Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

А.Н. Тростин, Ю.В. Царев

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие для студентов дневной формы обучения по направлению подготовки 270301 « Стандартизация и метрология»

Иваново 2014

Тростин, А.Н. Оценка точности результатов измерений: учеб. пособие для студентов дневной формы обучения по направлению подготовки: 270301 «Стандартизация и метрология» / А.Н. Тростин, Ю.В. Царев; Иван. гос. хим.-технол. ун-т.— Иваново, 2014. — 42 с.

В пособии рассмотрены вопросы практического применения статистической обработки результатов измерений, проводимых в учебных физико-химических лабораториях. Представлено краткое теоретическое обоснование оценок погрешности измеряемых величин. Приведен порядок обработки результатов многократного измерения физических величин и примеры обработки конкретных данных.

Является раздаточным материалом и может быть использовано при самостоятельной подготовке.

Табл. 5. Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета

Рецензент

доктор технических наук В.Ю. Прокофьев (Ивановский государственный химико-технологический университет)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Измерения в соответствии с поставленной задачей проводятся для достижения некоторого конечного результата, который отражает требуемую информацию о количественных свойствах объектов, явлений и процессов,включая и технологические процессы. Измерительная информация может быть получена путем измерения, в процессе испытания или контроля образцов продукции с целью установления ее технического уровня, диагностики технического состояния машин, физиологического уровня биологических объектов, научных исследований, учета материальных и энергетических ресурсов и др.

Основным объектом измерения являются физические величины, которые являются одним из свойств физического объекта, системы, явления или процесса, общее в качественном отношении для многих физических объектов, систем, процессов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Практическое использование результатов измерений требует оценки точности измеряемых физических величин.

Точность измерения отражает степень приближения результатов измерения к некоторому действительному значению, и позволяет качественно сравнивать измерительные операции. Количественной оценкой точности измерения служит погрешность или ошибка измерений. Оценка погрешности измерений - необходимая операция для обеспечения достоверности измерений. Высокая точность измерения и достоверность научных результатов имеет большое практическое значение как в инженерной, так и научной деятельности.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерение - это процесс нахождения физических величин, параметров, характеристики опытным путем с помощью средства измерения. Найденное значение называют результатом измерения. Измерение по средствам измерительного устройства заключается в сравнении измерительной величины с ее однородной физической величиной, принятой за единицу измерения. Результат выражается числом. Измерение проводится различными методами, например, методом непосредственной оценки. В этом методе измерения значение измеренной величины определяют непосредственно по отчетному устройству измерительного прибора, предварительного проградуированного по мере, т.е. при измерении непосредственной оценки меры участия не происходит, а она передается через предварительно проградуированную оценку.

Используют также метод сравнения с мерой. В этом методе сравниваются с однородной величиной воспроизводимой мерой, размер которой известен и который определяет результат измерения.

Технические средства измерения, имеющие нормированные метрологические характеристики, оказывающие определенное влияние на результаты и погрешности измерений, называют средством измерения. В зависимости от назначения средство измерения делится на следующие виды:

а) мера – средство измерения, предназначенное для воспроизведения физической величины данного вида;

б) измерительный прибор – средство измерения, вырабатывающее сигнал измерительной информации в форме доступной для восприятия;

в) измерительный преобразователь – средство измерения, вырабатывающее сигнал измерительной информации в форме удобной для передачи дальнейшего преобразования обработки по не поддающимся непосредственному восприятию. К ним относятся: усилители, входные и выходные делители, измерительные трансформаторы. Как правило, по своему устройству представляет совокупность измерительных преобразователей, называемых измерительной цепью и вспомогательными средствами измерения (источник питания и т.д.). Измерительные преобразователи, осуществляющие преобразование электрических величин в механическое перемещение – электромеханические, а измерительные приборы, построенные на них – электромеханические измерительные приборы.

Согласно механическим функциям они подразделяются:

1) эталоны средства измерения, обеспечивающие воспроизведение и хранение единицы измерения и официально утвержденные в качестве эталона. Они бывают: первичные (общий, мировой), косвенный, эталон-копия (общий, мировой и косвенный), эталон сравнения, рабочий эталон.

2) образцовое средство измерения – это мера или измерительный прибор, служащие для проверки по ним других средств измерения и утвержденные официально в качестве образцовых.

3) рабочее средство измерения.

В зависимости от того, как получается результат измерения, непосредственно в процессе измерения или путем последующих подсчетов различают 2 метода измерения:

прямое измерение – это измерение, при котором искомое значение величины находят из опытных данных (измерение тока и т.д.);

косвенное измерение – это измерение, когда измеряется не сама величина, а величина, функционально связанная с ней, по значению которой и известной функциональной зависимости определяется измеряемая величина. Например, объем детали, определяемый по результатам измерения геометрических размеров.

1.1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ, ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

При всяком измерении неизбежны отклонения результатов измерения от истинного значения измеряемой величины, обусловленные различными причинами. Эти отклонения – погрешности измерений.

Погрешности классифицируют по причинам возникновения, условиям проведения измерений, характеру появления. В зависимости от причин возникновения различают погрешности измерения:

а) погрешность метода измерения – составляющая погрешность измерения, происходящая от несовершенства метода измерения (методическая погрешность);

б) инструментальная (аппаратурная) погрешность, составляющая погрешность измерения, зависящая от погрешности применяемого средства измерения (от его точности, класса прибора);

в) субъективная – составляющая общей погрешности измерения, обусловленная несовершенством органов чувств, а также небрежности в процессе измерения и фиксации результата.

1. <u>По условию проведения измерения</u>, т.е. зависимости результатов измерения от внешних условий окружающей среды. Различают основную и дополнительную погрешность.

- основная погрешность средства измерения, используемая в нормированных климатических условиях. Эта погрешность указывается в паспортных данных или в технических условиях на измерительный прибор;
- дополнительная погрешность – погрешность, вызванная отклонением условий измерения от номинальных, она может превосходить основную в несколько раз, для ее учета используют: графики, таблицы, формулы, которые даны в документации по эксплуатации прибора.

2. По характеру появления:

- систематическая погрешность измерения является результатом неправильной градуировки, калибровки прибора.
- случайная погрешность измерения – это составляющая погрешности, появление которой носит случайным характер.
- грубые погрешности.

3. По способу представления.

Многообразные причины появления погрешностей приводят к тому, что, например, многократно снятые характеристики средств измерений или серии однотипных приборов образуют некоторую область значений. В теории измерений для этого используется понятие полосы неопределенности, или полосы погрешностей средства измерения. Средняя линия такой полосы принимается за номинальную характеристику приборов, которая указывается в паспорте и используется для определения результатов измерения. Поэтому погрешность средства измерения есть разница между реальной и номинальной его характеристиками, т.е. является не число, а функция измеряемой величины.

$$Y_H = f(x).$$

Разница между реальной и номинальной характеристиками, найденная при заданном значении измеряемой величины, называется абсолютной погрешностью:

$$\Delta_Y = Y_P - Y_H .$$

Знак абсолютной погрешности принимается положительным, если реальная характеристика проходит выше номинальной. Абсолютная погрешность не может служить показателем точности измерений, поскольку точность измерения будет изменяться в зависимости от значения измеряемой величины. Поэтому для характеристики точности результатов измерений используется относительная погрешность, выражаемая в относительных единицах или процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta_Y}{Y}; \gamma = \frac{\Delta_Y}{Y} \cdot 100\% .$$

Но эта очень наглядная характеристика точности результата измерения не годится для нормирования погрешности средств измерений, так как при различных значениях Y принимает различные значения вплоть до $\gamma = \infty$ при Y = 0. Поэтому для указания и нормирования погрешности средств измерений используется еще одна разновидность погрешности, а именно так называемая *приведенная* погрешность. Она определяется как отношение абсолютной погрешности, выраженной в единицах входной Δ_X или выходной Δ_Y величин, к протяженности диапазона изменения соответственно входной $X_к$ или выходной Y_K величины прибора или преобразователя и выражается в относительных единицах или в процентах:

$$\gamma_{\text{П}P} = \frac{\Delta_X}{X_K} = \frac{\Delta_Y}{Y_K}.$$

Основное отличие приведенной погрешности от относительной погрешности состоит в том, что Δ_X или Δ_Y относится не к переменной текущей величине *x* или *y,* а к постоянной величине протяженности диапазона. Приведенная погрешность удобна тем, что для многих многопредельных систем измерения она имеет одно и то же значение, как для всех точек каждого диапазона, так и для всех его поддиапазонов, то есть ее удобно использовать для нормирования свойств систем измерения.

Понятия абсолютной, относительной и приведенной погрешностей существующими стандартами установлены только для средств измерений, но их удобно использовать и при характеристике погрешностей результатов измерения.

1.2. АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Аддитивные и мультипликативные погрешности используются для описания формы границ полосы погрешностей средства измерений. При поверке или градуировке средств измерений получают ряд значений входной величины x_t и ряд соответствующих им значений выходной величины y_i. Если эти данные нанести на график с координатами *x* и *y,* то полученные точки разместятся в границах некоторой полосы. В том случае, когда эти точки лежат в границах линий, параллельных друг другу, абсолютная погрешность средства измерений во всем его диапазоне измерений ограничена постоянным, не зависящим от текущего значения входной величины *x* пределом $\pm\ \Delta_0$, такая погрешность называется *аддитивной,* т. е. получаемой путем сложения, или *погрешностью нуля.* Это понятие одинаково применимо как к случайным, так и к систематическим погрешностям.

Примерами систематических аддитивных погрешностей являются погрешности от постороннего груза на чашке весов, от неточной установки прибора на нуль перед измерением, от термо-ЭДС в цепях постоянного тока и т. п. Для устранения таких погрешностей во многих средствах измерений предусмотрено механическое или электрическое устройство для установки нуля (корректор нуля).

Примерами случайных аддитивных погрешностей являются: погрешность от наводки переменной ЭДС на вход прибора, погрешности от тепловых шумов, трения в опорах подвижной части измерительного механизма, от ненадежного контакта при измерении сопротивления и т.п.

Если ширина полосы погрешностей возрастает пропорционально росту входной величины *x,* а при $x = 0$ также равна нулю, то такая погрешность называется *мультипликативной.* Мультипликативная погрешность, получаемая путем умножения, называется также *погрешностью чувствительности* вне зависимости от того, является ли погрешность случайной или систематической. Причинами возникновения мультипликативных погрешностей могут быть:

изменение коэффициента усиления усилителя, измерение жесткости мембраны датчика манометра или пружинки прибора, изменение спорного напряжения в цифровом вольтметре и т. д.

Погрешность квантования. Это специфическая разновидность погрешности, возникающая в цифровых приборах и дискретных преобразователях. При плавном изменении входной величины x, например, напряжения в пределах от 0 до 5 мВ, цифровой вольтметр с пределом 1000 мВ не может дать других показаний, кроме дискретных значений 0 - 1 - 2 - 3 - 4 и 5 мВ. Поэтому при возрастании x от 0 до 0,5 мВ прибор, если он хорошо отрегулирован, продолжает показывать $x = 0$. При превышении значения 0,5 мВ прибор дает показание $x = 1$ и сохраняет его до $x = 1{,}5$ мВ и т. д. Поэтому, хотя его номинальной характеристикой мы считаем прямую, его реальная характеристика представляет собой ступенчатую кривую. Текущая разность номинальной и реальной характеристик цифрового прибора составляет погрешность квантования. Границы полосы погрешности квантования сохраняют на всем протяжении постоянную ширину, т. е. по форме аналогична полосе аддитивной погрешности. Вследствие того, что измеряемая величина x случайным образом может принимать любые промежуточные значения, погрешность квантования также случайным образом принимает значения в интервале от $+\Delta_0$ до $-\Delta_0$. Поэтому погрешность квантования является инструментальной случайной аддитивной статической погрешностью, так как не зависит ни от текущего значения результата измерения величины x, ни от скорости изменения x во времени.

1.3. МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Различные средства измерений (измерительные приборы и преобразователи, датчики и т.д.) обладают погрешностями, характер проявления которых определяется формой границ полосы погрешности средств измерений (аддитивная, мультипликативная, или иная, более сложная). У каждого конкретного СИ имеются случайная и систематическая составляющие погрешности, причем их соотношение также может быть различным.

Для оценки погрешности, которую внесет данное СИ в конкретный результат, используют *нормированные* значения погрешности. Под нормированным значением понимаются погрешности, являющиеся предельными для данного типа СИ. При этом как систематическая, так и случайная составляющие погрешности отдельных экземпляров СИ одного и того же типа могут различаться, однако в целом для этого типа СИ погрешности не превосходят гарантированного значения. Таким образом, нормируются основная и дополнительная погрешности. Именно эти границы основной погрешности, а также коэффициентов влияния и заносятся в паспорт каждого экземпляра СИ.

Правила, согласно которым назначаются эти границы, значений погрешности и форма записи основываются на системе стандартов, обеспечивающих единство измерений.

1.4. КЛАСС ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Это характеристика, определяющая гарантированные границы значений основных и дополнительных погрешностей, а также другие свойства средств измерений, влияющих на точность. Соответствие погрешности СИ приписанному им классу точности во время эксплуатации проверяется при периодических поверках. Если погрешность оказывается меньше нормированных значений, то СИ продолжает эксплуатироваться, если нет, то подлежит ремонту и регулировке.

Основные способы установления пределов допускаемых погрешностей и обозначения классов точности средств измерений установлены ГОСТ 8.401—80. Основная погрешность СИ нормируется четырьмя различными способами.

Основное различие в способах нормирования обусловлено разным соотношением аддитивной и мультипликативной составляющих в погрешности СИ.

При чисто мультипликативной полосе погрешностей СИ абсолютная погрешность Δ_X возрастает прямо пропорционально текущему значению измеряемой величины. Поэтому *относительная* погрешность, $\gamma_S = \frac{\Delta_X}{X}$, т. е. погрешность *чувствительности* такого СИ, оказывается постоянной величиной при любом значении измеряемой величины и ее удобно использовать для нормирования погрешностей СИ и указания его класса точности.

Таким способом нормируются погрешности масштабных преобразователей (делителей напряжения, шунтов, измерительных трансформаторов тока и напряжения и т. п.). Их класс точности указывается в виде значения γ_S, выраженного в процентах. Граница относительной погрешности результата измерения $\gamma(x)$ в этом случае постоянна при любом x и равна значению γ_S, а абсолютная погрешность результата измерения рассчитывается по формуле:

$$\Delta(x) = \gamma_S \cdot x \ .$$

Если бы эти соотношения оставались справедливыми для всего диапазона возможных значений измеряемой величины x от 0 до $X_к$ ($X_к$ - предел диапазона измерений), то такие измерительные преобразователи были бы наиболее совершенными, так как они имели бы бесконечно широкий рабочий диапазон, т. е. обеспечивали бы с той же погрешностью измерение сколь угодно малых значений x.

Однако реально таких преобразователей не существует, так как невозможно создать преобразователь, полностью лишенный аддитивных погрешностей. Эти погрешности от шума, дрейфа, трения, наводок, вибраций и т. п. неизбежны в любых типах СИ. Поэтому для реальных СИ, погрешность которых нормируется лишь одним числом — погрешностью чувствительности γ_S - всегда указываются границы рабочего диапазона, в которых такая оценка остается приближенно справедливой.

При чисто аддитивной полосе погрешностей остается неизменной для любых значений x граница абсолютной погрешности нуля $\Delta(x) = \Delta_0 = const$. Но нормировать абсолютное значение Δ_0 неудобно, так как для многопредельных приборов оно будет различным для каждого поддиапазона, и в паспорте прибора пришлось бы перечислять эти значения для всех поддиапазонов.

Поэтому нормируют не абсолютное Δ_0, а приведенное значение этой погрешности: $\gamma_0 = \Delta_0/X_N$, где X_N — так называемое нормирующее значение измеряемой величины. Стандарт 8.401—80 определяет нормирующее значение измеряемой величины для приборов с равномерной или степенной шкалой. Если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, нормирующее значение X_N принимают равным верхнему пределу диапазона измерений. Если же нулевая отметка находится посредине шкалы, то X_N равно протяженности диапазона измерений. Например, для амперметра со шкалой от —30 до +60 А нормирующее значение $X_N = 60 — (—30) = 90$ А.

Значение приведенной погрешности γ_0, выраженное в процентах, используется для обозначения класса точности таких СИ. В этом случае текущее значение относительной погрешности $\gamma(x) = \Delta_0/x$ растет обратно пропорционально х и изменяется по гиперболе. Таким образом, относительная погрешность $\gamma(x)$ равна классу точности прибора γ_0 лишь на последней отметке шкалы (при $x = X_к$). Например, при $x = 0.1 \cdot X_к$ она в 10 раз больше γ_0, а при дальнейшем уменьшении x стремится к бесконечности.

При уменьшении измеряемой величины x до значения абсолютной погрешности нуля Δ_0 относительная погрешность результата измерения достигает $\gamma(x)=\Delta_0/x=\Delta_0/\Delta_0=1=100\%$. Такое значение измеряемой величины, когда $x = \Delta_0$ и $\gamma(x)=100\%$, называется *порогом чувствительности средства измерения*.

Полный диапазон D_n измеряемых величин для любого средства измерения ограничивается снизу порогом чувствительности, а сверху — пределом измерений. Так как в области малых значений x погрешность измерений очень велика, то *рабочий диапазон* D_p ограничивают снизу таким значением x, где относительная погрешность измерений $\gamma(x)$ не превосходит еще некоторого заранее заданного значения γ_S равного, например, 4, 10 или 20%. Таким образом, рабочий диапазон назначается произвольно и может составлять только некоторую часть полного диапазона средства измерения. В начальной части шкалы измерения недопустимы, в этом проявляется отрицательное влияние аддитивной погрешности, не позволяющее использовать один и тот же преобразователь для измерения как больших, так и малых измеряемых величин.

При одновременном присутствии аддитивной и мультипликативной составляющих полоса погрешностей имеет трапецеидальную форму. Текущее значение абсолютной погрешности $\Delta(x)$ в функции измеряемой величины x описывается соотношением:

$$\Delta(x) = \Delta_0 + \gamma_S \cdot x,$$

где Δ_0 - аддитивная, а $\gamma_S \cdot x$ - мультипликативная составляющие абсолютной погрешности.

Значение приведенной погрешности определяется как:

$$\gamma_{ПР}(x) = \gamma_H + \gamma_S \cdot \frac{x}{X_H},$$

где $\gamma_H = \Delta_0/X_K$ – приведенное значение погрешности в начале диапазона

Таким образом, при наличии у СИ и аддитивной, и мультипликативной составляющих погрешности его приведенная погрешность линейно возрастает от γ_H начале диапазона (при $x = 0$) до значения $\gamma_K = \gamma_H + \gamma_S$ в конце диапазона (при $x = X_K$).

Относительная погрешность результата измерения составляет:

$$\gamma_X = \gamma_S + \gamma_H \cdot \frac{X_K}{x},$$

т. е. при $x — X_к$ она будет $\gamma(x) = \gamma_H + \gamma_S = \gamma_K$, и по мере уменьшения x возрастает до бесконечности. Основное отличие $\gamma(x)$ от чисто аддитивной погрешности состоит в том, что заметное возрастание $\gamma(x)$ начинается тем позже, чем меньше γ_H по сравнению с γ_S.

По мере увеличения отношения γ_S/γ_H, расширяется рабочий диапазон СИ за счет. уменьшения Δ_0 и приближения полосы погрешностей к чисто мультипликативной полосе.

Так, например, если заданное значение погрешности γ_S, ограничивающее нижнюю границу рабочего диапазона, $\gamma_H = 4\%$, то при $\gamma_S/\gamma_H = 0$, т. е. при $\gamma_S = 0$ и чисто аддитивной полосе погрешностей, рабочий диапазон будет двукратным (от 50 до 100%). При $\gamma_S/\gamma_H = 3$ он становится уже пятикратным (от 20 до 100%), а при $\gamma_S/\gamma_H = 20$ — становится двадцатикратным (от 5 до 100%). В последнем случае в интервале от 100 до 10% диапазона прибора погрешность результатов измерения почти не изменяется, т. е. большие и малые значения x измеряются с одной и той же относительной погрешностью. Такими свойствами обладают высокоточные потенциометры постоянного тока, цифровые вольтметры и другие высокоточные приборы. Формальным отличительным признаком для таких средств измерения является то, что их класс точности обозначается двумя числами, записываемыми через косую черту, т.е. в виде условной дроби γ_K/γ_H, в числителе которой указывается (в процентах) приведенная погрешность γ_K в конце диапазона измерений, а в знаменателе — приведенная погрешность γ_H в нуле диапазона.

Специальные формулы нормирования погрешностей средств измерений. Кроме перечисленных разновидностей нормирования погрешностей средств измерений (путем указания классов точности в виде γ_S, γ_0, γ_K/γ_H), ГОСТ 8.401—80 разрешает использовать так называемые специальные формулы нормирования погрешностей. Дело заключается в том, что некоторые средства измерения не могут быть нормированы описанными выше способами, так как имеют сложный вид полосы погрешностей.

Это, например, цифровые частотомеры, погрешность которых зависит не только от измеряемой величины *x,* но и от времени *T,* отводимого для измерения этой частоты. Мосты для измерения сопротивлений отличаются тем, что имеют не только нижний порог чувствительности (т. е. такое малое измеряемое сопротивление, когда погрешность достигает 100%, например, из-за неопределенности контактных сопротивлений), но и верхний порог чувствительности (когда погрешность при измерении очень больших сопротивлений вновь достигает 100%, например, из-за приближения измеряемого сопротивления к сопротивлению изоляции между зажимами самого моста). В этом случае погрешность результатов измерения описывается трехчленной формулой вида:

$$\gamma(x) = \Delta_0 / x + \gamma_0 + x / \Delta_\infty;$$

где Δ_∞, и Δ_∞ - верхний и нижний пороги измеряемых сопротивлений.

Во всех подобных случаях необходимо пользоваться для вычисления погрешности результата измерения специальными формулами, приводимыми в документации на соответствующий прибор.

Обозначения классов точности средств измерений.

Согласно ГОСТ 8.401—80 для указания нормированных значений погрешности чувствительности γ_S, приведенной аддитивной погрешности γ_0, приведенных погрешностей в начале γ_H, и конце γ_K диапазона измерений не могут использоваться произвольные числа. Выраженные в процентах, они могут иметь значения 6; 4; 2,5; 1,5; 1,0; 0,5; 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01; 0,005; 0,002; 0,001 и т. д. Значение класса точности прибора маркируется на его шкале. Для того чтобы различить, какая из погрешностей обозначена в качестве класса точности, используются следующие условные обозначения.

Если класс точности прибора установлен по значению погрешности чувствительности γ_S, т. е. форма полосы погрешности условно принята чисто мультипликативной, обозначаемое на шкале значение класса точности обводится кружком.

У большинства приборов полоса погрешностей принята аддитивной, и прибор нормируется приведенной погрешностью нуля γ_0. Класс точности указывается без каких-либо подчеркиваний ,например 1,5.

На приборах с резко неравномерной шкалой, например омметрах, класс точности прибора указывается в долях от длины шкалы и обозначается $\vee$.

Обозначение класса точности в виде, например 0.02/0.01, указывает, что погрешность прибора нормирована по двучленной формуле с γ_H =0,01% и γ_K =0,02%.

Таким образом, обозначение класса прибора дает достаточно полную информацию для вычисления приближенной оценки погрешностей результатов измерения.

1.5. ОЦЕНКА ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ ПО ПАСПОРТНЫМ ДАННЫМ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ

Результат измерения должен иметь оценку-его интервал неопределенности, т.е. степень достоверности. В любой форме представления результатов измерений сообщение о любом результате измерений обязательно должно сопровождаться указанием его погрешности.

Погрешность результата прямого однократного измерения зависит от многих факторов, но, в первую очередь, определяется, естественно, погрешностью используемых средств измерений. Поэтому в первом приближении погрешность результата измерения можно принять равной погрешности, которой в данной точке диапазона измерений характеризуется используемое средство измерений.

Так как погрешности средств измерений изменяются в диапазоне, то вычисление должно производиться по формулам, соответствующим формам границ полосы погрешностей. Вычисляться должна как абсолютная, так и относительная погрешности результата измерения, так как первая из них нужна для округления результата и его правильной записи, а вторая — для однозначной сравнительной характеристики его точности.

Для разных характеристик нормирования погрешностей СИ эти вычисления производятся по-разному.

1. Класс точности прибора указан в виде одного числа γ_S, заключенного в кружок. Тогда относительная погрешность результата (в процентах) $\gamma(x) = \gamma_S$, абсолютная его погрешность :

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_S \cdot x}{100}.$$

2. Класс точности прибора указан одним числом γ_0 (без кружка). Тогда абсолютная погрешность результата измерения вычисляется как:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_{00} \cdot X_K}{100} \;;$$

где $X_к$ — предел измерений, на котором оно производилось, а относительная погрешность измерения (в процентах) находится по формуле:

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \gamma_0 \cdot \frac{X_K}{x};$$

т. е. в этом случае при измерении, кроме отсчета измеряемой величины *x,* обязательно должен быть зафиксирован и предел измерений $X_к$, иначе впоследствии нельзя будет вычислить погрешность результата:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_S \cdot x}{100}.$$

3. Класс точности прибора указан двумя числами в виде γ_K / γ_H. В этом случае удобнее вычислить относительную погрешность результата по формуле:

$$\gamma(x) = \gamma_K + \gamma_H \cdot (\frac{X_K}{x} - 1),$$

затем найти абсолютную погрешность как:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma(x) \cdot x}{100}.$$

При использовании этих формул полезно помнить, что в формулы для определения γ(x) значения γ_S, γ_0, γ_H и γ_K подставляются в процентах, поэтому и относительная погрешность результата измерения получается также в процентах.

Пример. На вольтметре класса точности 2.5, с пределом измерений 300 В был получен отсчет измеряемого напряжения x=267.5 В. Требуется провести оценку погрешности результата измерения.

Находят абсолютную погрешность:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_0 X_K}{100} = \frac{2.5 \cdot 300}{100} = 7.5B;$$

относительную погрешность определяют по уравнению:

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} \cdot 100 = \frac{7.5}{267.5} \cdot 100 = 2.81\% \approx 2.8\%.$$

Таким образом, окончательно получаем: измерение проведено с относительной погрешностью γ(x)=2.8%. Измеренное напряжение x=(268.5±7.5)В.

2. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Несовершенство средств и методов измерений, недостаточная тщательность проведения измерений и обработки их результатов, воздействие внешних дестабилизирующих факторов, длительность измерений не позволяют получать при измерении истинного значения измеряемой физической величины. В большинстве случаев достаточно знать действительное значение измеряемой величины – значение физической величины, найденное экспериментальным путем и настолько приближающееся к истинному значению, что для поставленных целей может быть использовано вместо него. Истинное значение физической величины – значение, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношении соответствующее свойство объекта измерения. Для практики очень важно знать погрешность результата измерения – алгебраическую разность между полученным при измерении и действительным значением измеряемой величины.

Существующие понятия в теории измерения такие как, «действительное значение измеряемой величины», «истинное значение физической величины», «погрешность результата измерения» являются следствиями постулатов теории измерения. Современная теория измерения исходит из трех основных постулатов:

1) существует истинное значение физической величины, которую измеряют;
2) истинное значение физической величины постоянно;
3) истинное значение физической величины определить невозможно.

В метрологическом отношении измерения считаются тем лучшими, чем меньше их погрешности. Однако полученные при измерении результаты должны быть воспроизводимы, так как в противном случае результаты измерений теряют объективный характер. Как правило, погрешность измерения имеет систематическую и случайную составляющие. При повторных измерениях одной и той же величины в одних и тех же условиях результаты, в случае наличия случайной составляющей погрешности измерения, оказываются различными. Случайная составляющая погрешности приводит к неоднозначности результата измерения и создает трудности в их интерпретации. Для устранения неоднозначности случайные погрешности рассматриваются как случайные величины. Методы математической статистики позволяют оценить погрешности результатов измерений и охарактеризовать неопределенность полученных результатов измерения. Неопределенность результата измерения характеризуют указанием границ погрешности результата измерения. Если эти границы находят как отвечающие некоторой величине, то их называют доверительными границами погрешности результата измерения или доверительной погрешностью.

Обработку результатов многократных измерений следует начинать с проверки на отсутствие промахов (грубых погрешностей). Промах - это результат X_n отдельного наблюдения, входящего в ряд из n наблюдений, который для данных условий измерений резко отличается от остальных результатов этого ряда. Если оператор в ходе измерения обнаруживает такой результат и достоверно находит его причину, он вправе его отбросить и провести (при необходимости) дополнительное наблюдение взамен отброшенного.

При обработке уже имеющихся результатов наблюдений произвольно отбрасывать отдельные результаты нельзя, так как это может привести к фиктивному повышению точности результата измерения. Поэтому применяют следующую процедуру. - вычисляют среднее арифметическое Хср . Затем вычисляют оценку среднеквадратического отклонения σ(x) (СКО) результата наблюдения.

По формуле находят отклонение ν_n предполагаемого промаха X_n

от Хср.

$$\nu_n = \left| X_n - X_{cp} \right| .$$

По числу всех наблюдений n (включая X_n) и принятому для измерения значению доверительной вероятности P (обычноP=0.95) по таблице находят $Z(P,n) = 1,96$ – значение Лапласа - нормированное выборочное отклонение нормального распределения.

Если $vn < Z(P,n)\cdot \sigma(x)$, то наблюдение X_n не является промахом; если $vn \geq Z(P,n)\cdot$

x), то X_n - промах, подлежащий исключению. После исключения X_n
повторяют процедуру определения Хср и $\sigma(x)$ для оставшегося ряда результатов отклонений от нового значения Хср. За результат измерения принимают среднее арифметическое Хср результатов наблюдений X_n.

Последовательность обработки результатов многократных измерений рассмотрим на следующем примере.

Измерена концентрация активного вещества в шести пробах продукта, получаемого в периодическом химическом процессе. Получены следующие результаты (г/л): 4,45; 4,40; 4,42; 4,45; 4,38; 4,42. Предполагая, что результаты измерений имеют нормальное распределение, требуется:

1) найти точечные несмешанные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения;
2) записать плотность вероятности и функцию распределения СВ Х (концентрация вещества);
3) найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание концентрации с заданной доверительной вероятностью $(1-\alpha) = 0,95$, считая σ неизвестной;
4) найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное среднее квадратичное отклонение σ с заданной доверительной вероятностью $(1-\alpha) = 0,95$;

5) принимая доверительную вероятность Р = 1-α = 0,99, найти предельную погрешность, с которой $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ оценивает математическое ожидание *a* концентрации;

6) найти минимальное число проб раствора, концентрации которых надо измерить, чтобы с доверительной вероятностью (1-α) = 0,95 можно было бы утверждать, что, принимая среднее арифметическое $\bar{x}$ за математическое ожидание концентрации, мы совершаем погрешность, не превышающую $\varepsilon = 0{,}5\sigma$, считая $\sigma = S$;

7) вычислить P(4,41 < x < 4.43).

Решение:

1) $\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 4.42$ (г/л)

и $\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})}{6-1}} = 0.028$ г/л.

2) Следовательно, плотность вероятности СВ X (концентрация) имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{0.028\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-4.42)^2}{0.016}\right).$$

Функция распределения концентрации имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{0.028\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(x-4.42)^2}{0.016}\right)dx .$$

Используя нормированную функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

можно записать

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-4.42}{0.028}\right).$$

3) Найдем интервальные оценки параметров нормального распределения концентрации. Для нахождения доверительного интервала, накрывающего математическое ожидание, найдем по таблице квантилей распределение Стьюдента по заданной доверительной вероятности Р = 1-α = 0,95 и числу степеней свободы ν = n-1 = 6-1 = 5 квантиль $t_{\frac{\alpha}{2};\nu} = t_{0.025;5} = 2.571$.

Вычислим предельную погрешность интервального оценивания математического ожидания:

$$\varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2};\nu} \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.571 \frac{0.028}{\sqrt{6}} = 0.029 \text{ (г/л)}.$$

Искомый доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание концентрации вещества с заданной доверительной вероятностью Р = 0,95, равен:

$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$;

4,42 - 0,029 < a < 4,42 + 0,029;

4,391 < a < 4.449.

Смысл полученного результата:

если будет произведено достаточно большое число выборок по 6 пробам из бесконечно большой по численности партии химического продукта, то в 95% случаев из них доверительный интервал накроет неизвестное математическое ожидание и только в 5% математическое ожидание может выйти за границы доверительного интервала.

4) Для нахождения доверительного интервала, накрывающего неизвестное среднее квадратическое отклонение σ с заданной доверительной вероятностью (1-α) = 0,95, найдем по заданной доверительной вероятности 0,95 и числу степеней свободы

ν = n-1= 6-1 = 5 два числа γ_1 и γ_2, т.е. γ_1 = 0,624 и γ_2 = 2,45. Искомый доверительный интервал равен:

$\gamma_1 S < \sigma < \gamma_2 S$;

0.624*0.028 < σ < 2.45*0.028;

0.017 < σ < 0.068.

5) Если задать доверительную вероятность Р = 1-α = 0,99, то предельная погрешность, с которой среднее арифметическое емкости конденсаторов $\bar{x}$ оценивает неизвестное математическое ожидание, равна:

$$\varepsilon = t_{\frac{\alpha}{2};\nu} \frac{S}{\sqrt{n}} = t_{0.005} \frac{0.028}{\sqrt{6}} = 4.032 \frac{0.028}{\sqrt{6}} = 0.046.$$

6) Найдем минимальное число конденсаторов, емкость которых необходимо измерить, чтобы с доверительной вероятностью Р = 1-α = 0,95 можно было бы утверждать, что, принимая среднее арифметическое $\bar{x}$ за математическое ожидание концентрации, мы совершаем погрешность, не превышающую 0,2σ = 0,0056, считая σ известным и равны 0,028 .

Искомый объем выборки найдем из соотношения:

$$n = \frac{\sigma^2 u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{\varepsilon^2} = \frac{0.028^2 (1.96)^2}{(0.0056)^2} \geq 96 \text{ проб.}$$

7) $P(4.41 < X < 4.43) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{4.43 - 4.42}{0.028}\right) - \Phi\left(\frac{4.41 - 4.42}{0.028}\right)\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(0.357) - \Phi(-0.357)\right] = \Phi(0.357) = 0.279.$$

2.1. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ТЕМЕ «ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ»

Ниже приводятся результаты измерений некоторой физической величины, которые будут рассматриваться как n реализаций случайной величины X. Предполагая, что СВ(случайная величина) X имеет нормальное распределение, требуется выполнить следующее:

1. Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания *a* и среднего квадратического отклонения σ.
2. Записать плотность вероятности и функцию распределения СВ X.

3. Найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание СВ X с заданной доверительной вероятностью Р = 1-α = 0,95, считая σ неизвестным.
4. Найти доверительный интервал, накрывающий среднее квадратическое отклонение σ с заданной вероятностью Р = 1-α = 0,95.
5. Принимая Р = 1-α = 0,99, найти предельную погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает неизвестное математическое ожидание СВ X.
6. Найти минимальное число измерений, которое нужно произвести, чтобы с доверительной вероятностью Р = 1-α = 0,95 можно было бы утверждать, что, принимая М (X) = $\bar{x}$, мы совершаем погрешность, не превышающую ε = 0,2S.
7. Вычислить:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \bar{x}}{S}\right)\right].$$

2.2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ТЕМЕ «ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ»

СВ X – сопротивление резистора в кОм.

№ резистора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Вариант № 1 α =5.5 , β=5.9	4,8	6,2	6,0	5,9	5,6	4,9	6,0	6,1	5,5	5,8	5,7	5,1	5,5	6,2	5,4
Вариант № 2 α =4.9 , β=5.1	5,3	5,2	5,4	5,7	5,62	4,3	5,3	5,1	5,4	5,2	5,6	5,2	5,8	4,9	4,4
Вариант № 3 α =33.2, β=33.4	33.4	35,4	32.4	33.1	33.2	33.2	33.4	33.4	33.6	33.3	33.3	32.9	33..0	33.2	33.1
Вариант № 4 α =44.6, β=44.9	45.6	45.4	44.2	44.1	44.1	44.2	44.7	44.2	44.1	44.5	44.8	44.9	44.2	40.0	44.2
Вариант № 5 α =5.3 , β=5.8	4,8	6,2	6,0	5,9	5,6	4,9	6,0	6,1	5,5	5,8	5,7	5,1	5,5	6,2	5,4

Вариант № 6 $\alpha = 4.9$, $\beta = 5.7$	5,3	5,2	5,4	5,7	5,62	4,3	5,3	5,1	5,4	5,2	5,6	5,2	5,8	4,9	4,4
Вариант № 7 $\alpha = 33.25$, $\beta = 33.48$	33.4	35,4	32.4	33.1	33.2	33.2	33.4	33.4	33.6	33.3	33.3	32.9	33..0	33.2	33.1
Вариант № 8 $\alpha = 44.35$, $\beta = 45.1$	45.6	45.4	44.2	44.1	44.1	44.2	44.7	44.2	44.1	44.5	44.8	44.9	44.2	40.0	44.2

СВ X_i – еженедельные затраты времени (в часах) на посещение библиотеки, определяемые путем анкетирования:

i – номер анкеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вариант № 9 $\alpha = 4.35$, $\beta = 8.1$	2,2	4,5	4,8	5,0	3,0	6,0	12,0	8,0	14,2	15,0	2,0	1,0
Вариант № 10 $\alpha = 6.35$, $\beta = 9.4$	2,4	4,5	4,8	2,1	3,0	6,0	9,0	8,0	14,2	15,0	2,0	11,0
Вариант № 11 $\alpha = 5.3$, $\beta = 9.0$	2,4	4,5	4,8	2,1	3,0	6,0	9,0	8,0	14,2	15,0	2,0	11,0
Вариант № 12 $\alpha = 5.3$, $\beta = 9.5$	2,4	4,5	4,8	2,1	5,0	6,0	9,0	8,0	10,2	14,0	2,0	11,0
Вариант № 13 $\alpha = 5.3$, $\beta = 9.0$	2,8	4,9	4,4	3,4	3,7	6,8	9,5	8,4	14,6	14,3	4,0	11,0
Вариант № 14 $\alpha = 6.0$, $\beta = 10.0$	2,8	4,9	4,4	3,4	3,7	6,8	9,5	8,4	14,6	14,3	4,0	11,0
Вариант № 15 $\alpha = 5.9$, $\beta = 9.8$	2,4	4,5	4,8	2,1	3,0	6,0	9,0	8,0	14,2	15,0	2,0	11,0
Вариант № 16 $\alpha = 4.35$, $\beta = 9.1$	2,2	4,5	4,8	7,0	3,0	6,0	12,0	8,0	14,2	15,5	2,0	1,0
Вариант № 17 $\alpha = 5.0$, $\beta = 9.8$	2,4	4,5	4,8	2,1	5,0	6,0	9,0	8,0	10,2	14,0	2,0	11,0

СВ X_i – индуктивность катушки в мГн.

i – номер катушки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вариант № 18 $\alpha = 8.343$, $\beta = 8.346$	8,345	8,346	8,348	8,342	8,343	8,345	8,343	8,347	8,344	8,347
Вариант № 19 $\alpha = 5.38$, $\beta = 5.5$	5,3	5,2	5,4	5,7	5,62	4,3	5,3	5,1	5,4	5,2
Вариант № 20 $\alpha = 33.2$, $\beta = 33.4$	33.4	35,4	32.4	33.1	33.2	33.2	33.4	33.4	33.6	33.3

Критерий согласия $\chi 2$

По виду гистограммы, полигона частностей или из каких-либо других соображений удается выдвинуть гипотезу о множестве функций определенного вида (нормальных, показательных, биномиальных и т. п.), к которому может принадлежать функция распределения исследуемой выборки X_i случайных чисел. Производить проверку согласия эмпирической функции распределения F*(x) с гипотетической функцией распределения F(x). позволяет критерий Пирсона χ^2.

Для этого придерживаются следующей последовательности действий:

1) на основании гипотетической функции F(x) вычисляют вероятность попадания СВ X в частичные интервалы $[x_{i-1}, x_i[$:

$p_i = P(x_{i-1} \le X < x_x) = F(x_i) - F(x_{i-1})$; i =1, 2, ..., k;

2) умножая полученные вероятности p_i на объем выборки n, получают теоретические частоты np_i частичных интервалов $[x_{i-1}, x_i[$,т.е. частоты, которые следует ожидать, если гипотеза справедлива;

3) вычисляют выборочную статистику (критерий) χ^2:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Можно показать, что если гипотеза верна, то при $n \to \infty$ распределение выборочной статистики, независимо от вида функции F(x), стремится к распределению χ^2 с ν = k-r-1 степенями свободы (k – число частичных интервалов, r - число параметров гипотетической функции F(x), оцениваемых по данным выборки).

Критерий χ^2 сконструирован таким образом, что чем ближе к нулю наблюдаемое значение критерия χ^2, тем вероятнее, что гипотеза справедлива. Поэтому для проведения гипотезы применяется критерий χ^2 с правосторонней критической областью. Необходимо найти по таблицам квантилей χ^2 –

распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы ν = k-r-1 критическое значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$, удовлетворяющее условию $p\left(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\nu}\right) = \alpha$.

Если $\chi^2_{\text{набл.}} \geq \chi^2_{\alpha,\nu}$, то считается, что гипотетическая функция F(x) не согласуется с результатами эксперимента. Если $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\alpha,\nu}$, то считается, что гипотетическая функция F(x) согласуется с результатами эксперимента.

Замечание. При применении критерия χ^2 необходимо, чтобы в каждом частичном интервале было не менее 5 элементов. Если число элементов (частота) меньше 5,то рекомендуется объединять такие частичные интервалы с соседними.

2.3. ДОМАШНЯЯ РАБОТА

Каждому студенту в соответствии со своим номером варианта требуется:

1) записать исходную выборку в виде таблицы;
2) построить статистический ряд;
3) записать сгруппированную выборку в виде таблицы;
4) построить график эмпирической функции распределения;
5) построить гистограмму;
6) проверить гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины X и записать вычисления в таблицу;
7) построить график плотности случайной величины X.

При выполнении работы принять уровень значимости α = 0,05, отрезок [24,5; 54,5], число интервалов k = 10. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице.

i – му варианту соответствуют элементы выборки, расположенные в 15 – ти следующих строчках таблицы, начиная с i – й (объем выборки при этом n = 150).

Таблица 1

Исходные данные для выполнения домашней работы

1	48	39	43	44	34	34	32	43	40	46
2	25	31	34	49	39	37	45	49	31	49

3	43	46	34	35	42	32	41	34	42	42
4	38	40	46	47	34	42	38	40	38	36
5	30	43	41	40	40	35	35	41	38	45
6	37	42	38	36	44	39	32	48	43	39
7	43	30	32	36	42	34	49	48	49	50
8	37	30	44	48	44	35	45	34	33	41
9	43	45	50	34	33	39	41	39	46	31
10	40	52	44	39	35	45	33	42	42	36
11	44	51	45	39	34	44	40	37	43	32

Продолжение таблицы 1

12	33	42	40	35	37	43	48	48	50	32
13	40	48	45	43	36	36	42	40	37	30
14	44	50	46	39	41	48	44	42	36	51
15	44	50	47	37	33	34	42	43	43	47
16	33	48	38	42	45	32	34	44	39	45
17	48	26	31	34	38	36	46	49	40	48
18	42	47	35	34	41	33	41	35	43	42
19	39	37	47	47	33	42	37	39	39	37
20	43	41	30	39	38	36	36	34	42	46
21	39	44	37	35	43	38	33	47	45	38
22	37	48	38	52	40	45	44	42	38	40
23	44	46	37	34	41	37	41	39	30	38
24	32	41	48	36	51	36	33	39	45	40
25	34	41	38	34	33	27	51	45	27	38
26	42	37	46	41	47	36	30	45	41	40
27	37	37	39	42	48	41	36	39	33	47
28	43	49	27	31	41	46	40	36	36	42
29	41	46	33	37	47	35	31	29	30	36

30	48	38	37	34	40	34	36	50	48	39
31	30	38	43	41	44	45	38	37	46	50
32	41	48	41	43	47	37	42	34	32	44
33	37	48	46	41	41	37	37	48	49	46
34	38	44	50	37	47	27	48	37	46	38
35	48	47	38	52	34	36	34	41	41	32
36	31	43	34	46	37	40	41	39	32	42
37	47	33	51	41	40	45	37	36	27	36
38	37	42	46	35	34	38	45	36	20	40
39	34	48	30	51	33	41	44	42	39	39

Окончание таблицы 1

40	45	45	41	40	36	27	50	44	41	48
41	36	36	32	32	36	49	27	45	30	35
42	40	38	45	40	40	50	42	37	50	39
43	43	38	30	59	42	41	33	42	38	44
44	44	41	47	52	51	38	50	39	50	48
45	49	43	52	50	30	30	26	50	27	49
46	27	49	46	39	47	26	49	52	29	44
47	51	53	48	49	53	45	27	43	48	44

2.3.1. Порядок выполнения работы

1. По данной выборке объема n строится статистический ряд

y_1	y_2	...	y_e
n_1	n_2	...	n_e

где $y_1 < y_2 < ... < y_e$ элементы выборки, записанные в порядке возрастания, n_i – частоты появления одинаковых значений СВ X.

2. На основе статистического ряда строится сгруппированная выборка. Для этого задается определенный отрезок [*а, в*], внутри которого

расположены все элементы исследуемой выборки, число интервалов k, на которое делится этот отрезок. Находятся длины интервалов $h = \frac{b-a}{k}$, концы интервалов $x_i = a + (i-1)h$, середины интервалов $z_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ и соответствующие эмпирические частоты m_i (m_i – число элементов выборки, попавших в i – й интервал), i = 1, 2, ... k. Результаты вычислений заносятся в таблицу:

Таблица 2

Результаты вычислений

Номер интервала	Границы интервала	Середины интервалов	Эмпирические частоты
i	x_i, x_{i+1}	z_i	m_i
1 2 . . . k			

3. Строится график эмпирической функции распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le z_1 \\ \frac{1}{n}(m_1 + ... + m_i), \text{ при } & z_i < x \le z_{i+1}, \ (i = 1,2,...,k-1). \\ 1 & x > z_k \end{cases}$$

4. Строится гистограмма – фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $[x_i, x_{i+1}]$ и высотами $\frac{m_i}{nh}$.

5. Находится выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i z_i$, исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i \left(z_i - \bar{x} \right)^2$; исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2}$.
6. Проверяется гипотеза о нормальном распределении СВ X с математическим ожиданием $a = \bar{x}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = S$ с помощью критерия χ^2 Пирсона.

Для этого вычисляют теоретические частоты попадания СВ X в i – й интервал np_i,

где $p_i = p\{x_i \le X < x_{i+1}\} = \Phi\left(\frac{x_{i+-} - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S}\right)$.

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ находятся по таблице.

Если при некотором i эмпирическая или теоретическая частота меньше 5, тогда этот интервал объединяют с соседним, при этом теоретические и эмпирические частоты суммируются. После объединения получают r интервалов (r ≤ k).

Составляется статистика χ^2 Пирсона:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^{P} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Затем по закону уровня значимости α и числу степеней свободы ν = r-3 находится критическая точка $\chi^2_{\alpha,\nu}$ по таблице квантилей распределения χ^2. Если $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\alpha,\nu}$, то гипотеза отвергается. Если $\chi^2_{\text{набл.}} \le \chi^2_{\alpha,\nu}$, гипотеза принимается.

7. Строится график плотности вероятности $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}$ случайной величины X, распределенной по нормальному закону.

2.3.2. Пример выполнения работы

Таблица 3.

Исходные данные для выполнения варианта задания

№	Исходные данные									
1	37	30	44	48	44	35	45	34	33	41
2	43	45	50	34	33	39	41	39	46	31
3	40	52	44	39	35	45	33	42	42	36
4	44	51	45	39	34	44	40	37	43	32
5	33	42	40	35	37	43	48	48	50	32
6	40	48	45	43	36	36	42	40	37	30
7	44	50	46	39	41	48	44	42	36	51
8	44	50	47	37	33	34	42	43	43	47
9	33	48	38	42	45	32	34	44	39	45
10	48	26	31	34	38	36	46	49	40	48
11	42	47	35	34	41	33	41	35	43	42
12	39	37	47	47	33	42	37	39	39	37
13	43	41	30	39	38	36	36	34	42	46
14	39	44	37	35	43	38	33	47	45	38
15	37	48	38	52	40	45	44	42	38	40

Для данной выборки объема n = 150 построим статистический ряд, где $Y_1<Y_2<...<Y_m$ – элементы выборки, записанные в порядке возрастания, n_i – число повторений элемента Y_i в выборке.

26	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	3	2	3	9	8	6	7	10	7	11	8

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
6	12	9	11	9	4	6	9	1	4	2	2

Таблица 4

Результаты вычислений по заданию

№	Граница интервала x_i; x_{i+1}	Середины интервалов Z_i	Эмпирические частоты m_i
1	24.5 27.5	26	$\left.\begin{matrix}1\\3\\14\end{matrix}\right\}18$
2	27.5 30.5	29	
3	30.5 33.5	32	21
4	33.5 36.5	35	28
5	36.5 39.5	38	26
6	39.5 42.5	41	29
7	42.5 45.5	44	19
8	45.5 48.5	47	$\left.\begin{matrix}7\\2\end{matrix}\right\}9$
9	48.5 51.5	50	
10	51.5 54.5	53	

X = 40.34 X_H = 2.465 k = 4

S = 5.51 X_H (α, k) = 9.5 r = 7

Так как $X_Н$ (α, k) $\geq$ $X_Н$, то гипотеза о нормальном распределении принимается, результаты занесены в таблицу 5.

Таблица 5

Результаты вычислений

I	x_i; x_{i+1}	m_i	p_i	np_i	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	24.5 27.5	1 3 }18	0.0078	1.17 3.12 }15.81		
2	27.5 30.5	14	0.0208	11.52	4.49	0.302
3	30.5 33.5	21	0.0768	20.64		
4	33.5 36.5	28	0.1376	29.97	0.12	0.005
5	36.5 39.5	26	0.1998	31.69	3.88	0.129
6	39.5 42.5	29	0.2113	25.81	32.43	1.043
7	42.5 45.5	19	0.1721	16.02	10.14	0.392
8	45.5 48.5	7 }9 2	0.1068	7.15 }9.62 2.47	8.88	0.554
9	48.5 51.5		0.0477			
10	51.5 54.5		0.0165		0.39	0.04

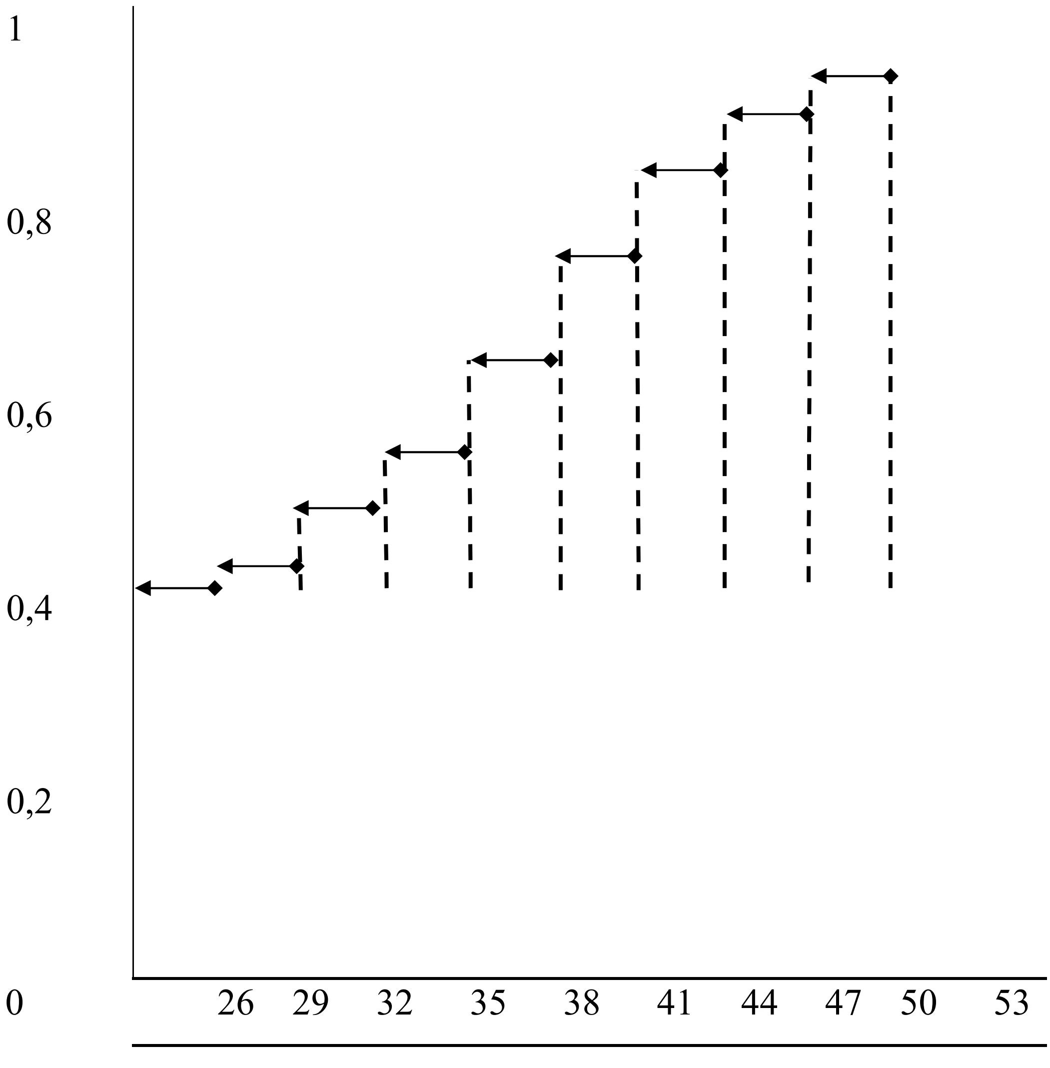

Рис. 1 Эмпирическая функция распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le z_1 \\ \frac{1}{n}(m_1 + \ldots + m_i) \quad \text{при} & z_i < x \le z_{i+1}\,, \quad (i = 1,2,\ldots,k-1). \\ 1 & x > z_k \end{cases}$$

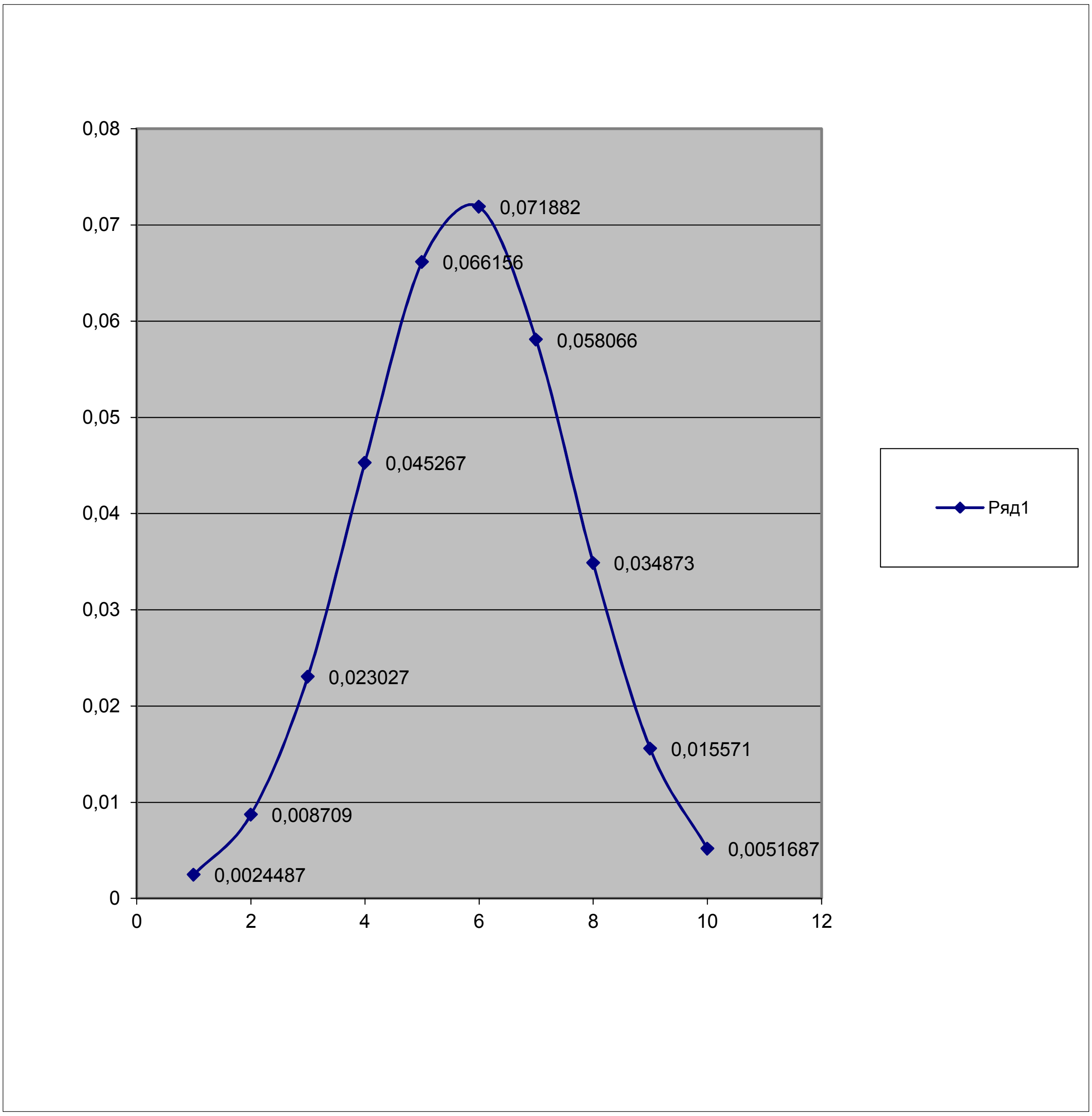

Рис. 2 График плотности вероятности СВ X.

Варианты заданий.

№ варианта	Объем выборки, n
1	240
2	260
3	170
4	180
5	190
6	200
7	210
8	220
9	260
10	280
11	300
12	320
13	340
14	360
15	380
16	400
17	420
18	440
19	460
20	160

Список литературы

1. Новицкий,П.В. Оценка погрешностей результатов измерений/ П.В. Новицкий, И.А. Зограф.- Л.: Энергоатомиздат, 1991.

2. Рабинович, С.Г. Погрешность измерений/ С.Г. Рабинович.- Л.: Энергия, 1978.

3. Сергеев, А.Г., Метрология/ А.Г. Сергеев, В.В. Крохин.- М.: Логос, 2000.

Учебное издание

Царев Юрий Валерьевич
Тростин Александр Николаевич

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие для студентов дневной формы обучения по направлению подготовки 270301 « Стандартизация и метрология»

Подписано в печать 28. 02.2014 Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.
Усл. печ. л. 2,62. Уч. -изд. л. 2,7. Тираж 100 экз. Заказ
ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»
Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВПО «ИГХТУ»
153000, г. Иваново, пр. Шереметевский, 7