \leq v_0, \quad n_e \geq n_0.$$

У отрицательных кристаллов (например,  $\text{CaCO}_3$ )

$$v_e \geq v_0, \quad n_e \leq n_0.$$

Определив опытным путем показатели преломления лучей  $n_0$  и  $n_e$  для разных направлений в кристалле, можно вычислить скорости распространения этих лучей  $v_0$ ,  $v_e$  и в соответствии с этим построить векторную модель кристалла. Представим себе, что в точке *A* внутри кристалла помещается точечный источник света. Изображая скорость обыкновенного луча в виде равных отрезков (т.к.  $v_0 = const$ ), отложенных по разным направлениям, и строя их огибающую, мы получаем

сферическую поверхность – это волновая поверхность обыкновенной волны.

Френель показал, что волновая поверхность необыкновенной волны представляет собой эллипсоид вращения вокруг оптической оси. В местах пересечения с оптической осью кристалла эллипсоид и сфера соприкасаются (рис. 8.14,а,б). В этом направлении  $v_0 = v_e$ . Поскольку для отрицательных кристаллов скорость распространения необыкновенного луча больше скорости распространения обыкновенного, то сферическая поверхность вписана в эллипс. Для положительных кристаллов  $v_e \leq v_0$ , поэтому эллипсоид вписан в сферу. С помощью кристаллов, обладающих двойным лучепреломлением, можно получить плоскополяризованный свет, если удалить один из лучей. Для этой цели естественные кристаллы подвергаются специальной механической обработке. На практике получил распространение ряд оптических элементов, использующихся в качестве поляризатора и анализатора плоскополяризованного света – призма Корну, призма Николя и др.

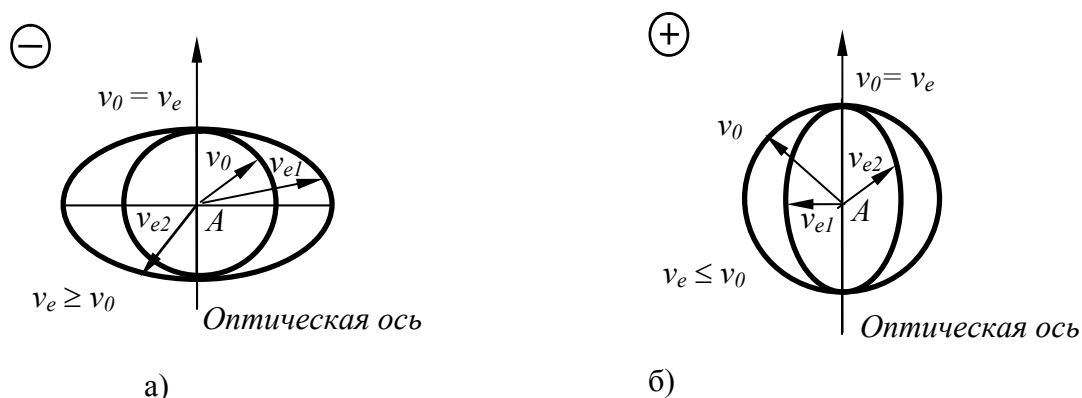


Рис. 8.14

Призма Николя изготавливается из кристалла исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ). Причем естественный кристалл обрабатывают так, чтобы продольное ребро было длиннее поперечного в 3,65 раза, а ромбические основания подпиливают, чтобы они образовали с ребром угол, равный  $68^\circ$ . Кристалл распиливают по плоскости, проходящей через тупые углы и склеивают канадским бальзамом (пихтовая смола), а боковые грани покрывают черной краской.

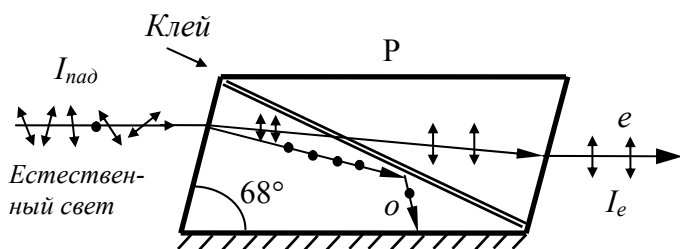


Рис. 8.15

луч. Показатель преломления канадского бальзама  $n_{KB} = 1,54$  для всех лучей и занимает промежуточное положение между  $n_e = 1,52$  и  $n_o = 1,66$  в  $\text{CaCO}_3$ . Для падающих на призму лучей

выбирают такое направление, чтобы  $n_{e(\text{CaCO}_3)} = 1,52$ .

Сечение призмы Николя показано на рис.8.15. В призме луч естественного света разделяется на два луча. Обыкновенный луч преломляется сильнее ( $n_o > n_e$ ), испытывает на слое канадского бальзама полное внутреннее отражение и поглощается зачерненной гранью. Необыкновенный луч проходит сквозь призму. Интенсивность

$$I_e = \frac{1}{2} I_{\text{пад}} .$$

Человеческий глаз не может отличить поляризованный свет от естественного. Это можно сделать с помощью второй призмы Николя, которая будет играть роль анализатора.

Интенсивность вышедшего из анализатора плоскополяризованного света подчиняется закону Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (8.22)$$

Закон Малюса следует из векторной диаграммы (рис. 8.16).

$PP'$  – оптическая ось поляризатора;  $AA'$  – оптическая ось анализатора;  $E_p$  – амплитуда вектора  $\vec{E}$  для луча, вышедшего из поляризатора;  $E_a$  – амплитуда колебаний вектора для луча, вышедшего из анализатора.

$$E_a = E_p \cos \varphi.$$

Интенсивность света  $I$  пропорциональна квадрату амплитуды  $E^2$ :

$$E_a^2 = E_p^2 \cos^2 \varphi ,$$

следовательно, интенсивность света, вышедшего из анализатора,

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi , \text{ где } I_p = \frac{I_0}{2} ,$$

где  $I_0$  – интенсивность света, падающего на поляризатор;  $I_p$  – интенсивность света, вышедшего из поляризатора и падающего на анализатор;  $\varphi$  – угол между плоскостью поляризатора и плоскостью анализатора;  $I_a$  – интенсивность света, прошедшего через анализатор.

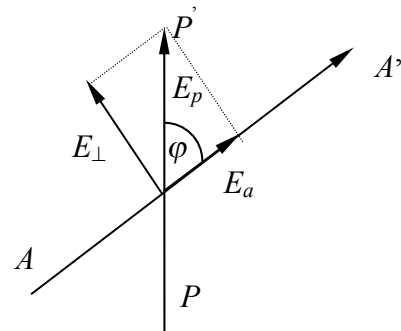


Рис. 8.16

### Вращение плоскости поляризации

Некоторые вещества (кристаллы, растворы) обладают способностью поворачивать плоскость поляризации света вокруг направления луча, проходящего через них. Такие вещества называют *оптически активными*. Для кристаллов угол поворота плоскости поляризации  $\alpha$  пропорционален толщине слоя оптически активного вещества  $d$ , через которое проходит свет:

$$\alpha = C_{\lambda, T} d, \quad (8.23)$$

где  $C_{\lambda,T}$  – удельное вращение – угол поворота плоскости поляризации слоем кристалла толщиной 1 мм на данной длине волны при заданной температуре.

Для растворов угол поворота плоскости поляризации пропорционален концентрации раствора  $K$ , длине пути луча в растворе  $\ell$  и зависит от вида вещества:

$$\alpha = C_{\lambda,T} K \ell, \quad (8.24)$$

где  $C_{\lambda,T}$  – удельное вращение показывает, на какой угол поворачивается плоскость поляризации раствором в кювете единичной длины ( $\ell = 1$ ) при единичной концентрации ( $K=1$ ) раствора.

## 9. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Движение тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, описывается *релятивистской механикой*, основанной на специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном.

*Релятивистская масса* вычисляется как

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.1)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы, то есть масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое;

$c$  – скорость света в вакууме ( $c=3 \cdot 10^8$  м/с);  $\beta = v/c$ ;

$m$  – релятивистская масса, т.е. масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью  $v$ .

*Формула взаимосвязи массы и энергии:*

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.2)$$

где  $E_0$  – энергия покоя частицы;

*Полная энергия свободной частицы:*

$$E = E_0 + T, \quad (9.3)$$

где  $T$  – кинетическая энергия релятивистской частицы;

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (9.4)$$

*Импульс релятивистской частицы:*

$$P = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.5)$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы.

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (9.6)$$

## 10. КВАНТОВАЯ ОПТИКА

### Тепловое излучение

Электромагнитное излучение, причиной которого является возбуждение атомов и молекул вследствие их теплового движения, называется *тепловым*.

Тепловое излучение присуще всем телам при температуре  $T > 0 \text{ K}$ . Тепловое излучение совершается за счет внутренней энергии тела. Это практически единственный вид излучения, который может быть равновесным.

Количественной характеристикой теплового излучения служит *спектральная плотность энергетической светимости* (излучательная способность) тела – мощность излучения с единицы поверхности тела в интервале частот единичной ширины:

$$r_{\nu, T} = (dW_{\nu, \nu + d\nu}^{изл})/d\nu, \quad (10.1)$$

$dW_{\nu, \nu + d\nu}^{изл}$  – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени (мощность излучения) с единицы площади поверхности тела в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ .

Единицы спектральной плотности энергетической светимости ( $r_{\nu, T}$ ) – Дж/(м<sup>2</sup>·с).

Переход от  $r_{\nu, T}$  к  $r_{\lambda, T}$  осуществляется с помощью формулы:

$$r_{\nu, T} = r_{\lambda, T} \frac{\lambda^2}{c}. \quad (10.2)$$

Зная спектральную плотность энергетической светимости, можно вычислить *интегральную энергетическую светимость* (интегральную излучательную способность), проинтегрировав по всем частотам:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu. \quad (10.3)$$

Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется *спектральной поглощательной способностью*

$$a_{\nu, T} = (dW_{\nu, \nu + d\nu}^{пог}) / (dW_{\nu, \nu + d\nu}^{пад}), \quad (10.4)$$



показывающей, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ , поглощается телом ( $a_{\nu,T}$  – безразмерная величина).

Тело, способное поглощать полностью при любой температуре падающее на него излучение любой частоты, называется *абсолютно черным*. Следовательно, *спектральная поглощательная способность абсолютно черного тела для всех частот и температур тождественно равна единице*:

$$a_{\nu,T}^{\text{черное}} = 1.$$

Для всех остальных тел поглощательная способность меньше единицы  $a_{\nu,T} < 1$ .

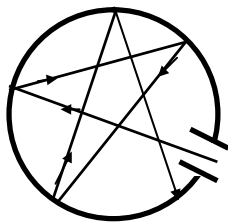


Рис. 10.1

Абсолютно черных тел в природе нет, однако такие тела, как сажа, платиновая чернь, черный бархат, в определенном интервале частот близки к ним. *Хорошей моделью абсолютно черного тела* является замкнутая полость с небольшим отверстием (рис. 10.1). Излучение, проникшее внутрь через отверстие, прежде чем выйти обратно, претерпевает многократные отражения. При каждом отражении часть энергии поглощается, в результате практически все излучения любой частоты поглощаются такой полостью. Согласно закону Кирхгофа, испускательная способность описанной модели очень близка к  $r_{\nu,T}$ , причем  $T$  обозначает температуру стенок полости. Таким образом, если стенки полости поддерживать при некоторой температуре  $T$ , то из отверстия выходит излучение, весьма близкое по спектральному составу к излучению абсолютно черного тела при той же температуре. Наряду с понятием черного тела используют понятие *серого тела* – тела, поглощательная способность которого меньше единицы, одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела. Таким образом, для серого тела

$$a^c_T < 1.$$

### **Закон Кирхгофа для теплового излучения**

Согласно закону Кирхгофа, *отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела и равно для всех тел некоей универсальной функции частоты и температуры*:

$$r_{\nu,T} / a_{\nu,T} = f_{\nu,T}. \quad (10.5)$$



Для черного тела  $a_{\nu,T}=1$ . Таким образом, универсальная функция Кирхгофа есть не что иное, как спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела  $f_{\nu,T}=r_{\nu,T}^*$ .

Перепишем формулу (10.5) с учетом  $f_{\nu,T}=r_{\nu,T}^*$ :

$$r_{\nu,T}=r_{\nu,T}^* a_{\nu,T}. \quad (10.6)$$

Выражение (10.6) показывает, что тепловое излучение любого тела ( $a_{\nu,T} < 1$ ) в любой области спектра *всегда менее интенсивно*, чем у абсолютно черного тела.

Используя закон Кирхгофа, энергетическую светимость можно вычислить как

$$R_T = \int_0^{\infty} a_{\nu,T} r_{\nu,T}^* d\nu. \quad (10.7)$$

Для серого тела:

$$R_T^C = a_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = a_T R^*, \quad (10.8)$$

где

$$R_T^* = \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu, \quad (10.9)$$

$R_T^*$  – энергетическая светимость абсолютно черного тела.

### **Закон Стефана - Больцмана**

Согласно закону Стефана - Больцмана

$$R_T^* = \sigma T^4, \quad (10.10)$$

*то есть энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры.*

$\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 K^4}. \quad (10.11)$$

### **Закон смещения Вина**

Согласно закону смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = b/T \quad (10.12)$$

*длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}^*$  абсолютно*

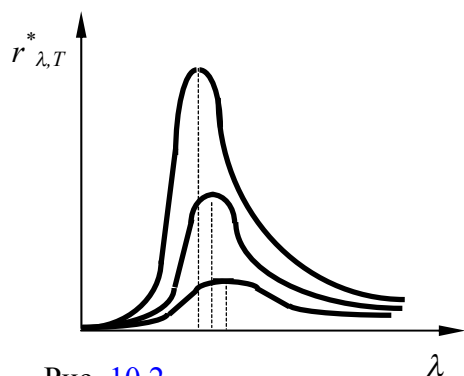


Рис. 10.2

черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре (рис. 10.2).

$b$  – постоянная Вина,  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Закон Вина показывает смещение положения самого яркого места в спектре излучения (максимума функции  $r_{\lambda, T}^*$ ) по мере возрастания температуры в область коротких длин волн.

### Формула Планка

Планк получил для универсальной функции Кирхгофа  $f_{\nu, T} = r_{\nu, T}^*$  формулу:

$$f_{\nu, T} = r_{\nu, T}^* = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}. \quad (10.13)$$

Это выражение блестяще согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения черного тела во всем интервале частот и температур.

Ранее Д. Рэлей и Д. Джинс пытались теоретически описать функцию Кирхгофа  $f_{\nu, T}$ . Найденная ими формула  $f_{\nu, T} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT$ , как показал опыт, описывает экспериментальные данные только в области достаточно малых частот (или длинных длин волн) и больших температур. В области больших частот (или коротких длин волн) формула Рэля – Джинса резко расходится с экспериментом (рис. 10.3). Такое огромное несоответствие теории с экспериментальными данными получило название «ультрафиолетовой катастрофы» теории Рэля-Джинса.

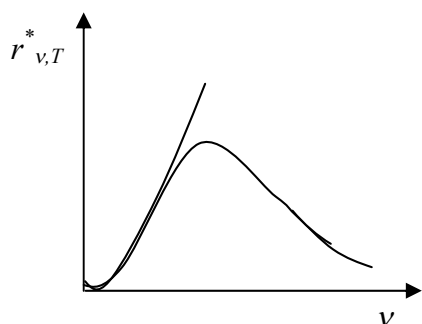


Рис. 10.3

### Фотоэффект

Явление испускания электронов веществом под действием света называется *фотоэффектом*.

А. Эйнштейн в 1905 г. показал, что явление фотоэффекта и его закономерности могут быть объяснены на основе предложенной им квантовой теории фотоэффекта. Согласно Эйнштейну, свет не только испускается, как это предполагал М. Планк, но и поглощается веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых равна  $E_0 = h\nu$ , где

$h=6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $\nu$  – частота. Кванты электромагнитного излучения получили название *фотонов*.

При фотоэффекте энергия падающих фотонов расходуется на совершение электроном работы выхода  $A$  против сил, удерживающих его в металле, и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии  $\frac{mv^2_{max}}{2}$ .

По закону сохранения энергии можно записать:

$$h\nu = A + \frac{mv^2_{max}}{2}. \quad (10.14)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйнштейна для фотоэффекта*. Здесь  $A$  – наименьшая энергия, которую нужно сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого тела в вакуум, называемая *работой выхода*. Фототок можно свести к нулю, приложив между фотокатодом и анодом задерживающую разность потенциалов  $U$  и отобразив, тем самым, у электронов кинетическую энергию:

$$\frac{mv^2_{max}}{2} = eU \quad (10.15)$$

Тогда уравнение для фотоэффекта можно записать:

$$h\nu = A + eU, \quad (10.16)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $U$  – задерживающее напряжение.

Пусть энергии квантов достаточно лишь для вырывания электронов с поверхности, но не хватает для придания электронам какой-либо скорости. То есть

$$h\nu_{кр} = A \quad \text{или} \quad \frac{hc}{\lambda_{кр}} = A.$$

Тогда

$$\nu_{кр} = A/h \quad \text{или} \quad \lambda_{кр} = hc/A,$$

где  $\nu_{кр}$  – минимальная частота света, при которой еще возможен фотоэффект;  $A$  – работа выхода электронов;  $\lambda_{кр}$  – *максимальная длина волны, при которой еще возможен фотоэффект* (так называемая *красная граница фотоэффекта*);  $h$  – постоянная Планка.

### **Масса и импульс фотона. Давление света**

Согласно гипотезе световых квантов А. Эйнштейна, свет испускается, поглощается и распространяется дискретными порциями (квантами), названными фотонами. Энергия фотона  $E_0 = h\nu$ . Его масса находится из закона взаимосвязи массы и энергии  $m_\gamma = h\nu/c^2$ .

*Фотон* – элементарная частица, которая всегда движется со скоростью света  $c$  и имеет массу покоя, равную нулю. Следовательно,

фотон отличается от таких элементарных частиц, как электрон, протон и нейтрон, которые обладают отличной от нуля массой покоя и могут находиться в состоянии покоя.

$$\text{Импульс фотона } P_\gamma = \frac{E_0}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Если фотоны обладают импульсом, то свет, падающий на тело, должен оказывать на него давление. С точки зрения квантовой теории, давление света на поверхность обусловлено тем, что каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс.

Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$P = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = \omega(1 + \rho), \quad (10.17)$$

$E_e/c = \omega$  – объемная плотность энергии излучения;  $E_e$  – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, то есть энергетическая освещенность поверхности; она равна  $E_e = Nh\nu$ , где  $N$  – число фотонов;  $\rho$  – коэффициент отражения света ( $\rho=0$  в случае абсолютно черной поверхности,  $\rho=1$  в случае зеркальной поверхности).

### Эффект Комптона

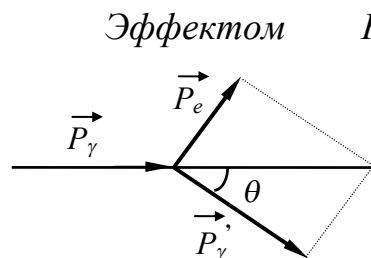


Рис. 10.4

Эффектом Комптона называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и  $\gamma$  – излучения) на свободных электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны рассеянного излучения.

Объяснение эффекта Комптона дано на основе квантового представления о природе света. Эффект Комптона – это результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными (слабосвязанными) электронами вещества. В процессе столкновения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения (рис. 10.4).

$P_\gamma, E_\gamma$  – импульс и энергия налетающего фотона:

$$P_\gamma = h\nu/c; \quad E_\gamma = h\nu;$$

$P'_\gamma, E'_\gamma$  – импульс и энергия рассеянного фотона:

$$P'_\gamma = h\nu'/c; \quad E'_\gamma = h\nu'.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$E_0 + E_\gamma = E + E'_\gamma,$$

$$m_0c^2 + h\nu = mc^2 + h\nu',$$

$E_0 = m_0c^2$  – энергия покоя электрона;

$E = mc^2$  – энергия рассеянного электрона.

Согласно закону сохранения импульса

$$\vec{P}_\gamma = \vec{P}_e + \vec{P}'_\gamma, \quad (10.18)$$

$P_e$  – импульс электрона.

Записанное в соответствии с рис. 10.4 уравнение (10.18) примет вид:

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu' \cos\theta. \quad (10.19)$$

Сделав соответствующие преобразования, получим:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (10.20)$$

где  $\lambda$  – длина волны налетающего фотона;  $\lambda'$  – длина волны фотона, рассеянного на угол  $\theta$  после столкновения с электроном.

$\lambda_c = h/m_0c = 2,436 \text{ нм}$ ,  $\lambda_c$  – комптоновская длина волны.

## 11. СТРОЕНИЕ АТОМА

В развитии представлений о строении атома большую роль сыграли опыт английского физика Э. Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц на веществе. Отметим, что  $\alpha$ -частицы являются положительно заряженными частицами с зарядом  $2e$  ( ${}^4_2\text{He}$ ). Резерфорд, исследуя прохождение  $\alpha$ -частиц через вещество (через золотую фольгу) заметил, что некоторые  $\alpha$ -частицы резко отклоняются от первоначального направления (углы отклонения достигали  $180^\circ$ ). Так как электроны не могут существенно изменить движение столь тяжелых и быстрых частиц как  $\alpha$ -частицы, то Резерфордом был сделан вывод, что отклонение  $\alpha$ -частиц обусловлено их взаимодействием с положительным зарядом большей массы. На основании исследований Резерфорд предположил ядерную (*планетарную*) модель атома: атом состоит из положительно заряженного ядра с зарядом  $Ze_0$ , в котором сосредоточена практически вся масса атома ( $Z$  – число протонов в ядре,  $e_0$  – элементарный заряд  $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл). Вокруг ядра движутся по замкнутым орбитам  $Z$  электронов, образуя электронную оболочку атома. Согласно электродинамике, модель атома Резерфорда является неустойчивой системой, так как движущиеся по круговым орбитам электроны должны излучать электромагнитные волны и вследствие этого непрерывно терять энергию и, в конце концов, упасть на ядро. Однако это противоречит действительности. опыты показывают, что атомы достаточно устойчивые образования. Следовательно, классическая физика неприменима к внутриатомным процессам. Преодоление возникших трудностей потребовало создания качественно новой квантовой теории

атома. Первые попытки были предприняты Н. Бором. В основу своей теории Н. Бор положил два постулата:

I. Постулат (*постулат стационарных состояний*).

*В атоме существуют стационарные состояния (не изменяющиеся со временем), в которых он не испускает и не поглощает энергии. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн. Электрон, двигаясь по стационарным орбитам, должен иметь дискретные (квантованные) значения момента импульса, удовлетворяющие условию:*

$$m_e v r_n = n \hbar, \quad (11.1)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$  – постоянная Планка,  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $m_e$  – масса электрона;  $v$  – скорость электрона на круглой орбите, радиуса  $r_n$ , квантовое число  $n = 1, 2, 3 \dots$

II. Постулат (*правило частот*)

*Атом излучает и поглощает энергию при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую:*

$$h\nu = E_k - E_i, \quad (11.2)$$

где  $h\nu$  – энергия излучения (поглощения);  $E_k$  и  $E_i$  соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

При  $E_k > E_i$  происходит излучение фотона (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, т.е. переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на более близлежащую к ядру).

При  $E_k < E_i$  происходит поглощение фотона (переход атома в состояние с большей энергией т.е. переход электрона на более удаленную от ядра орбиту. Набор возможных дискретных частот  $\nu = \frac{E_k - E_i}{h}$  квантовых переходов определяет линейный спектр атома.

Из теории Н. Бора следует:

1. Радиусы стационарных орбит атома водорода ( $Z=1$ ) растут пропорционально квадратам целых чисел:

$$r_n = n^2 r_B, \quad (11.3)$$

где  $n$  – квантовое число;  $r_B$  – радиус первой боровской орбиты ( $n=1$ );

$$r_B = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,528 \text{ \AA} = 52,8 \text{ пм} \quad (11.4)$$

2. Энергия электрона может принимать только дискретные значения. Она обратно пропорциональна квадрату квантового числа  $n$ :

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4 Z^2}{8h^2 \varepsilon_0^2} = -\frac{E_1}{n^2}, \quad (11.5)$$

$$E_1 = \frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} = 13,53 \text{ эВ при } n = 1, Z = 1.$$

Энергия ионизации атома водорода, находящегося в разных энергетических состояниях (знак «-» минус показывает, что в атоме действуют силы притяжения):

$$\left. \begin{array}{l} n = 1 \quad E_1 = -13,53 \text{ эВ} \\ n = 2 \quad E_2 = -3,38 \text{ эВ} \\ n = 3 \quad E_3 = -1,5 \text{ эВ} \\ n = 4 \quad E_4 = -0,86 \text{ эВ} \end{array} \right\} \text{ – возбужденные состояния атома водорода}$$

– основное состояние атома водорода

С ростом квантового числа  $n$  увеличивается радиус орбиты, энергия увеличивается до нуля, т.е. электрон теряет связь с ядром.

Энергия, получаемая или поглощаемая атомом водорода:

$$h\nu = E_k - E_i = \frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = E_1 \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (11.6)$$

$$\nu = R_\nu \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (11.7)$$

$R_\nu$  – постоянная Ридберга (выраженная в Гц), равная

$$R_\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}. \quad (11.8)$$

Спектроскопическое волновое число, показывающее число длин волн, укладываемых в единицу длины (сантиметр, метр)

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R_\nu}{c} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R_\lambda \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (11.9)$$

$R_\lambda$  – постоянная Ридберга (выраженная в  $\text{м}^{-1}$ ) равна:

$$R_\lambda = \frac{R_\nu}{c} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

### Серии линий в спектре излучения атома водорода

Пусть атом переходит из  $k$ -го состояния в основное ( $n_i = 1$ ).

1)  $n_i = 1 \quad n_k = 2, 3, 4, \dots$

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) \text{ – серия Лаймана, лежит в УФ области;}$$

2)  $n_i = 2 \quad n_k = 3, 4, 5, \dots$



$$\frac{1}{\lambda} = R_{\lambda} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) \text{ – серия Бальмера, лежит в видимой области;}$$

3)  $n_i = 3 \quad n_k = 4, 5, 6, \dots$

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\lambda} \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) \text{ – серия Пашена, лежит в ИК области;}$$

4) при переходе с остальных возбужденных состояний ( $n = 4, 5, 6, \dots$ ) в основное образуются серии линий, лежащих в ИК области.

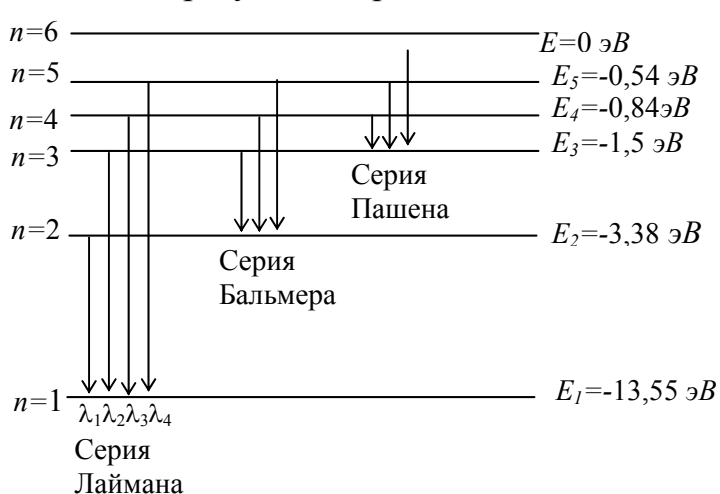


Рис. 11.1

*Недостатки теории Н. Бора:*

1) теория Бора блестяще объяснила спектр атома водорода, но оказалась непригодной для других атомов;

2) теория Бора не смогла объяснить интенсивности отдельных спектральных линий в спектре атома водорода.

Теория Бора подготовила почву к созданию квантовой механики.

## 12. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Это механика микромира, механика движения микрочастиц в микрополях – атомах, молекулах, кристаллах.

Отображая резкое своеобразие микромира, квантовая механика имеет ряд особенностей. Основной особенностью квантовой механики является ее статистический характер, то есть, она позволяет вычислить лишь вероятности того или иного значения физической величины. Вторая особенность квантовой механики – это дискретность, квантованность физических величин (дискретный характер энергии, момента импульса и т. д.).

### *Гипотеза де Бройля*

Известно, что свет обладает двойственной природой (волна и поток частиц). Де Бройль предположил, что не только фотоны, но и электроны и любые другие частицы материи, наряду с корпускулярными, обладают также волновыми свойствами. Согласно гипотезе де Бройля, с каждым микрообъектом связаны, с одной стороны, корпускулярные



характеристики – энергия  $E$  и импульс  $p$ , а с другой волновые характеристики – частота  $\nu$  и длина волны. Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц:

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}. \quad (12.1)$$

Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, можно сопоставить волновой процесс с длиной волны, определяемой формулой де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (12.2)$$

Гипотеза де Бройля была подтверждена опытами К. Дэвиссона и Л. Джермера (США), Дж. Томсона (Великобритания), П.С.Тартаковского (СССР) по дифракции электронов.

### **Соотношение неопределенностей Гейзенберга**

В классической механике состояние материальной точки задается значением координат, импульса, энергии и т.д. Эти величины называются *динамическими переменными*.

Иначе обстоит дело с волной. Она протяженна, заполняет определенную область пространства и ее нельзя сосредоточить в одной точке с координатой  $x$ . Интервал координат  $\Delta x$ , в котором заключен волновой объект, формально равен бесконечности:

$$\Delta x = \infty.$$

Так как импульс частиц связан с длиной волны соотношением де Бройля:

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

то для монохроматической волны  $\lambda = const$  ей отвечает вполне определенное значение импульса частицы  $p$ . Но тогда интервал  $\Delta p$ , в котором заключены возможные значения импульса частицы, равен 0:

$$\lambda = const \Rightarrow p = const \Rightarrow \Delta p = 0.$$

Следовательно, монохроматическая волна характеризуется соотношениями:

$$\Delta x = \infty, \quad \Delta p_x = 0.$$

Таким образом, волновая природа микрочастиц приводит к тому, что в отличие от частиц классической физики, они не могут одновременно иметь определенную координату  $x, y, z$  и определенную соответствующую проекцию импульса  $p_x, p_y, p_z$ .

Измерение координаты даёт ошибку  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  в измерение проекции импульса  $(p_x, p_y, p_z)$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar / 2 \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar / 2 \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar / 2 \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

т.е. *произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка  $\hbar$* .

Аналогично формулам (12.3) можно записать условие для энергии и времени, т.е. соотношение неопределенностей этих величин удовлетворяющее условию:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2, \quad (12.4)$$

$\Delta E$  – неопределенность энергии системы в момент ее измерения;  $\Delta t$  – неопределенность длительного процесса измерения.

### **Уравнение Шредингера для стационарных состояний**

В основе квантовой механики лежит уравнение Шредингера, которое по своему значению сравнимо с уравнением Ньютона в классической механике. Уравнение Шредингера позволяет определить состояние микрочастицы для любого момента времени.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (12.5)$$

где  $m$  – масса частицы;  $\Delta$  – оператор Лапласа ( $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ );  $i$  – мнимая единица;  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная функция частицы в силовом поле;  $\psi(x, y, z, t)$  – волновая функция.

Уравнение (12.5) есть *общее уравнение Шредингера* (уравнение Шредингера, включающее время). Если исключить зависимость волновой функции  $\psi$  от времени в уравнении (12.5), то полученное уравнение

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \quad (12.6)$$

называют *уравнением Шредингера для стационарных состояний*.

*Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний* имеет вид:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (12.7)$$

$\psi \approx \Psi(x)$  – волновая функция, описывающая состояние частицы;  $m$  – масса частицы;  $E$  – полная энергия;  $U$  – потенциальная энергия.

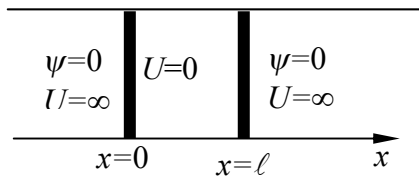


Рис. 12.1

В квантовой механике состояние микрочастицы полностью определяется волновой функцией  $\Psi(x)$ ; она позволяет вычислять средние значения физических величин, характеризующих микрообъект, например, среднее расстояние электрона от ядра. Квадрат модуля  $\Psi$  – функции несет

смысл *плотности вероятности* и определяет *вероятность нахождения частицы в единичном объеме*:

$$|\psi|^2 = \frac{dW}{dV}. \quad (12.8)$$

Вероятность обнаружения частицы в конечном объеме  $V$  равна:

$$W = \int_V dW = \int_V |\psi|^2 dV. \quad (12.9)$$

Выражения (12.8) и (12.9) для одномерного случая соответственно имеют вид  $|\psi(x)|^2 = \frac{dW(x)}{dx}$  и  $W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$ .

### **Применение уравнения Шредингера к частице в однородном, глубоком, прямоугольном потенциальном ящике**

Рассмотрим одномерный, плоский ящик с абсолютно непроницаемыми стенками (рис. 12.1). То есть частица может двигаться только внутри ящика вдоль оси  $x$

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & (x \leq 0), \\ 0, & (0 < x < \ell), \\ \infty, & (x \geq \ell), \end{cases}$$

где  $\ell$  – ширина ящика.

Уравнение Шредингера для частицы в потенциальном ящике, которая движется вдоль оси  $x$ :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0. \quad (12.10)$$

По условиям задачи частица не проникает за пределы ящика, поэтому вероятность ее обнаружения (следовательно и волновая функция) за пределами ящика равна 0. На границе ящика (при  $x = 0$  и  $x = \ell$ ) волновая функция обращается в нуль. Следовательно, условия  $\Psi(0) = 0$ ;  $\Psi(\ell) = 0$  есть граничные значения.

Решением уравнения (12.10) будет:

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx),$$

Так как  $\Psi(0)=0$ , то  $\cos 0^\circ = 1$ , и  $B = 0$ ,  
тогда остается

$$\Psi(x) = A \sin(kx).$$

Так как  $\Psi(\ell) = 0$ , то условие

$$\Psi(\ell) = A \sin(k\ell) = 0$$

выполняется только при  $k\ell = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3$ ). Отсюда

$$k = \frac{n\pi}{\ell}. \quad (12.11)$$

Таким образом, уравнение (12.10) сводится к уравнению:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0, \quad (12.12)$$

где  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ .

Из (12.11) и (12.12) получаем

$$\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E \rightarrow E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2} \quad (n = 1, 2, 3). \quad (12.13)$$

Решения (12.13) будут удовлетворять уравнению Шредингера (12.10) при

$$n = 1 \quad E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2},$$

$$n = 2 \quad E_2 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2},$$

$$n = 3 \quad E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}.$$

Следовательно, энергия частицы в потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками принимает вполне конкретные дискретные значения, зависящие от числа  $n$ , т.е.  $E_1 : E_2 : E_3 = 1 : 4 : 9$  и т. д.

Каждому значению энергии будет соответствовать своя волновая функция:

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (12.14)$$

Для  $E_1$ :  $\psi_1 = A \sin \frac{\pi}{\ell} x$ ,

$E_2$ :  $\psi_2 = A \sin \frac{2\pi}{\ell} x$ ,

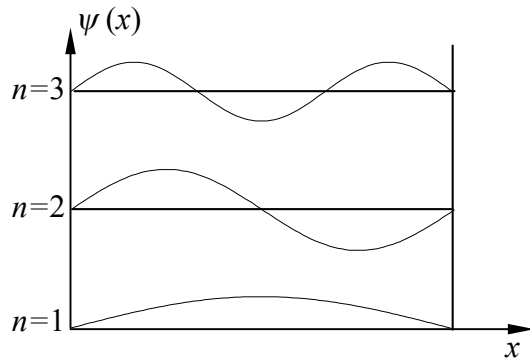


Рис. 12.2

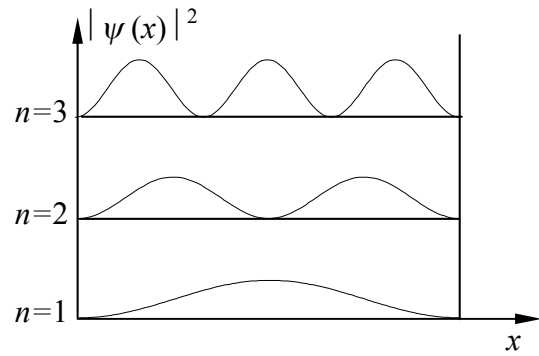


Рис. 12.3

$$E_3: \psi_3 = A \sin \frac{3\pi}{\ell} x.$$

Постоянную  $A$  найдем из условия нормировки:

$$A^2 \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{n\pi}{\ell} x dx = 1,$$

$A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$ , и функция  $\psi(x)$  примет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (12.15)$$

Графики собственных функций  $\psi(x)$ , соответствующие стационарным состояниям с квантовым числом  $n = 1, 2, 3$ , приведены на рис. 12.2.

На рис. 12.3 изображена плотность вероятности обнаружения частицы в состояниях с  $n = 1, 2, 3$ .

Из рис. 12.2 следует, что волновая функция, соответствующая основному состоянию  $n=1$ , не имеет узловых точек, т.е. точек, в которых функция меняет свой знак на противоположный. При  $n = 2$  имеется одна узловая точка, при  $n = 3$  – две узловых точки.

Из рис. 12.3 следует, что для основного состояния высока вероятность нахождения частицы посередине ящика при  $x = \frac{\ell}{2}$ . Для возбужденного состояния с  $n = 2$  частица не может находиться посередине ящика, она одинаково часто пребывает как в левой, так и правой части.

### **Атом водорода с точки зрения квантовой механики**

Уравнение Шредингера для водородоподобного (имеющего любой заряд ядра и только один электрон) атома:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \right) \psi = 0. \quad (12.16)$$

Из данного уравнения находят полную энергию  $E$ , волновые функции  $\Psi(x,y,z)$  и плотность вероятности локализации электрона.

Оказалось, что

$$E = -\frac{z^2 m e^4}{n^2 8 h^2 \epsilon_0^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{m e^4 z^2}{2 \hbar^2}. \quad (12.17)$$

Квантовая энергия приводит к таким же значениям водородоподобного атома, какие были получены в теории Бора. Случай  $E > 0$  соответствует электрону, пролетающему вблизи ядра и удаляющемуся снова на бесконечность. Случай  $E < 0$  соответствует электрону, связанному с ядром. Собственные функции уравнения (12.16) содержат три целочисленных параметра:

$$\Psi = \Psi_{n, \ell, m}. \quad (12.18)$$

Параметр  $n=1,2,3\dots$  называется *главным квантовым числом*, совпадает с номером уровня энергии. Все уровни энергии (за исключением первого) являются вырожденными, т.е. каждому энергетическому уровню соответствует  $n^2$  волновых функций. Параметры  $\ell$  и  $m_\ell$  представляют собой соответственно *орбитальное* и *магнитное орбитальное квантовые числа*. Орбитальное квантовое число определяет момент импульса электрона в атоме; магнитное квантовое число определяет проекцию момента импульса электрона на заданное направление.

Орбитальное квантовое число отражает квантование момента импульса электрона по закону:

$$L_\ell = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (12.19)$$

$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Выражение (12.19) показывает, что момент импульса электрона не может быть произвольным, он принимает дискретные значения.

Магнитное орбитальное квантовое число квантует проекцию орбитального момента импульса электрона на направление внешнего магнитного поля  $z$  по закону:

$$L_{e,z} = \hbar m_\ell, \quad (12.20)$$

где  $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \ell$ .

### **Примеры решения задач**

Задача 1. Имеется кристалл, для которого предельный угол полного внутреннего отражения равен  $44^\circ$ . Определить угол падения луча при переходе из кристалла в воздух, при котором отраженный луч перпендикулярен преломленному.

Дано:

$$\alpha_{np} = 44^\circ$$

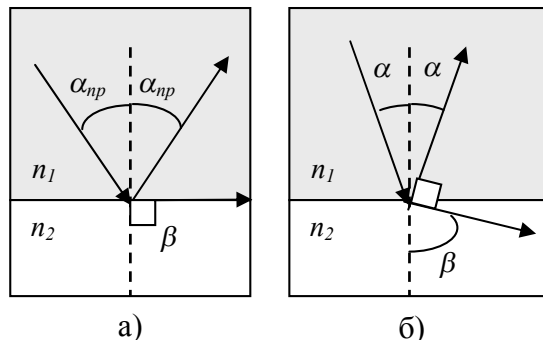
$$n_2 = 1$$

\_\_\_\_\_

$\alpha$  -?

Решение

Запишем закон преломления для угла падения, равного предельному углу полного внутреннего отражения  $\alpha_{np}$  (рис. а).



$$\frac{\sin \alpha_{np}}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

Перепишем формулу (1) с учетом того, что  $\beta = 90^\circ$ ,  $\sin 90^\circ = 1$  и  $n_2 = 1$ :

$$\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n_1}. \quad (2)$$

Запишем закон преломления для угла падения  $\alpha$  (рис. б):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3)$$

Согласно условию задачи (рис. б), угол  $\beta = 90^\circ - \alpha$ .

Отсюда  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

Тогда формула (3) имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{n_1} \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n_1}. \quad (4)$$

Приравняем левые части уравнений (2) и (4) и определим угол падения  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha_{np}$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin 44^\circ, \alpha \approx 35^\circ.$$

Ответ:  $\alpha \approx 35^\circ$ .

Задача 2. Интенсивность монохроматического света уменьшается в три раза при прохождении света через раствор, толщина слоя которого равна 1 см. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света, если толщина слоя будет равна 2 см. Найти коэффициент поглощения.

Дано:

$$I_0/I_1 = 3$$

$$x_1 = 0,01 \text{ м}$$

$$x_2 = 0,02 \text{ м}$$

\_\_\_\_\_

$I_0/I_2$  -?  $k$ -?

### Решение

Запишем закон поглощения света:

$$I = I_0 e^{-kx}$$

отсюда

$$I_0/I = e^{kx} . \quad (1)$$

Из выражения (1) выразим коэффициент поглощения:

$$\begin{aligned} \ln(I_0/I) &= \ln e^{kx} , \\ \ln(I_0/I) &= kx , \quad k = \frac{\ln(I_0/I)}{x} . \end{aligned} \quad (2)$$

Вычислим коэффициент поглощения по формуле (2):

$$k = \frac{\ln(I_0/I)}{x} = \frac{\ln 3}{0,01} = 109,9 \text{ м}^{-1}$$

По уравнению (1) определим, во сколько раз уменьшится интенсивность света, если толщина слоя будет равна 2 см:

$$I_0/I = e^{109,9 \cdot 0,02} = 9 .$$

Ответ:  $I_0/I_2 = 9$ ,  $k = 109,9 \text{ м}^{-1}$ .

Задача 3. Два когерентных источника  $S_1$  и  $S_2$  расположены на расстоянии 5 мм друг от друга и на расстоянии 6 м от экрана. Длина волны источников в вакууме  $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7}$  м. Определить положение на экране 3 максимума и расстояние между соседними максимумами. Среда - воздух.

Дано:

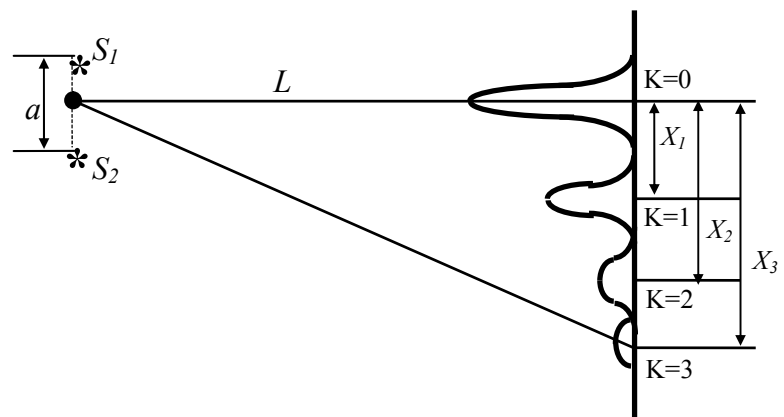
$$\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$L = 6 \text{ м}$$

$$a = 5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$k = 3$$

$$X_{3,\max} - ? \quad \Delta X - ?$$



### Решение

Положение  $k$ -го максимума определяется по формуле:

$$X_{\max} = \frac{k\lambda_0 L}{a} .$$

$$\text{При } k = 3 \Rightarrow X_3 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} .$$

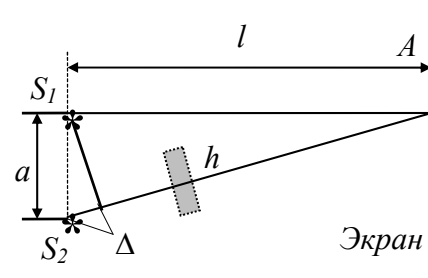
Расстояние между соседними максимумами:



$$\Delta X = X_{k+1} - X_k = \frac{(K+1)\lambda_0 L}{a} - \frac{K\lambda_0 L}{a} = \frac{\lambda_0 L}{a}; \quad \Delta X = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{5 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ответ:  $X_{3,\max} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \Delta X = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$

Задача 4. Два когерентных источника света  $S_1$  и  $S_2$  с  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$  находятся на расстоянии  $2 \text{ мм}$  друг от друга. В двух метрах от линии  $S_1, S_2$ , соединяющей источники, находится экран. Отрезок  $S_1A$  перпендикулярен плоскости экрана. Определить, что наблюдается в точке  $A$  экрана – усиление или ослабление света? Что будет наблюдаться в точке  $A$ , если на пути луча  $S_2A$  поместить стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной  $h = 10,5 \text{ мкм}$  с показателем преломления  $n=1,5$ .



Дано:

$$a = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$l = 2 \text{ м}$$

$$h = 10,5 \text{ мкм} = 10,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$n = 1,5$$

max или min в точке  $A$  - ?

Решение

В первом случае оба луча идут в воздухе. Оптическая разность хода  $\Delta_1$  будет равна геометрической разности хода.

$$\Delta_1 = S_2A - S_1A = \sqrt{l^2 + a^2} - l,$$

$$\Delta_1 = \sqrt{(2 \cdot 10^{-3})^2 + 2^2} - 2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1 \text{ мкм},$$

$$\frac{\Delta_1}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-7} / 2} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ — в точке } A \text{ наблюдается максимум освещенности, т.к.}$$

в разности хода волн укладывается четное число полуволн.

Во втором случае оптическая длина пути луча  $S_2A$  изменится. Она будет складываться из длины пути луча в воздухе ( $S_2A - h$ ) и оптической длины пути луча в стеклянной пластинке  $nh$ . Тогда оптическая разность хода лучей равна:

$$\Delta_2 = [(S_2A - h) + nh] - S_1A = S_2A - S_1A + h(n-1) = \Delta_1 + h(n-1) = 1 + 10,5(1,5-1) = 6,25 \text{ мкм.}$$

$$\frac{\Delta_2}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{6,25 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-7} / 2} = \frac{6,25}{0,25} = 25 \text{ — выполняется условие минимума.}$$

Ответ: Внесение стеклянной пластинки изменяет интерференционную картину, в точке  $A$  будет наблюдаться минимум освещенности.

Задача 5. На стеклянную пластинку ( $n_1 = 1,5$ ), покрытую тонкой пленкой с показателем преломления  $n_2 = 1,4$ , падает нормально параллельный

пучок лучей монохроматического света ( $\lambda=0,6$  мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить минимальную толщину пленки.

Дано:

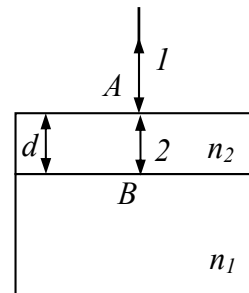
$$n_2 = 1,4$$

$$n_1 = 1,5$$

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

---


$$d_{\min} = ?$$



Решение

Условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках, нанесенных на оптически более плотную среду, состоит в том, что оптическая разность хода лучей 1 и 2 в точке A должна быть равна нечетному числу полуволен.

$$\Delta = 2 d n_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (1)$$

Подставляя в (1)  $k = 0$ , получим

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0,6}{4 \cdot 1,4} = 0,11 \text{ мкм}.$$

Ответ:  $d_{\min} = 0,11 \text{ мкм}.$

Задача 6. Дифракционная решетка имеет 500 штрихов на 1 мм. Найти, на каком расстоянии будут находиться фиолетовые границы спектров ( $\lambda_\phi = 0,4$  мкм) второго порядка на экране, отстоящем от линзы на расстоянии 1 м.

Дано:

$$N = 500 \text{ штрихов/мм}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

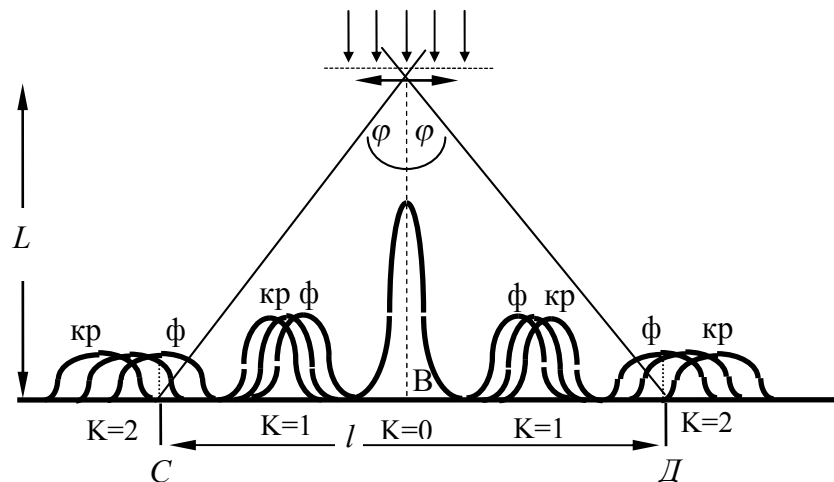
$$k = 2$$

$$\lambda = 0,4 \text{ мкм} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$l = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

---


$$h = ?$$



Решение

Найдем период решетки:

$$(a + b) = 10^{-3} / 500 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Из рисунка следует, что

$$CD = 2CB = 2L \operatorname{tg} \varphi.$$

Из условия главных максимумов

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{a+b} = \frac{2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,4.$$

Тогда  $\varphi = 23,58^\circ$ ,  $\operatorname{tg}\varphi = 0,436$  и  $h = 2CB = 2L \operatorname{tg}\varphi = 2 \cdot 0,436 = 0,87$  м.

Ответ:  $h = 0,87$  м.

Задача 7. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластинки, погруженной в жидкость. Отраженный от пластинки пучок света образует угол  $\varphi=97^\circ$  с падающим пучком. Определить показатель преломления  $n_1$  жидкости, если отраженный свет максимально поляризован.

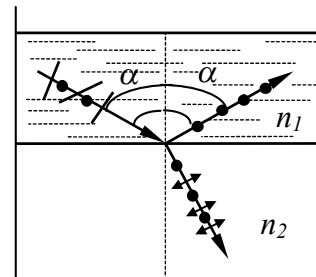
Дано:

$$\varphi = 2\alpha = 97^\circ$$

$$n_2 = 1,5$$

---

$n_1$  - ?



Решение

Согласно закону Брюстера  $\operatorname{tg}\alpha_{\text{бр}} = n_{21} = n_2/n_1$ .

$$\text{Отсюда : } n_1 = n_2 / \operatorname{tg}\alpha = 1,5 / \operatorname{tg} \frac{97}{2} = 1,5 / 1,13 = 1,33.$$

Ответ:  $n_1 = 1,33$ .

Задача 8. Угол поворота плоскости поляризации желтого света при прохождении через трубку с раствором сахара равен  $20^\circ$ , длина трубки 12 см. Определить концентрацию сахара в растворе, если удельное вращение раствора сахара для желтых лучей ( $\lambda=0,586$  мкм) равно  $C_{\lambda,T}=66,5$  град/(дм г. сахара/см<sup>3</sup>раствора).

Дано:

$$\varphi = 20^\circ$$

$$\ell = 1,2 \text{ дм}$$

$$C_{\lambda,T} = 66,5 \text{ град}/(\text{дм г./см}^3)$$

---

$K$  - ?

Решение

Угол вращения плоскости поляризации равен:

$$\varphi = C_{\lambda,T} \ell K,$$

$$\text{откуда следует } K = \varphi / C_{\lambda,T} \ell = \frac{20}{66,5 \cdot 1,2} = 0,25 \text{ г/см}^3.$$

Ответ:  $K=0,25$  г/см<sup>3</sup>.

Задача 9. Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела,  $\lambda=0,58\text{мкм}$ . Определить температуру и энергетическую светимость  $R^*$  поверхности тела.

Дано:

$$\lambda=0,58 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

---


$$T - ? \quad R^* - ?$$

Решение

1. В соответствии с законом Вина:

$$T = b / \lambda_{\text{max}}, \text{ где } b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ мК} \quad , \quad (1)$$

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{0,58 \cdot 10^{-6}} = 5000 \text{ К.}$$

2. Энергетическую светимость абсолютно черного тела можно вычислить по закону Стефана – Больцмана:

$$R^* = \sigma T^4, \quad (2)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана - Больцмана.

Подставляя в формулу (2) числовые значения  $T$  и  $\sigma$ , получим:

$$R^* = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (5000)^4 = 3,54 \cdot 10^7 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

Ответ:  $T=5000\text{К}$ ,  $R^*=3,54 \cdot 10^7 \text{ Вт}/\text{м}^2$ .

Задача 10. Определить импульс и кинетическую энергию электрона, движущегося со скоростью  $v=0,9c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

Дано:

$$c=3,0 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$$

$$v=0,9c$$

$$m_0=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

---


$$P - ? \quad W_k - ?$$

Решение

Импульс частицы

$$p = m v. \quad (1)$$

Так как скорость электрона близка к скорости света в вакууме, необходимо учесть зависимость массы электрона от скорости.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} = 0,9, \quad (2)$$

$m_0$  – масса покоя электрона.

Заменив в формуле (1) массу  $m$  ее выражением из (2) и приняв во внимание, что  $v = c\beta$ , получим выражение для релятивистского импульса:

$$P = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta c ; P = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1-0,81}} = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия  $W_k$  частицы определяется как разность между полной энергией  $W$  и энергией покоя  $W_0$  этой частицы, то есть  $W_k = W - W_0$ .

Учитывая зависимость массы от скорости, получаем

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Произведем вычисления:

$$W = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1-0,81}} - 1 \right) = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

В атомной и ядерной физике энергия часто выражается в мегаэлектронвольтах ( $MэВ$ ),  $1 MэВ = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ . В этих единицах энергия покоя электрона составляет  $m_0 c^2 = 0,51 MэВ$ , и вычисления можно упростить:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1-0,81}} - 1 \right) = 1,294; \text{ тогда } W = 0,51 \cdot 1,294 = 0,66 MэВ.$$

Ответ:  $P = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$ ,  $W = 0,66 MэВ$ .

**Задача 11.** Определить максимальную скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов, вырывааемых с поверхности серебра ультрафиолетовым излучением с  $\lambda = 0,155 \text{ мкм}$ .

Дано:

$$\lambda = 0,155 \text{ мкм} = 1,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$A_{\text{вых}} = 4,7 \text{ эВ} = 7,52 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

---

$v_{\max} - ?$

Решение

Скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_k \quad (1)$$

где

$$W_k = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (2)$$

Классическая формула кинетической энергии применима при условии, что  $v \ll c$ . При этом энергия фотона  $h\nu$  много меньше энергии покоя электрона  $m_0 c = 0,51 MэВ$ . Покажем это:

энергия фотона  $h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 8 \text{ эВ}$ .

Действительно,

$$8 \text{ эВ} \ll 5,1 \cdot 10^5 \text{ эВ}.$$

Следовательно, правомерно использовать формулу кинетической энергии фотоэлектрона из классической механики. Из уравнений (1) и (2) следует

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(h\nu - A_{\text{вых}})}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ:  $v_{\max} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

Задача 12. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол  $\theta = 90^\circ$ . Энергия рассеянного фотона равна 0,4 МэВ. Определить энергию и импульс фотона до рассеяния.

Дано:

$$E' = 0,4 \text{ МэВ}$$

$$\theta = 90^\circ$$

---


$$E - ? \quad p - ?$$

Решение

1. Найдем длину волны рассеянного фотона:

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,4 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

2. Длина волны налетающего фотона:

$$\lambda = \lambda' - \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}; \quad \sin^2 45^\circ = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$\lambda = (3,1 \cdot 10^{-12} - 2,42 \cdot 10^{-12}) = 0,68 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

3. Энергия фотона:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,68 \cdot 10^{-12}} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1,85 \text{ МэВ}$$

(1 МэВ =  $1,6 \cdot 10^{-13}$  Дж).

4. Импульс фотона

$$p = \frac{E}{c} = \frac{3 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} = 10^{-21} \text{ кг·м/с}.$$

Ответ:  $E = 3 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1,85 \text{ МэВ}$ ,  $p = 10^{-21} \text{ кг·м/с}$ .

Задача 13. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Дано:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

---

$r_1$ -?  $v$ -?

Решение

Согласно теории Бора, радиус  $r$  электронной орбиты и скорость  $v$  электрона на ней связаны равенством  $mvr = n\hbar$ , по условию задачи  $n = 1$ , следовательно

$$mvr = \hbar. \quad (1)$$

По теории Бора электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} / \text{м}$ ,

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (2)$$

Совместное решение равенств (1) и (2) относительно  $r$  дает

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

Подставив сюда значения  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  найдем боровский радиус:

$$r_1 = a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Из уравнения (1) получим выражение:

$$v = \hbar/mr.$$

Произведя вычисления по этой формуле найдем:

$$v = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ:  $r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ ,  $v = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

Задача 14. Определить энергию  $\epsilon$  фотона, соответствующего второй линии в серии Пашена атома водорода.

Дано:

$$n_1 = 3$$

$$m = 5$$

---

$\epsilon$ -?

Решение

Энергия фотона излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую

$$\varepsilon = E_i \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = E_i \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

где  $E_i = \frac{me^4}{8\hbar\varepsilon_0^2}$  – энергия ионизации атома водорода;  $n_1=1,2,3..$  – номер орбиты, на которую переходит электрон;  $n_2 = n_1+1, n_1+2, n_1+3$  – номер орбиты, с которой переходит электрон,  $m$  – номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена  $n_1=3$ , для второй линии  $m=5$   $n_2 = n_1+m = 3+2=5$ . Подставив числовые значения, найдем энергию фотона

$$E_i = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж};$$

$$\varepsilon = 2,18 \cdot 10^{-18} \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 2,18 \cdot 10^{-18} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) = 0,15 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Ответ:  $0,15 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ .

Задача 15. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка  $T=10$  эВ. Исследуя соотношение неопределенностей, оцените минимальные линейные размеры атома.

Дано:

$$T = 10 \text{ эВ}$$

---

$\ell_{min}$  -?

Решение

Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (1)$$

где  $\Delta x$  – неопределенность координаты частицы (в данном случае электрона);  $\Delta p_x$  – неопределенность импульса частицы (электрона);  $\hbar$  – постоянная Планка.

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры  $\ell$ , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = \frac{\ell}{2}.$$

Соотношение неопределенностей (1) можно записать

$$\left( \frac{\ell}{2} \right) \Delta p_x \geq \hbar, \text{ откуда } \ell \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}.$$



Физически разумная неопределенность импульса  $\Delta p_x$  во всяком случае не должна превышать значения самого импульса  $p_x$ , т.е.  $\Delta p_x \leq p_x$ . Импульс  $p_x$  связан с кинетической энергией  $T$  соотношением  $p_x = \sqrt{2mT}$ . Заменим  $\Delta p_x$  значением  $\sqrt{2mT}$  (такая замена не увеличит  $\ell$ ). Переходя от неравенства к равенству, получим:

$$\ell_{min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ нм}$$

Ответ:  $\ell_{min} = 124 \text{ нм}$ .

Задача 16. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириною  $\ell$ . Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ( $n=2$ ) будет, обнаружен в средней трети ящика.

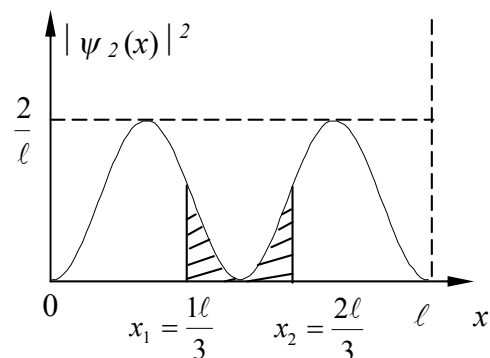
Дано:

$$n = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \ell$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \ell$$

W -?



Решение

Вероятность  $W$  обнаружить частицу в интервале  $x_1 < x < x_2$  определяется равенством.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (1)$$

где  $\psi_n(x)$  – нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2)$$

Возбужденному состоянию  $n = 2$ , отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{2\pi}{\ell} x.$$

Подставив  $\psi_2(x)$  в (1) получим

$$W = \frac{2}{e} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{\ell} x dx. \quad (3)$$

Согласно условию задачи  $x_1 = \frac{1}{3}\ell$  и  $x_2 = \frac{2}{3}\ell$ . Подставим эти пределы интегрирования в формулу (3), произведем замену  $\sin^2 \frac{2\pi}{\ell} x = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{4\pi}{\ell} x \right)$  и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{2}{\ell} \int_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}} \sin^2 \frac{2\pi}{\ell} x dx = \frac{1}{\ell} \left\{ \int_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}} dx - \int_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}} \cos \frac{4\pi}{\ell} x dx \right\} = \frac{1}{\ell} \left\{ \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{\ell} x \Big|_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}} \right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left( \sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Заметив, что  $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$ , а  $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3}$  получим  $W = 0,195$ .

Ответ:  $W = 0,195$ .

### 13. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

Ядром называется центральная часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный заряд. Все атомные ядра состоят из элементарных частиц – протонов и нейтронов, которые носят название нуклонов. Протон  $p$  обладает зарядом  $+e$  и массой покоя  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,28 \text{ МэВ}$ , имеет спин  $S=1/2$  и собственный магнитный момент  $\mu_p = 2,79\mu_y$ , где  $\mu_y$  – ядерный магнетон, равный

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}.$$

Нейтрон  $n$  не имеет электрического заряда, его масса покоя  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,57 \text{ МэВ}$ . Нейтрон обладает спином равным  $S=1/2$  и собственным магнитным моментом  $\mu = -1,91 \mu_y$ . Знак минус указывает на то, что направление собственных механического и магнитного моментов противоположны.

#### Основные характеристики атомного ядра

1. *Заряд ядра* –  $Ze$ , где  $e$  – заряд протона,  $Z$  – зарядовое число ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в периодической системе Д.И. Менделеева.

2. *Массовое число*  $A$  – число нуклонов в ядре  $A=Z+N$ , где  $Z$  – число протонов;  $N$  – число нейтронов.

Ядро химического элемента обозначается  ${}_Z\mathbf{X}^A$ , где  $X$  – символ химического элемента. Ядра с одинаковыми  $Z$ , но разными  $A$  (т.е. с разными числами нейтронов  $N=A-Z$ ) называются *изотопами*, а ядра с одинаковыми  $A$ , но разными  $Z$  – *изобарами*. Например, водород ( $Z=1$ ) имеет три изотопа:  ${}_1\text{H}^1$  – протий ( $Z=1, N=0$ ),  ${}_1\text{H}^2$  – дейтерий ( $Z=1, N=1$ ),  ${}_1\text{H}^3$  – тритий ( $Z=1, N=2$ ); олово – десять изотопов и т.д. Примером ядер

изобар могут служить ядра  ${}^4\text{Be}^{10}$ ,  ${}^5\text{B}^{10}$ ,  ${}^6\text{C}^{10}$ . В настоящее время известно около 300 устойчивых изотопов и более 2000 естественных и искусственно полученных радиоактивных изотопов.

3. Размер ядра определяется *радиусом ядра*, имеющим условный смысл ввиду размытости границы ядра. Эмпирическая формула радиуса ядра  $R=R_0A^{1/3}$ , где  $R_0=(1,3-1,7)\cdot 10^{-15}$  м, может быть истолкована как пропорциональность числу нуклонов в нем.

### **Энергия связи ядер. Дефект массы**

Исследования показывают, что атомные ядра являются устойчивыми образованиями. Массу ядер очень точно можно определить с помощью масс-спектрометров – приборов, разделяющих с помощью электрических и магнитных полей пучки заряженных частиц (обычно ионов) с разными удельными зарядами  $q/m$ . Масс-спектрометрические измерения показали, что *масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов*, следовательно, при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для расщепления ядра на составляющие его нуклоны необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделится при его образовании. Следовательно, *энергия связи* – это разность между энергией всех свободных нуклонов, составляющих ядро, и их энергий в ядре:

$$E_{св}=[Zm_p+(A-Z)m_n-m_я] c^2, \quad (13.1)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_я$  – соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

Вместо массы ядра величину  $E_{св}$  можно выразить через атомную массу  $m_{ам}$ :

$$E_{св}=[Zm_H+(A-Z)m_n-m_{ам}] c^2, \quad (13.2)$$

где  $m_H$  – масса атома водорода.

Мерой энергии связи ядра служит величина  $\Delta m$ , называемая *дефектом массы*:

$$\Delta m=E_{св}/c^2, \quad \Delta m=Zm_H+(A-Z)m_n-m_{ам}. \quad (13.3)$$

На  $\Delta m$  уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра<sup>1</sup>. В ядерной физике большое значение для характеристики ядра имеет *удельная энергия связи*  $\delta E_{св}$  – энергия, приходящаяся на один нуклон.  $\delta E_{св}=E_{св}/A$ . Она характеризует устойчивость атомных ядер, т.е. чем больше  $\delta E_{св}$ , тем устойчивее ядро. Удельная энергия связи зависит от массового числа  $A$  элемента. С энергетической точки зрения наиболее устойчивыми являются ядра элементов из средней части таблицы Д.И. Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на

<sup>1</sup>Во внесистемных единицах энергия связи ядра равна  $E_{св} = 931\Delta m$ , где дефект массы  $\Delta m$  измеряется в атомных единицах массы. 931 - коэффициент пропорциональности (1 а.е.м.  $\cong$  931 МэВ).

более легкие – реакции деления; 2) слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые – термоядерные реакции.

### **Закон радиоактивного распада**

Под *радиоактивным распадом* понимают естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется *материнским*, возникающее ядро – *дочерним*. Так как отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга, можно считать, что число ядер  $dN$ , распавшихся в среднем за интервал времени от  $t$  до  $t+dt$ , пропорционально промежутку времени  $dt$  и числу нераспавшихся ядер  $N$  к моменту времени  $t$ :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (13.4)$$

где  $\lambda$  – *постоянная радиоактивного распада*. Знак минус указывает, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается. Разделив переменные и интегрируя:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt, \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

получим *закон радиоактивного распада*:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (13.5)$$

где  $N_0$  – начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени  $t=0$ );  $N$  – число нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ .

Число ядер, распавшихся за время  $t$ , определяется выражением:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (13.6)$$

Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: *период полураспада*  $T_{1/2}$  – время, за которое исходное число распавшихся ядер уменьшается вдвое, и *среднее время жизни радиоактивного ядра*  $\tau$  – величина, обратная постоянной распада  $\lambda$ :

$$\tau = 1/\lambda. \quad (13.7)$$

Период полураспада определяется условием:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

следовательно,

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda. \quad (13.8)$$

Периоды полураспада для известных в настоящее время радиоактивных ядер находятся в пределах от  $3 \cdot 10^{-7}$  с до  $5 \cdot 10^{15}$  лет.

В случае, если интервал времени  $\Delta t$ , за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада  $T_{1/2}$ , то *число распавшихся ядер* можно определить по формуле:

$$\Delta N = \lambda N \Delta t. \quad (13.9)$$

Число распадов в единицу времени называется *активностью*  $A$  данного изотопа:

$$A = |dN/dt| = \lambda N \quad \text{или} \quad A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (13.10)$$

где  $dN$  – число ядер, распадающихся за время  $dt$ ;  $A_0$  – активность изотопа в начальный момент времени.

Активность, отнесенная к единице массы вещества, называется *удельной активностью*:

$$a = A/m. \quad (13.11)$$

В системе СИ активность измеряется в беккерелях  $Bк$ :  $1Bк$  – активность радиоактивного источника, в котором за 1 секунду происходит 1 распад. В ядерной физике используется также внесистемная единица – кюри  $Kи$ ,  $1 Kи = 3,7 \cdot 10^{10} Bк$ .

Число атомов  $N$ , содержащихся в радиоактивном изотопе, может быть определено:

$$N = m N_A/M, \quad (13.12)$$

где  $m$  – масса изотопа;  $M$  – молярная масса;  $N_A$  – постоянная Авогадро.

### **Естественная радиоактивность**

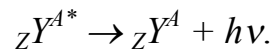
*Естественная радиоактивность* – это явление самопроизвольного превращения атомных ядер одних элементов в другие, сопровождающееся испусканием особого рода лучей  $\alpha$ ,  $\beta$  или  $\gamma$ , способных вызвать ионизацию воздуха, люминесценцию, химическое и биологическое действие. Исследования, проведенные Марией и Пьером Кюри, а также Резерфордом, показали, что  $\alpha$  - лучи – поток ядер гелия  ${}_2\text{He}^4$ ,  $\beta$  - лучи – поток быстрых электронов (или позитронов),  $\gamma$  - лучи – электромагнитное излучение высокой частоты, следовательно, и высокой энергии. Эти виды излучения получили название – радиоактивного излучения.

Радиоактивный распад подчиняется *правилам смещения*, которые являются следствием законов сохранения заряда и массовых чисел.

1. При  $\alpha$  - распаде  ${}_Z\text{X}^A \rightarrow {}_{Z-2}\text{Y}^{A-4} + {}_2\text{He}^4$  зарядовое число дочернего ядра на 2 единицы, а массовое число на 4 единицы меньше, чем у исходного ядра, т.е. продукт распада  $Y$  смещается в таблице Д.И. Менделеева на две позиции левее исходного элемента  $X$ .

2. При электронном  $\beta$  - распаде  ${}_Z\text{X}^A \rightarrow {}_{Z+1}\text{Y}^A + {}_{-1}\text{e}^0 + \tilde{\nu}$  получается элемент, массовое число ядра которого не меняется, так как масса электрона мала, а заряд увеличивается на единицу. Наряду с электроном испускается также антинейтрино  $\tilde{\nu}$  – электрически нейтральная частица, обладающая массой покоя, близкой к нулю. Ее участие в  $\beta$  - распаде следует из закона сохранения момента импульса. При  $\beta$  - распаде происходит сдвиг вправо в таблице Менделеева на одну позицию.

3. При  $\gamma$  - излучении превращения элементов не происходит, изменяется только внутренняя энергия возбужденного дочернего ядра  ${}_Z Y^{A*}$ :



Гамма - излучение не является самостоятельным типом радиоактивности. Оно сопровождает процессы  $\alpha$  - и  $\beta$  - распадов. Если дочернее ядро окажется в возбужденном состоянии, то избыток энергии будет излучен ядром в виде  $\gamma$  - квантов.

### Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить дефект массы  $\Delta m$  и энергию связи  $E_{св}$  ядра  ${}_{5}^{11}B$ .

Дано:




---

$\Delta m$  -?  $E_{св}$  - ?

Решение

Дефект массы ядра определим по формуле:

$$\Delta m = Zm_{1H} + (A - Z)m_n - m_a,$$

$$m_n = 1,00867 \text{ а.е.м.}; m_{1H} = 1,00783 \text{ а.е.м.}; m_a = {}_{5}^{11}B = 11,00931 \text{ а.е.м.}$$

$$\Delta m = 5 \cdot 1,00783 + (11 - 5) \cdot 1,00867 - 11,00931 = 0,08186 \text{ а.е.м.}$$

Энергия связи ядра

$$E_{св} = c^2 \Delta m = 931,4 \text{ МэВ/а.е.м} \cdot 0,08186 \text{ а.е.м.} = 76,2 \text{ МэВ.}$$

Ответ:  $E_{св} = 76,2 \text{ МэВ.}$

Задача 2. Определить энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра  ${}_{11}^{23}Na$ .

Дано:




---

$E_{св}$  - ?

Решение

После отрыва нейтрона число нуклонов  $A$  в ядре уменьшится на единицу, а число протонов  $Z$  останется неизменным, получится ядро  ${}^{22}Na$ . Ядро  ${}^{23}Na$  можно рассматривать как устойчивую систему, образовавшуюся в

результате захвата свободного нейтрона ядром  $^{22}\text{Na}$ . Энергия отрыва нейтрона от ядра  $^{23}\text{Na}$  равна энергии связи нейтрона с ядром  $^{22}\text{Na}$ .

Выразим энергию связи нейтрона через дефект массы системы и получим

$$E_{св} = c^2 \Delta m = c^2 (m_{^{22}\text{Na}} + m_n - M_{^{23}\text{Na}}).$$

При подстановке числовых значений заменяем массы ядер массами нейтральных атомов. Так как число электронов в оболочках атомов  $^{22}\text{Na}$  и  $^{23}\text{Na}$  одинаково, то разность масс атомов  $^{23}\text{Na}$  и  $^{22}\text{Na}$  от такой замены не изменится:

$$E_{св} = 931,4 \text{ МэВ/а.е.м} (21,99444 + 1,00867 - 22,98977) = 931,4 \text{ МэВ/а.е.м} \cdot 0,01334 \text{ а.е.м} = 12,42 \text{ МэВ}.$$

Ответ:  $E_{св} = 12,42 \text{ МэВ}$ .

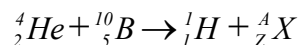
Задача 3. При соударении  $\alpha$  - частицы с ядром бора  $^{10}_5\text{B}$  произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода  $^1_1\text{H}$ . Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, дать символическую запись ядерной реакции и определить ее энергетический эффект.

Дано:

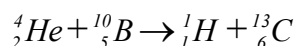


Решение

Обозначим неизвестное ядро символом  $^A_Z\text{X}$ . Так как  $\alpha$ -частица представляет собой ядро гелия  $^4_2\text{He}$ , реакция запишется как



Применив закон сохранения числа нуклонов, получим уравнение  $4+10=1+A$ , откуда  $A=13$ . Применив закон сохранения заряда, получим уравнение  $2+5=1+Z$ , откуда  $Z=6$ . Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода  $^{13}_6\text{C}$ . Теперь можем записать реакцию в окончательном виде:



Энергетический эффект  $Q$  ядерной реакции определяется по формуле:

$$Q = 931,14 [(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}) - (m_{\text{H}} + m_{\text{C}})].$$

Здесь в первых круглых скобках указаны массы исходных атомов, во вторых скобках – массы атомов – продуктов реакции.

$$Q = 931(4,00260 + 10,01294) - (1,00783 + 13,00335) = 4,06 \text{ МэВ}.$$

Ответ:  ${}^6_{13}\text{C}$ ;  ${}^4_2\text{He} + {}^{10}_5\text{B} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^{13}_6\text{C}$ ;  $Q = 4,06 \text{ МэВ}$ .

Задача 4. Определить начальную активность  $A_0$  радиоактивного препарата рентгения Rg (элемент номер 111 в таблицы Д.И. Менделеева) массой  $m = 0,2$  мкг, а также его активность  $A$  через время  $t = 6$  ч. Период полураспада  $T_{1/2}$  считать известным.

Дано:

$$m = 0,2 \text{ мкг} = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$$

$$t = 6 \text{ ч}$$

---

$$A_0 \text{ -? } A \text{ -?}$$

Решение.

Активность изотопа  $A$  характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа  $dN$  ядер, распавшихся за интервал времени  $dt$ , к этому интервалу:

$$A = -dN/dt, \quad (1)$$

знак «-» указывает, что число  $N$  радиоактивных ядер с течением времени убывает. Для того чтобы найти  $dN/dt$ , воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Исключив из формул (1) и (3)  $dN/dt$ , находим активность препарата в момент времени  $t$ :

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Постоянную активность  $A_0$  препарата получим при  $t = 0$ :

$$A_0 = \lambda N_0, \quad (5)$$

Постоянная радиоактивного распада  $\lambda$  связана с периодом полураспада  $T_{1/2}$  соотношением:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (6)$$

Число  $N_0$  радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро  $N_A$  на количество вещества  $\nu$  данного изотопа.

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \quad (7)$$

где  $m$  – масса изотопа;  $M$  – молярная масса.

С учетом выражений (6) и (7) формулы (5) и (4) принимают вид:



$$A_0 = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A \quad (8)$$

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \quad (9)$$

Проведем вычисления

$$T_{1/2} (Rg) = 10 \text{ мин.} = 600 \text{ с};$$

$$t = 6 \text{ ч} = 6 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ с} = 2,16 \cdot 10^4 \text{ с};$$

$$\ln 2 = 0,693;$$

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк.}$$

$$A = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot e^{-\frac{0,693}{600} \cdot 2,16 \cdot 10^4} = 81,3 \text{ Бк.}$$

Ответ:  $A_0 = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк}$ ,  $A = 81,3 \text{ Бк}$ .

### ***Список использованной литературы.***

1. Савельев, И.В. Курс общей физики: в 3 т. / И.В.Савельев. – М.: Наука, 1982. Т. 1–3.
2. Трофимова, Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. Шк., 1990. – 478с.
3. Геворкян, Р.Г. Курс физики: учеб. пособие. / Р.Г. Геворкян. – М.: Высш. Шк., 1979. – 656 с.
4. Ландсберг, Г.С. Элементарный учебник физики: в 3 т. / Г.С. Ландсберг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1984. Т. 1-3.
5. Калашников, Н.П. Физика. Интернет тестирование базовых заданий: учеб. пособие / Н.П. Калашников, Н.М. Кожевников. 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 160 с.
6. Грабовский, Р.И. Курс физики: учеб. пособие / Р.И. Грабовский. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. Шк., 1980. – 607 с.
7. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики. / В.С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1985. –384 с.
8. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учебное пособие / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев – М.: Высш. Шк., 1981. – 496с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Механика	3
2. Колебания и волны	21
3. Молекулярная физика. Термодинамика	36
<i>Примеры решения задач</i>	57
4. Электростатика	77
5. Постоянный ток	93
6. Электромагнетизм	99
<i>Примеры решения задач</i>	116
7. Геометрическая оптика	134
8. Волновая оптика	139
9. Релятивистская механика	153
10. Квантовая оптика	154
11. Строение атома	160
12. Квантовая механика	163
<i>Примеры решения задач</i>	169
13. Элементы физики атомного ядра	181
<i>Примеры решения задач</i>	185
Список использованной литературы.	189

Учебное издание

**Твердова** Наталия Вячеславовна,  
**Петрова** Валентина Николаевна,  
**Лебедева** Надежда Леонидовна  
под редакцией Г.В. Гиричева

## **КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ: ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

Учебное пособие

Редактор О.А. Соловьева

Подписано в печать 30.05.2014. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.

Усл. печ.л. 10,93. Тираж 100 экз. [Заказ](#)

ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-  
технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры экономики и  
финансов ФГБОУ ВПО «ИГХТУ»

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7