Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

А.Э. Козловский

РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Учебное пособие

по сопротивлению материалов

Иваново 2015

УДК 539.3

Козловский А.Э. Расчёт элементов конструкций на растяжение и сжатие: учеб.-метод. пособие / А.Э.Козловский; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2015. – 80 с.

В пособии приводятся основные положения курса, а также теоретические сведения о деформации растяжения-сжатия. Рассмотрено напряжённое состояние при растяжении-сжатии. Предложены к выполнению две лабораторные работы по испытанию материалов на растяжение и сжатие, а также три контрольных задания для самостоятельной работы с примерами выполнения.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения по направлению подготовки бакалавров «Технологические машины и оборудование».

Ил. 39. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты:

кафедра проектирования текстильных машин Ивановского государственного политехнического университета; профессор, кандидат технических наук В.М.Хадеев (генеральный директор Ивановского инженерного центра исследования прочности строительных конструкций «Исследователь»)

Оглавление

Введение

Все твёрдые тела в разной степени обладают свойствами прочности и жёсткости, т.е. способны в определённых пределах воспринимать воздействие внешних сил без разрушения и без существенного изменения геометрических размеров.

Сопротивление материалов – наука о прочности и жёсткости элементов инженерных конструкций, с помощью которой ведутся практические расчёты и определяются необходимые размеры деталей машин и различных строительных сооружений.

Сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые простые приёмы расчёта типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. При этом широко используются различные приближённые методы. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в сопротивлении материалов прибегать в ряде случаев к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путём сопоставления расчётных данных с экспериментом.

Задача сопротивления материалов заключается не только в том, чтобы выявить внутренние особенности изучаемых объектов, но также и в том, чтобы в дальнейшем можно было дать полученным закономерностям правильное толкование при оценке работоспособности и практической пригодности рассматриваемой конструкции.

Методы сопротивления материалов не остаются постоянными. Они изменяются вместе с возникновением новых задач и новых требований практики. При ведении инженерных расчётов методы сопротивления материалов следует применять творчески и помнить, что успех практического расчёта лежит не столько в применении сложного математического аппарата, сколько в умении вникать в существо исследуемого объекта. Для этого необходимо находить наиболее удачные упрощающие предположения и доводить расчёт до окончательного числового результата.

1. Основные положения

1.1. Задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов («сопромат») – наука, изучающая поведение материалов под действием на них внешних нагрузок, вызывающих деформацию или разрушение твёрдого тела.

Основные понятия сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и, в первую очередь, на законы статики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел, а законы движения тела, как жёсткого целого, не только отступают на второй план, но в ряде случаев являются попросту несущественными.

На основе методов сопромата выполняют расчёты деталей машин, аппаратов, приборов, конструкций, сооружений и зданий. Эти расчёты служат для обеспечения надёжности и долговечности проектируемых конструкций при минимальной затрате материалов для их изготовления.

Реальные твёрдые тела под действием приложенных сил деформируются, т. е. изменяют форму и размеры.

Деформации, исчезающие после снятия внешних сил, называются ***упругими***. Деформации, остающиеся после устранения действующей нагрузки, называют остаточными или ***пластическими***.

Упругостью называется свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешних нагрузок.

Пластичностью называется свойство тела сохранять деформацию после прекращения действия нагрузки.

Как правило, возникновение пластических деформаций считается недопустимым, так как это связано с необратимыми изменениями формы и размеров конструкции, а значит – с нарушением её нормальной работы.

Большинство расчётов в сопротивлении материалов сводится к достижению двух противоположных целей:

– при известных внешних нагрузках определить минимально возможные размеры конструкции, чтобы она была более лёгкой;

– при заданных размерах конструкции определить наибольшее значение нагрузок, при действии которых прочность конструкции обеспечена.

Первая задача сопротивления материалов – расчёт элементов конструкций на прочность.

Прочность – способность материала сопротивляться пластическим деформациям и разрушению под действием внешних сил. Под нарушением прочности понимается не только разрушение (разрыв, излом), но и возникновение пластических деформаций. Любая конструкция должна иметь запас прочности.

Вторая задача сопротивления материалов – расчёт элементов конструкций на жёсткость.

Жёсткость – способность материала сопротивляться упругим деформациям. В нагруженной конструкции неизбежно возникновение упругих деформаций и обусловленных ими перемещений отдельных точек конструкции. Эти перемещения могут оказаться больше, чем допустимые для нормальной работы конструкции, хотя её прочность вполне достаточна. В этом случае говорят, что конструкция имеет достаточную прочность, но недостаточную жёсткость.

Расчёт конструкции на жёсткость должен обеспечить выбор таких её размеров, при которых упругие перемещения, вызванные рабочими нагрузками, будут лежать в допустимых пределах.

Третья задача сопротивления материалов – расчёт элементов конструкций на устойчивость.

Устойчивость – способность элемента конструкции сопротивляться возникновению больших отклонений от невозмущенного равновесия при малых возмущающих воздействиях.

Равновесие элемента устойчиво, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформаций. Наоборот, равновесие неустойчиво, если ограниченный рост нагрузки сопровождается неограниченным ростом деформаций.

Признаком потери устойчивости является также внезапная смена одной формы равновесия другой. Если сжимать тонкий элемент, то до определённого значения силы сохраняется его прямолинейная форма. При достижении критической силы прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, возникает новая устойчивая форма равновесия – криволинейная, более опасная для элемента.

Потеря устойчивости конструкции может иметь место при значениях нагрузок, совершенно безопасных с точки зрения прочности или жёсткости.

Таким образом, сопротивление материалов – расчётно-теоретическая дисциплина, которая даёт основы расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

1.2. Классификация внешних сил и элементов конструкций

Внешние силы, действующие на элементы конструкций, делятся на ***активные*** и ***реактивные*** (реакции связей).

Происхождение и характер действия нагрузки определяются назначением, условиями работы и конструктивными особенностями нагружаемого элемента.

По характеру приложения к элементу конструкции внешние силы делят на ***объёмные*** и ***поверхностные***.

Объёмными силами являются *силы тяжести* конструкции и *силы инерции*, возникающие при её ускоренном движении. Объёмные силы действуют на каждый бесконечно малый элемент объёма.

Поверхностными силами являются нагрузки, передающиеся от одних элементов конструкции к другим. Поверхностные силы делятся на ***сосредоточенные*** и ***распределённые***.

Сосредоточенной считается сила, которая передаётся на деталь по площадке, размеры которой пренебрежимо малы в сравнении с размерами самой детали. *Пример:* сила давления колеса вагона на рельс.

Сосредоточенные силы выражаются в ньютонах (Н), килоньютонах (кН), меганьютонах (МН).

Следует помнить, что **1 МН = 10^3 кН = 10^6 Н**. В расчётах можно принимать 1 ньютон равным 0,1 килограмма силы (**1 Н = 0,1 кгс = 0,1 кГ**).

Нагрузки, распределённые по поверхности, характеризуются давлением (отношением силы, действующей на элемент поверхности нормально к ней, к площади элемента) и выражаются в Па, МПа. *Пример:* давление газа на стенки сосуда.

Нагрузка, распределённая по длине элемента, характеризуется интенсивностью нагрузки и выражается отношением силы, действующей на элемент, к его длине: Н/м, кН/м. *Пример:* сила тяжести балки.

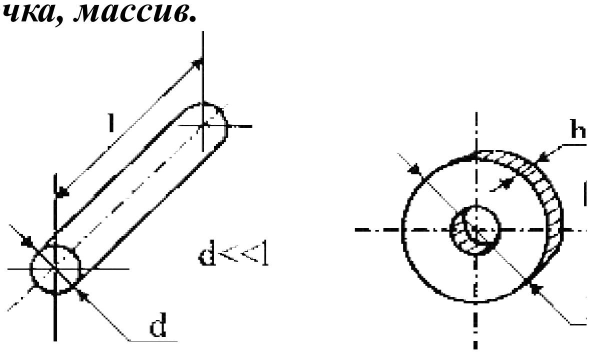
По характеру изменения во времени различают нагрузки ***статические, динамические, циклические***.

Статическими называются нагрузки, нарастающие медленно и плавно от нуля до конечного значения; достигнув его, далее не изменяются. Возникающими при этом ускорениями можно пренебречь. *Пример:* центробежные силы в период разгона ротора и при его последующем равномерном вращении. При действии таких нагрузок колебания конструкций и их частей пренебрежимо малы.

Динамическими (ударными) называются нагрузки, изменяющиеся во времени с большой скоростью. *Пример:* удар молота при ковке. Действие таких нагрузок приводит к колебаниям конструкции и возникновению сил инерции, пропорциональных колеблющимся массам и ускорениям. Эти силы инерции могут во много раз превосходить те же нагрузки, приложенные статически.

Циклическими (повторными) называются нагрузки, изменяющиеся во времени по тому или иному закону. *Пример:* силы, действующие на зубья зубчатых передач. Различают повторные нагрузки с установившимся режимом (повторно периодические) и с неустановившимся режимом. Законы изменения нагрузок во времени могут иметь весьма сложный характер.

Конструкции, которые встречаются на практике, в большинстве случаев имеют сложную форму. Однако их отдельные элементы с той или иной степенью точности при расчётах можно свести к простейшим: ***брус, пластина, оболочка, массив.***



а б в

Рис. 1. Основные простейшие элементы конструкций: а – брус; б – пластина; в – оболочка

Брус – тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим (длиной). ***Ось бруса*** – это линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений. ***Поперечное сечение*** – это плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней.

В зависимости от формы оси бруса и того, как изменяется (или остается постоянным) его поперечное сечение, различают брусья прямые и кривые, с постоянным, непрерывно или ступенчато изменяющимся поперечным сечением. Брус с прямолинейной осью часто называют ***стержнем***.

Пластина – тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

Примеры деталей, рассматриваемых как пластины и оболочки: резервуары для жидкостей и газов, элементы обшивки корпусов различных машин и аппаратов.

Массив – тело, у которого все три размера одного порядка. Примеры: фундамент под машину, шарик подшипника качения.

1.3. Допущения, принимаемые в сопротивлении материалов

Расчёты элементов конструкций достаточно сложные. Поэтому в сопротивлении материалов принимаются некоторые упрощающие допущения. Они касаются свойств материала, нагрузок и характера взаимодействия детали и нагрузок.

Рассмотрим эти допущения.

1. Материал детали является ***однородным***, т.е. свойства его во всех точках одинаковы. Более высокой однородностью обладают металлы, меньшей – пластмассы, дерево, бетон.

2. Материал тела имеет ***сплошное*** (непрерывное) ***строение***, т.е. заполняет весь объём тела без пустот.

3. Материал детали ***изотропен***, т.е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами. Изотропными материалами являются поликристаллические металлы. Для таких материалов, как дерево, железобетон, пластмассы, данное допущение выполняется лишь приблизительно. Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются ***анизотропными***.

4. ***Перемещения*** точек тела, обусловленные его упругими деформациями, ***весьма малы*** по сравнению с размерами тела. Из этого допущения следует, что изменения в расположении сил, происходящие при деформации конструкции не следует учитывать при составлении уравнений равновесия (при определении реакций связей), а также при определении внутренних сил. Это положение иногда называют *принципом начальных размеров*.

5. ***Перемещения*** точек упругого тела в известных пределах нагружения ***прямо пропорциональны силам***, вызывающим эти перемещения. Такие тела (системы) называют *линейно деформируемыми*; они подчиняются *закону Гука*.

6. Результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности. Это положение имеет название: ***принцип независимости действия сил*** или ***принцип суперпозиции***.

Под результатом действия сил в зависимости от конкретной задачи могут пониматься деформации, внутренние силы, возникающие в теле, перемещения отдельных точек и т.д. Действие отдельных сил системы должно рассматриваться вместе с соответствующими им реакциями связей.

Экспериментальная проверка расчётных зависимостей, полученных на основе указанных выше допущений, показывает, что погрешность, вносимая ими, очень незначительна, и для практических целей ею можно пренебречь.

1.4. Метод сечений. Внутренние силы в сечениях бруса

Прочность твёрдого тела обусловлена силами связи между отдельными его частицами. При действии внешних нагрузок происходит деформация, в теле возникают внутренние силы, изменяющие силы сцепления между частицами.

При возрастании внешних сил увеличиваются и внутренние силы, но лишь до определённого предела, выше которого тело теряет свою прочность. Это предельное значение внутренних сил зависит от физико-механических свойств материала данного тела.

Для расчётов на прочность необходимо иметь возможность определять внутренние силы по значению известных внешних сил. Основу для решения этой задачи даёт **метод сечений** (рис. 2).

Суть метода сечений состоит в следующем.

Тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил (в том числе и реакции связей), мысленно разрезается в интересующем месте, например по линии ***n–n***. Отбрасывается одна из частей тела и рассматривается равновесие оставшейся части. Обычно отбрасывают ту часть, к которой приложено больше внешних сил.

Для обеспечения равновесия оставленной части I надо приложить по проведённому сечению те силы взаимодействия между частями I и II тела, которые были внутренними силами для всего тела. Эти силы заменяют действие отброшенной части II на оставленную часть I.

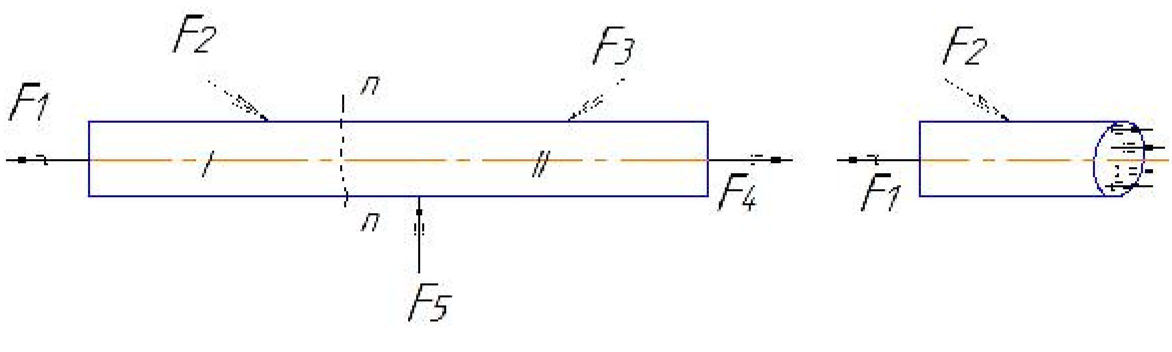


Рис. 2. Принцип применения метода сечений

Таким образом, применяя метод сечений, мы преобразуем силы, являющиеся внутренними силами для тела в целом, во внешние силы для одной из частей.

1.5. Напряжения

Внутренние силы распределены по сечению тела сплошь, при этом их значение и направление в отдельных точках сечения различны.

Для оценки интенсивности внутренних сил в определённой точке данного сечения введено понятие механического напряжения.

Через данную точку тела можно провести бесчисленное множество сечений, различно ориентированных в пространстве. Возникающие на них напряжения будут различны. Поэтому нельзя говорить о напряжении в данной точке, не указывая сечения, в котором это напряжение возникает.

Напряжение в данной точке по рассматриваемому сечению есть величина векторная. Величина ***P*** называется ***полным напряжением*** или просто напряжением в данной точке данного сечения (рис. 3).

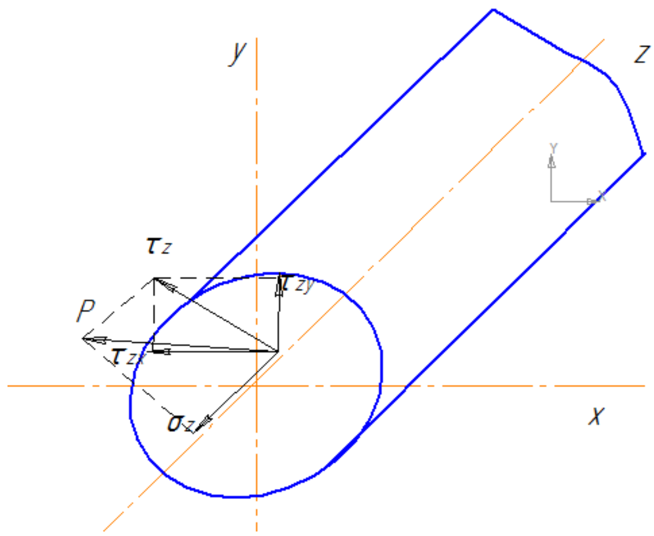


Рис. 3. Напряжения, возникающие в сечении деформированного тела

Упрощённо можно сказать, что ***механическое напряжение*** – это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке данного сечения.

В качестве единицы механического напряжения в ***системе СИ*** принят паскаль: $\boldsymbol{1\ Па = 1\ \frac{Н}{м^2}}$. Так как паскаль величина очень малая, то расчёты обычно ведут в мегапаскалях: $\boldsymbol{1\ МПа = 10^6\ Па = 1\frac{Н}{мм^2} = 10\ \frac{кгс}{см^2}}$.

Не следует смешивать понятия *механического напряжения* и *давления*, хотя они имеют одинаковую размерность. Давление действует на поверхность тела, а механические напряжения возникают внутри тела.

Разложим вектор напряжения $\boldsymbol{P}$ на две взаимно-перпендикулярные составляющие:

– составляющая, действующая по нормали к сечению, называется **нормальным напряжением** и обозначается $\boldsymbol{\sigma_z}$;

– составляющая, лежащая в плоскости сечения, называется **касательным напряжением** и обозначается $\boldsymbol{\tau_z}$.

Таким образом, полное напряжение будет равно:

$$\boldsymbol{P} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_z^2 + \tau_z^2}}\,.$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет определённый физический смысл.

Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся либо отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Это имеет место, например, при растяжении, сжатии и изгибе.

Касательные напряжения связаны со стремлением частиц двигаться в плоскости рассматриваемого сечения. Это имеет место, например, при кручении и сдвиге.

Иногда требуется разложить вектор $\vec{\boldsymbol{P}}$ не на две, а на три составляющие, параллельные координатным осям. Для этого касательное напряжение $\boldsymbol{\tau_z}$ представляют в виде двух составляющих, параллельных координатным осям: $\boldsymbol{\tau_{zx}}$ и $\boldsymbol{\tau_{zy}}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \sqrt{\boldsymbol{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}}\,.$$

Для составляющих полного напряжения принято следующее правило индексов. У нормального напряжения ставится индекс, указывающий, какой координатной оси параллельно данное напряжение. Как правило, ось бруса обозначается буквой $\boldsymbol{z}$.

Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, а сжимающее – отрицательным.

Касательное напряжение имеет два индекса: первый указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения, а второй индекс показывает, какой оси параллельно само напряжение. Если направление действия напряжений не играет роли, то индексы можно не ставить.

В нашем случае зависимость между полным напряжением и тремя его составляющими выражается формулой:

$$\boldsymbol{P} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}}\,.$$

Таким образом, решение большинства задач сопротивления материалов сводится к следующему.

С помощью метода сечений от известных внешних нагрузок переходят к внутренним силовым факторам, от них на основе известных зависимостей и дополнительных гипотез – к напряжениям.

Определив максимальные напряжения, а также сечения, по которым они действуют, можно судить о способности тела сопротивляться деформациям и разрушению при различных видах нагружения.

Большинство деталей и элементов конструкций в процессе эксплуатации в зависимости от характера внешних нагрузок могут испытывать следующие виды деформации: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб. Зачастую детали машин и элементы конструкций испытывают сочетание разных видов деформации.

1.6. Виды напряжённого состояния

Через точку тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок. Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих на всём бесчисленном множестве площадок, которые можно провести через точку тела, называется **напряжённым состоянием** в этой точке.

Исследовать напряжённое состояние в данной точке – это значит получить зависимости, позволяющие определять напряжения, возникающие в любой проведённой через неё площадке. Для решения этой задачи в общем случае необходимо знать напряжения по любым трём взаимно-перпендикулярным площадкам.

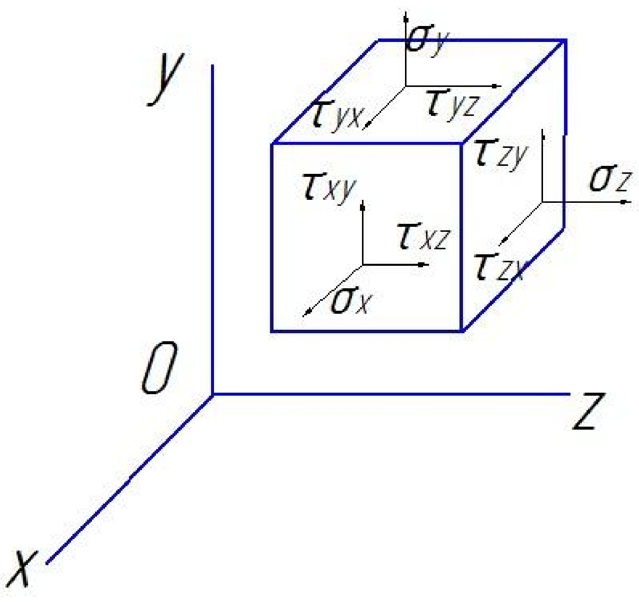


Рис. 4. Общий случай напряжённого состояния

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать следующие напряжения: нормальные $\boldsymbol{\sigma_z}$, $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$ и касательные $\boldsymbol{\tau_{zx}}$, $\boldsymbol{\tau_{zy}}$, $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}}$, $\boldsymbol{\tau_{yx}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$ (рис. 4).

Всегда вокруг любой точки деформированного тела подобный элемент можно вырезать таким образом (повернуть кубик так), что по его граням будут действовать лишь нормальные напряжения, касательные же будут отсутствовать.

Если по граням кубика действуют только нормальные напряжения, то такие напряжения называются главными, а площадки (грани кубика), на которых они действуют, называются **главными площадками**.

В каждой точке деформированного тела существуют три главные взаимно-перпендикулярные площадки.

Главные напряжения обозначают $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, $\boldsymbol{\sigma_3}$ (рис. 5). При этом большее (с учётом знака) главное напряжение обозначается $\boldsymbol{\sigma_1}$, а меньшее (с учётом знака) обозначается $\boldsymbol{\sigma_3}$ **.**

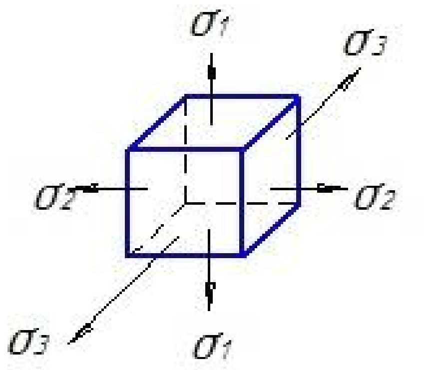
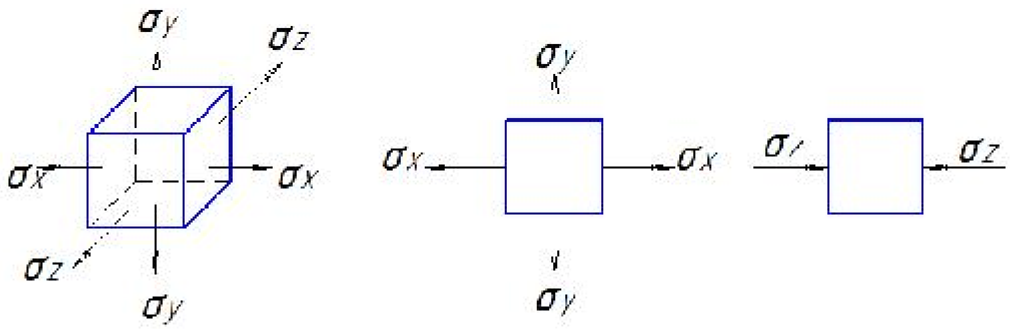


Рис. 5. Главные площадки и главные напряжения

При исследовании напряжённого состояния в различных точках ***прямого бруса*** доказано, что в любом случае его нагружения главными являются напряжения, возникающие на площадках, соответствующих ***поперечному и двум продольным сечениям***, проходящим через рассматриваемую точку.

Различные виды напряжённого состояния классифицируются в зависимости от ***числа*** возникающих в данной точке ***главных напряжений*** (рис. 6). На рисунке направление действия главных напряжений совмещено с направлением осей $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$.

Если отличны от нуля все три главных напряжения ($\boldsymbol{\sigma_x \neq 0}$, $\boldsymbol{\sigma_y \neq 0}$, $\boldsymbol{\sigma_z \neq 0}$), то напряжённое состояние называется ***трёхосным*** или ***объёмным*** (рис. 6, а).



а б в

Рис. 6. Виды напряжённого состояния

Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется ***двухосным*** или ***плоским***: например, $\boldsymbol{\sigma_z = 0}$ (рис. 6, б).

Если равны нулю два главных напряжения, то напряжённое состояние называется ***одноосным*** или ***линейным***: например, $\boldsymbol{\sigma_x = 0}$, $\boldsymbol{\sigma_y = 0}$ (рис. 6, в).

Зная количественные составляющие напряжённого состояния в любой точке деформированного тела, можно оценить его прочность.

2. Растяжение и сжатие

2.1. Напряжённое состояние при растяжении и сжатии

Рассмотрим деформацию ***осевого растяжения прямого бруса***. Выведем зависимости для определения напряжений в произвольном сечении бруса.

Для этого мысленно разрежем выделенный из бруса элементарный объём в виде кубика плоскостью, нормаль к которой составляет произвольный угол $\boldsymbol{\alpha}$ с осью $\boldsymbol{z}$ (рис. 7).

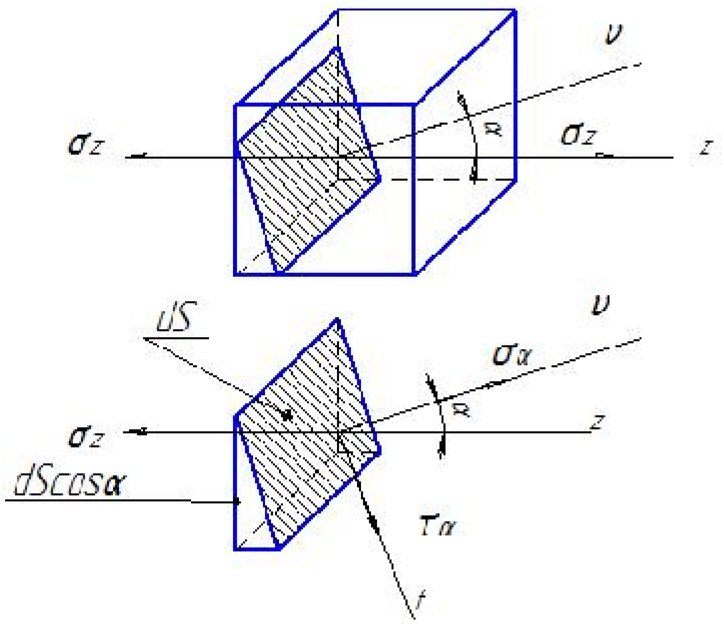


Рис. 7. К определению напряжений при растяжении и сжатии

На площадке $\boldsymbol{dS}$ отсечённой трёхгранной призмы возникают нормальное напряжение $\boldsymbol{\sigma_\alpha}$ и касательное напряжение $\boldsymbol{\tau_\alpha}$, которые необходимо определить.

Составим уравнения равновесия элементарной призмы. Для этого перейдём от напряжений к силам.

На площадке $\boldsymbol{dS}$ действуют силы, равные $\boldsymbol{\sigma_\alpha dS}$ и $\boldsymbol{\tau_\alpha dS}$.

Площадь левой грани равна $\boldsymbol{dScos\alpha}$, на ней действует сила, равная $\boldsymbol{\sigma_z dScos\alpha}$.

Тогда сумма проекций сил на оси $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{t}$ будет равна:

$$\sum \boldsymbol{F_v = 0} \qquad \boldsymbol{-(\sigma_z dScos\alpha)cos\alpha + \sigma_\alpha dS = 0} \;;$$

$$\sum \boldsymbol{F_t = 0} \qquad \boldsymbol{-(\sigma_z dScos\alpha)sin\alpha + \tau_\alpha dS = 0} \;.$$

Отсюда

$$\sigma_\alpha = \sigma_z cos^2\alpha \;;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_z cos\alpha\; sin\alpha = 0,5\sigma_z sin2\alpha \;.$$

Из полученных зависимостей можно сделать следующие выводы.

При осевом растяжении в ***продольных сечениях*** ($\alpha = 90°$) бруса не возникает ни нормальных, ни касательных напряжений ($\sigma_\alpha = 0,\ \tau_\alpha = 0$), т.е. *напряжённое состояние – линейное, одноосное.*

Наибольшие нормальные напряжения при осевом растяжении или сжатии возникают при значении угла $\alpha = 0$, то есть в ***поперечных сечениях*** бруса:

$$\sigma_{max} = \sigma_{\alpha=0} = \sigma_z = \frac{N}{S}\,.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают на площадках, наклонённых под углом $\alpha = 45°$ к оси бруса, они равны половине значения нормальных напряжений, возникающих в соответствующих точках поперечного сечения:

$$\tau_{max} = \tau_{\alpha=45^\circ} = 0,5\sigma_z sin(2x45^\circ) = 0,5\sigma_z \;.$$

Известно, что

$$cos\alpha = -\cos(\alpha + 90°) \quad \text{и} \quad sin\alpha = \sin(\alpha + 90°),$$

соответственно:

$$cos\alpha\; sin\alpha = -\cos(\alpha + 90°)\sin(\alpha + 90°)\;.$$

Тогда

$$\tau_\alpha = \sigma_z cos\alpha\; sin\alpha = -\sigma_z \cos(\alpha + 90°)\sin(\alpha + 90°)\;.$$

Наконец

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+90^\circ}\;.$$

Таким образом, ***на двух взаимно-перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения.***

При этом касательные напряжения на двух взаимно-перпендикулярных площадках всегда направлены либо к ребру пересечения площадок, либо от ребра (рис. 8).

Это равенство называется **законом парности или взаимности касательных напряжений**.

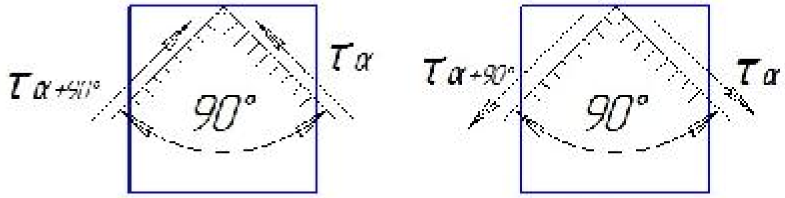


Рис. 8. Направления действия касательных напряжений

Закон парности касательных напряжений имеет силу не только для одноосного, но и для любого другого напряжённого состояния: двухосного или объёмного.

2.2. Определение внутренних усилий

При растяжении (сжатии) прямого бруса (стержня) в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – **продольная сила**, обозначаемая N_z или N.

Продольной силой в поперечном сечении бруса называют равнодействующую внутренних нормальных сил, возникающих в этом сечении.

Продольные силы, соответствующие деформации растяжения, условимся считать положительными, а сжатия – отрицательными. При растяжении продольная сила направлена от сечения, при сжатии – к сечению.

Продольная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось $\boldsymbol{z}$ всех внешних сил $\boldsymbol{F_i}$, приложенных к оставшейся части бруса после применения метода сечений:

$$\boldsymbol{N_z} = -\sum \boldsymbol{F_{iz}} \ .$$

Направление N противоположно проекции равнодействующей внешних сил, приложенных к оставленной части.

Рассмотрим случай осевого (центрального) растяжения-сжатия, когда внешние силы действуют вдоль оси стержня, защемлённого одним концом (рис. 9).

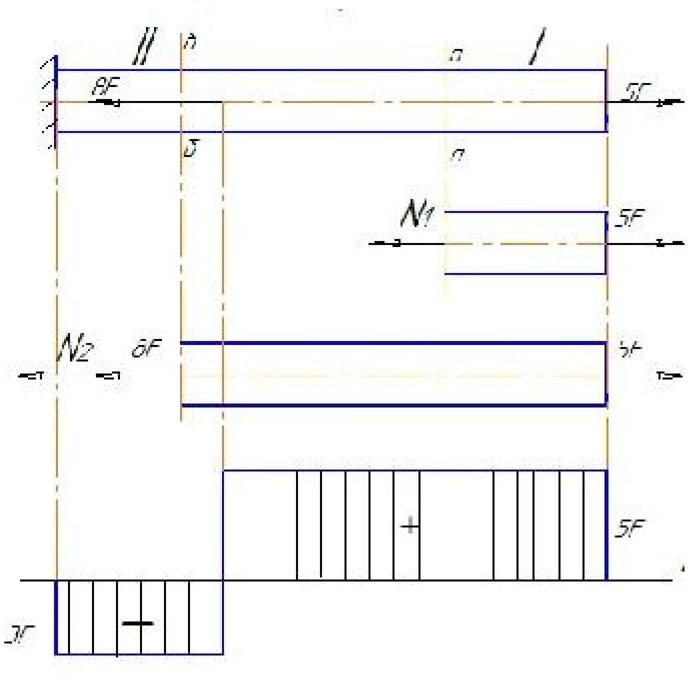


Рис. 9. Определение продольных сил ***N***

Для определения продольных сил используем метод сечений. Разобьём брус на участки, начиная от свободного конца. Можно было бы начать и с другого конца, но в этом случае сначала требовалось бы определить реакцию в жёсткой заделке.

В случае бруса с постоянным поперечным сечением границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы.

В нашем случае таких участков два: ***I*** и ***II***. Проведем сечение ***а–а*** на I участке и рассмотрим равновесие правой отсечённой части. Совершенно безразлично, где проводить сечение в пределах одного участка бруса.

Воздействие левой отброшенной части бруса на правую заменим продольной силой N_1. Составим уравнение равновесия:

$$5F - N_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad N_1 = 5F.$$

Во всех поперечных сечениях данного участка ***I*** продольная сила одинакова и является растягивающей, так как направлена от сечения.

Рассмотрим участок ***II*** (сечение ***б–б***). Предварительно направим продольную силу N_2 от сечения, предположив, что она растягивающая. Составим уравнение равновесия:

$$5F - 8F - N_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad N_2 = -3F.$$

Знак минус показывает, что направление силы N_2 следует изменить на обратное, то есть продольная сила в данном случае будет не растягивающей, как мы предположили, а сжимающей.

Для определения продольных сил необязательно каждый раз отдельно изображать отсечённую часть бруса. Можно просто найти алгебраическую сумму проекций внешних сил на ось бруса, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Наглядное представление о законе изменения продольных сил по длине бруса даёт график, ось абсцисс которого проводится параллельно оси бруса, а ось ординат ей перпендикулярна. Этот график называется ***эпюрой продольных сил*** N (рис. 9).

По оси ординат в выбранном масштабе откладывают значение продольных сил в поперечных сечениях стержня (с учётом знаков). Если в пределах участка продольная сила постоянна, линия эпюры параллельна оси абсцисс. *Если на каком-либо участке внешняя сила равномерно распределена по его длине, то эпюра продольных сил на данном участке – наклонная линия.*

Положительные значения N (растяжение) откладываем вверх, отрицательные – вниз от оси эпюры. Условимся ось эпюры проводить тонкой линией, а саму эпюру – толстой.

В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получаются скачкообразные изменения ординат – ***"скачки"***. Размер "скачка" равен приложенной в соответствующем месте бруса внешней сосредоточенной силе.

Эпюру принято штриховать тонкими линиями. ***Штриховка*** должна быть ***перпендикулярна оси эпюры***.

Эпюру продольных сил строят в первую очередь для того, чтобы использовать её для расчётов бруса на прочность. Она даёт возможность найти наибольшее значение продольных сил и те сечения, в которых они возникают.

2.3. Определение напряжений

Как было показано ранее при осевом растяжении или сжатии бруса в его поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Их равнодействующая – продольная сила N находится с помощью метода сечений.

Для того чтобы иметь возможность определить нормальные напряжения при известном значении продольной силы, необходимо установить закон их распределения по поперечному сечению бруса.

Эта задача решается на основе ***гипотезы плоских сечений (гипотезы Я.Бернулли)***, которая гласит: *сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.*

Эту гипотезу иллюстрируют следующим опытом. На поверхность бруса наносят сетку линий параллельных и перпендикулярных оси бруса. В процессе растяжения бруса эти линии остаются взаимно-перпендикулярными, но расстояние между ними изменяется (рис. 10).

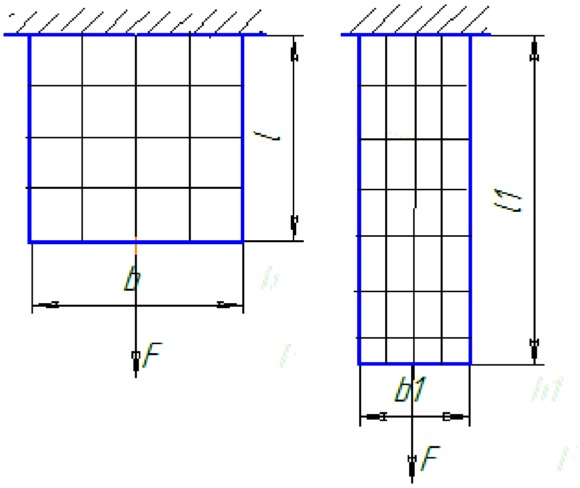


Рис. 10. Иллюстрация гипотезы Бернулли

При этом предполагается, что внутри бруса деформации имеют тот же характер, что и на его поверхности.

Представим, что брус состоит из бесконечно большого числа продольных элементов, имеющих бесконечно малые поперечные сечения. Эти продольные элементы будем называть волокнами. Из гипотезы Бернулли следует, что все волокна в рассматриваемом случае деформируются одинаково. При однородном материале равным деформациям соответствуют равные напряжения.

Таким образом, можно сделать вывод, что при растяжении или сжатии бруса в его поперечных сечениях действуют только нормальные напряжения, которые равномерно распределены по сечению; касательные напряжения в поперечных сечениях равны нулю.

Следует отметить, что данный вывод совершенно не зависит от формы поперечного сечения бруса.

На основе гипотезы Бернулли получена формула для расчёта напряжений, которая подтверждается результатами практических опытов.

Продольная сила N есть равнодействующая нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$N = \int_S \sigma dS ,$$

где S – площадь поперечного сечения.

Поскольку $\sigma = const$, получаем $N = \sigma S$.

Тогда нормальное напряжение будет равно:

$$\sigma = \frac{N}{S} .$$

Эта же формула справедлива и для деформации сжатия. При растяжении напряжения считают положительными, а при сжатии отрицательными.

В тех случаях, когда нормальные напряжения в различных сечениях бруса неодинаковы, целесообразно показывать закон их изменения по длине бруса в виде графика – эпюры нормальных напряжений σ.

Пример: для бруса со ступенчато-переменным поперечным сечением построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ .

Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются места приложения внешних нагрузок и изменения размеров поперечного сечения. Таких участков пять (рис. 11). При построении только эпюры N следовало бы разбить брус лишь на три участка с одинаковыми размерами поперечного сечения.

Применяя метод сечений, определяем продольные силы в поперечных сечениях бруса:

участки I и II: $N_1 = N_2 = F_1 = +80\,кН$,

участки III и IV: $N_3 = N_4 = F_1 + F_2 = +80 + 40 = +120\,кН$,

участок V: $N_5 = F_1 + F_2 - F_3 = +80 + 40 - 190 = -70\,кН$.

Откладываем в масштабе полученные значения и строим эпюру N . Реакция связи в жёсткой заделке равна: $R_A = -70\,МПа$, т.е. она действует в противоположную сторону.

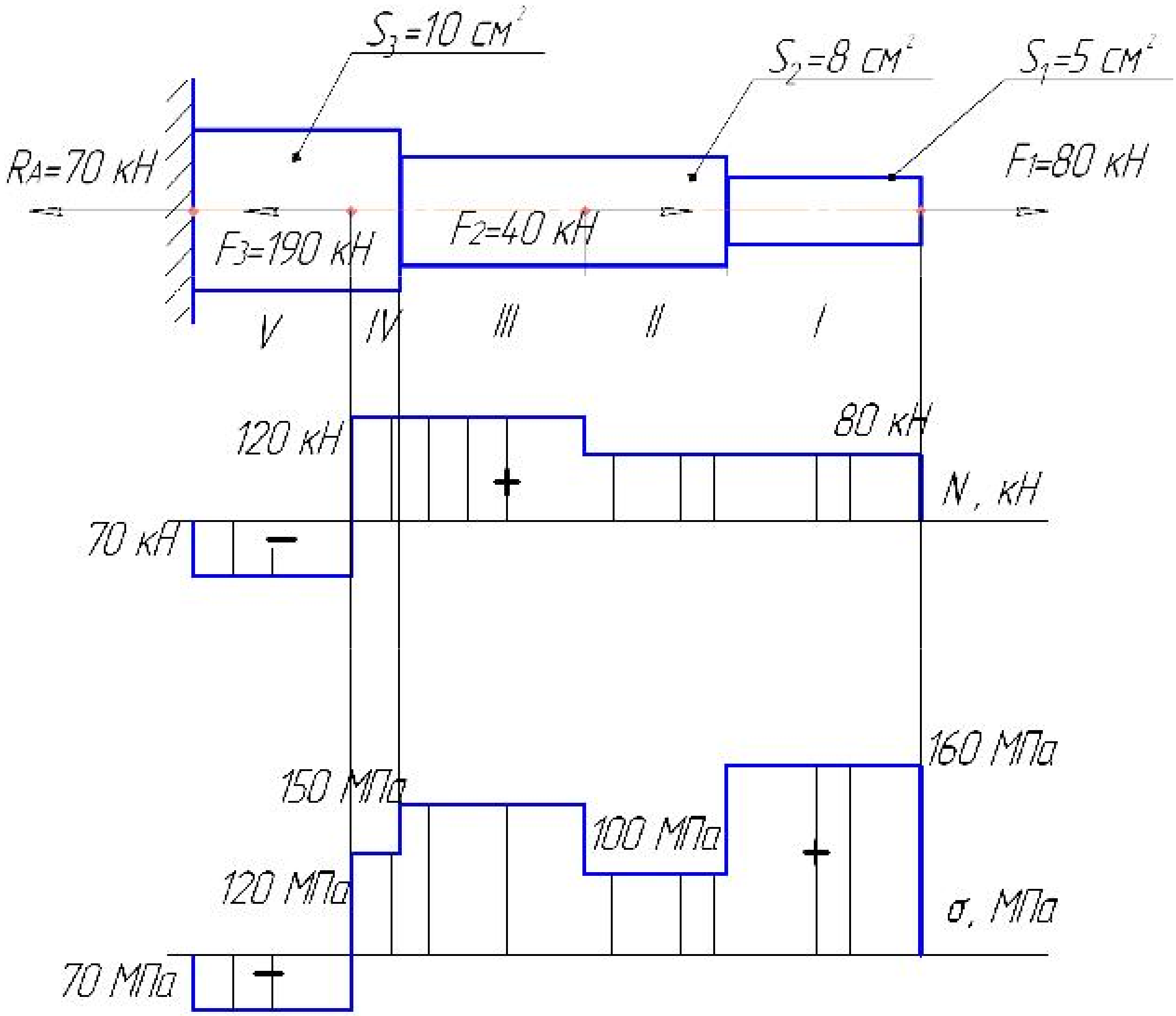


Рис. 11. Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений

Нормальные напряжения определяем, подставляя соответствующие значения продольных сил в Ньютонах, а размеры поперечного сечения – в квадратных миллиметрах:

участок $\boldsymbol{I}$: $\quad \boldsymbol{\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{+80 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 160\,МПа}$,

участок $\boldsymbol{II}$: $\quad \boldsymbol{\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{+80 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 100\,МПа}$,

участок $\boldsymbol{III}$: $\quad \boldsymbol{\sigma_3 = \frac{N_3}{S_2} = \frac{+120 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 150\,МПа}$,

участок $\boldsymbol{IV}$: $\quad \boldsymbol{\sigma_4 = \frac{N_4}{S_3} = \frac{+120 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 120\,МПа}$,

участок $\boldsymbol{V}$: $\quad \boldsymbol{\sigma_5 = \frac{N_5}{S_3} = \frac{-70 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = -70\,МПа}$.

В пределах каждого из участков напряжения постоянны, то есть эпюра $\boldsymbol{\sigma}$ на данном участке прямая, параллельная оси абсцисс.

Для расчётов на прочность интерес представляют в первую очередь те сечения, в которых возникают наибольшие напряжения. Существенно, что в рассмотренном случае они не совпадают с теми сечениями, где максимальны продольные силы. Как видно из эпюр, максимальные продольные силы действуют в сечениях на участках ***III*** и ***IV***, а максимальные напряжения – на участке ***I*** .

В тех случаях, когда сечение бруса по всей его длине одинаково, эпюра $\boldsymbol{\sigma}$ подобна эпюре ***N*** и отличается только размерностью и масштабом, поэтому есть смысл построения лишь одной эпюры ***N***.

2.4. Определение деформаций

Опыты показывают, что при растяжении длина бруса увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии – наоборот.

Отношение изменения длины бруса $\Delta\boldsymbol{l}$ к его первоначальной длине $\boldsymbol{l}$ называется относительным удлинением (укорочением) или ***продольной деформацией, %***:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} \times \mathbf{100} \ ,$$

где $\Delta\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{l}_{\text{д}} - \boldsymbol{l})$ – абсолютная деформация бруса; $\boldsymbol{l}_{\text{д}}$ – длина бруса в результате деформации.

Продольная деформация – безразмерная величина, иногда её выражают в процентах. При растяжении продольную деформацию считают положительной, при сжатии – отрицательной.

Отношение изменения размера поперечного сечения $\Delta\boldsymbol{S}$ к его первоначальному значению $\boldsymbol{S}$ называется относительным поперечным сужением (расширением) или ***поперечной деформацией***:

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\Delta\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}} \, ,$$

где $\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{\partial} - \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_{\partial}$ – площадь поперечного сечения бруса в результате деформации.

При растяжении поперечные размеры бруса уменьшаются, и $\boldsymbol{\psi}$ по принятому правилу знаков – величина отрицательная, при сжатии – наоборот.

Продольную и поперечную деформацию называют также ***линейными деформациями.***

Известно, что абсолютная упругая деформация прямо пропорциональна приложенной нагрузке:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{l}\ ,$$

где $\boldsymbol{k}$ – коэффициент пропорциональности (угол наклона прямой, показывающей зависимость между силой и деформацией).

Эта зависимость не учитывает размеры и материал деформируемого тела, т.е. его сопротивляемость деформации. Для того, чтобы учесть эти характеристики, перейдём от внешних сил к внутренним ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F}\ /\ \boldsymbol{S}$) и от абсолютной деформации – к относительной ($\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{l}\ /\ \boldsymbol{l}$):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}\ .$$

Эта зависимость называется **законом Гука**: ***продольные упругие деформации прямо пропорциональны нормальным напряжениям***.

Она с достаточной для практики точностью справедлива для подавляющего большинства конструкционных материалов.

Коэффициент пропорциональности $\boldsymbol{E}$ называют модулем продольной упругости материала (другие названия – модуль нормальной упругости, модуль упругости первого рода, модуль Юнга).

Модуль продольной упругости – физическая постоянная для каждого материала. Она характеризует его жёсткость. Чем больше значение $\boldsymbol{E}$, т. е. чем жёстче материал, тем лучше он сопротивляется упругим деформациям, тем меньше деформируется при данном напряжении. $\boldsymbol{E}$ имеет ту же размерность, что и напряжение – ***МПа***.

На рис. 12 приведены зависимости напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ от продольной

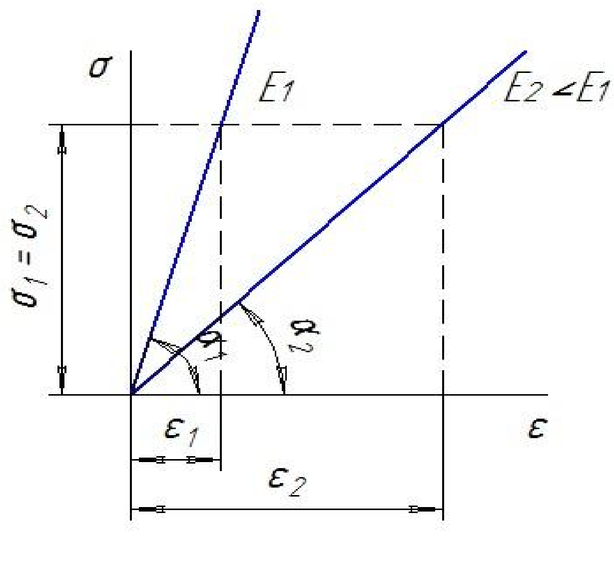


Рис. 12. Зависимость напряжений от деформаций для двух разных материалов

упругой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ для двух материалов с разными модулями упругости.

Как видно, модуль упругости равен тангенсу угла α наклона к оси абсцисс прямой, изображающей закон Гука:

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon}} \ .$$

Первый материал более жёсткий, чем второй, так как при равных напряжениях деформируется меньше.

Для каждого материала модуль упругости колеблется в узких пределах.

Например, для стали $\boldsymbol{E = (1,9 \ldots 2,15) \cdot 10^5}$ ***МПа***. Значение $\boldsymbol{E}$ для стали практически не зависит от её химического состава и вида термической обработки. В расчётах можно принимать для стали $\mathbf{E = 2 \cdot 10^5}$ ***МПа***.

Самый большой модуль упругости ***(*** $\boldsymbol{E = 12 \cdot 10^5}$ ***МПа)*** имеет *алмаз*, это самый жёсткий материал.

Самый низкий модуль упругости ***(*** $\boldsymbol{E = 7}$ ***МПа)*** имеет *резина из натурального каучука*. Это наименее жёсткий (эластичный) материал, который при очень малых напряжениях испытывает значительные упругие деформации.

Опытным путём установлено, что при осевом растяжении или сжатии отношение поперечной деформации к продольной – величина постоянная. Это отношение, взятое по абсолютному значению, называется коэффициентом поперечной деформации или ***коэффициентом Пуассона***:

$$\boldsymbol{\mu} = \left|\frac{\boldsymbol{\psi}}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right| .$$

Он характеризует способность материала к поперечной деформации.

Значение коэффициента Пуассона для различных материалов находится в пределах от 0 до 0,5. Минимальное значение ($\boldsymbol{\mu = 0}$) – для пробки, максимальное ($\boldsymbol{\mu = 0,5}$) – для каучука.

Для большинства металлов и сплавов $\boldsymbol{\mu = 0,23 \ldots 0,35}$, для стали при упругих деформациях можно принимать $\boldsymbol{\mu = 0,25 \ldots 0,3}$.

Значения модуля продольной упругости $\boldsymbol{E}$ и коэффициента Пуассона $\boldsymbol{\mu}$ для конструкционных материалов можно найти в справочниках.

Перейдём к определению изменения длины бруса при растяжении-сжатии.

Абсолютную деформацию бруса выразим через ряд преобразований:

$$\Delta l = l\varepsilon = l\frac{\sigma}{E} = l\frac{N}{ES}$$

и в итоге

$$\Delta l = \frac{lN}{ES}.$$

Это выражение называют ***формулой Гука*** для определения абсолютной деформации бруса при растяжении-сжатии.

Произведение ES условно называют *жёсткостью сечения бруса при растяжении-сжатии*.

Если брус имеет ступенчато-переменное сечение и (или) скачкообразное изменение продольной силы, то общее изменение длины бруса (удлинение или укорочение) равно алгебраической сумме удлинений (укорочений) отдельных участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{k} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i l_i}{E_i S_i}.$$

В случаях, когда поперечное сечение или продольная сила, или обе эти величины изменяются по длине непрерывно, удлинение (укорочение) бруса следует вычислять по формуле:

$$\Delta l = \int_{l} \frac{N_z dz}{ES_z}.$$

В наиболее общем случае, когда законы изменения N и S (или одной из этих величин) различны для отдельных участков бруса, при определении Δl интегрирование ведут в пределах каждого из участков, а затем результаты алгебраически суммируют:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} \frac{N_z dz}{ES_i}.$$

При практических расчётах иногда удобно использовать понятие коэффициента жёсткости бруса:

$$C = \frac{ES}{l}.$$

Коэффициент жёсткости выражается в ***Н/м*** .

Величину, обратную коэффициенту жёсткости, называют коэффициентом податливости:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{ES}}.$$

Тогда формулу Гука можно записать так:

$$\Delta \boldsymbol{l} = \mathbf{N}/\mathbf{C} \quad \text{или} \quad \Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{N}.$$

Умение вычислять деформации и перемещения необходимо для расчётов на жёсткость, а также определения сил в статически неопределимых системах.

Пример. Построить эпюры продольных сил ***N*** и нормальных напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, а также определить общую деформацию бруса, изображённого на рис. 13.

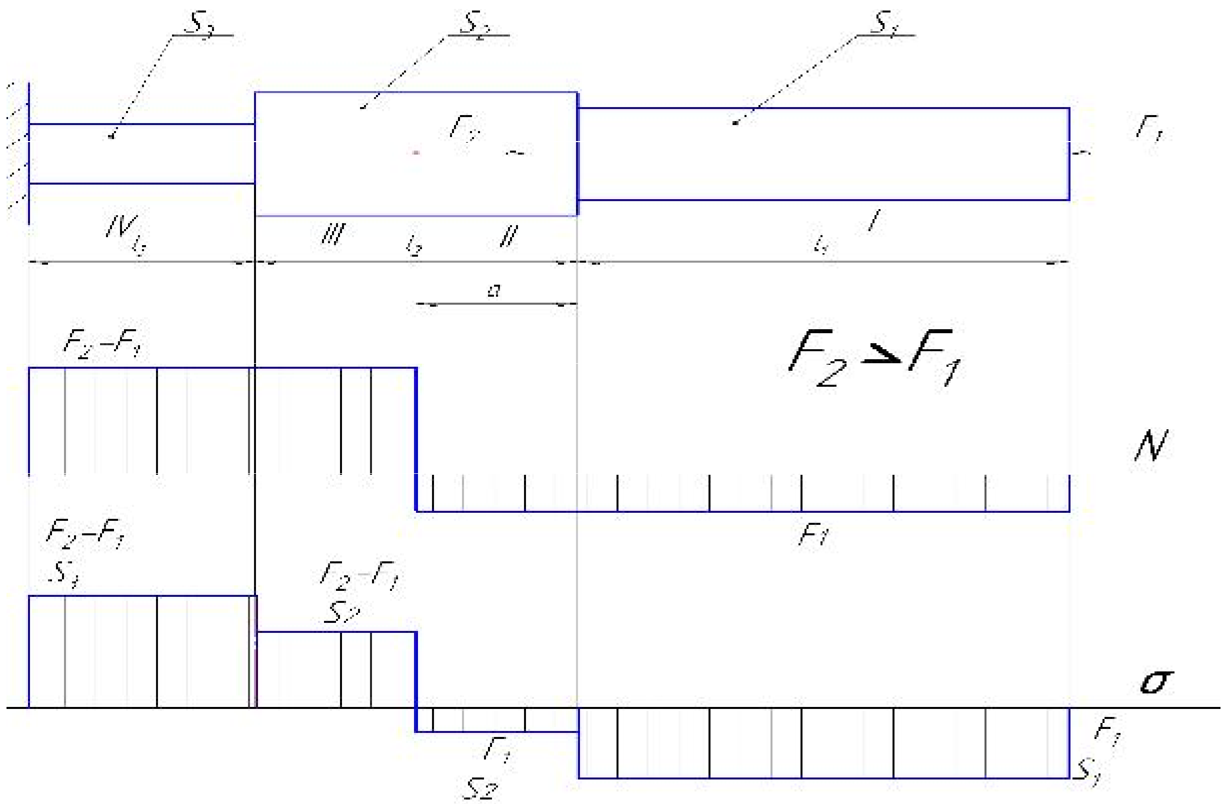


Рис. 13. Построение эпюр продольных сил и напряжений

Определим продольные силы, напряжения и абсолютные дформации на каждом участке бруса:

участок $\boldsymbol{I}$: $\quad \boldsymbol{N_1 = -F_1}$; $\quad \boldsymbol{\sigma_1} = \frac{\boldsymbol{N_1}}{\boldsymbol{S_1}} = -\frac{\boldsymbol{F_1}}{\boldsymbol{S_1}}$; $\quad \Delta \boldsymbol{l_1} = -\frac{\boldsymbol{F_1 l_1}}{\boldsymbol{ES_1}}$;

участок $\boldsymbol{II}$: $\quad \boldsymbol{N_2 = N_1 = -F_1}$; $\quad \boldsymbol{\sigma_2} = \frac{\boldsymbol{N_2}}{\boldsymbol{S_2}} = -\frac{\boldsymbol{F_1}}{\boldsymbol{S_2}}$; $\quad \Delta \boldsymbol{l_2} = -\frac{\boldsymbol{F_1 a}}{\boldsymbol{ES_2}}$;

участок $\boldsymbol{III}$: $\quad \boldsymbol{N_3 = F_2 - F_1}$; $\quad \boldsymbol{\sigma_3} = \frac{\boldsymbol{N_3}}{\boldsymbol{S_2}} = \frac{\boldsymbol{F_2 - F_1}}{\boldsymbol{S_2}}$; $\quad \Delta \boldsymbol{l_3} = \frac{\boldsymbol{(F_2 - F_1)(l_2 - a)}}{\boldsymbol{ES_2}}$;

участок $\boldsymbol{IV}$: $\quad \boldsymbol{N_4 = N_3 = F_2 - F_1}$; $\quad \boldsymbol{\sigma_4} = \frac{\boldsymbol{N_4}}{\boldsymbol{S_3}} = \frac{\boldsymbol{F_2 - F_1}}{\boldsymbol{S_3}}$; $\quad \Delta \boldsymbol{l_4} = \frac{\boldsymbol{(F_2 - F_1) l_3}}{\boldsymbol{ES_3}}$.

Общее изменение длины бруса составит:

$$\Delta \boldsymbol{l} = \Delta \boldsymbol{l_1} + \Delta \boldsymbol{l_2} + \Delta \boldsymbol{l_3} + \Delta \boldsymbol{l_4} = -\frac{\boldsymbol{F_1 l_1}}{\boldsymbol{ES_1}} - \frac{\boldsymbol{F_1 a}}{\boldsymbol{ES_2}} + \frac{\boldsymbol{(F_2 - F_1)(l_2 - a)}}{\boldsymbol{ES_2}} + \frac{\boldsymbol{(F_2 - F_1) l_3}}{\boldsymbol{ES_3}} \ .$$

2.5. Определение перемещений

При растяжении (сжатии) бруса его поперечные сечения перемещаются в направлении оси на величину $\boldsymbol{\lambda}$. Взаимное перемещение $\boldsymbol{\lambda}$ произвольных поперечных сечений бруса $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ относительно друг друга равно изменению длины участка, заключённого между этими сечениями:

$$\boldsymbol{\lambda_{BA}} = \boldsymbol{\lambda_{AB}} = \Delta \boldsymbol{l_{AB}} \ .$$

Для определения перемещений всех сечений бруса одно сечение необходимо условно принять за неподвижное.

График $\boldsymbol{\lambda_z = f(z)}$, показывающий перемещения поперечных сечений в зависимости от расстояния $\boldsymbol{z}$ от неподвижного конца бруса (или сечения, условно принятого за неподвижное), называется эпюрой перемещений $\boldsymbol{\lambda}$.

Построим эпюру перемещений $\boldsymbol{\lambda}$ для бруса с постоянным поперечным сечением, защемлённого одним концом и нагруженного на другом конце растягивающей силой (рис. 14).

Продольные силы и напряжения во всех сечениях бруса одинаковы, перемещения же различны. Перемещение сечения, расположенного на расстоянии $\boldsymbol{z}$ от жёсткой заделки, равно:

$$\boldsymbol{\lambda_z} = \Delta \boldsymbol{l_z} = \frac{\boldsymbol{Fz}}{\boldsymbol{ES}} \ .$$

Сечение в жёсткой заделке неподвижно ($\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda_z} = 0$). Перемещение правого сечения максимально.

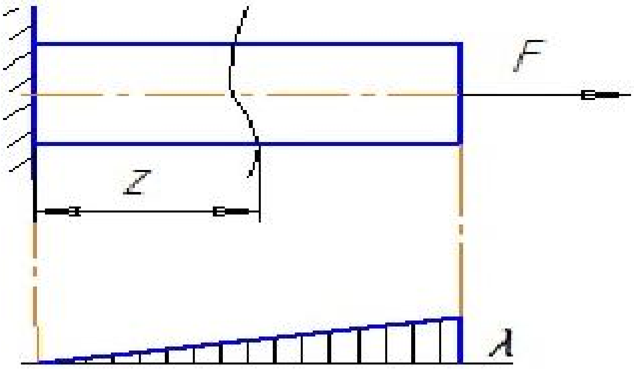


Рис. 14. Построение эпюры перемещений λ

Таким образом, на участках бруса с постоянной продольной силой эпюра перемещений – это прямая наклонная линия.

Перемещения являются следствием деформаций, но эти понятия необходимо строго разграничивать.

Приложим растягивающую силу не на свободном конце бруса, а в его средней части. Построим эпюры $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ (рис. 15).

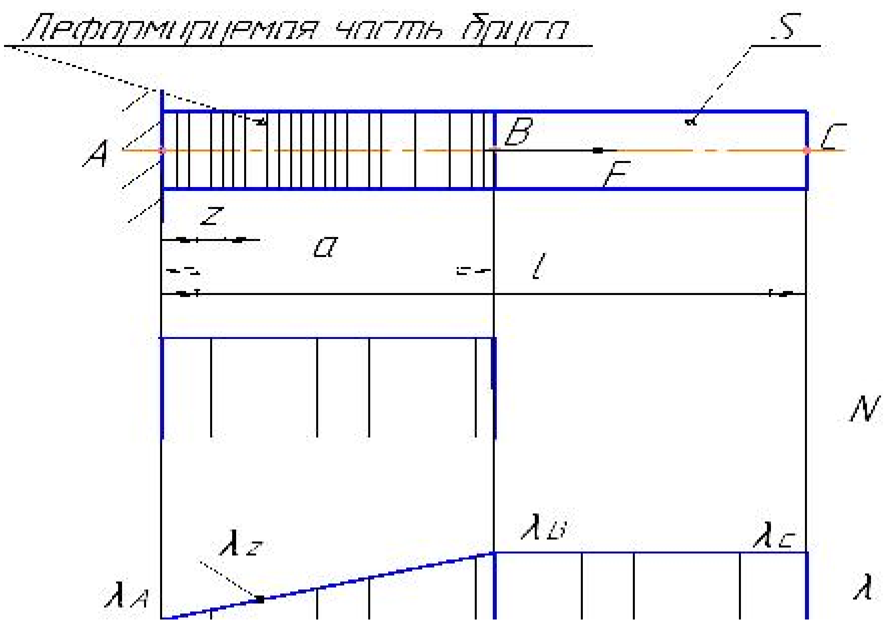


Рис. 15. Эпюры продольных сил и перемещений на участках бруса, испытывающих и неиспытывающих деформацию

Как видно, деформируется лишь часть бруса на участке ***AB*** ***(N > 0)***. Перемещения на этом участке рассчитываются следующим образом:

$$\lambda_z = \Delta l_z = \frac{Fz}{ES},$$

$$\lambda_A = 0, \qquad \lambda_B = \Delta l_{AB} = \frac{Fa}{ES}.$$

Участок *BC* не деформируется (*N* = *0*), а перемещается как абсолютно твёрдое тело.

$$\lambda_c = \Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \frac{Fa}{ES} + 0 = \frac{Fa}{ES}, \text{ т. е. } \lambda_B = \lambda_C.$$

Перемещения всех сечений участка *BC* одинаковы и равны удлинению части *AB* бруса.

Таким образом, на участках бруса, где продольная сила равна нулю, линия эпюры перемещений идёт параллельно своей оси или совпадает с ней.

В случае ступенчатого бруса эпюра перемещений представляет собой ломаную линию, имеющую свой определённый наклон на каждом отдельном участке (рис. 16).

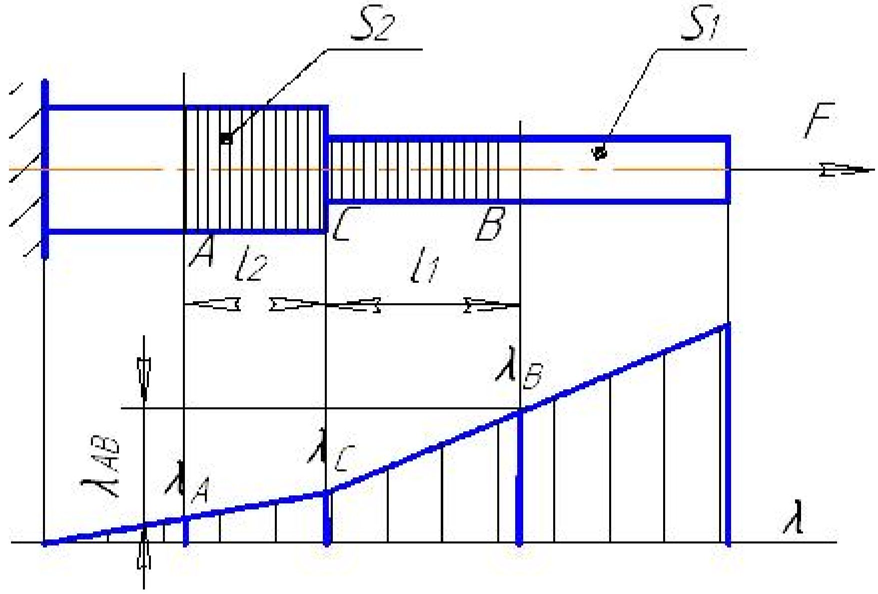


Рис. 16. К определению взаимного перемещения сечений

Однако взаимное перемещение двух сечений относительно друг друга по-прежнему равно изменению длины части бруса, заключённой между этими сечениями:

$$\lambda_{AB} = \Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} = \frac{Fl_2}{ES_2} + \frac{Fl_1}{ES_1} = \frac{F}{E}\left(\frac{l_2}{S_2} + \frac{l_1}{S_1}\right).$$

2.6. Удлинение бруса под действием собственного веса

В случае вертикального расположения бруса больших размеров происходит его деформация (растяжение или сжатие) под действием собственного веса (силы тяжести). Сила тяжести представляет собой нагрузку, равномерно распределённую по всему объёму тела.

Определим удлинение бруса постоянного сечения под действием силы тяжести (рис. 17).

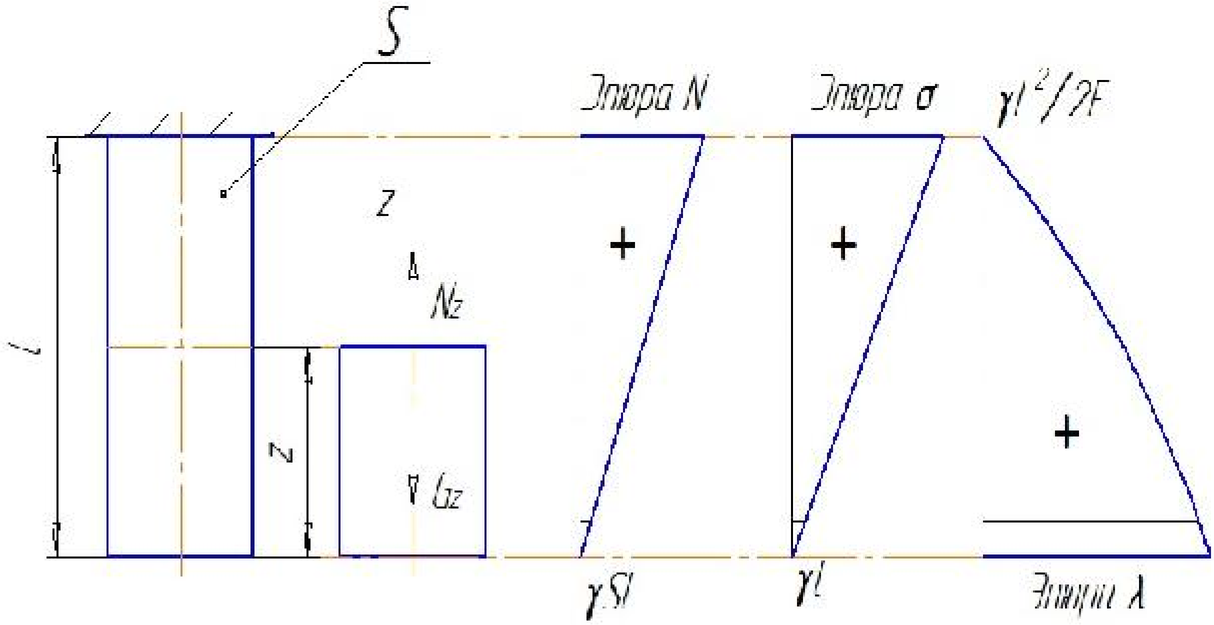


Рис. 17. К расчёту удлинения бруса под собственным весом

Применив метод сечений, отметим, что продольная сила в произвольном поперечном сечении, расположенном на расстоянии z от свободного конца, равна весу (силе тяжести) отсечённой части бруса:

$$N_z = G_z,$$

где G_z – вес (сила тяжести) отсечённой части бруса.

Силу тяжести отдельной части бруса можно рассчитать по следующим формулам:

$$G_z = \gamma S z \quad \text{или} \quad G_z = mg = \rho S z g\,,$$

где γ – удельный вес материала, $Н/м^3$; ρ – его плотность, $кг/м^3$.

Так как величина $\boldsymbol{z}$ переменная, то продольные силы $\boldsymbol{N_z}$ и напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ по длине бруса изменяются по линейному закону. Для построения эпюр продольных сил и напряжений найдём значения $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в крайних сечениях.

При $\boldsymbol{z = 0}$, $\boldsymbol{N_z = 0}$ $\boldsymbol{\sigma_z = \frac{N_z}{S} = \frac{\gamma S z}{S} = \gamma z = 0}$.

При $\boldsymbol{z = l}$, $\boldsymbol{N_z = \gamma S l}$ $\boldsymbol{\sigma_z = \frac{\gamma S l}{S} = \gamma l}$.

По формуле Гука удлинение всего бруса будет равно:

$$\Delta \boldsymbol{l} = \int_0^l \frac{\boldsymbol{N_z dz}}{\boldsymbol{ES}} = \int_0^l \frac{\boldsymbol{\gamma S z}}{\boldsymbol{ES}} \boldsymbol{dz} .$$

Характеристики материала бруса являются постоянными величинами и их можно вынести за знак интеграла:

$$\Delta \boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{E}} \int_0^l \boldsymbol{z dz} = \frac{\boldsymbol{\gamma l^2}}{\boldsymbol{2E}} .$$

Из формулы видно, что удлинение бруса постоянного сечения под действием силы тяжести зависит лишь от материала и длины бруса и не зависит от размера и формы поперечного сечения.

Учитывая, что $\boldsymbol{G = \gamma S l}$, т.е. $\boldsymbol{\gamma l = \frac{G}{S}}$, получим:

$$\Delta \boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{Gl}}{\boldsymbol{2ES}} .$$

Следовательно, удлинение бруса постоянного сечения от собственной силы тяжести в два раза меньше удлинения от действия силы $\boldsymbol{F}$, равной силе тяжести бруса ($\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}$) и приложенной к его концу, так как в этом случае

$$\Delta \boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{Gl}}{\boldsymbol{ES}} .$$

Перемещение произвольного поперечного сечения бруса, отстоящего на расстоянии $\boldsymbol{z}$ от свободного конца, равно удлинению части бруса, заключённого между заделкой и этим счением:

$$\boldsymbol{\lambda_z} = \int_z^l \frac{\boldsymbol{\gamma S z dz}}{\boldsymbol{ES}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{2E}} \; (\boldsymbol{l^2} - \boldsymbol{z^2}) .$$

2.7. Энергия деформации при растяжении (сжатии)

При нагружении упругого тела внешние силы совершают работу $\boldsymbol{W}$ на перемещениях, которые получают точки их приложения в результате деформации тела (конструкции). Вследствие этой работы в теле накапливается потенциальная энергия $\boldsymbol{V}$. Деформированное упругое тело является как бы аккумулятором энергии.

Заводя механические часы, совершают определённую работу, которая переходит в потенциальную энергию деформации пружины. Эта энергия переходит в кинетическую, движущую стрелки часов.

Если процесс нагружения совершается медленно (статически) и если пренебречь небольшими потерями энергии, то работа внешних сил $\boldsymbol{W}$ целиком перейдет в потенциальную энергию деформации $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} .$$

Определим работу статически приложенной внешней силы $\boldsymbol{F}$, т. е. такой силы, которая в процессе деформации растёт от нуля до своего конечного значения $\boldsymbol{F_к}$ с малой скоростью. Таким образом, необходимо определить работу переменной силы.

Для решения этой задачи проще всего использовать график зависимости между силой и перемещением. Так как деформация упругая, эта зависимость линейна по закону Гука (рис. 18).

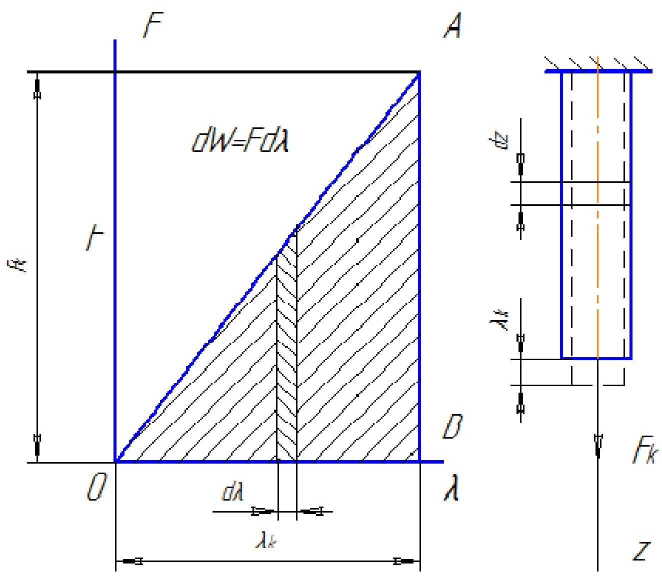


Рис. 18. К определению работы внешней силы

Полная работа силы $\boldsymbol{F}$, совершённая ею в процессе перемещения нижнего сечения от $\boldsymbol{0}$ до конечного значения $\boldsymbol{\lambda_k}$, выражается площадью треугольника $\boldsymbol{OAB}$:

$$\boldsymbol{W = 0,5F_k\lambda_k} .$$

Это выражение называется **теоремой Клайперона**: ***работа силы, статически приложенной к линейно деформируемой системе, равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение соответствующего перемещения.***

Теорема Клайперона верна не только при растяжении или сжатии, но и при любом другом виде деформации.

Выведем формулу для определения потенциальной энергии упругой деформации бруса по известным продольным силам, возникающим в его поперечных сечениях.

Выделим из бруса бесконечно малый элемент длиной $\boldsymbol{dz}$ (рис. 19). Продольные силы $\boldsymbol{N}$ по отношению к этому элементу являются внешними.

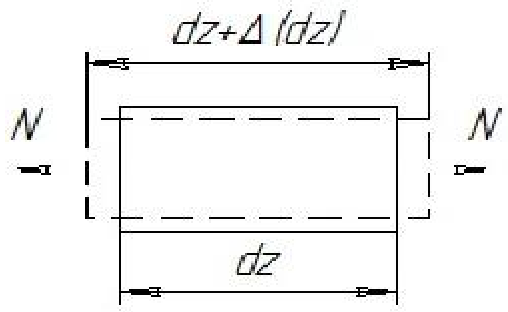


Рис. 19. К определению потенциальной энергии деформации

Тогда энергия деформации, накапливаемая в элементе при его удлинении, равна работе продольных сил $\boldsymbol{N}$ на взаимном пересечении торцов элемента. Данное перемещение равно удлинению элемента $\Delta(\boldsymbol{dz})$.

По теореме Клайперона

$$\boldsymbol{dV = 0,5N}\Delta(\boldsymbol{dz}) .$$

По формуле Гука

$$\Delta(\boldsymbol{dz}) = \frac{\boldsymbol{Ndz}}{\boldsymbol{ES}} .$$

Тогда

$$\boldsymbol{dV} = \frac{\boldsymbol{N^2dz}}{\boldsymbol{2ES}}$$

и

$$\boldsymbol{V} = \int_{l} \frac{\boldsymbol{N^2dz}}{\boldsymbol{2ES}}\ .$$

Для бруса (участка бруса) длиной $\boldsymbol{l}$ с постоянным поперечным сечением и неизменной по длине продольной силой:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{N^2 l}}{\boldsymbol{2ES}}.$$

В самом общем случае, когда брус ступенчатый, а продольная сила переменна, формула будет иметь вид:

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} \frac{\boldsymbol{N^2dz}}{\boldsymbol{2ES}}.$$

Для оценки целесообразности применения того или иного материала в различных амортизирующих устройствах используется понятие удельной энергии деформации, т.е. энергии, накопленной в единице объёма упругодеформированного тела.

Удельная энергия деформации $\boldsymbol{u}$ равна отношению полной энергии деформации $\boldsymbol{dV}$ к объёму $\boldsymbol{dv}$ элемента бруса:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dv}} = \frac{\boldsymbol{N^2dz}}{\boldsymbol{2ESdv}}.$$

Учитывая, что объём элемента бруса $\boldsymbol{dv = Sdz}$, получаем

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{N^2dz}}{\boldsymbol{2ESSdz}} = \frac{\boldsymbol{N^2}}{\boldsymbol{2ES^2}}.$$

Но

$$\frac{\boldsymbol{N^2}}{\boldsymbol{S^2}} = \boldsymbol{\sigma^2}\ ,$$

поэтому

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{2E}}.$$

Единица измерения потенциальной энергии деформации – ***Дж***, удельной энергии – ***Дж/м***^{3}.

2.8. Статически неопределимые системы

В рассмотренных ранее примерах применение метода сечений позволяло установить зависимость между продольными силами, возникающими в поперечных сечениях бруса, и действующими внешними силами.

Внутренние силы определялись только на основе условий равновесия отсечённой части бруса. Системы, подобные рассмотренным, называют ***статически определимыми***.

Системы, в которых внутренние силовые факторы, в частности продольные силы, не могут быть определены с помощью только метода сечений, называют ***статически неопределимыми***. Соответственно *задачи*, связанные с расчётом указанных систем, также принято называть ***статически неопределимыми***.

Степенью статической неопределимости называется разность между общим числом неизвестных в задаче и количеством независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы. Степень статической неопределимости может быть равна единице, двум, трём и т.д. Чем она выше, тем сложнее решение задачи.

Для решения статически неопределимой задачи надо составить кроме уравнений статики так называемые ***уравнения перемещений***, основанные на рассмотрении деформации системы (иногда говорят, что это геометрическая сторона задачи) и применении закона Гука.

Достаточно полное представление о методике решения статически неопределимых задач можно получить только при рассмотрении конкретных примеров.

Пример. Для бруса, жёстко заделанного обоими концами и нагруженного вдоль оси силами $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, приложенными в его промежуточных сечениях (рис. 20, а), построить эпюры продольных сил $\boldsymbol{N}$, нормальных напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и перемещений поперечных сечений $\boldsymbol{\lambda}$.

В заделках бруса возникают реакции, направленные вдоль его оси. Имеем систему сил, направленных по одной прямой, для которой статика даёт *одно* уравнение равновесия:

$$\Sigma F_z = 0 \quad ; \quad -R_A + F_1 + F_2 - R_B = 0 \,.$$

Неизвестных реактивных сил две, следовательно, система *один раз статически неопределима.*

Для составления уравнений перемещений мысленно отбросим одну из заделок, например правую, и заменим её действие на брус соответствующей реактивной силой $\boldsymbol{R_B}$ (рис. 20, б).

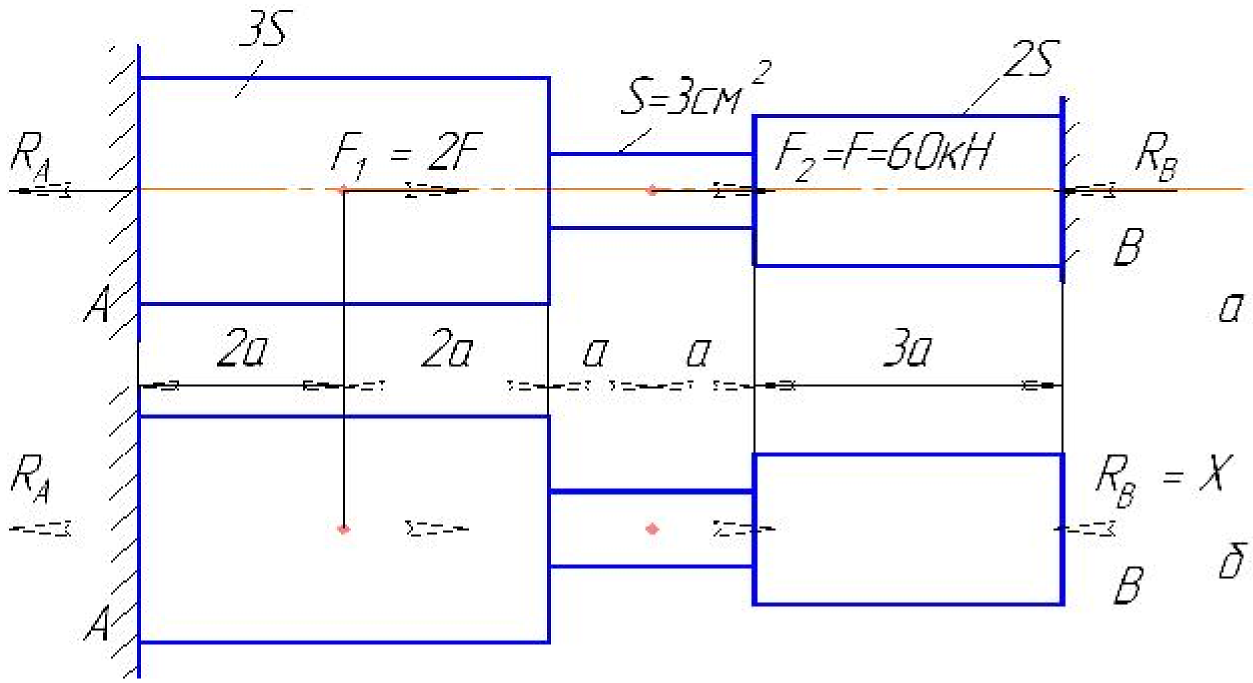


Рис. 20. К решению статически неопределимой задачи

Получим статически определимый брус, нагруженный кроме заданных сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ неизвестной реактивной силой $\boldsymbol{R_B = X}$. Этот статически определимый брус нагружен так же, как заданный статически неопределимый, т. е. эквивалентен ему.

Эквивалентность этих двух брусьев позволяет утверждать, что второй брус деформируется так же, как первый, т. е. перемещение $\boldsymbol{\lambda_{BA}}$ сечения $\boldsymbol{B}$ относительно сечения $\boldsymbol{A}$ равно нулю, так как фактически (в заданном брусе) оно жёстко заделано:

$$\boldsymbol{\lambda_{BA} = 0} .$$

Применив принцип независимости действия сил, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\boldsymbol{\lambda_B = \lambda_B^{F1} + \lambda_B^{F2} + \lambda_B^{X} = 0} ,$$

т.е. перемещение от совместного действия всех сил равно *алгебраической сумме* перемещений от действия каждой силы в отдельности.

На рис. 21 показаны схемы нагружения бруса каждой из сил в отдельности, там же показаны соответствующие реакции левой заделки.

Определим эти перемещения.

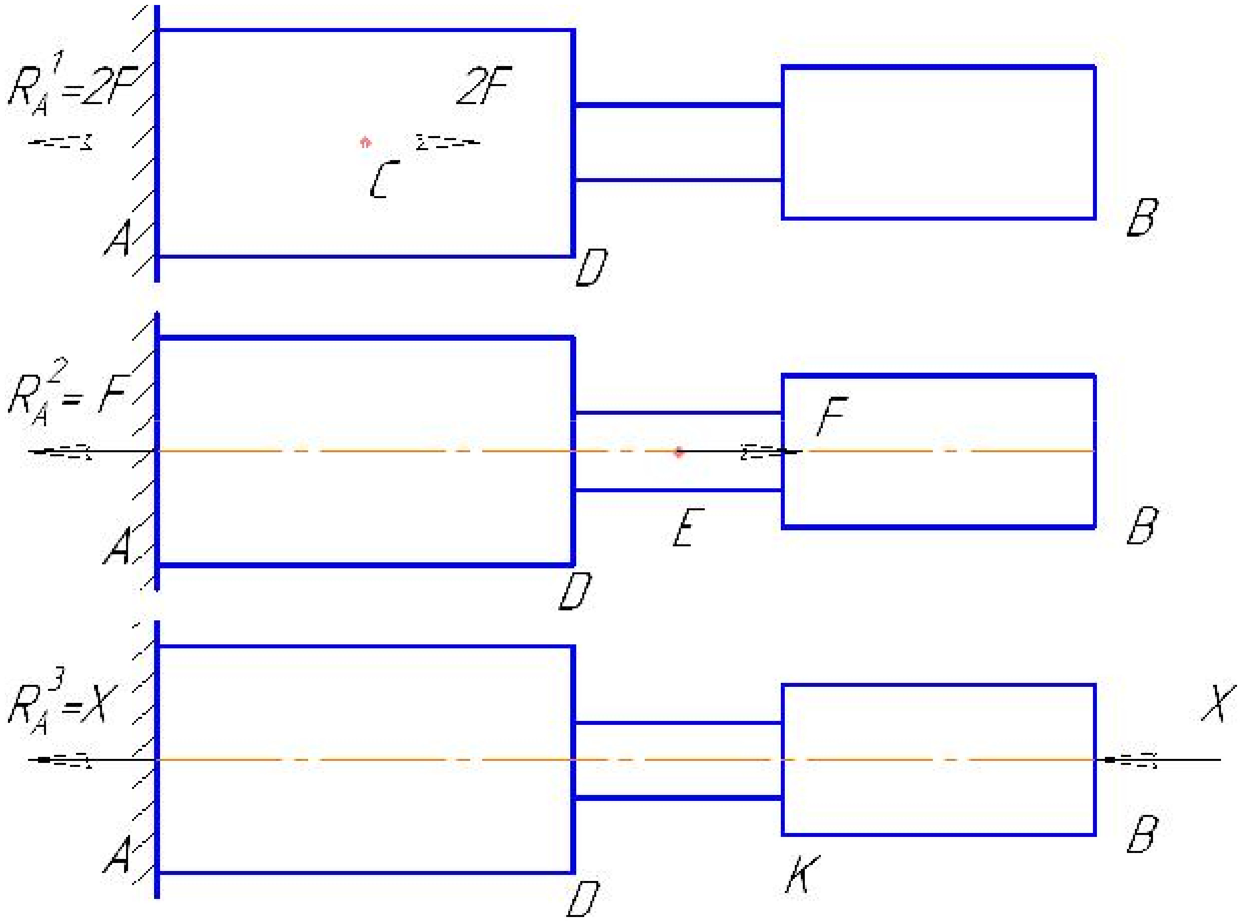


Рис. 21. Применение принципа независимости действия сил для решения статически неопределимых задач

Перемещение $\lambda_B{}^{F1}$ равно удлинению участка AC от силы F_1:

$$\lambda_B{}^{F1} = \frac{2F \cdot 2a}{E \cdot 3S}.$$

Перемещение $\lambda_B{}^{F2}$ равно сумме удлинений участков AD и DE от силы F_2:

$$\lambda_B{}^{F2} = \frac{F \cdot 4a}{E \cdot 3S} + \frac{F \cdot a}{E \cdot S}.$$

Перемещение $\lambda_B{}^{X}$ равно сумме укорочений участков AD и DK и KB от силы X:

$$\lambda_B{}^{X} = -\left(\frac{X \cdot 4a}{E \cdot 3S} + \frac{X \cdot 2a}{E \cdot S} + \frac{X \cdot 3a}{E \cdot 2S}\right).$$

Тогда

$$\lambda_B = \frac{2F \cdot 2a}{E \cdot 3S} + \left(\frac{F \cdot 4a}{E \cdot 3S} + \frac{F \cdot a}{E \cdot S}\right) - \left(\frac{X \cdot 4a}{E \cdot 3S} + \frac{X \cdot 2a}{E \cdot S} + \frac{X \cdot 3a}{E \cdot 2S}\right) = 0.$$

Это уравнение является вторым уравнением (уравнением перемещений), из которого определяется сила $X = 45{,}5$ ***кН***.

Статическая неопределимость раскрыта – имеем статически определимый брус, заделанный одним концом, нагруженный *известными* силами $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{X}$.

Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений строим обычным путём, так же как для любого статически определимого бруса (рис. 22).

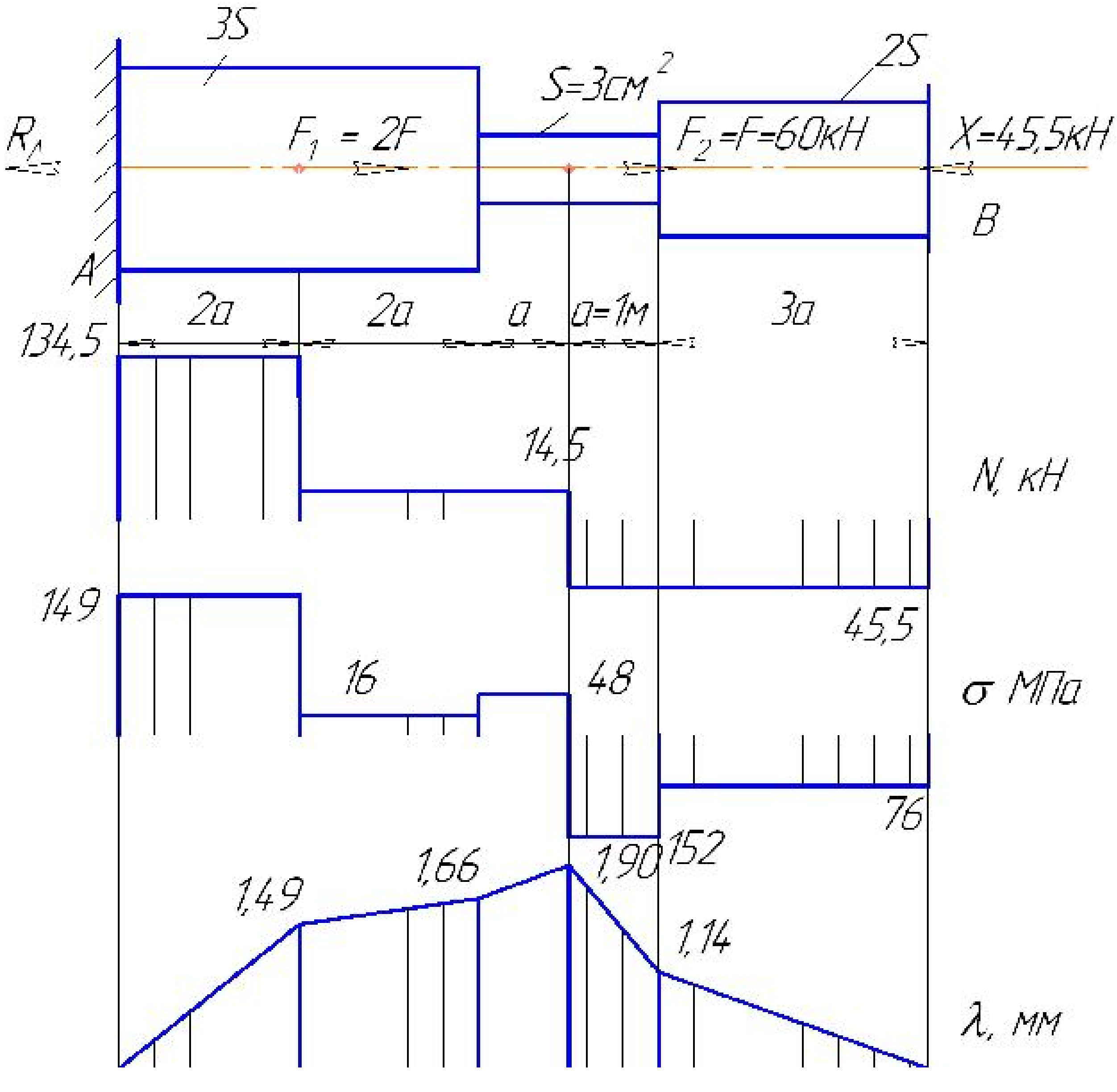


Рис. 22. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и перемещений сечений

На правом конце бруса, в сечении $\boldsymbol{B}$, ордината эпюры $\boldsymbol{\lambda}$ равна нулю, так как в заданном брусе это сечение жёстко закреплено (рис. 20), именно из этого условия определено значение $\boldsymbol{X}$.

2.9. Механические испытания материалов

Первое требование, предъявляемое к большинству изделий – это достаточная прочность. Многие изделия, кроме общей прочности, должны обладать в зависимости от их назначения и условий эксплуатации особыми свойствами.

Например, режущие инструменты должны обладать высокой твёрдостью, для изготовления рессор и пружин применяют специальные стали и сплавы, обладающие высокой упругостью. Вязкие материалы идут на изготовление деталей, которые при работе подвергаются ударной нагрузке, пластичные материалы хорошо обрабатываются давлением.

Механические свойства определяются по результатам ***механических испытаний стандартных образцов материалов***. По виду деформации, испытываемой образцом, различают ***испытания: на растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг, кручение***.

Каждое из этих испытаний отличается схемой нагружения образца, преобладающим направлением возникающих в образце напряжений, типом разрушения образца. Эти отличия отражены в таблице. По характеру изменения действующей нагрузки во времени различают механические испытания: статические, динамические (или ударные) и усталостные.

Статическими называются испытания, при которых образец исследуемого материала подвергают действию постоянной или, чаще всего, медленно и плавно повышающейся нагрузки.

Наиболее важны следующие виды статических испытаний:

– ***испытания на растяжение***. Испытаниям на растяжение непрерывно и плавно повышающейся нагрузкой подвергаются практически все материалы. Это основной вид механических испытаний. Испытаниям постоянной нагрузкой подвергаются металлические материалы при температурах выше 300°C, а также полимеры уже при комнатной температуре;

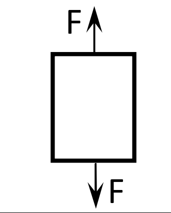
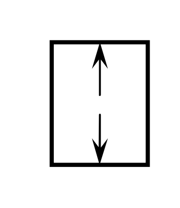
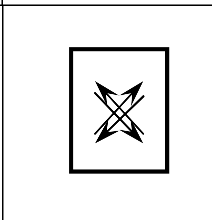
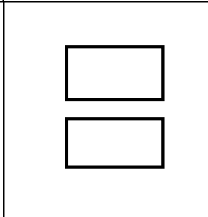
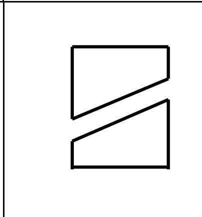
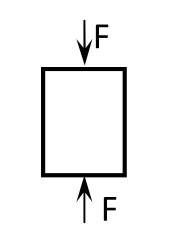
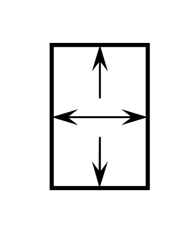
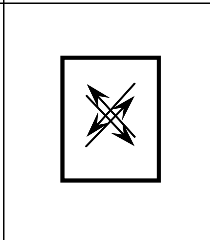
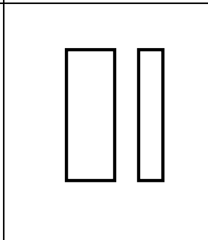
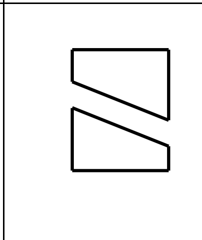
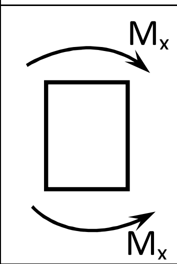
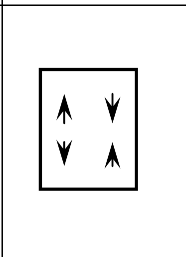
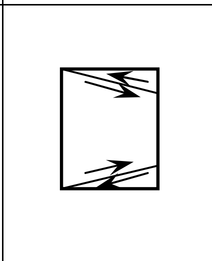
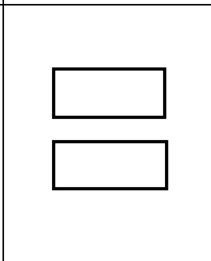
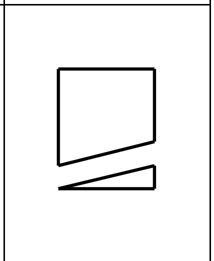
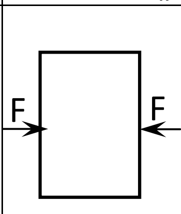
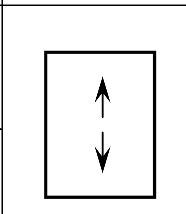
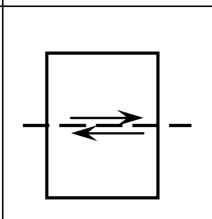
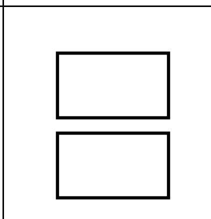
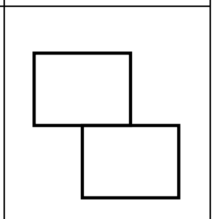
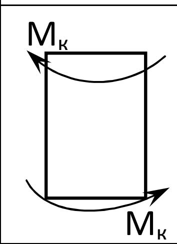
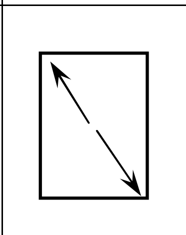
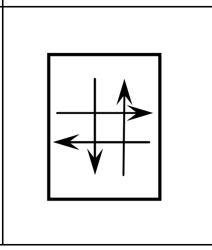
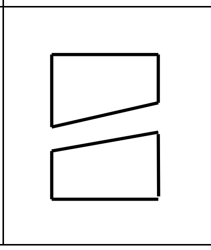
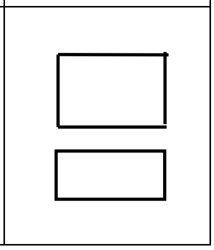
– ***испытания на сжатие***. Этому испытанию подвергаются строительные материалы (дерево, камень, кирпич, бетон), а также металлические и полимерные материалы специального назначения (например, материалы для подшипников);

– ***испытания на изгиб***. Область применения этих испытаний – полимеры, строительные материалы, дерево, стекло, керамика, хрупкие металлические материалы;

– ***испытания на сдвиг***. На сдвиг испытываются такие материалы, как дерево, металлы для заклёпок, материалы для режущего инструмента;

– ***испытания на кручение***. Испытаниям на скручивание подвергают материалы для изготовления проволоки, а также малопластичные материалы (закалённые конструкционные и инструментальные стали).

Таблица. Виды напряжённого состояния и разрушения материалов

Вид испытания	Схема нагруже-ния	Направление действия напряжений		Тип разрушения	
		σ	**τ**	хрупкое	вязкое
Растяжение					
Сжатие					
Изгиб					
Сдвиг					
Кручение					

По результатам статических испытаний определяют прочностные, упругие и пластические свойства материалов.

Динамические испытания характеризуются приложением к образцу нагрузок с резким изменением их величины и большой скоростью деформации. Длительность всего испытания не превышает долей секунды. К этим испытаниям относятся удар и даже взрыв.

По результатам динамических испытаний в основном определяют величину работы, затраченной на деформацию или разрушение образца.

Данных о величине напряжений и деформаций в процессе этих испытаний обычно не получают.

Испытание на ударное растяжение используют для определения прочности и пластичности материала при его растяжении с высокой скоростью.

Испытание на ударное сжатие применяется крайне редко.

Испытание на ударное кручение применяют для определения вязкости материалов, имеющих очень низкую вязкость (цинковые сплавы, литые материалы, инструментальные сплавы, порошковые материалы, полимерные материалы).

Испытание на ударный изгиб (ударную вязкость) имеет наибольшее значение для определения сопротивления хрупкому разрушению вязких металлических и высокополимерных материалов. Это испытание является самым распространенным (после растяжения) сдаточным испытанием материалов во многих производствах.

Усталостные испытания проводятся при многократном циклическом приложении нагрузки к образцу. Такие испытания обычно длятся часами и сотнями часов. По их результатам определяют число циклов нагружения до разрушения образца при разных значениях напряжений. В конечном итоге определяют предел выносливости материала – предельные напряжения, которые образец выдерживает без разрушения в течение заданного числа циклов нагружения. ***Испытания на усталость проводятся на растяжение, сжатие, изгиб, кручение***. Им подвергаются все материалы.

Помимо перечисленных различают еще две группы испытаний. Первая группа – **испытания на твёрдость**. Подробно методика этих испытаний приводится в курсе материаловедения. ***Твёрдость*** – способность материала сопротивляться внедрению в его поверхностный слой другого более твёрдого материала. В процессе испытаний в поверхность образца вдавливается стандартное твёдое тело – индентор. Твёрдость испытуемого материала определяется глубиной вдавливания индентора.

Вторая группа – **испытания на ползучесть и длительную прочность**. Их обычно проводят при повышенных температурах для оценки характеристик жаропрочности материалов. Образцы в течение всего испытания находятся под постоянной нагрузкой. При испытаниях на ползучесть измеряют величину деформации в зависимости от времени испытания. При испытаниях на длительную прочность оценивают время до разрушения образца под действием определённых напряжений.

Механические испытания можно проводить при высоких и низких температурах, при наличии надрезов и исходных трещин, облучении и акустических воздействиях, нестационарных режимах, в агрессивных средах и различных других условиях.

2.10. Испытания на растяжение и сжатие

Лабораторная работа № 1

Испытание материалов на растяжение. Определение основных прочностных и пластических свойств материалов

Цель работы : изучить поведение материала при растяжении до разрушения; получить диаграмму растяжения материала; определить основные прочностные и пластические свойства материала.

Теоретическое обоснование

Информацию о механических свойствах материалов мы получаем из справочников. Наиболее важными из них являются свойства, определяемые при статическом испытании материалов на растяжение.

Методы испытания на растяжение стандартизованы. Стандартом предусмотрены следующие механические характеристики материалов:

- *условный предел упругости материала* $\sigma_{упр}$;
- *физический предел текучести материала* $\sigma_{т}$;
- *условный предел текучести материала* $\sigma_{0,2}$;
- *условный предел прочности материала* $\sigma_{в}$;
- *относительное остаточное удлинение при разрыве* δ;
- *относительное остаточное сужение при разрыве* ψ.

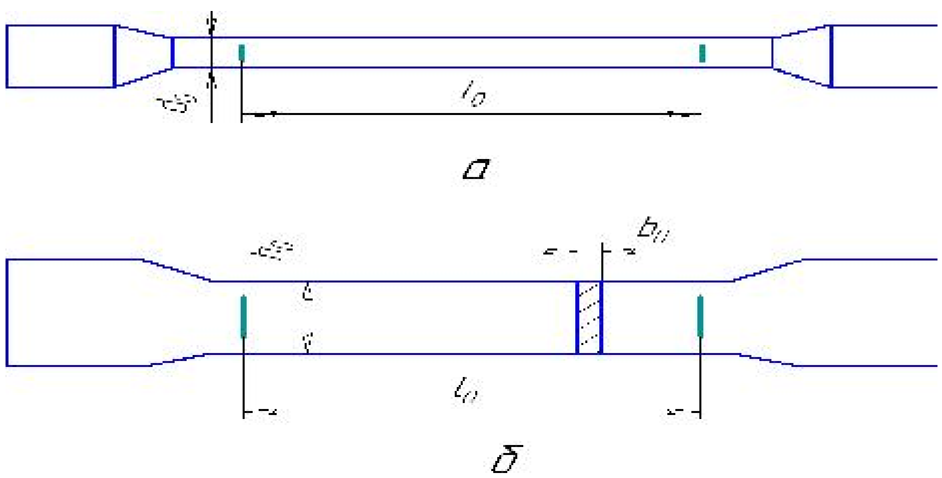


Рис. 23. Стандартные образцы для испытания материалов на растяжение: а – цилиндрический образец; б – плоский образец

В лабораториях испытания на растяжение проводятся на универсальных разрывных машинах. Растяжению подвергают стандартные образцы *круглого или прямоугольного поперечного сечения* (рис. 23).

Абсолютные размеры образцов могут быть различными.

Для обеспечения сопоставимых результатов испытаний расчётная длина образца l_o принимается равной:

$10\ d_o$ для цилиндрических образцов (d_o – диаметр рабочей части образца);

$11{,}3\ \sqrt{So}$ для плоских образцов ($S_o = b_o\ h_o$ – площадь поперечного сечения рабочей части образца, b_o – толщина образца; h_o – ширина образца).

Расчётная длина перед испытанием отмечается на образце рисками.

В процессе испытания самопишущий прибор машины строит графическую зависимость между действующей на образец растягивающей нагрузкой ***F (Н)*** и вызванным этой нагрузкой абсолютным удлинением образца Δl ***(мм)***. Пример такой зависимости для малоуглеродистой пластичной стали приведён на рис. 24.

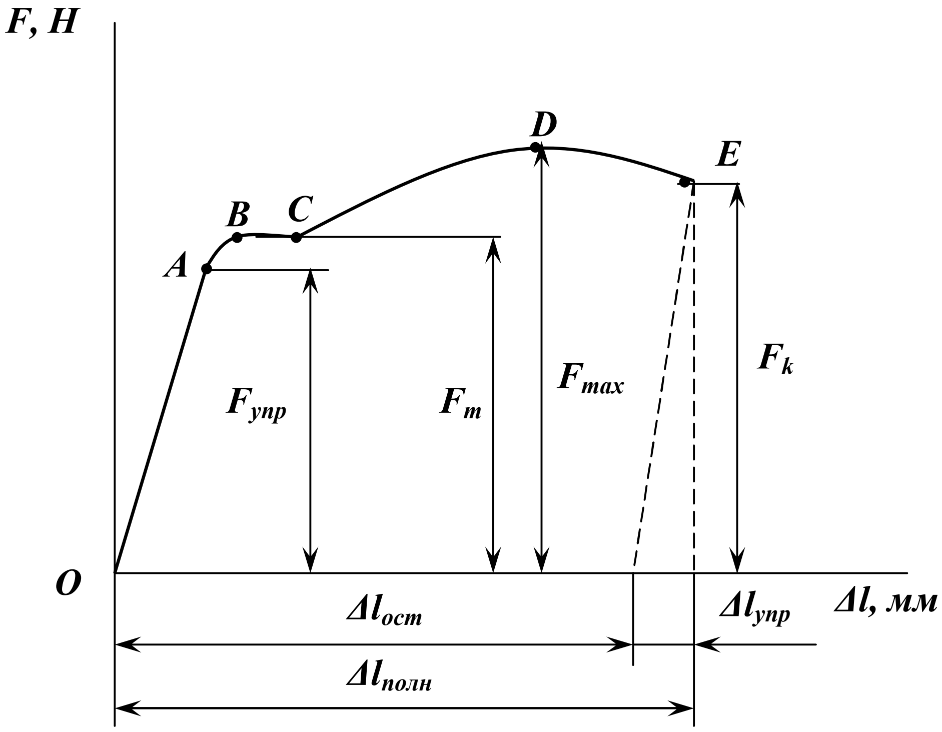


Рис. 24. Зависимость между растягивающей нагрузкой и абсолютным удлинением образца

Численные значения F и Δl сами по себе не характеризуют свойства материала, так как зависят от размеров образца. Чем больше площадь поперечного сечения образца S_o , тем больше сила F , необходимая для его деформирования. Чем больше начальная длина l_o , тем больше будет абсолютное удлинение Δl (образец вытянется больше).

Для того чтобы можно было сравнивать результаты испытаний образцов одного и того же материала различных размеров и формы, необходимо построить зависимость между возникающими в поперечных сечениях образца напряжениями ***σ (МПа)*** и относительным удлинением образца ***ε (%).***

С этой целью необходимо выполнить перерасчёт полученных опытных данных по следующим формулам :

$$\sigma = F / S_o \;; \qquad \varepsilon = (\Delta l / l_o) \cdot 100 \,.$$

Полученная зависимость (рис. 25) называется **диаграммой растяжения материала**. Численные значения σ и ε полностью характеризуют прочностные и пластические свойства материала образца при статическом растяжении.

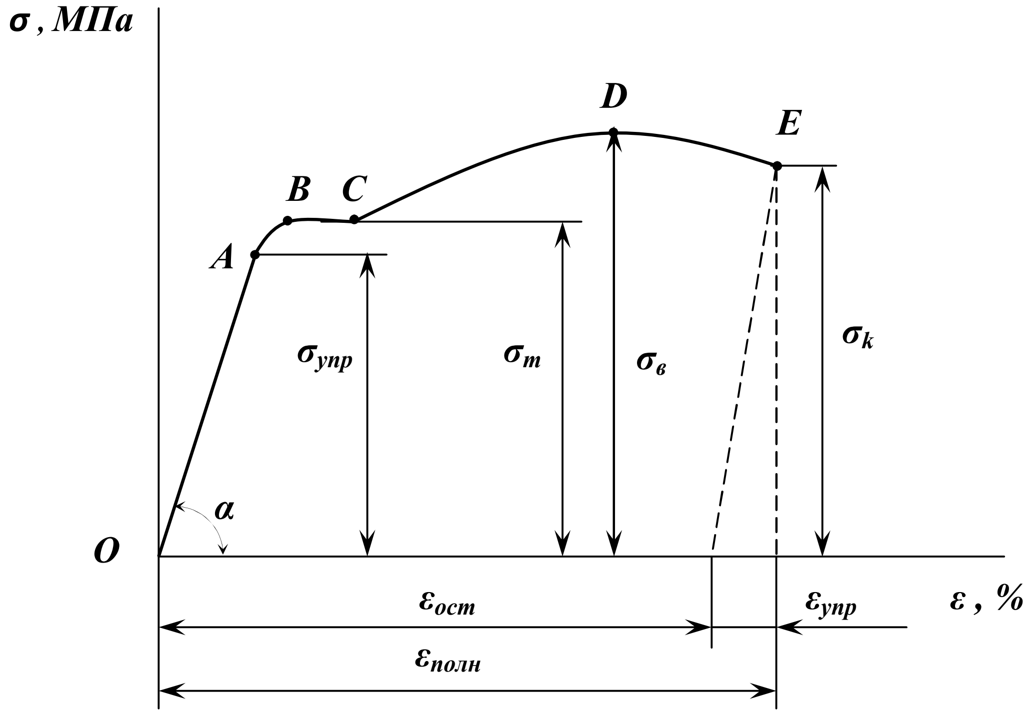


Рис. 25. Диаграмма растяжения малоуглеродистой пластичной стали

Анализируя диаграмму растяжения, изучают поведение материала при растяжении и определяют его основные механические свойства.

Проведём этот анализ.

1. На участке ***OA*** диаграммы растяжения деформации растут пропорционально напряжениям. В материале при этом возникают только упругие деформации. Прямая ***OA*** описывается **законом Гука**:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_{упр} \;,$$

который гласит: ***упругие деформации прямо пропорциональны действующим напряжениям***.

Коэффициент пропорциональности $\boldsymbol{E}$ в этой линейной зависимости – величина, постоянная для каждого материала. Эта величина называется ***модулем продольной упругости*** материала или *модулем упругости I рода*, или *модулем Юнга*.

Модуль продольной упругости ***E (МПа)*** характеризует жёсткость материала, то есть его способность сопротивляться упругим деформациям при растяжении или сжатии.

На диаграмме растяжения материала модуль продольной упругости характеризуется тангенсом угла наклона прямой ***ОА*** к оси ε. Чем больше угол α, тем меньше развиваются упругие деформации при одном и том же напряжении, тем более жёстким является материал.

Ордината точки ***А*** на диаграмме соответствует условному пределу упругости материала $\sigma_{упр}$ ***(МПа)***.

Условным пределом упругости называется наибольшее напряжение, до которого в материале развиваются лишь упругие деформации и сохраняется прямая пропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями. Он определяется по формуле:

$$\sigma_{упр} = F_{упр} / S_o \quad .$$

Детали машин, механизмов, приборов, элементы конструкций должны работать в области упругих деформаций, то есть после снятия рабочих нагрузок восстанавливать первоначальные форму и размеры. Поэтому численное значение предела упругости является важнейшим прочностным свойством для всех материалов, особенно для тех, из которых изготавливают детали типа пружин и рессор.

При напряжениях выше предела упругости в материале образца, наряду с упругими деформациями $\varepsilon_{упр}$, начинают развиваться и пластические (остаточные) деформации $\varepsilon_{ост}$.

Долю остаточной деформации $\varepsilon_{ост}$ в полной деформации $\varepsilon_{полн}$ можно определить, проведя из исследуемой точки диаграммы линию, параллельную линии ***ОА***. Точка пересечения этой линии с осью ε покажет значение остаточной деформации $\varepsilon_{ост}$ (рис. 25).

2. За пределом упругости на диаграмме растяжения наблюдается переход от линии ***ОА*** к более или менее выраженной горизонтальной площадке ***ВС***, соответствующей *процессу текучести материала* .

Явление текучести заключается в значительном росте деформаций без заметного увеличения нагрузки. При этом происходит упрочнение металлического материала под действием пластической деформации (*явление наклёпа*).

Горизонтальный участок ***BC*** называется площадкой текучести материала. Напряжение, при котором происходит рост деформаций без увеличения нагрузки, называется ***физическим пределом текучести*** материала σ_m ***(МПа)***. Он определяется по формуле:

$$\sigma_m = F_m / S_o .$$

Ярко выраженная площадка текучести характерна лишь для материалов с высокой пластичностью. Для других материалов стандартом устанавливается ***условный предел текучести*** материала $\sigma_{0,2}$ ***(МПа)***. Он соответствует напряжению, которое вызывает остаточную деформацию $\varepsilon_{ост} = 0,2\ \%$ (рис. 26).

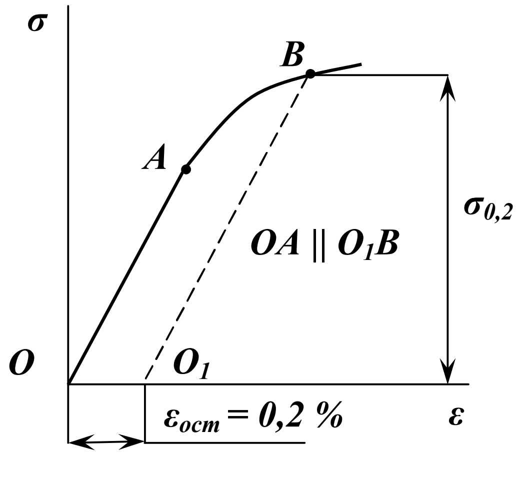


Рис. 26. Определение условного предела текучести материала $\sigma_{0,2}$

Предел текучести материала (физический или условный) характеризует сопротивление материала малым пластическим деформациям и является важнейшей расчётной характеристикой материала.

Действующие в любом изделии или конструкции в процессе эксплуатации напряжения должны быть меньше предела текучести, чтобы не возникало необратимых остаточных деформаций.

3. Претерпев состояние текучести и упрочнившись, материал снова приобретает способность сопротивляться деформированию, и линия диаграммы растяжения на участке ***CD*** (рис. 25) поднимается вверх.

При этом наблюдается рост как упругих, так и пластических деформаций, однако рост остаточных деформаций значительно опережает рост упругих.

Создание в материале напряжений, превышающих предел текучести, приводит к необратимым изменениям формы и размеров тела, но не приводит к его разрушению.

На этом явлении основаны методы обработки материалов давлением (ковка, штамповка, прокатка, прессование, волочение, гибка и другие). Поэтому численное значение предела текучести является важнейшим прочностным свойством для материалов, обрабатываемых давлением.

4. В момент испытания образца, соответствующий точке ***D*** , напряжения в материале достигают своего максимального значения.

Максимальное напряжение, которое может выдержать материал в процессе деформирования, называется ***условным пределом прочности*** материала $\sigma_в$ ***(МПа)*** или временным сопротивлением. Предел прочности рассчитывается по следующей формуле:

$$\sigma_в = F_{max} / S_o \ .$$

При растяжении нагрузкой меньшей, чем F_{max} , образец достаточно равномерно деформируется по всему объёму рабочей части – происходит её равномерное удлинение и сужение.

При достижении предела прочности развитие деформаций начинает приобретать резко выраженный характер и распространяется не на весь образец, а концентрируется в одном месте, которое называется *шейкой*.

Образование шейки (резкого местного сужения образца) представляет собой ***вторую текучесть***, но лишь местного характера. Оно характерно для пластичных материалов, имеющих диаграмму растяжения с максимумом.

5. При дальнейшем растяжении образца (участок ***DE***) площадь поперечного сечения образца в шейке быстро уменьшается.

Поэтому нагрузка $F_к$, необходимая для окончательного разрыва образца (точка ***E***), меньше нагрузки F_{max} , при которой образуется шейка (точка ***D***). Разрушение образца происходит по наименьшему сечению шейки.

Значения условного предела упругости $\sigma_{упр}$, условного (или физического) предела текучести $\sigma_{0,2}$ (или $\sigma_т$) и условного предела прочности $\sigma_в$ являются ***основными прочностными характеристиками*** материала. Чем выше их численные значения (они приводятся в справочной литературе), тем прочнее материал.

По диаграмме растяжения определяют и пластические свойства материалов. Степень пластичности материалов характеризуется двумя основными показателями: относительным остаточным удлинением при разрыве и относительным остаточным сужением при разрыве.

Относительным остаточным удлинением при разрыве δ ***(%)*** называется отношение абсолютного удлинения образца в процессе растяжения к его первоначальной длине. Оно определяется по формуле :

$$\delta = [(l_к - l_o) / l_o] \cdot 100 \ ,$$

где $l_к$ – длина расчётной части образца после разрыва. Она определяется путём стыковки двух частей разрушенного образца и замера расстояния между нанесёнными до испытания рисками.

Относительным остаточным сужением при разрыве ψ ***(%)*** называется отношение изменения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к первоначальной его площади :

$$\psi = [(S_o - S_к) / S_o] \cdot 100 \ ,$$

где $S_к$ – площадь поперечного сечения образца в месте разрыва ($S_к = b_к \cdot h_к$, $b_к$ и $h_к$ – толщина и ширина шейки образца в месте разрыва).

Чем больше численные значения δ и ψ, тем пластичнее материал, тем лучше он может обрабатываться давлением.

Противоположным свойству пластичности является ***хрупкость***. Хрупкие материалы разрушаются при незначительных остаточных деформациях и не могут обрабатываться давлением.

Деление на пластичные и хрупкие материалы достаточно условно.

К ***пластичным*** относят материалы с показателем $\delta > 20\%$: это большинство чистых металлов (медь, алюминий, железо, титан, кобальт, никель и др.), многие деформируемые сплавы цветных металлов (латуни, дуралюмины, магналии и др.), а также низкоуглеродистые стали.

Диаграммы растяжения этих материалов похожи на рассмотренную диаграмму (рис. 25).

К ***хрупким*** материалам относят: высокоуглеродистые стали, чугуны, некоторые чистые металлы (магний, вольфрам, хром, молибден), литейные сплавы цветных металлов (бронзы, силумины), керамику, камень, бетон, неорганическое стекло и др.

Обычно к хрупким относят материалы с показателем $\delta < 5\%$. Диаграммы растяжения хрупких материалов в основном описываются лишь прямой ***OA***, их разрушение происходит практически при отсутствии пластических деформаций (рис. 27, б).

Материалы с показателем пластичности $5 < \delta < 20\ \%$ можно отнести к ***хрупкопластичным***. Диаграммы растяжения хрупкопластичных материалов отличаются отсутствием площадки текучести и характерного для пластических материалов максимума (рис. 27, а).

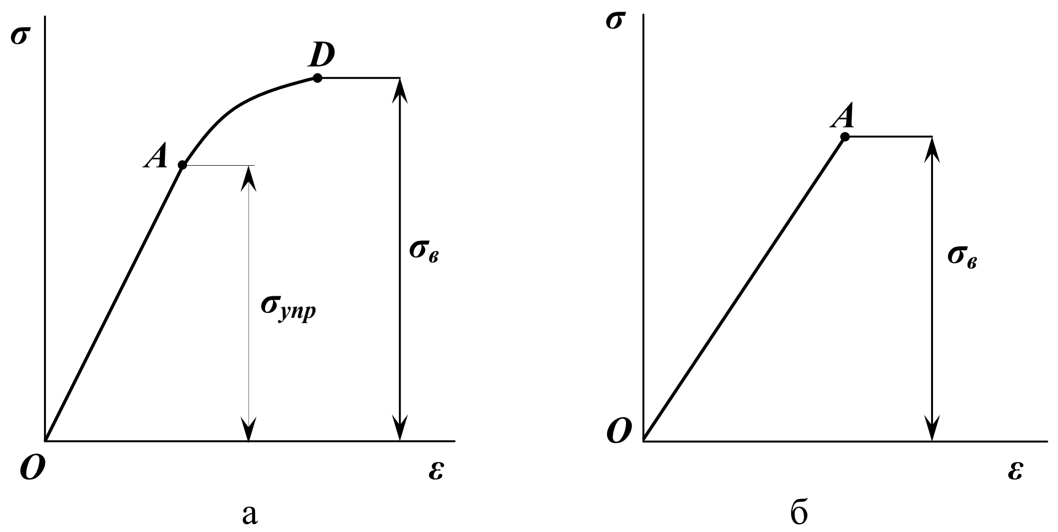


Рис. 27. Типовые диаграммы растяжения: а – для хрупкопластичных материалов; б – для хрупких материалов

В зависимости от условий нагружения один и тот же материал может вести себя и как пластичный и как хрупкий. Многие пластичные материалы ведут себя как хрупкие при низких температурах или при высоких скоростях деформирования.

Порядок выполнения работы

1. Визуально ознакомиться с машиной, на которой будут проводиться испытания; записать тип машины, цену деления шкалы силоизмерительного механизма, скорость деформирования.

2. Замерить и записать исходные размеры поперечного сечения образца h_o и b_o в случае плоского образца или d_o в случае цилиндрического образца. Замеры производить с точностью до 0,01 мм в трёх местах – в середине и по краям рабочей части образца. За расчётную принять наименьшую из трёх площадь поперечного сечения.

3. Рассчитать с точностью до 0,1 мм и отметить рисками на образце его расчетную начальную длину l_o.

4. Зарисовать эскиз образца с указанием его размеров.

5. Установить образец в захваты машины.

6. Включить машину и установить необходимую скорость перемещения активного захвата машины.

7. Наблюдать за построением самопищущим механизмом графической зависимости Δl от F. Записать характерные значения нагрузки, соответствующие $F_{упр}$, F_m , F_{max} , $F_к$. Дождаться разрушения образца.

8. Выключить машину, извлечь из захватов части разрушенного образца, отделить с барабана прибора записанную зависимость.

9. Определить основные прочностные свойства материала образца: условный предел упругости $\sigma_{упр}$, физический (σ_m) или условный $(\sigma_{0,2})$ предел текучести, условный предел прочности $\sigma_в$.

10. Определить конечную расчетную длину образца $l_к$, приложив его части плотно друг к другу и замерив с точностью до 0,1 мм расстояние между исходными рисками.

Рассчитать относительное остаточное удлинение образца δ.

11. Определить площадь минимального поперечного сечения шейки образца в месте разрыва.

Рассчитать относительное остаточное сужение образца ψ.

12. Определить доли упругих $\Delta l_{упр}$ и пластических $\Delta l_{ост}$ деформаций в абсолютной деформации образца $\Delta l_{полн}$ перед разрывом.

13. Составить письменный отчет и сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что называется деформацией?
2. Чем отличаются упругие и пластические деформации?
3. Что называется механическим напряжением?
4. Какова размерность механического напряжения?
5. В чём отличие нормальных и касательных напряжений?
6. Какими буквами обозначают нормальные и касательные напряжения?
7. Какие напряжения характеризуют поведение материала при растяжении – нормальные или касательные?
8. Какой формы образцы применяются при испытании металлических материалов на растяжение?
9. Что называется диаграммой растяжения материала? В каких осях она строится?
10. Чем отличаются абсолютная и относительная деформация? Как они обозначаются? Какова их размерность?
11. Что называется жёсткостью материала? Какой характеристикой и размерностью она определяется?
12. Как формулируется закон Гука?
13. Что называется пределом упругости материала? Его обозначение и размерность? Как его определить?
14. Что называется физическим пределом текучести материала? Его обозначение и размерность? Как его определить?
15. Что называется условным пределом текучести материала? Его обозначение и размерность? Как его определить?
16. В чём суть наклёпа металла?
17. Что называется пределом прочности материала? Его обозначение и размерность? Как его определить?
18. Что называется пластичностью материала?
19. Какие показатели характеризуют пластичность материалов?
20. Что называется относительным остаточным удлинением при разрыве? Его обозначение и размерность? Как его определить?
21. Что называется относительным остаточным сужением при разрыве? Его обозначение и размерность? Как его определить?
22. Какое свойство противоположно пластичности?
23. Какие материалы можно отнести к пластичным?
24. Какие материалы можно отнести к хрупким?
25. Чем отличаются диаграммы растяжения пластичного, хрупко-пластичного и хрупкого материала?

Лабораторная работа № 2

Испытание материалов на сжатие

Цель работы : изучить поведение и характер разрушения различных материалов при сжатии; определить механические характеристики материалов при сжатии.

Теоретическое обоснование

Многие детали машин и приборов, инженерные конструкции и их элементы в процессе эксплуатации испытывают деформацию сжатия.

Испытания на сжатие являются основными при определении механических характеристик хрупких материалов: чугуна, бетона, искусственного и естественного камня, кирпича, керамики и т.д.

При сжатии силы, деформирующие образец, направлены вдоль его оси навстречу друг другу (рис. 28).

Внутренние силы упругости (напряжения) при сжатии распределяются по сечению равномерно, так как материал во всех точках поперечного сечения испытывает одинаковую деформацию.

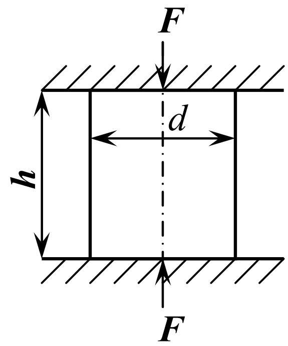


Рис. 28. Схема испытания образцов на сжатие

Испытания на сжатие проводятся как на специальных машинах – прессах, так и на универсальных разрывных машинах с автоматической записью диаграммы сжатия в координатах «нагрузка – деформация».

Результаты испытания на сжатие существенно зависят от формы и размеров образцов, а также от условий их проведения. Обычно испытаниям подвергаются цилиндрические или кубические образцы.

На практике трудно добиться приложения сжимающих сил точно по оси образца. Вследствие этого образец может испытывать не только сжатие, но и продольный изгиб (рис. 29, а).

Для уменьшения влияния продольного изгиба применяют образцы, высота которых h не более чем в три раза превышает поперечный размер d . Торцы образца во избежание перекоса должны быть строго перпендикулярны его оси.

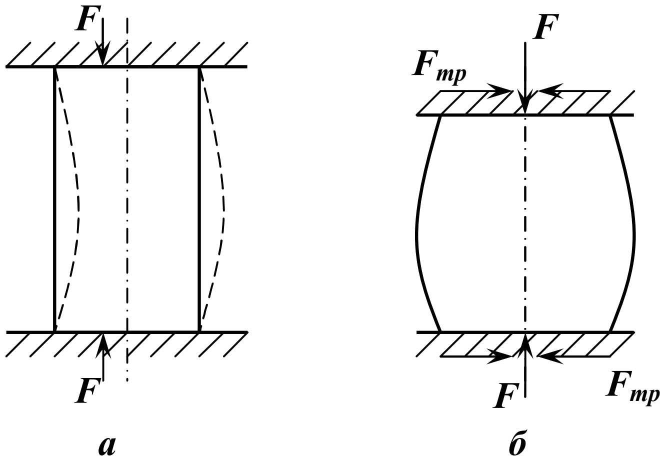


Рис. 29. Влияние условий испытания образцов на изменение их формы при сжатии: ***а*** – неточное приложение сжимающих нагрузок; ***б*** – влияние сил трения на торцевых поверхностях образцов

Применение слишком коротких образцов также недопустимо, так как чем короче образец, тем сильнее влияние сил трения между торцами образца и сжимающими плитами рабочих органов машины (рис. 29, б).

Возникающие силы трения $F_{тр}$ изменяют характер напряжённого состояния, так как они препятствуют развитию поперечных деформаций вблизи торцов. В средней части образец деформируется значительно больше, чем по краям – он становится бочкообразным.

Для уменьшения сил трения рекомендуется торцы образца покрывать смазкой.

При одинаковых размерах у цилиндрических образцов на торцах возникают меньшие силы трения, чем у кубических.

Оптимальные размеры образцов при испытании на сжатие должны соответствовать соотношению: $1 \leq h / d \leq 3$.

При испытании на сжатие в основном определяют две характеристики материала: условный предел текучести $\sigma_т$ и условный предел прочности $\sigma_в$. Они определяются по формулам:

$$\sigma_т = F_т / S_o \quad \text{и} \quad \sigma_в = F_{max} / S_o \ ,$$

где $F_т$ – нагрузка, при которой начинается интенсивное развитие пластических деформаций; F_{max} – максимальная нагрузка, выдерживаемая образцом до разрушения; S_o – площадь поперечного сечения образца до начала испытания.

Характеристики прочности и пластичности материала при испытании на сжатие сохраняют те же формулировки, что и при испытании на растяжение, с той лишь разницей, что соответствующими деформациями являются не удлинение, а укорочение образца, не уменьшение, а увеличение поперечного сечения образца.

Диаграммы «напряжение – деформация» при испытаниях на сжатие пластичных и хрупких материалов сильно различаются.

Типовая ***диаграмма сжатия пластичного материала*** приведена на рис. 30. Образцы пластичных материалов обычно имеют цилиндрическую форму (рис. 31).

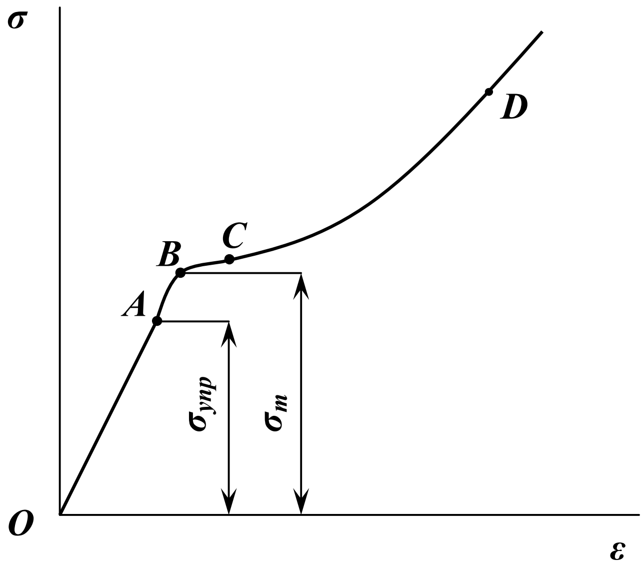


Рис. 30. Типовая диаграмма сжатия пластичного материала

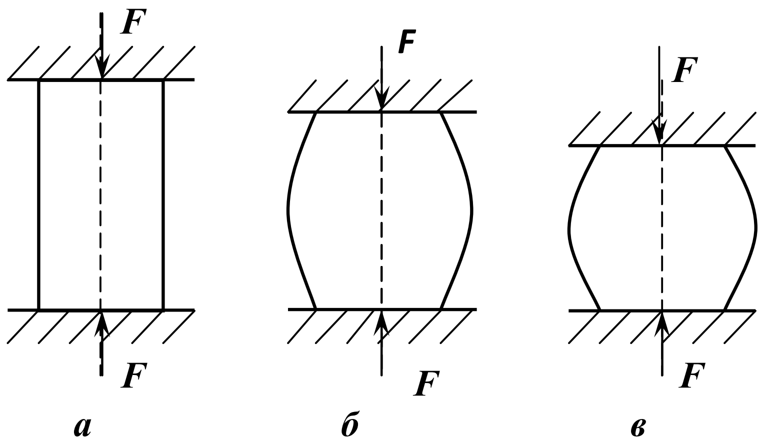


Рис. 31. Изменение формы образца пластичного материала в процессе его испытания на сжатие: а – на участке ***OA***; б – на участке ***BC***; в – на участке ***CD*** диаграммы сжатия

В начальный период испытания диаграмма сжатия имеет вид, аналогичный диаграмме растяжения данного материала.

На участке ***OA*** до напряжения $\sigma_{упр}$ наблюдается прямо пропорциональная зависимость между напряжением и деформацией (действует *закон Гука*). При этом образец сохраняет цилиндрическую форму (рис. 31, а).

В процессе дальнейшего нагружения (участок ***BC***) наблюдается значительный рост деформаций, материал «течёт». Площадка текучести выражена слабее, чем при испытании того же материала на растяжение.

Зафиксированная нагрузка F_m соответствует *условному пределу текучести материала при сжатии* σ_m .

У пластичных материалов численные значения пределов текучести при растяжении и сжатии очень близки.

Под действием пластических деформаций и вследствие возникновения сил трения образец принимает бочкообразную форму (рис. 31, б).

При дальнейшем росте нагрузки (участок ***CD***) происходит упрочнение металла в результате наклёпа, площадь поперечного сечения образца увеличивается, кривая сжатия круто поднимается вверх.

Образец сплющивается (рис. 31, в), но его разрушения не происходит.

Испытание прекращают, когда нагрузка достигает значения, превышающего предел текучести F_m в 2÷5 раз.

Поэтому ***предел прочности пластичного материала при сжатии материала определить невозможно***.

Предел прочности пластичного материала при сжатии условно принимается равным его пределу прочности при растяжении.

Образцы для испытания на сжатие хрупких материалов обычно изготавливают в форме куба с различной длиной ребра, иногда (для малопластичных металлов) – в виде цилиндра.

Типовая ***диаграмма сжатия хрупкого материала*** аналогична его диаграмме растяжения (рис. 32).

Предел текучести при сжатии для хрупких материалов не определяют, так как они не испытывают значительных пластических деформаций и при определённой нагрузке F_{max} образцы разрушаются.

Для хрупких материалов определяют ***условный предел прочности на сжатие*** $\sigma_в$**.**

Предел прочности хрупких материалов при сжатии обычно значительно выше их предела прочности при растяжении. Так, для серых чугунов предел прочности при сжатии равен 500÷900 МПа, а при растяжении 120÷200 МПа.

Поэтому из хрупких материалов обычно изготавливают детали и элементы конструкций, работающие на сжатие.

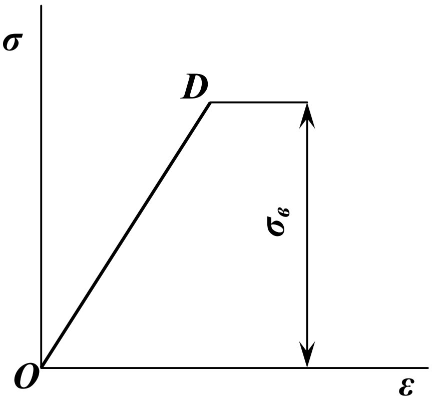


Рис. 32. Типовая диаграмма сжатия хрупкого материала

Разрушение при сжатии образцов из ***хрупкопластичных металлов*** (чугуны, закалённые стали, алюминиевые литые сплавы и др.) происходит при небольших остаточных деформациях под действием касательных напряжений.

На наличие остаточных деформаций указывает слегка бочкообразная форма образцов перед разрушением. В процессе сжатия на поверхности образца появляются ***трещины, расположенные под углом 45° к направлению действия сил***. По этим трещинам образец и разрушается, распадаясь на части (рис. 33).

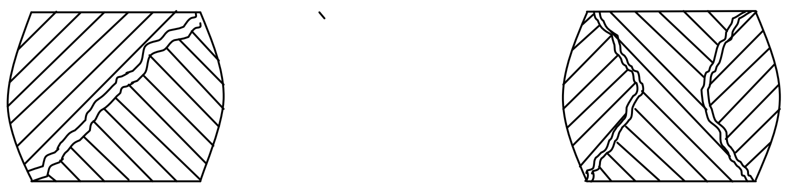


Рис. 33. Схема разрушения хрупкопластичных материалов при сжатии

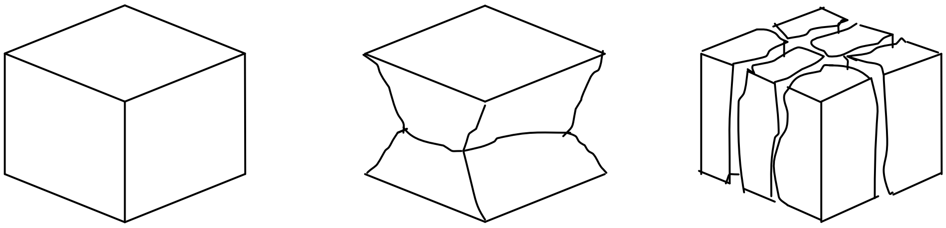
Такой характер разрушения объясняется тем, что максимальные касательные напряжения при растяжении-сжатии действуют по сечениям, расположенным под углом 45° к направлению действия сил.

В некоторых случаях для хрупкопластичных материалов определяют относительную остаточную деформацию при сжатии $\boldsymbol{\delta}$, ***%*** :

$$\delta = [(h_o - h_к) / h_o] \cdot 100 \ ,$$

где h_o и $h_к$ – высота образца соответственно до и после испытания.

Образцы *искусственного цементного камня* или *бетона* обычно изготавливают в виде кубиков с ребром 200 мм (рис. 34, а).



а ***б*** ***в***

Рис. 34. Схема разрушения бетонного образца при сжатии: а – исходный образец; б – разрушение при наличии трения на торцах образца; в – разрушение при малом трении на торцах образца

При сжатии образца наблюдается быстрый рост нагрузки. Разрушение начинается с выкрашивания боковых граней под углом 45°, образец при этом принимает форму двух усечённых пирамид, соединённых вместе (рис. 34, б).

Однако если путём смазки торцовых поверхностей кубика частично устранить трение между образцом и опорной поверхностью, то разрушение произойдёт по плоскостям, параллельным направлению действия сжимающих сил (рис. 34, в).

Особый интерес представляют испытания на сжатие деревянных образцов. ***Дерево является анизотропным материалом – его свойства в разных направлениях различны***.

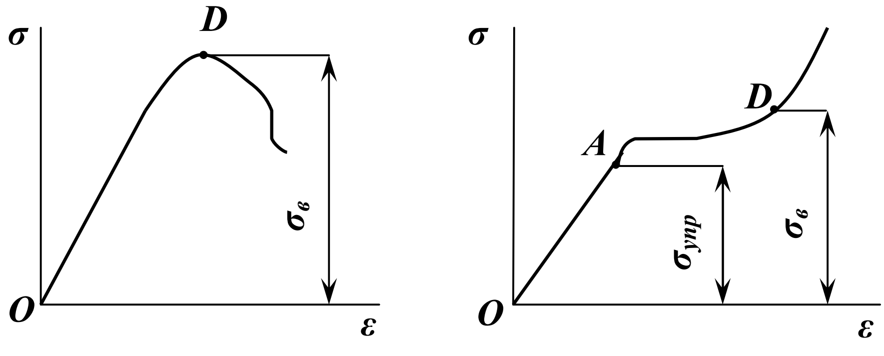
Поэтому испытание на сжатие образцов (особенно из хвойных пород дерева) проводят при действии сжимающих сил как вдоль, так и поперёк волокон. Образцы изготавливают в виде кубиков.

Типовая диаграмма сжатия деревянных материалов вдоль волокон близка по форме к диаграмме сжатия хрупких материалов (рис. 35, а). Разрушение (точка ***D***) сопровождается образованием трещин и обмятием торцовых поверхностей образца (рис. 36, а).

Диаграмма сжатия древесины поперёк волокон похожа на диаграмму сжатия пластичных материалов (рис. 35, б).

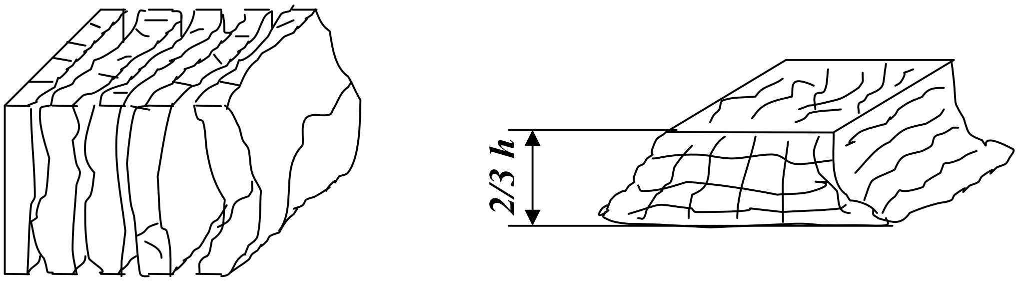
За пределом упругости $\sigma_{упр}$ (точка ***A***) увеличение нагрузки приводит к уплотнению и осадке образца без видимых признаков разрушения (рис. 36, б).

Испытания прекращают, когда образец укорачивается на 1/3 от исходной высоты ***h*** (точка ***D*** на рис. 35, б).



а *б*

Рис. 35. Диаграммы сжатия деревянных материалов: а – вдоль волокон; б – поперёк волокон



а *б*

Рис. 36. Схема разрушения деревянных образцов при сжатии : а – вдоль волокон ; б – поперёк волокон

В результате испытаний деревянных материалов на сжатие определяют условные пределы прочности при сжатии вдоль волокон $\boldsymbol{\sigma_в^{вд}}$ и поперёк волокон $\boldsymbol{\sigma_в^{поп}}$:

$$\sigma_в^{вд} = F_{max} / S_o \quad \text{и} \quad \sigma_в^{поп} = F_{max} / S_o ,$$

где F_{max} – максимальная нагрузка, выдерживаемая образцом; S_o – площадь поперечного сечения образца перед испытанием.

Прочность древесины вдоль волокон обычно в 5÷8 раз выше её прочности поперёк волокон. Иногда эту разницу оценивают ***коэффициентом анизотропии*** деревянных материалов:

$$K_{аниз} = \sigma_в^{вд} / \sigma_в^{поп} .$$

Порядок выполнения работы

1. Визуально ознакомиться с прессами, на которых будут проводиться испытания, изучить принцип работы прессов, записать их тип и цену деления силоизмерительного механизма.

2. Предварительно ознакомиться со свойствами материалов, из которых изготовлены образцы. Определить исходные размеры испытуемых образцов.

3. Установить испытуемый образец между опорным и рабочим органом прессового оборудования.

4. Включить машину и установить необходимую скорость перемещения рабочего органа пресса.

5. В случае разрушения образца записать значение максимальной нагрузки F_{max}. Изучить характер разрушения. Определить условный предел прочности материала при сжатии $\sigma_в$.

6. В том случае, если образец не разрушится, необходимо записать, при какой нагрузке испытание было прекращено и почему.

7. Для хрупкопластичных материалов определить относительную остаточную деформацию при сжатии δ.

8. Для деревянных материалов определить коэффициент анизотропии.

9. Составить письменный отчёт и сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Для каких материалов испытания на сжатие являются основными?
2. Какую форму имеют образцы при испытаниях на сжатие?
3. Какую роль в испытаниях на сжатие играют силы трения?
4. Как ведут себя при сжатии пластичные материалы?
5. В чём особенности диаграммы сжатия пластичных материалов?
6. Как разрушаются при сжатии хрупкие материалы?
7. Как выглядит диаграмма сжатия хрупких материалов?
8. Как ведут себя при сжатии хрупкопластичные материалы?
9. В чём особенности разрушения хрупкопластичных материалов?
10. Как определить условный предел прочности материала при сжатии?
11. Как определить относительную деформацию при сжатии?
12. В чём особенности испытаний на сжатие деревянных материалов?
13. Как определить коэффициент анизотропии деревянных материалов?

2.11. Коэффициенты запаса прочности. Допускаемые напряжения

Механические испытания материалов позволяют определить те напряжения, при которых образец из данного материала разрушается ($\boldsymbol{\sigma_в}$), или в нём возникают заметные пластические деформации ($\boldsymbol{\sigma_m}$ или $\boldsymbol{\sigma_{0,2}}$).

Эти напряжения называют ***предельными*** (или опасными) $\boldsymbol{\sigma}_{\text{пред}}$.

Конструкционные материалы можно разделить на три основные группы: пластичные, хрупкопластичные и хрупкие.

В качестве предельных напряжений для указанных трёх групп при статическом нагружении принимают следующие механические характеристики:

- для ***пластичных материалов*** (их разрушению препятствует возникновение больших пластических деформаций) – физический ($\boldsymbol{\sigma_m}$) или условный ($\boldsymbol{\sigma_{0,2}}$) предел текучести, практически одинаковый при растяжении и сжатии:

$$\boldsymbol{\sigma_{пред}} = \boldsymbol{\sigma_m} \;;$$

- для ***хрупкопластичных материалов*** (их разрушение происходит при сравнительно небольших пластических деформациях) – условный предел текучести, значение которого при растяжении меньше, чем при сжатии ($\boldsymbol{\sigma^P_{0,2} < \sigma^C_{0,2}}$) :

$$\boldsymbol{\sigma_{пред}} = \boldsymbol{\sigma_{0,2}} \;;$$

- для ***хрупких материалов*** (разрушение происходит при очень малых пластических деформациях) – предел прочности, значение которого при растяжении может быть значительно меньше, чем при сжатии ($\boldsymbol{\sigma^{\text{Р}}_{\text{в}} \ll \sigma^C_{\text{в}}}$):

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{пред}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{в}} \;.$$

Для обеспечения прочности деталей и элементов конструкций необходимо так выбрать их размеры и материал, чтобы возникающие в них при эксплуатационных нагрузках напряжения были меньше предельных.

Фактические нагрузки, действующие на детали, и свойства материалов, из которых они изготовлены, могут значительно отличаться от тех, которые принимаются для расчёта.

При этом факторы, снижающие прочность детали, носят чаще всего случайный характер и не могут быть учтены.

Так как детали и машины в целом должны безопасно работать и при этих неблагоприятных условиях, необходимо принимать определенные меры предосторожности. С этой целью вводится понятие коэффициента запаса прочности (или коэффициента безопасности) и допускаемого напряжения:

$$[\boldsymbol{n}] = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\text{пред}}}{[\boldsymbol{\sigma}]},$$

где $[\boldsymbol{\sigma}]$ - допускаемое напряжение.

Коэффициент запаса прочности всегда больше единицы, его значение выбирается с учетом имеющегося опыта эксплуатации машин и конструкций.

Общий коэффициент запаса прочности, как правило, представляется в виде произведения нескольких частных коэффициентов запаса, каждый из которых отражает влияние возможного снижения прочности детали какого-либо определенного фактора или группы факторов.

Например:

$$[\boldsymbol{n}] = [\boldsymbol{n_1}][\boldsymbol{n_2}][\boldsymbol{n_3}],$$

где $[\boldsymbol{n}_1]$ - коэффициент, учитывающий неточность в определении нагрузок и метода расчёта, $[\boldsymbol{n}_1] = 1{,}2 \div 3$; $[\boldsymbol{n}_2]$ - коэффициент, учитывающий неоднородность материала, его чувствительность к недостаткам механической обработки, недостаточную изученность свойств материала, $[\boldsymbol{n}_2] = 1{,}2 \div 6$; $[\boldsymbol{n}_3]$ - коэффициент, учитывающий степень ответственности детали, $[\boldsymbol{n}_3] = 1 \div 1{,}5$.

Таким образом, общий коэффициент запаса прочности может колебаться от 1,4 до 10 и гораздо выше (например, строительство мостов в сейсмически активных зонах).

Допускаемое напряжение принимается равным:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\text{пред}}}{[\boldsymbol{n}]}.$$

Условие прочности гласит: прочность детали или конструкции обеспечена, если возникающие в них в процессе эксплуатации максимальные напряжения не превышают допускаемого:

$$\boldsymbol{\sigma_{max}} \leq [\boldsymbol{\sigma}].$$

Значение принимаемого при расчёте допускаемого напряжения в значительной степени определяет надёжность и экономичность машины или конструкции.

Чем ниже допускаемое напряжение, то есть чем выше коэффициент запаса, тем осторожнее произведен расчёт, тем выше надёжность детали, но расход материала велик и конструкция неэкономична.

Повышение допускаемого напряжения позволяет создать более лёгкую и экономичную конструкцию, но если это повышение произведено недостаточно обоснованно, то конструкция будет ненадёжной.

2.12. Расчёты на прочность при растяжении и сжатии

В зависимости от цели различают три вида расчётов на прочность.

1. Проверка прочности бруса

При проверочном расчёте бруса известны: нагрузка на брус, размеры поперечного сечения бруса и материал, из которого брус изготовлен.

В этом случае определяют продольные силы, затем максимальное нормальное напряжение и сравнивают его с допускаемым напряжением на растяжение (сжатие) для материала бруса.

Условие прочности при этом:

$$\boldsymbol{\sigma_{max} = \frac{N}{S} \leq [\sigma]} .$$

2. Проектирование бруса

При проектировочном расчёте по известной нагрузке на брус определяют продольные силы. На основе этого выбирают материал бруса по допускаемым напряжениям и рассчитывают форму и размеры поперечного сечения.

Условие прочности выглядит так:

$$\boldsymbol{S \geq \frac{N}{[\sigma]}} .$$

3. Определение допускаемой нагрузки

При определении допускаемой нагрузки сначала по заданным размерам поперечного сечения и известному допускаемому напряжению рассчитывают максимальную допускаемую продольную силу:

$$\boldsymbol{N_{max} \leq S \cdot [\sigma]} .$$

Затем, установив связь между продольной силой и нагрузкой (методом сечений), можно определить и максимальную допускаемую нагрузку.

Сжатые стержни кроме расчёта на прочность в наиболее ослабленном сечении должны также рассчитываться на устойчивость во избежание продольного изгиба.

2.13. Контрольные задачи и примеры их решения

Номер варианта представляет собой двузначное число. Первая цифра означает номер строки в таблице данных, вторая – номер схемы нагружения.

Задача 1

Стальной брус ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) с размерами сечений S_1 и S_2 находится под действием внешних сил F_1 , F_2 и F_3 согласно предлагаемым схемам нагружения. Построить эпюры продольных сил N (кН) , нормальных напряжений σ (МПа) и перемещений сечений λ (мм) . Данные взять из таблицы.

При растяжении (сжатии) в поперечных сечениях прямого бруса возникает один внутренний силовой фактор – продольная сила N . Продольная сила в произвольном поперечном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил F , приложенных к оставленной (по методу сечений) части бруса.

При растяжении рассматриваемого участка бруса продольная сила направлена от сечения, а при сжатии – к сечению. Продольные силы, соответствующие деформации растяжения, считают положительными, а деформации сжатия – отрицательными.

Закон изменения продольных сил по длине бруса изображается эпюрой продольных сил N.

Нормальные напряжения σ при растяжении и сжатии распределены по сечению равномерно. Поэтому напряжения в произвольном сечении равны отношению продольной силы N , возникающей в данном сечении, к его площади.

При растяжении напряжения считают положительными, при сжатии – отрицательными. Закон изменения напряжений по длине бруса изображается эпюрой нормальных напряжений σ .

Поперечные сечения перемещаются в направлении оси бруса. Перемещение произвольного сечения относительно жёсткой заделки равно изменению длины части бруса, заключённой между этим сечением и заделкой.

График, показывающий перемещения сечений относительно заделки, называется эпюрой перемещений λ .

Взаимное перемещение двух сечений равно изменению длины части бруса, заключённой между этими сечениями.

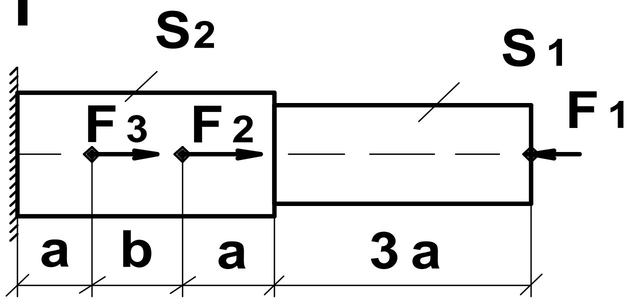
Если продольная сила на участке бруса положительна, то эпюра перемещений на нём идёт вверх по отношению к жёсткой заделке, если отрицательна – эпюра идёт вниз.

Таблица данных к задаче 1

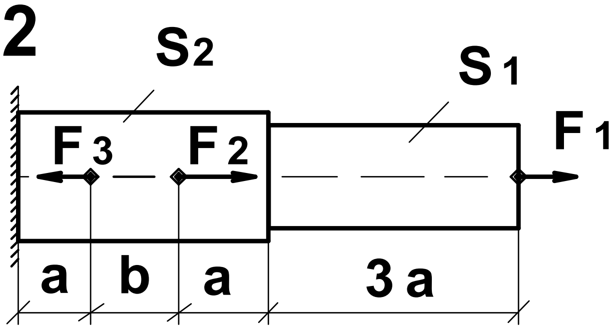
Номер строки	***F_1, кН***	***F_2, кН***	***F_3, кН***	***S_1, см^2***	***S_2, см^2***	***a, м***	***b, м***
1	10	15	16	2,0	1,7	0,20	0,25
2	20	10	30	2,5	3,5	0,24	0,45
3	30	12	10	3,0	2,3	0,60	0,15
4	20	30	5	3,3	2,6	0,28	0,40
5	20	42	40	1,6	2,8	0,65	0,30
6	10	21	20	2,1	6,0	0,42	0,70
7	20	41	40	5,0	1,9	0,54	0,50
8	30	12	10	1,8	1,5	0,15	0,32
9	30	12	8	2,7	3,8	0,36	0,62
10	38	25	5	2,2	4,2	0,55	0,35

Расчетные схемы к задаче 1

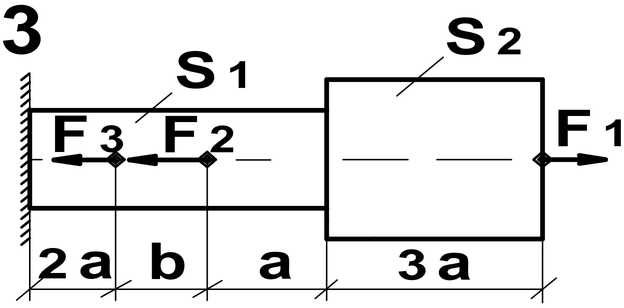
1



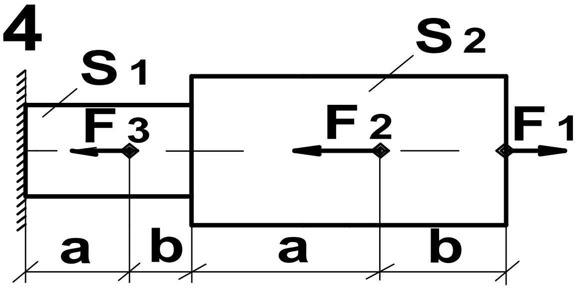
2



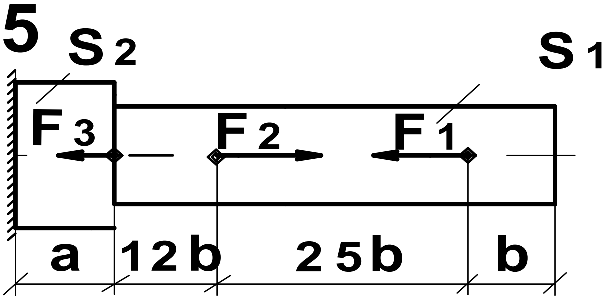
3



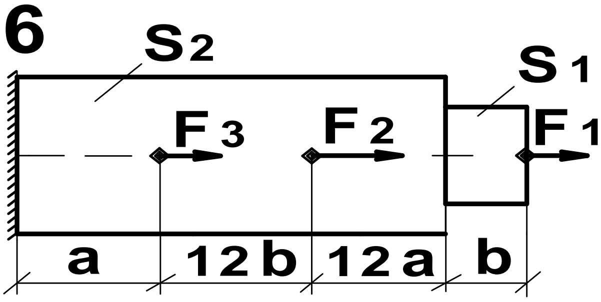
4



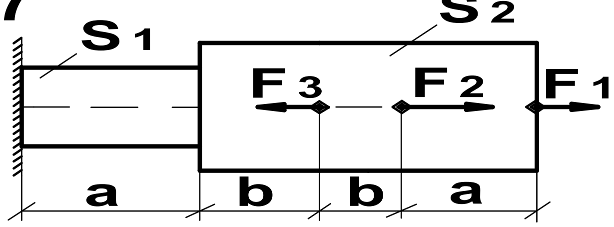
5



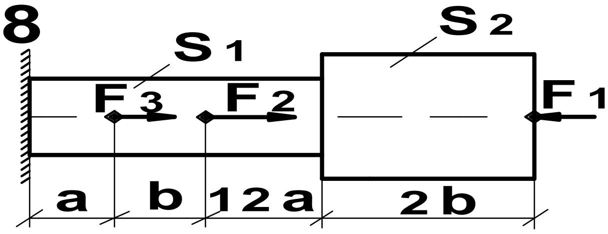
6



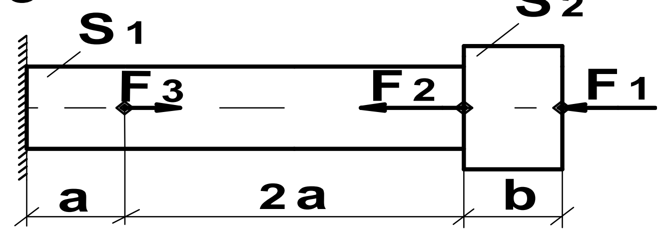
7



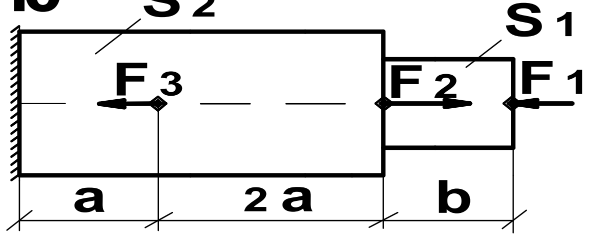
8



9



10



Пример. Дано: $F_1 = 100$ кН, $F_2 = 200$ кН, $F_3 = 400$ кН, $S_1 = 10$ см^2, $S_2 = 5$ см^2, $S_3 = 12{,}5$ см^2, $l = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине бруса, изображенного на рис. 37.

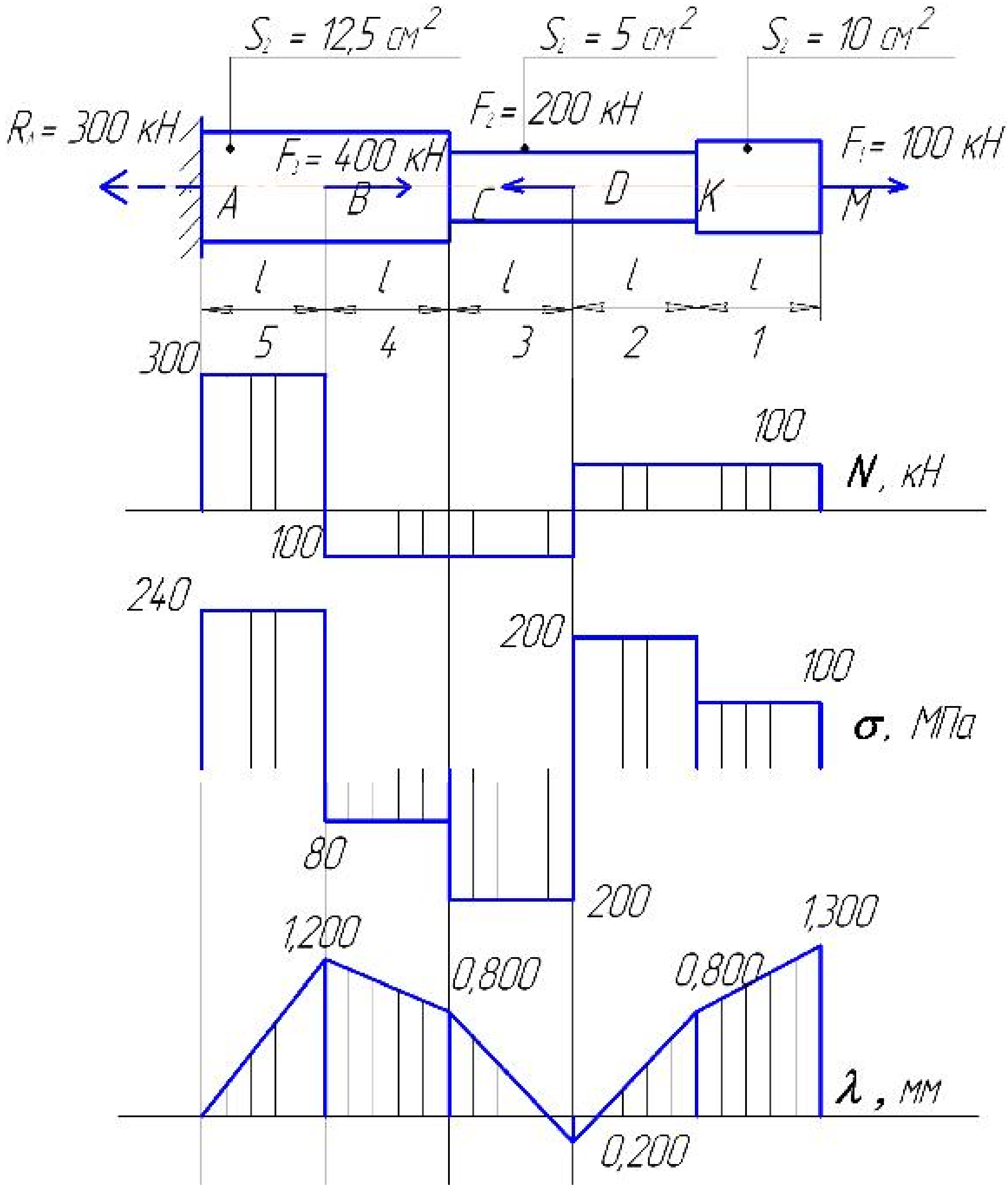


Рис. 37. К решению контрольной задачи 1

Решение

Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границы участков проходят через точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения. Таким образом, имеем пять участков.

Строим ***эпюру продольных сил***, применяя ***метод сечений***.

Продольная сила N в любом сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, приложенных к оставленной части бруса.

При этом, если продольная сила направлена от сечения, то она является растягивающей, и на эпюре положительна, а если от сечения, то сжимающей или отрицательной.

На участках ***1*** и ***2:***

$$N_1 = N_2 = +F_1 = +100\ кН\ .$$

На участках ***3*** и ***4:***

$$N_3 = N_4 = +F_1 - F_2 = +100\ кН - 200\ кН = -100\ кН\ .$$

На участке ***5:***

$$N_5 = +F_1 - F_2 + F_3 = +100\ кН - 200\ кН + 400\ кН = +300\ кН\ .$$

Эпюры штрихуются тонкими вертикальными линиями.

Можно строить эпюру продольных сил по так называемым **скачкам**.

Если строить эпюру от свободного конца, то под сечениями, в которых приложены внешние силы, на эпюре продольных сил имеет место *скачок*, равный внешней силе. При этом скачок направлен вверх, если сила растягивающая, и наоборот, если сжимающая – то вниз.

Строим ***эпюру нормальных напряжений***.

Нормальное напряжение σ рассчитывается путём деления значения продольной силы N на соответствующее значение площади поперечного сечения S .

Необходимо помнить, что для получения размерности напряжения ***МПа***, размерность продольной силы должна быть выражена в ***Н*** , а размерность площади поперечного сечения – в ***мм²*** . Тогда имеем:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{+100 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = +100\ МПа\ \ ;\ \ \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{+100 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = +200\ МПа\ \ ;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_2} = \frac{-100 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = -100\ МПа\ \ ;\ \ \sigma_4 = \frac{N_4}{S_3} = \frac{-100 \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^2} = -80\ МПа\ \ ;$$

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{S_3} = \frac{+300 \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^2} = +240\ МПа\ .$$

На любом участке бруса знаки эпюр продольных сил и нормальных напряжений должны быть одинаковы.

Строим ***эпюру перемещений сечений***.

Поперечные сечения бруса при растяжении и сжатии перемещаются вдоль оси бруса. Для построения эпюры перемещений λ достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков.

Построение эпюры перемещений следует начинать от неподвижного или условно принятого неподвижным сечения, в нашем случае от сечения A .

Сечение A неподвижно, т. е. $\lambda_A = 0$.

Перемещение сечения B относительно сечения A равно изменению длины (в данном случае удлинению) участка AB (участка ***5***) бруса:

$$\lambda_{BA} = \Delta l_{AB} = \frac{N_5 \cdot l_5}{E \cdot S_3} = \frac{+300 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 12{,}5 \cdot 10^2} = +\,1{,}200 \text{ мм}\,.$$

Откладываем это значение на эпюре λ под сечением B . Значения λ_A и λ_B соединяем прямым отрезком. Знак «+» означает, что сечение B удаляется от сечения A и перемещается вправо.

Перемещение сечения C относительно неподвижного сечения A равно алгебраической сумме изменений длин участков ***5*** и ***4*** бруса:

$$\lambda_{CA} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = +\,1{,}200 + \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot S_3} =$$
$$= +\,1{,}200 + \frac{-100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 12{,}5 \cdot 10^2} = +\,1{,}200 - 0{,}400 = +\,0{,}800 \text{ мм}\,.$$

Откладываем это значение на эпюре λ под сечением C . Значения λ_B и λ_C соединяем прямым отрезком и т.д.

$$\lambda_{DA} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = +\,0{,}800 + \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot S_2} =$$
$$= +\,0{,}800 + \frac{-100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = +\,0{,}800 - 1{,}000 = -\,0{,}200 \text{ мм}\,.$$

$$\lambda_{KA} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DK} = -\,0{,}200 + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot S_2} =$$
$$= -\,0{,}200 + \frac{+100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = -\,0{,}200 + 1{,}000 = +\,0{,}800 \text{ мм}\,.$$

$$\lambda_{MA} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DK} + \Delta l_{KM} = +\,0{,}800 + \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot S_1} =$$
$$= +\,0{,}800 + \frac{+100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = +\,0{,}800 + 0{,}500 = +\,1{,}300 \text{ мм}\,.$$

Таким образом, эпюра перемещений представляет ломаную линию. На участках бруса, где значение продольной силы положительно, эпюра λ поднимается вверх при движении от неподвижного сечения, и наоборот.

Задача 2

Стальной брус ($E=2\cdot10^5$ *МПа*) с размерами сечений S и $2S$ и длинами участков a , b *и* c находится под действием внешней силы F и собственного веса (удельный вес стали $\gamma = 78{,}5$ *кН/м*^{3}). Найти перемещение сечения $I - I$. Данные взять из таблицы.

Если ось бруса вертикальна, то его собственный вес вызывает центральное растяжение или сжатие. Если вертикальный брус закреплён верхним концом, то от собственного веса он растягивается, а при закреплении нижнего конца – сжимается.

Собственный вес (силу тяжести) вертикального бруса можно рассматривать как продольную (осевую) внешнюю нагрузку, равномерно распределённую вдоль оси бруса.

Продольная сила N , возникающая от действия силы тяжести, переменна по высоте бруса. При верхнем закреплении бруса продольная сила линейно увеличивается сверху вниз.

Перемещение произвольного поперечного сечения бруса λ зависит от величины продольной силы, то есть от его расположения относительно заделки.

Общее перемещение сечения $I - I$ определится исходя из принципа независимости действия сил. Перемещение сечения от силы тяжести складывается из двух слагаемых:

$$\lambda_{I\text{-}I} = \lambda_в + \lambda_н ,$$

где $\lambda_в$ – удлинение от силы тяжести части бруса, расположенной выше сечения $I - I$ (в формуле Гука сила тяжести – распределённая);

$\lambda_н$ – удлинение от силы тяжести части бруса, расположенной ниже сечения $I - I$ (в формуле Гука сила тяжести – сосредоточенная).

Перемещение сечения $I - I$ от внешней силы F равно удлинению части бруса, расположенной выше сечения.

Удлинение участка бруса длиной l с поперечным сечением S , подверженного растяжению внешней сосредоточенной силой F , равно:

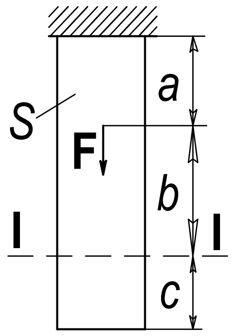
$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S} .$$

Удлинение того же участка под действием собственного веса, равного силе F ($G = F$), составит:

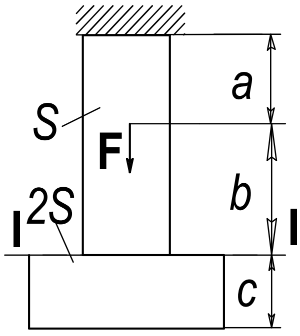
$$\Delta l = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot S} .$$

Расчетные схемы к задаче 2

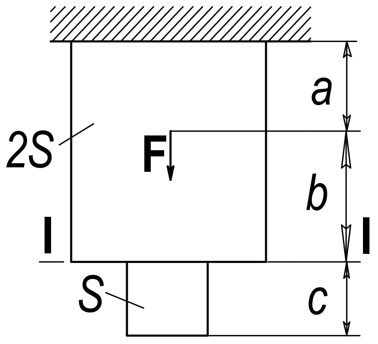
1



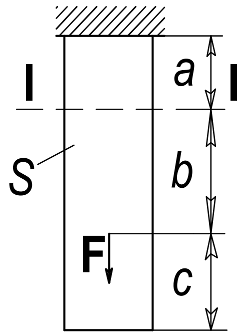
2



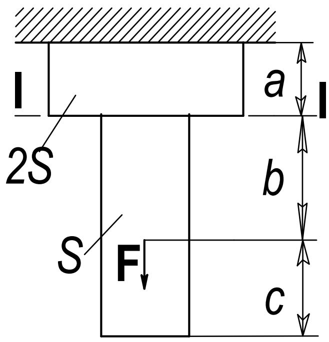
3



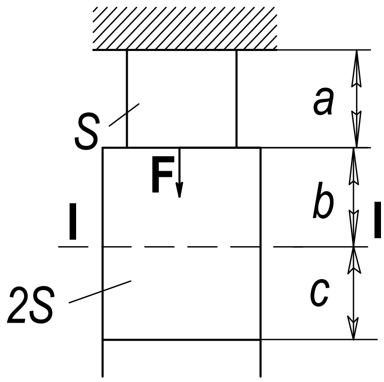
4



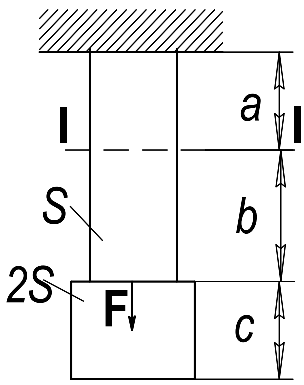
5



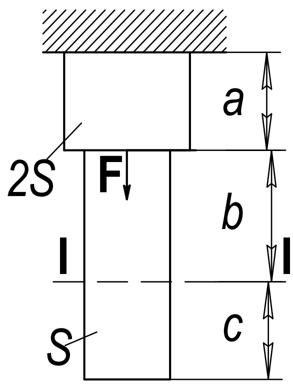
6



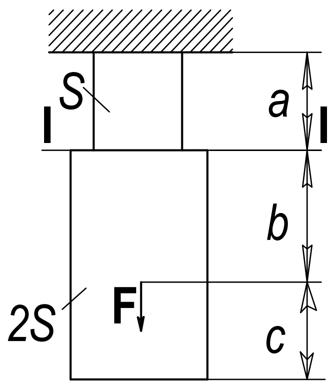
7



8



9



10

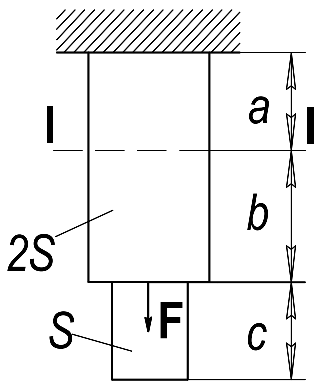


Таблица данных к задаче 2

Номер строки	***F, кН***	***S, см²***	***a, м***	***b, м***	***c, м***
1	1,1	11	2,1	2,1	1,1
2	1,2	12	2,2	2,2	1,2
3	1,3	13	2,3	2,3	1,3
4	1,4	14	2,4	2,4	1,4
5	1,5	15	2,5	2,5	1,5
6	1,6	16	2,6	2,6	1,6
7	1,7	17	2,7	2,7	1,7
8	1,8	18	2,8	2,8	1,8
9	1,9	19	2,9	2,9	1,9
10	2,0	20	3,0	3,0	2.0

Пример. Дано: $F = 2$ *кН*, $S = 20$ *см*^{2}, $a = 2$ *м*, $b = 2$ *м*, $c = 1$ *м* .

Определить перемещение сечения $I - I$ бруса, изображённого на рис. 38. Учесть влияние силы тяжести бруса.

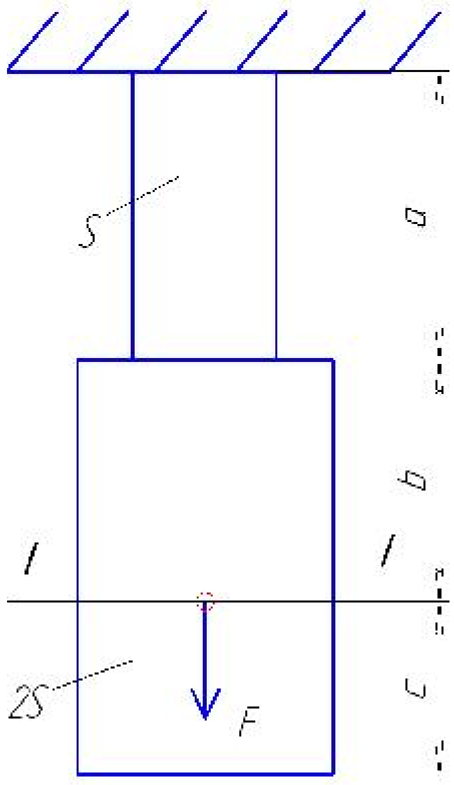


Рис. 38. К решению контрольной задачи 2

Решение. Перемещение сечения $I - I$ равно удлинению части бруса, расположенной выше этого сечения, то есть участков a и b :

$$\lambda_{I\text{-}I} = \Delta l_a + \Delta l_b \,.$$

Удлинение участка a происходит под действием собственного веса G_a, веса участков b и c ($G_в$ и G_c), а также силы F .

Вес участка стального бруса длиной l с поперечным сечением S равен:

$$G = \gamma \cdot l \cdot S \,.$$

Тогда

$$G_a = \gamma \cdot a \cdot S = 78{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^2 = 312\ H\,,$$

$$G_b = \gamma \cdot b \cdot 2\,S = 78{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 2{\cdot}20 \cdot 10^2 = 624\ H\,,$$

$$G_c = \gamma \cdot c \cdot 2\,S = 78{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2{\cdot}20 \cdot 10^2 = 312\ H\,.$$

Удлинение участка a будет равно:

$$\Delta l_a = \Delta l_a^{Ga} + \Delta l_a^{Gb} + \Delta l_a^{Gc} + \Delta l_a^{F} =$$

$$= \frac{G_a \cdot a}{2 \cdot ES} + \frac{G_b \cdot a}{ES} + \frac{G_c \cdot a}{ES} + \frac{F \cdot a}{ES} = \frac{1}{ES}\,(½ \cdot G_a + G_b + G_c + F) \cdot a =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2}\,(156 + 624 + 312 + 2 \cdot 10^3) \cdot 2 \cdot 10^3 = 0{,}0155\ мм.$$

Удлинение участка b происходит под действием собственного веса $G_в$, веса участка c (G_c) и силы F :

$$\Delta l_b = \Delta l_b^{Gb} + \Delta l_b^{Gc} + \Delta l_b^{F} =$$

$$= \frac{G_b \cdot b}{2 \cdot ES} + \frac{G_c \cdot b}{ES} + \frac{F \cdot b}{ES} = \frac{1}{ES}\,(½ \cdot G_b + G_c + F) \cdot b =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2}\,(312 + 312 + 2 \cdot 10^3) \cdot 2 \cdot 10^3 = 0{,}0131\ мм.$$

В итоге перемещение сечения $I - I$ составит :

$$\lambda_{I\text{-}I} = 0{,}0155 + 0{,}0131 = 0{,}0286\ мм\,.$$

Задача 3

Стальной кубик (модуль упругости $E = 2{\cdot}10^5$, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}25$) находится под действием сил, создающих плоское напряжённое состояние (одно из трёх главных напряжений σ_z равно нулю). Требуется найти:

1) главные напряжения и направление главных площадок;
2) максимальные касательные напряжения;
3) относительные деформации ε_x , ε_y , ε_z;
4) относительное изменение объема;
5) удельную потенциальную энергию деформации.

Данные взять из таблицы.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется ***напряжённым состоянием*** в этой точке.

Если по одной площадке (на расчётных схемах она лежит в плоскости чертежа) касательные и нормальные напряжения равны нулю, то такое напряжённое состояние называется плоским.

Значения напряжений по разным площадкам находятся между собой в определённых зависимостях.

Главные напряжения – это максимальные и минимальные нормальные напряжения, а ***главные площадки*** – те, по которым они действуют.

По главным площадкам ***касательные напряжения*** равны нулю. Главные площадки взаимно перпендикулярны. Площадки, по которым касательные напряжения экстремальны, называются ***площадками сдвига***.

Относительные деформации, относительное изменение объёма, удельная потенциальная энергия деформации определяются с помощью ***обобщённого закона Гука*** на основании известных значений нормальных напряжений, модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Закон Гука действителен лишь при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

Если действие нормального напряжения направлено к элементу, то значение этого напряжения необходимо взять со знаком ***«минус»***, а если от элемента – со знаком ***«плюс»***.

Согласно ***закону о парности касательных напряжений*** $\tau_x = \tau_y$.

Расчетные схемы к задаче 3

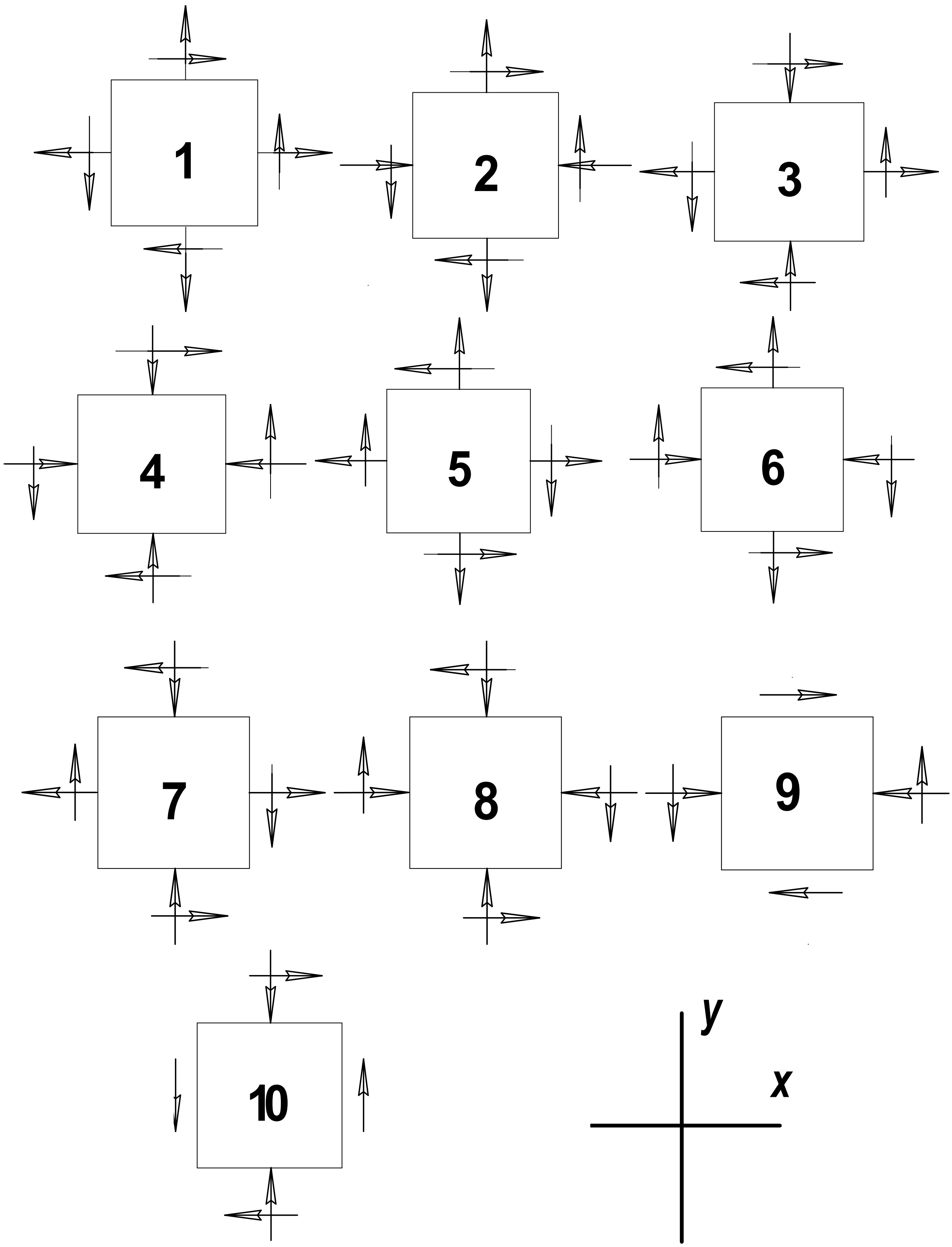


Таблица данных к задаче 3

Номер строки	σ_x, *МПа*	σ_y, *МПа*	τ_x, *МПа*
1	10	80	50
2	20	90	60
3	30	100	70
4	40	10	80
5	50	20	90
6	60	30	100
7	70	40	10
8	80	50	20
9	90	60	30
10	100	70	40

Пример. Дано: $\sigma_x = 30$ ***МПа***, $\sigma_y = -100$ ***МПа***, $\tau_x = \tau_y = \tau = 30$ ***МПа.***

Для схемы плоского напряжённого состояния, изображённого на рис. 39, выполнить пять требований задачи 3.

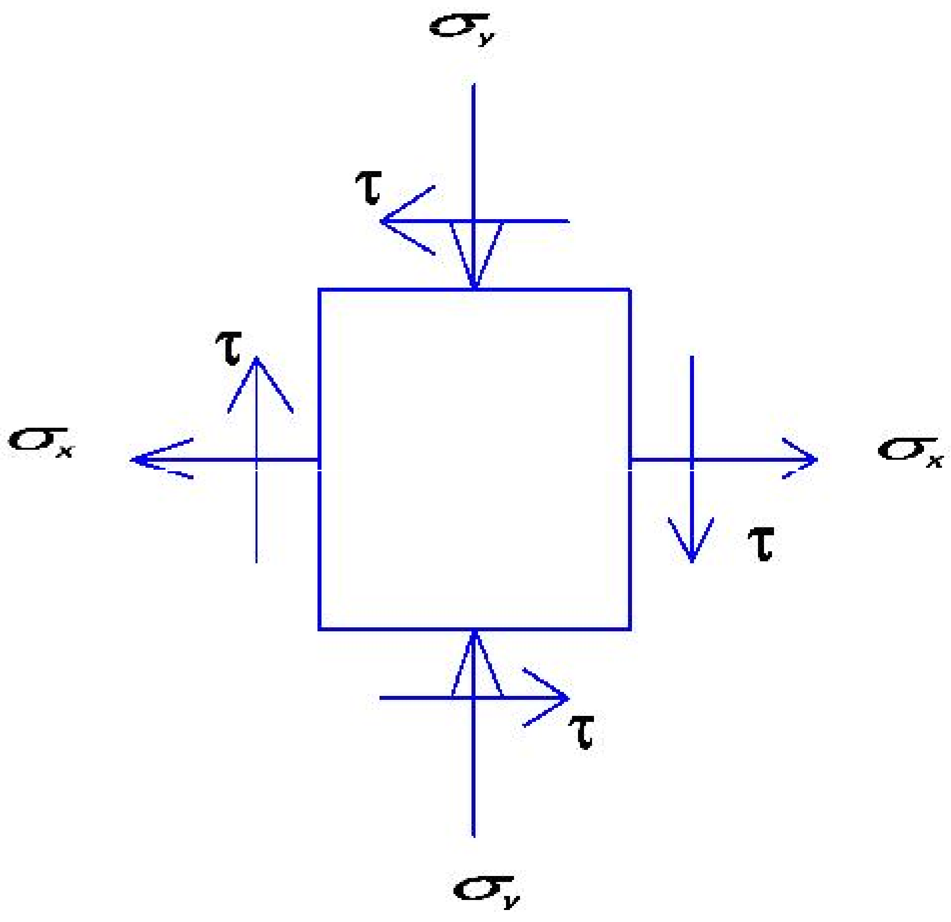


Рис. 39. К решению контрольной задачи 3

1. Главные напряжения определим по формуле:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\sigma_x + \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}{2};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{30 + (-100)}{2} + \frac{\sqrt{(30-100)^2 + 4 \cdot 30^2}}{2} = 11{,}1 МПа$$

$$\sigma_{\max} = \frac{30 + (-100)}{2} - \frac{\sqrt{(30-100)^2 + 4 \cdot 30^2}}{2} = -81{,}1 МПа$$

Определим ***направление главных площадок***:

$$tg(2\psi_0) = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 30}{30 - (-100)} = 0{,}462;$$

отсюда $\psi_0 = 12{,}4^\circ$.

2. Определим ***максимальные касательные напряжения***.

Максимальное для данной точки тела касательное напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\boldsymbol{\tau_{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Между главными напряжениями существует зависимость: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, поэтому в нашем случае: $\sigma_1 = 11{,}1 МПа; \;\; \sigma_2 = 0; \;\; \sigma_3 = -81{,}1 МПа.$

Тогда

$$\boldsymbol{\tau_{max}} = \frac{11{,}1 - (-81{,}1)}{2} = 46{,}1 МПа.$$

3. Относительные деформации определим согласно обобщённому закону Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon_x = \frac{1}{E}\,[\sigma_x - \mu\,(\sigma_y + \sigma_z)] = 1/2{\cdot}10^5\,[30 - 0{,}25\,(-100 + 0)] = 27{,}5{\cdot}10^{-5}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_y = \frac{1}{E}\,[\sigma_y - \mu\,(\sigma_x + \sigma_z)] = 1/2{\cdot}10^5\,[-100 - 0{,}25\,(30 + 0)] = -53{,}75{\cdot}10^{-5}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_z = \frac{1}{E}\,[\sigma_z - \mu\,(\sigma_x + \sigma_y)] = 1/2{\cdot}10^5\,[0 - 0{,}25\,(30 + (-100) + 0)] = 8{,}75{\cdot}10^{-5}}.$$

4. Относительное изменение объёма рассматриваемого элемента составит:

$$\boldsymbol{\Theta = \frac{1-2\mu}{\mathrm{E}} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2 \cdot 0{,}25}{2 \cdot 10^5} (30 + (-100) + 0) = -\ 17{,}5 \cdot 10^5}\ .$$

5. Удельная потенциальная энергия деформации будет равна:

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2} - 2 \cdot \mu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)] =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} [11{,}1^2 + 0^{\,2} + (-81{,}1)^2 - 2 \cdot 0{,}25\ (11{,}1 \cdot 0 + 0 \cdot (-81{,}1) + (-81{,}1) \cdot 11{,}1] =}$$

$$\boldsymbol{= 1790 \cdot 10^{-5}\ \text{МПа} = 1790 \cdot 10^{-5}\ \text{Н} \cdot \text{мм/мм}^3 = 1790 \cdot 10^{-8}\ \text{Н} \cdot \text{м/ мм}^3 =}$$

$$\boldsymbol{= 17900\ \text{Дж/ мм}^3}\ .$$

Контрольные вопросы для самоконтроля

Основные понятия

1. В чём состоят задачи расчётов на прочность, жёсткость, устойчивость?
2. Что называется брусом, оболочкой, пластиной, массивным телом?
3. Что называется осью бруса?
4. По каким признакам и как классифицируются нагрузки?
5. Что представляет собой интенсивность распределённой нагрузки?
6. В каких единицах выражаются сосредоточенные силы и моменты, а также интенсивности распределённых силовых нагрузок?
7. Что представляют собой внутренние силы?
8. В чём сущность метода сечений?
9. Что называется напряжением? В чём отличие касательных и нормальных напряжений? В каких единицах они выражаются?
10. Какова зависимость между полным, нормальным и касательным напряжениями в точке данного сечения?
11. В чём состоит принцип независимости действия сил?
12. В чём заключается гипотеза плоских сечений?

Теория напряжённого состояния

1. Какое напряжённое состояние называется пространственным (трёхосным), плоским (двухосным) и линейным (одноосным)?
2. Каково правило знаков для нормальных и касательных напряжений?
3. Докажите закон парности касательных напряжений?
4. Что представляют собой главные напряжения и главные площадки? Как расположены главные площадки друг относительно друга?
5. Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
6. Выведите формулы для определения главных напряжений и углов наклона главных площадок.
7. Как определить главную площадку, по которой действует максимальное главное напряжение в общем случае плоского напряжённого состояния?
8. Чему равны экстремальные значения касательных напряжений в случае плоского состояния?
9. Что представляют собой площадки сдвига и как они наклонены к главным площадкам?
10. Чему равна сумма нормальных напряжений на любых трех взаимно-перпендикулярных площадках?
11. Чему равны максимальные и минимальные касательные напряжения (при заданных главных напряжениях) и по каким площадкам они действуют?
12. Выведите формулы, выражающие обобщённый закон Гука. Почему эти формулы действительны и для случая, когда заданные нормальные напряжения не являются главными?

Растяжение и сжатие

1. Какие случаи деформации бруса называются центральным растяжением?
2. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса?
3. Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится?
4. Какой вид имеют эпюры продольных сил для бруса, нагруженного несколькими осевыми сосредоточенными силами и равномерно распределённой осевой нагрузкой?
5. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого бруса и чему они равны?
6. Как используется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) для выяснения закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) бруса?
7. Как строится график (эпюра), показывающий изменение (по длине бруса) нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса?
8. Как вычисляются нормальные и касательные напряжения в наклонных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого бруса? Сделайте вывод соответствующих формул.
9. В каких сечениях растянутого бруса возникают наибольшие нормальные и в каких наибольшие касательные напряжения?
10. Что называется полной (абсолютной) продольной деформацией? Что представляет собой относительная продольная деформация? Каковы размерности абсолютной и относительной продольных деформаций?
11. Что называется модулем упругости E? Как влияет величина E на деформацию бруса?
12. Что называется жёсткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии)?
13. Как формулируется закон Гука? Напишите формулы абсолютной и относительной продольных деформаций бруса.
14. Что называется абсолютной и относительной поперечными деформациями бруса?
15. Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении и сжатии?
16. Что называется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона) и какие он имеет значения?
17. В каких координатах строится диаграмма растяжения?
18. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением)? Что представляет собой площадка текучести?
19. Какие деформации называются упругими и какие остаточными или пластическими?
20. Какое явление называется наклёпом?
21. Что называется условным пределом текучести? Для каких материалов определяется эта механическая характеристика?

22.Чем отличается диаграмма растяжения пластичной стали от диаграммы растяжения хрупкой стали?
23.Чем отличаются диаграммы сжатия пластичной и хрупкой сталей от диаграмм растяжения?
24.Чем отличается диаграмма сжатия чугуна от диаграммы растяжения?
25.Что называется остаточным относительным удлинением образца и остаточным относительным сужением образца? Какое свойство материала они характеризуют?
26.Какие материалы называются анизотропными?
27.Как определяются продольные перемещения точек бруса при продольной силе и размерах поперечного сечения, непрерывно изменяющихся по длине оси бруса, а также при ступенчато-переменном сечении и продольных силах, постоянных в пределах отдельных участков?
28.Что представляет собой эпюра продольных перемещений?
29.Какое действие нагрузки называется статическим?
30.Как найти работу растягивающей силы по диаграмме растяжения?
31.Сделайте вывод формулы работы растягивающей силы при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности.
32.При каком условии и почему потенциальная энергия деформации бруса принимается равной работе внешних сил?
33.Что называется удельной потенциальной энергией деформации, каковы её выражение и размерность? Выведите соответствующую формулу.
34.Как определяется потенциальная энергия деформации при брусе со ступенчатым изменением размеров поперечных сечений и при одновременном действии на брус нескольких осевых сил?
35.Как определяется потенциальная энергия деформации при продольных нагрузках, распределенных по длине оси бруса, или при непрерывном изменении размеров поперечных сечений бруса?
36.Выведите формулы продольных сил, нормальных напряжений, продольных деформаций и потенциальной энергии деформации от собственного веса вертикального бруса постоянного сечения.
37.Как объяснить наличие множителя ½ в формуле удлинения вертикального бруса постоянного сечения от собственного веса?
38.Что называется допускаемым напряжением? Как оно выбирается для пластичных и хрупких материалов?
39.Что называется коэффициентом запаса прочности и от каких основных факторов зависит его величина?
40.Какие три характерных вида задач встречаются при расчете прочности конструкций? Напишите условия прочности при растяжении для каждого из этих видов задач.
41.Какие системы называются статически неопределимыми?
42.Что представляют собой дополнительные уравнения?
43.Что называется степенью статической неопределимости системы?

Библиографический список

1. Дарков, А.В. Сопротивление материалов.: учеб. для техн. вузов/ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро.- 5-е изд. перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1989-624 с.

2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов. / В.И.Феодосьев.–10-е изд., перераб. и доп.– М. :Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 591 с.

3. Степин, П.А. Сопротивление материалов: учеб. для немашиностроительных спец. вузов/ П.А. Степин. - 8-е изд. - М.: Высш.шк., 1988. - 367 с.

4. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин: - 2-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 2000. - 560 с.

5. Сопротивление материалов: учебник / А.Г. Горшков и др.– М: Физматлит, 2002. – 544с.

6. Ахметзянов, М.Х. Сопротивление материалов: учебник / М.Х. Ахметзянов, П.В. Грес, И.Б. Лазарев. – М.: Высш. шк., 2007. – 336 с.

7. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для техн. вузов / И.Н. Миролюбов и др. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1985 - 399 с.

8. Лихарев, К.К. Сборник задач по сопротивлению материалов/ К.К. Лихарев, Н.А. Сухова. - М.: 1980. – 100 с.

Учебное издание

Козловский Александр Эдуардович

Р А С Ч Ё Т Э Л Е М Е Н Т О В К О Н С Т Р У К Ц И Й

Н А Р А С Т Я Ж Е Н И Е И С Ж А Т И Е

У ч е б н о е п о с о б и е

Редактор О.А. Соловьёва

Подписано в печать 24.02.2015. Формат 60х84 1/16. Бумага писчая.

Усл. печ. л. 4,88. Тираж 75 экз. Заказ

ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВПО «ИГХТУ»

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7