

Т.Ю. Степанова, В.В. Бойцова

Прикладная механика

Учебное пособие

Иваново 2018



Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Т. Ю. Степанова, В. В. Бойцова

Прикладная механика

Учебное пособие

Иваново 2018

УДК 621.8

Степанова, Т. Ю.

Прикладная механика: учебное пособие / Т. Ю. Степанова, В. В. Бойцова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2018. – 156 с.

Учебное пособие содержит краткое изложение необходимых теоретических положений на рассматриваемые темы учебной программы, а также примеры решений заданий и содержание заданий для выполнения самостоятельной работы студентами-технологами по основным разделам курса «Прикладная механика»: статика, сопротивление материалов.

Порядок изложения материала принят таким образом, чтобы наиболее отчетливо проявилось органическое единство разделов дисциплины. Взаимосвязь разделов обеспечена за счет рассмотрения теории равновесия материальных тел.

Материал справочного характера приведен в приложениях.

Учебное пособие предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения по направлениям химической технологии подготовки бакалавров.

Ил. 61. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты:

кафедра механики, ремонта и деталей машин (в составе УНК «Пожаротушения») ФГБОУ ВО Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России; доцент, кандидат технических наук В.В. Колобова (ФГБОУ ВО Ивановской государственной академии им. академика Д.К. Беляева)

© Степанова Т. Ю., Бойцова В. В., 2018

© ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет, 2018

Оглавление

	Введение.....	4
1	Статика.....	5
1.1	Основные определения статики.....	5
1.2	Аксиомы статики.....	7
1.3	Связи и их реакции.....	9
1.4	Момент силы относительно точки.....	13
1.5	Момент силы относительно оси.....	14
1.6	Теорема Вариньона.....	16
1.7	Условия равновесия.....	17
1.8	Параллельные силы. Сложение двух параллельных сил.....	17
1.9	Пара сил. Момент пары.....	19
1.10	Эквивалентность пар.....	20
1.11	Сложение пар.....	22
1.12	Плоская система сил.....	24
1.13	Условия равновесия произвольной плоской системы сил.....	26
2	Сопротивление материалов.....	28
2.1	Задачи сопротивления материалов.....	28
2.2	Допущения, принятые в сопротивлении материалов.....	29
2.3	Внутренние силовые факторы. Метод Сечений. Основные виды деформаций.....	30
2.4	Напряжение.....	32
2.5	Центральное растяжение (сжатие).....	33
2.6	Напряжение в поперечных сечениях стержня.....	36
2.7	Деформации и перемещения. Закон Гука.....	37
2.8	Допускаемые напряжения. Расчеты на прочность.....	40
2.9	Сдвиг.....	41
2.10	Кручение.....	43
2.11	Прочность и жесткость при кручении.....	46
2.12	Связь между угловыми деформациями.....	49
2.13	Построение эпюр крутящих моментов.....	49
2.14	Изгиб.....	51
2.15	Определение внутренних усилий при изгибе.....	53
2.16	Нормальные напряжения при чистом изгибе прямого бруса.....	56
2.17	Полная проверка прочности. Опасные сечения и точки.....	61
3	Контрольные задачи и примеры их решения.....	62
3.1	Равновесие тела под действием плоской системы сил.....	62
3.2	Центральное растяжение (сжатие).....	85
3.3	Расчет стержня на прочность и жесткость при кручении.....	105
3.4	Прямой простой изгиб балки.....	128
	Приложение I.....	149
	Приложение II.....	151
	Вопросы к экзамену.....	153
	Библиографический список.....	155

Введение

Прикладная механика представляет собой комплексную дисциплину, в которой излагаются основные положения о взаимодействии твердых тел, прочности материалов и методах расчета конструктивных элементов, а также изучает сами механизмы и машины. Она играет большую роль в разработке и создании инновационной техники и оборудования. Любое устройство проектируется на основании тщательных расчетов и методов, которые обязаны отвечать всем принятым стандартам. Исправность работы техники и её долговечность зависят от правильно рассчитанной конструкции, что требует глубоких технических знаний.

Учебный курс «Прикладная механика» решает частные задачи, предписанные учебной программой для немашиностроительных специальностей вузов:

- 1) равновесия материальных тел (статика);
- 2) рассмотрение основ прочностной надежности элементов конструкций, выбор конструкционных материалов (сопротивление материалов);
- 3) изучение общих основ построения машин, механизмов и деталей, и приобретение начальных навыков конструирования (детали машин).

Прикладная механика является одним из старейших курсов инженерной подготовки в технических вузах нашей страны и ей принадлежит ведущая роль в формировании языка общения бакалавров различных специальностей.

Прикладная механика, как наука о конструкциях и машинах, выделилась из теоретической механики в начале XIX века и развивалась одновременно с машиностроением. Однако фундамент машиностроения создали такие изобретатели и ученые, как Архимед, Леонардо да Винчи, Ползунов, Уатт, Кулон и др.

Значительный вклад в развитие прикладной механики внесли русские ученые и изобретатели: М. В. Ломоносов, разработавший конструкции машин для производства стекла и испытаний материалов; Л. Эйлер, впервые предложивший для зубчатого колеса эвольвентное зацепление, и др. Мировую известность в области сопротивления материалов приобрели работы русских ученых Д.И. Журавского, Ф. С. Ясинского, А. И. Гадолина и др.

В начале XX века большое влияние на развитие науки о сопротивлении материалов имели труды И. Г. Бубнова, А. Н. Крылова, Б. Г. Гарелкина и др. Большой вклад в развитие механики машин внесли и советские ученые: И. Ф. Образцов, К. В. Фролов, В. И. Феодосьев, В. В. Болотин, И. А. Биргер, В. Н. Кудрявцев, Д. Н. Решетов и др.

В настоящее время многие российские и зарубежные научные школы вносят существенный вклад в развитие прикладной механики, которая актуальна в любое время, поскольку прогресс не стоит на месте, предприятия проектируют новые приборы и оборудование, создание которых невозможно без четких расчетов.

1. Статика

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

При решении задач статики все тела рассматриваются как абсолютно твердые, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

Состояние равновесия тела будет зависеть от характера его взаимодействий с другими телами. Основной мерой механического взаимодействия материальных тел в механике является сила.

Сила – величина векторная. Ее действие на тело определяется:

- 1) числовым значением или модулем; 2) направлением силы;
- 3) точкой приложения силы (рис. 1.1).

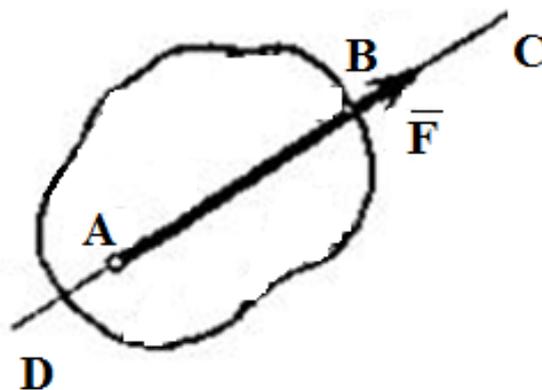


Рис. 1.1. Сила \vec{F} – векторная величина

На рис. 1.1 показана сила \vec{F} , приложенная в точке A, длина отрезка AB в соответствующем масштабе равна модулю силы, точка B называется концом силы; у конца силы ставится стрелка, указывающая направление действия силы. Прямая DC называется *линией действия силы*.

Для измерения модуля силы ее сравнивают с силой, выбранной в качестве единицы.

Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ) является 1 Ньютон (1 Н).

1.1. Основные определения статики

1. **Системой сил** называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело. Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется **плоской**, а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, - то **пространственной**.

2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются **сходящимися**, а силы, линии действия которых параллельны друг другу - **параллельными**.

3. Тело, которое свободно перемещается в пространстве в любом направлении, называется **свободным**.

4. Если одну систему сил, действующую на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются **эквивалентными**.

5. Система сил, под действием которой свободное тело может находиться в покое, называется **уравновешенной** или эквивалентной нулю.

6. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется **уравновешивающей** силой.

7. **Внешними** называют силы, которые действуют на это тело со стороны других тел, а **внутренними** – силы, с которыми части данного тела действуют друг на друга.

8. Сила, приложенная к телу в одной его точке, называется **сосредоточенной** (рис. 1.1). Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются **распределенными** (рис. 1.2).

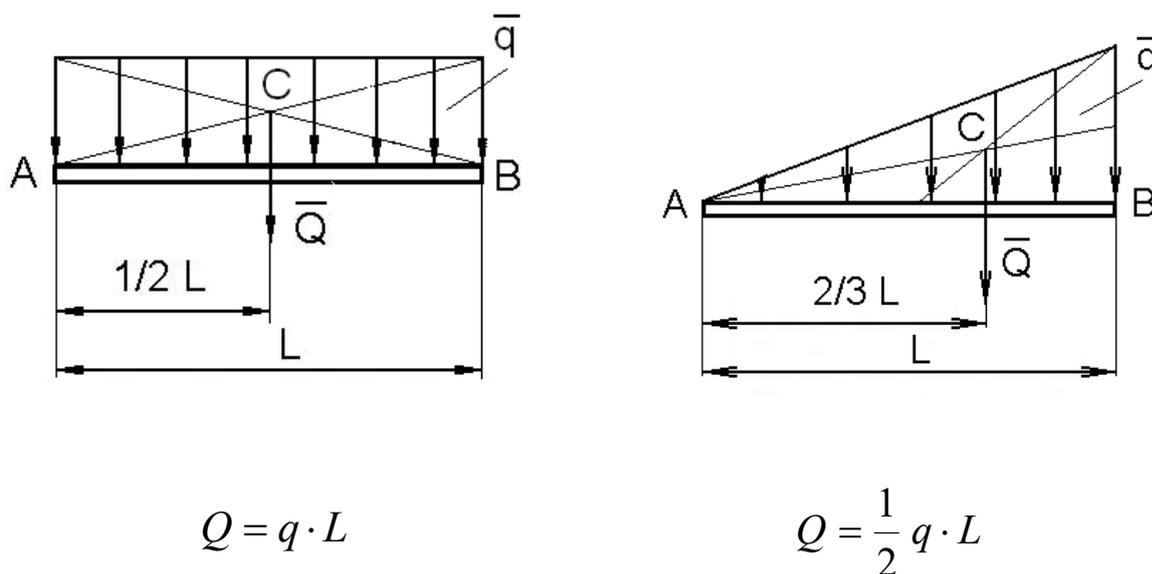


Рис. 1.2. Распределенные силы по длине балки

Задачами статики являются:

- 1) приведение данной системы сил к простейшему виду;
- 2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

При решении задач статики применяют аналитический метод, однако наглядные геометрические построения играют при решении задач механики чрезвычайно важную роль.

1.2. Аксиомы статики

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю, и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.3).

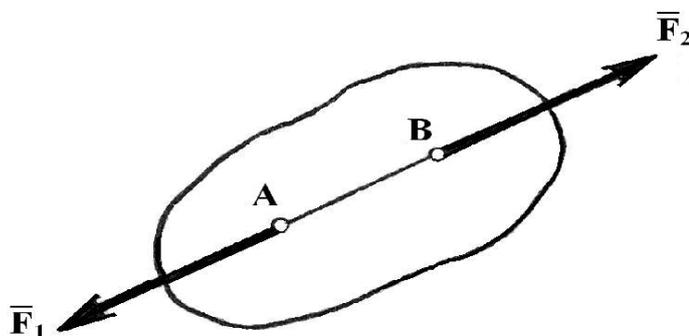


Рис. 1.3. Действие двух равных сил на твердое тело

2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела (рис. 1.4).

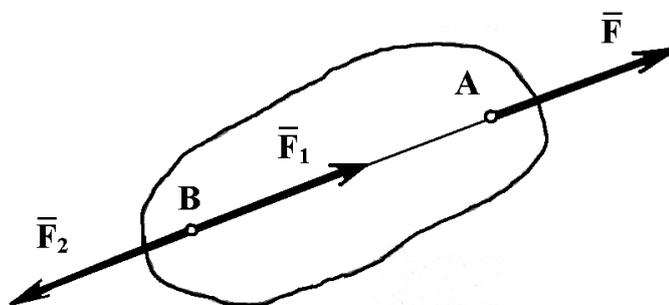


Рис. 1.4. Действие системы сил на твердое тело

Пусть на твердое тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке А (рис. 1.4). На линии действия этой силы возьмем произвольную точку В и приложим к ней две уравновешенные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равные по модулю силе \vec{F} и направленные в противоположные стороны, при этом действие силы на тело не изменится. Силы \vec{F} и \vec{F}_2 образуют уравновешенную систему сил, которую можно отбросить, и на тело будет действовать только сила \vec{F}_1 , приложенная в точке В.

Силу \vec{F} можно считать приложенной в любой точке на линии действия силы, а вектор силы называется скользящим.

3. **Закон параллелограмма сил:** две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, является геометрической суммой сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис. 1.5).

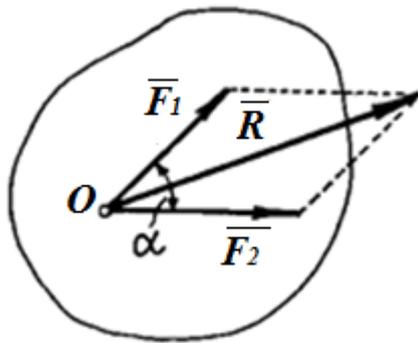


Рис. 1.5. Сложение сил

Следовательно, две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и приложенную в той же точке.

4. **Закон равенства действия и противодействия:** при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно равное, но противоположное по направлению противодействие (рис. 1.6).

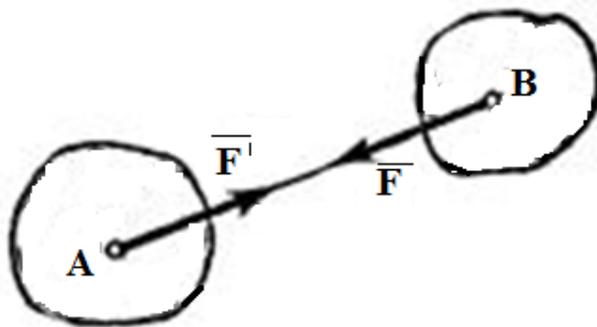


Рис. 1.6. Действие материальных тел друг на друга

5. **Принцип отвердевания:** равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

1.3. Связи и их реакции

Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется **несвободным**. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, будем называть **связью**.

Например, тело, лежащее на столе – несвободное тело. Связью его является плоскость стола, которая препятствует перемещению тела вниз.

Очень важен так называемый *принцип освобождения от связей*:

Любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить все его связи и заменить их действие силами реакции связей.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям в пространстве, называется силой реакции (противодействия) связи или просто **реакцией связи**.

Так у тела, лежащего на столе, связь – стол. Тело несвободное. Сделаем его свободным – стол уберем, а чтобы тело осталось в равновесии, заменим стол силой, направленной вверх и равной весу тела.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь одновременно препятствует перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции связи также наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Если в качестве физического тела рассматривать какой-либо элемент инженерного сооружения (балка, колонна, плита и т. п.), который передает давление на опоры, то реакции опор (связей) называют **опорными реакциями**. Реакции связей носят вторичное происхождение, они возникают как противодействие другим силам.

Все силы, кроме реакции связей, называют **заданными силами**. Заданные силы чаще всего являются **активными**, т.е. силами, которые могут вызвать движение тел, например: сила тяжести, снеговая или ветровые нагрузки и т.п. Учитывая выше изложенное, можно разделить силы на активные и реакции связей.

Одна из главных задач статики твердого тела - нахождение реакции связей. Для определения реакции связей необходимо найти величину этой реакции, линию и направление ее действия. Линия действия реакции обычно проходит через точку касания тела и связи. Численное значение реакции определяется расчетом, а направление реакции зависит от вида связи.

Для определения направления реакции необходимо установить особенности взаимодействия твердого тела со связями различного вида.

Реакция всегда направлена противоположно направлению возможного перемещения тела при удалении связи.

Направление реакции некоторых основных видов связей.

1. **Гладкая поверхность.** Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1.7, а). Поэтому реакция \vec{N} гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 1.7, б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности (N_1).

Если поверхности не гладкие, надо добавить еще одну силу – силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, которая направлена перпендикулярно нормальной реакции \vec{N} в сторону, противоположную возможному скольжению тела.

2. **Нить (гибкая связь).** Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 1.8), не дает телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM .

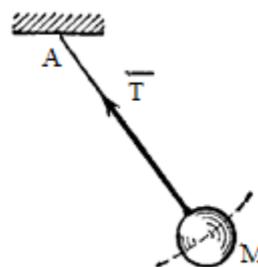
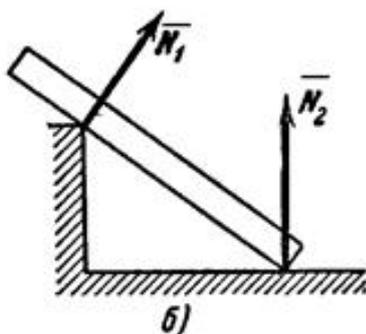
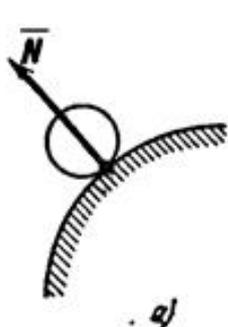


Рис. 1.7. Гладкая поверхность

Рис. 1.8. Гибкая связь

Поэтому реакция \vec{T} натянутой нити направлена вдоль нити от тела к точке ее подвеса. Если даже заранее можно догадаться, что реакция направлена к телу, все равно ее надо направить от тела. Таково правило.

3. **Стержень.** Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень AB , закрепленный на концах шарнирами (рис. 1.9).

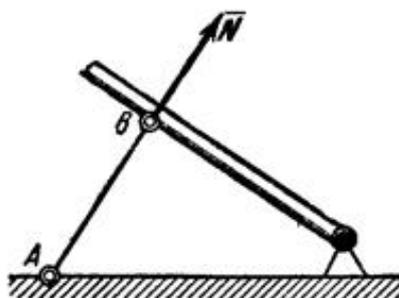


Рис. 1.9. Стержень

Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в шарнирах A и B . Но если стержень AB находится в равновесии, то по аксиоме 1, приложенные в точках A и B силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня.

Следовательно, нагруженный на концах стержень, весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь, работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то реакция \bar{N} стержня будет направлена вдоль оси стержня.

4. **Шарнирно-подвижная опора** (рис. 1.10). Это устройство представляет собой опорный элемент (подшипник), внутри которого вращается палец (ось) шарнира. Такая опора не препятствует вращению вокруг оси, но препятствует движению тела в любом направлении в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. Реакция \bar{R} такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры. На схемах эту связь изображают так, как показано на рис. 1.10.

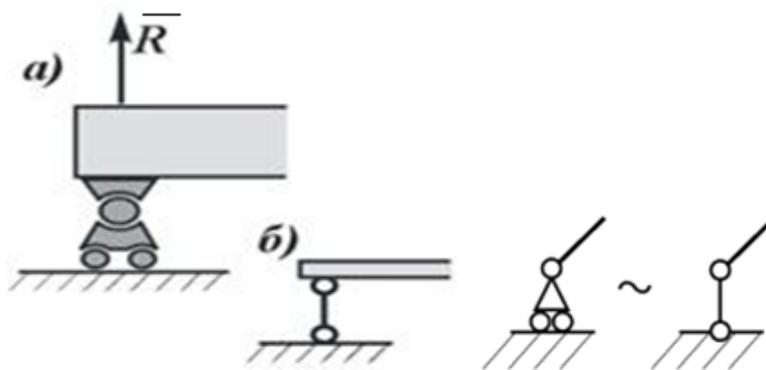


Рис. 1.10. Шарнирно - подвижная опора: a – вид катковой опоры; b – расчетная схема шарнирно-подвижных опор

5. **Шарнирно-неподвижная опора** (рис. 1.11).

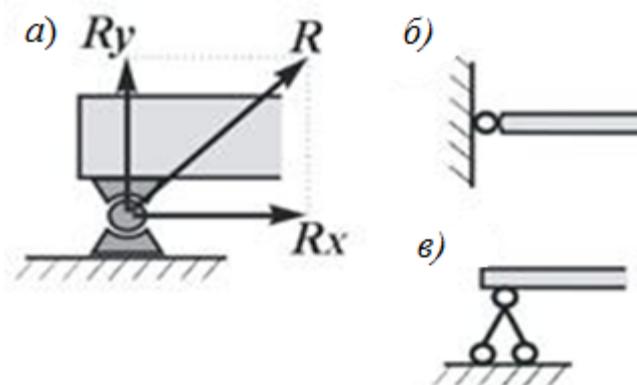


Рис. 1.11. Шарнирно-неподвижная опора:
 a – вид шарнирно-неподвижной опоры;
 b, v – расчетные схемы шарнирно-неподвижных опор

Реакция \bar{R} шарнирно-неподвижной опоры расположена в плоскости, перпендикулярной оси возможного вращения, и ее направление определяют две взаимно перпендикулярные составляющие R_x и R_y , соответствующие направлению выбранных осей (рис. 1.11, а). В механике шарнирно-неподвижную опору изображают в виде двух шарнирных стержней пересекающихся в точке опоры (рис. 1.11, б) или шарнира (рис. 1.11, в).

При решении задач будем реакцию \mathbf{R} изображать ее составляющими R_y и R_x по направлениям осей координат. Если мы, решив задачу, найдем R_y и R_x то тем самым, будет определена и реакция \bar{R} ; по модулю $R = \sqrt{R_y^2 + R_x^2}$.

Способ закрепления, показанный на рис. 1.11, применяется для того, чтобы в балке не возникало дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

6. **Жесткая заделка** (рис. 1.12, а). Это соединение исключает возможность каких-либо перемещений абсолютного твердого тела. Балка, изображенная на рис. 1.12, а, жестко заделана в стену в точке А. Перемещению ее в вертикальном направлении, препятствует реакция \bar{R}_y , а перемещению в горизонтальном направлении препятствует реакция \bar{R}_x и повороту вокруг точки А - опорный момент M_A . Характерным для данной опоры является наличие опорного момента сил, исключающего вращение тела вокруг любой оси. Схематическое изображение такой опоры в теоретической механике показано на рис. 1.12, б.

С помощью указанных опорных связей сооружения прикрепляются к фундаментам или отдельные элементы соединяются между собой.

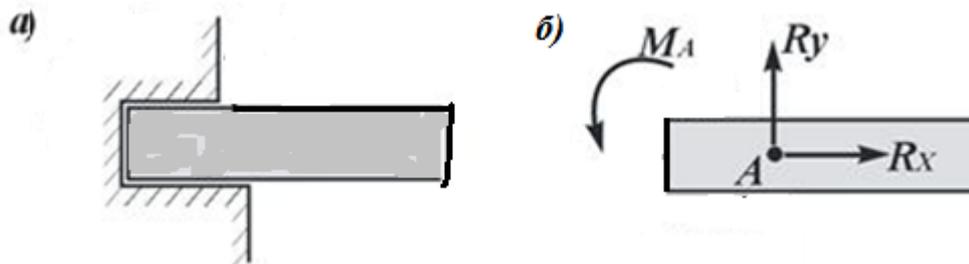


Рис. 1.12. Жесткая заделка: а – вид жесткой заделки; б – расчетная схема жесткой заделки

При определении реакций связи других конструкций надо установить, разрешает ли она двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг этих осей. Если препятствует какому-либо движению – показать соответствующую силу, если препятствует вращению – пару с соответствующим моментом.

Связи, как и другие понятия, встречающиеся в аксиомах, являются абстракциями, весьма условно отражающими свойства реальных объектов. Например, рассмотренная выше гибкая невесомая нить, может быть моделью подвесных и вантовых систем, у которых масса погонного метра троса

составляет десятки и сотни килограммов. Однако усилия, возникающие в таких тросах, во столько раз больше их собственного веса, что при расчете последним можно пренебречь, считая их невесомыми.

Проекция силы на ось. Проекцией вектора на ось называется скалярная величина, которая определяется отрезком, отсекаемым перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора на эту ось (рис. 1.13).

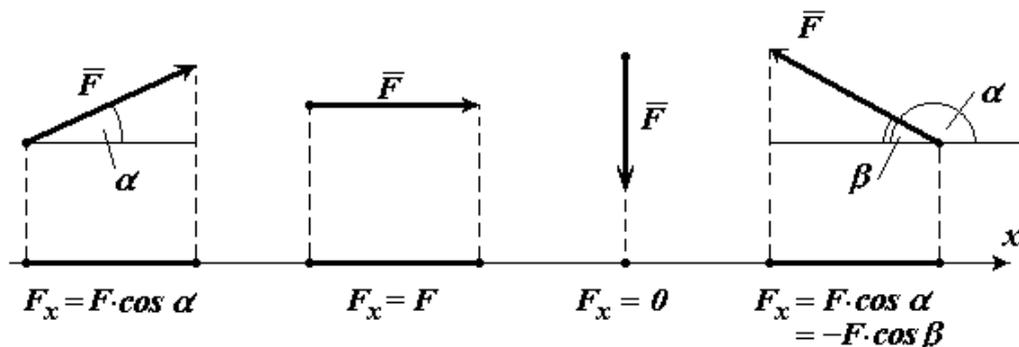


Рис. 1.13. Проекция вектора силы на ось x

Проекция вектора считается положительной (+), если направление ее совпадает с положительным направлением оси, и отрицательной (-), если проекция направлена в противоположную сторону.

1.4. Момент силы относительно точки

Твердое тело под действием силы может совершать вращательное движение вокруг точки (центра). Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом (рис. 1.14).

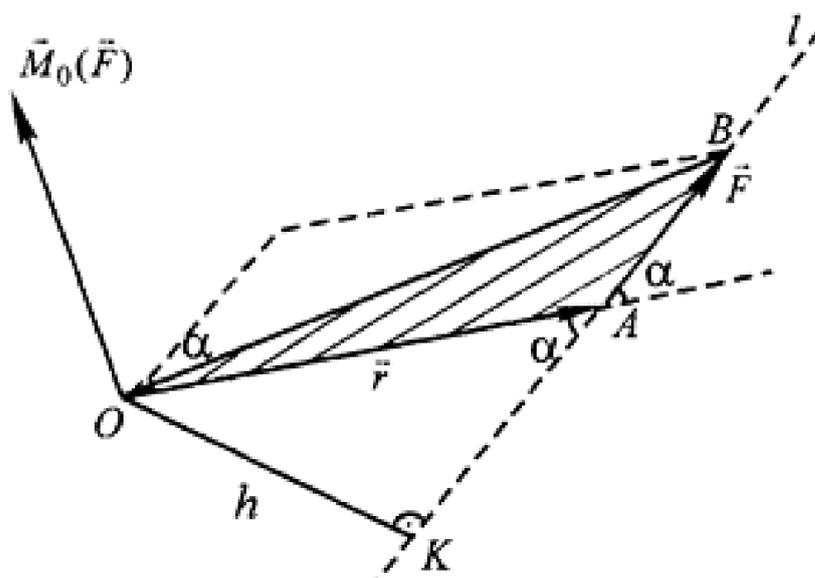


Рис. 1.14. Момент силы относительно точки

Пусть сила F приложена в точке A твердого тела. Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O . Перпендикуляр h , опущенный из центра O на линию действия силы F , называется плечом силы F относительно центра O . Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h ; 2) от положения плоскости поворота OAB , проходящей через центр O и силу F ; 3) от направления поворота в этой плоскости.

Моментом силы F относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Момент силы \vec{F} относительно центра O будем обозначать символом $\overline{M}_O(\vec{F})$. Следовательно, $\overline{M}_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$.

Момент имеет знак «плюс», если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак «минус», - если по ходу часовой стрелки.

Момент силы измеряется в Ньютонах на метр (Н·м).

Свойства момента силы:

- 1) момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия;
- 2) момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю);
- 3) момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB :

$$\overline{M}_O(\vec{F}) = \pm 2 \text{ пл. } \Delta OAB. \quad (1.1)$$

Этот результат следует из того, что

$$\text{пл. } \Delta OAB = 0,5 \cdot AB \cdot h = 0,5 \cdot F \cdot h. \quad (1.2)$$

1.5. Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси (рис. 1.15).

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z . Пусть на это тело действует сила \vec{F} , приложенная к телу в точке A . Проведем через точку A плоскость xy , перпендикулярную оси z , и разложим силу \vec{F} на составляющие: F_z , параллельную оси z , и F_{xy} , лежащую в плоскости xy . F_{xy} является одновременно проекцией силы \vec{F} на плоскость xy .

Сила F_z , направленная параллельно оси z , очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело вдоль оси z). Следовательно, весь вращательный эффект, создаваемый силой \vec{F} , будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей F_{xy} .

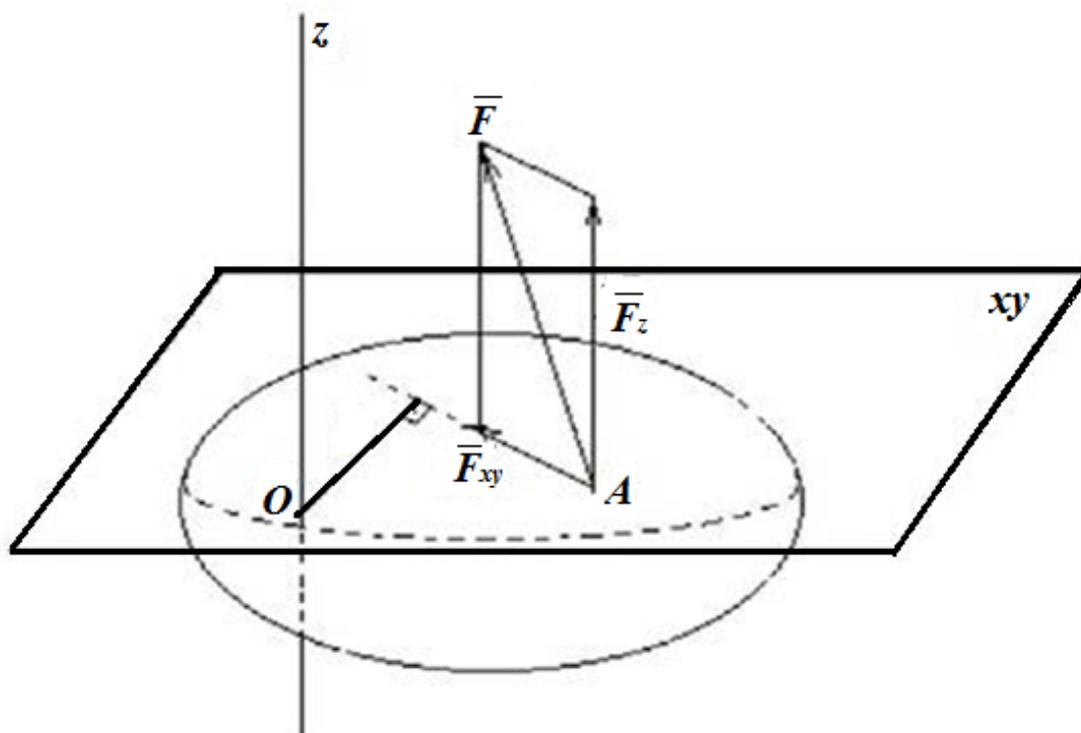


Рис. 1.15. Момент силы относительно оси Z

Отсюда следует, что

$$M_z(F) = m_z(F_{xy}) \quad (1.3),$$

где $m_z(F)$ – момент силы F относительно оси z .

Для силы F_{xy} , лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси z , момент измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояние h от оси. Этой же величиной определяется момент силы F_{xy} относительно точки O , в которой ось z пересекается с плоскостью xy .

Следовательно,

$$m_z(F_{xy}) = m_o(F_{xy}) \text{ или, } m_z(F_{xy}) = m_o(F_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \quad (1.4).$$

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент будет положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила F_{xy} , стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Чтобы найти момент силы относительно оси z надо:

- 1) провести плоскость xy , перпендикулярную к оси z (в любом месте);
- 2) спроектировать силу F на эту плоскость и вычислить величину F_{xy} ;
- 3) опустить из точки O пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление F_{xy} и найти его длину h ;

4) вычислить произведение $F_{xy} \cdot h$;

5) определить знак момента.

При вычислении моментов надо учитывать частные случаи:

1) если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy} = 0$);

2) если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $h = 0$). Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости;

3) если сила перпендикулярна оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

1.6. Теорема Вариньона

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра (рис. 1.16).

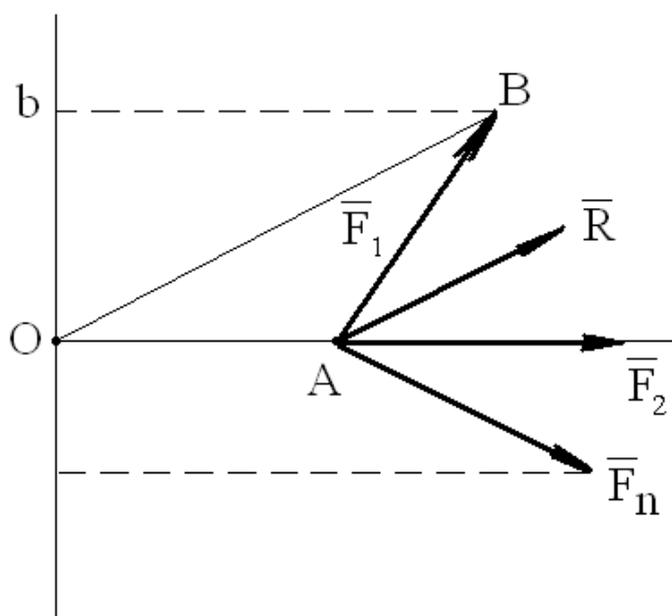


Рис. 1.16. Определение вектора равнодействующей

$$M_o(F_1) = 2 \text{пл.} \Delta OAB = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot Ob = OA \cdot Ob;$$

$$Ob = F_{1x} \rightarrow M_o(F_1) = OA \cdot F_{1x} \quad (1.5).$$

Аналогично вычисляем моменты остальных сил. По теореме о проекции суммы сил на ось, получим:

$$R_x = \sum F_{kx} \quad (1.6).$$

Умножим обе части уравнения на OA :

$$R_x \cdot OA = \sum F_{kx} \cdot OA \quad M_o(R) = \sum M_o(F_k) \quad (1.7).$$

1.7. Условия равновесия

Условия равновесия можно выразить не только через проекции этих сил, но и через их моменты относительно точек A и B (рис. 1.17).

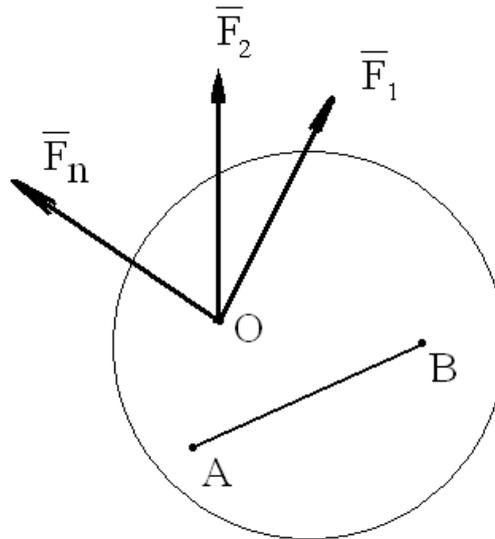


Рис. 1.17. Система сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно двух любых центров была равна нулю; при этом точка приложения равнодействующей не должна лежать на одной линии с этими двумя центрами.

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0 \quad (1.8).$$

1.8. Параллельные силы. Сложение двух параллельных сил

Возможны два случая сложения двух параллельных сил: силы направлены в одну сторону и в противоположные стороны.

1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону (рис. 1.18).

Пусть необходимо сложить силы \bar{F}_1, \bar{F}_2 , приложенные в точках A и B . Приложим в этих же точках две уравновешенные силы $\bar{T}_1 = -\bar{T}_2$ и сложим их с силами \bar{F}_1, \bar{F}_2 по правилу параллелограмма.

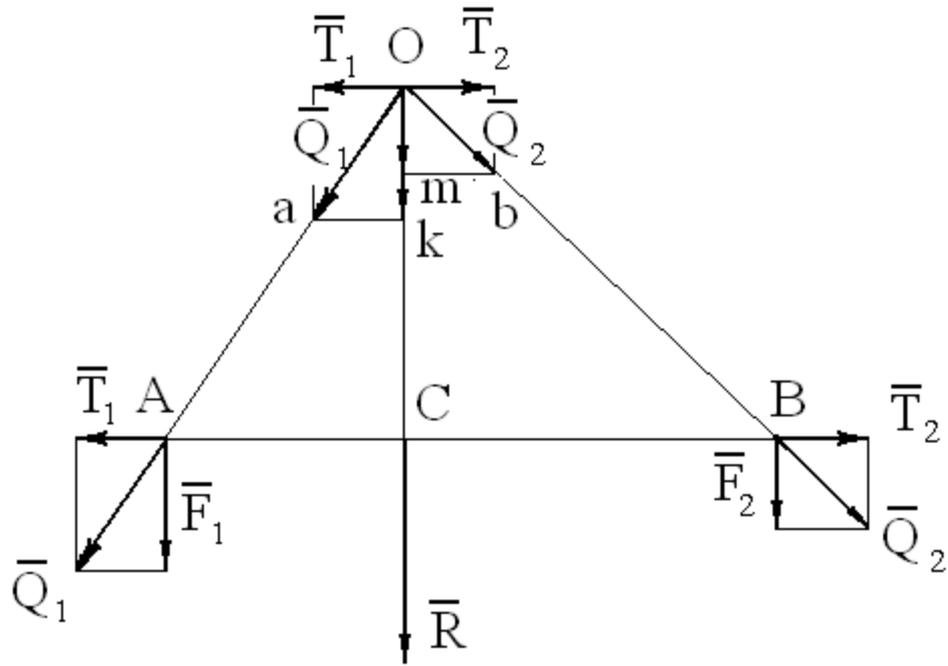


Рис. 1.18. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Полученные силы \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 перенесем в точку O , в которой пересекаются линии действия этих сил, и разложим на первоначальные составляющие. Уравновешенную систему сил $\bar{T}_1 = -\bar{T}_2$ можно отбросить, тогда останутся две силы \bar{F}_1, \bar{F}_2 , равнодействующая которых

$$R = F_1 + F_2 \quad (1.9).$$

Для определения точки приложения равнодействующей рассмотрим подобие треугольников AOC , aOk , BOC и bOm :

$$\frac{AC}{OC} = \frac{T_1}{F_1}; \quad \frac{BC}{OC} = \frac{T_2}{F_2}; \quad AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R} \quad (1.10).$$

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, параллельна им и направлена в ту же сторону.

Линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.

2. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны (рис. 1.19).

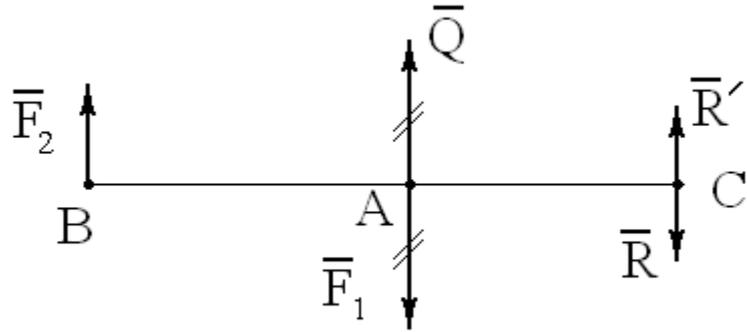


Рис. 1.19. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны

Пусть $F_1 > F_2$. Возьмем на продолжении линии АВ точку С и приложим в ней уравновешенные силы R, R' , параллельные заданным, при этом

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

$$Q = F_2 + R' \quad (1.11).$$

Силы F_1 и Q , как уравновешенные, можно отбросить. В результате останется равнодействующая R .

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, параллельна им и направлена в сторону большей из них.

Линия действия равнодействующей лежит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.

1.9. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 1.20).

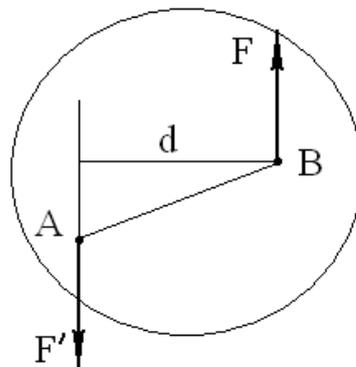


Рис. 1.20. Пара сил

Пара сил не имеет равнодействующей. Плоскость, проходящая через линии действия сил, называется плоскостью действия пары. Расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары.

Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному движению, которое зависит от:

- модуля сил пары и длины её плеча;
- положения плоскости действия пары;
- направления поворота в этой плоскости.

Пара сил характеризуется величиной момента. *Моментом пары называется величина, равная произведению модуля одной из сил пары на её плечо.*

$$M = \pm F \cdot d \quad (1.12).$$

Момент пары – величина векторная; вектор момента пары лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости действия пары, а его направление определяют по правилу правого винта.

Теорема. *Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости её действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары (рис. 1.21).*

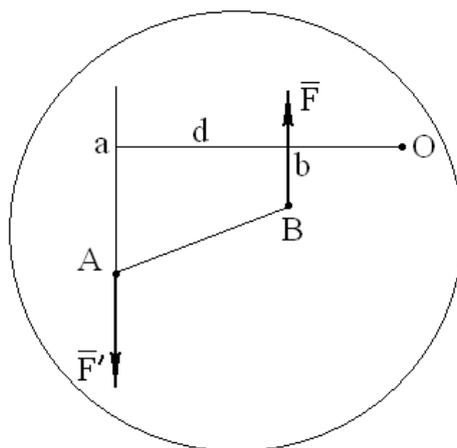


Рис. 1.21. Момент пары

$$M_O = -F \cdot Oa + F' \cdot Ob = F \cdot (Ob - Oa) = F \cdot (ab + aO - Oa) = F \cdot d. \quad (1.13).$$

1.10. Эквивалентность пар

Теорема 1. *Не изменяя оказываемого на тело действия, пару сил, приложенную к твердому телу, можно заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент (рис. 1.22).*

Пусть на тело действует пара сил (\vec{F}, \vec{F}_1) с плечом d_1 .

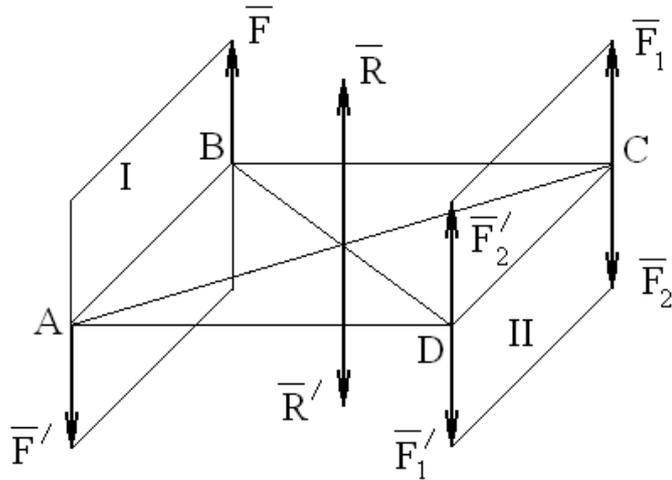


Рис. 1.23. Действие пары на твердое тело

$$\begin{aligned} F' + F_2 &= R'; \\ F + F_2' &= R, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где (R, R') – уравновешенная система сил.

В результате пара (F, F') заменяется такой же парой (F_1, F_1') , но лежащей в плоскости II.

1.11. Сложение пар

Система пар, действующих на твердое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

1. Плоская система пар.

Пусть на тело действуют три пары с моментами M_1, M_2, M_3 . Эти пары можно заменить эквивалентными им парами $(P_1, P_1'), (P_2, P_2'), (P_3, P_3')$ с общим плечом d (рис. 1.24).

Сложив отдельно силы в соответствующих точках, получим:

$$R = R' = P_1 + P_2 + P_3,$$

в результате чего получится одна пара (R, R') .

$$M = R \cdot d = P_1 \cdot d - P_2 \cdot d + P_3 \cdot d = M_1 - M_2 + M_3 \quad (1.16)$$

Условие равновесия плоской системы пар $\sum M_k = 0$.

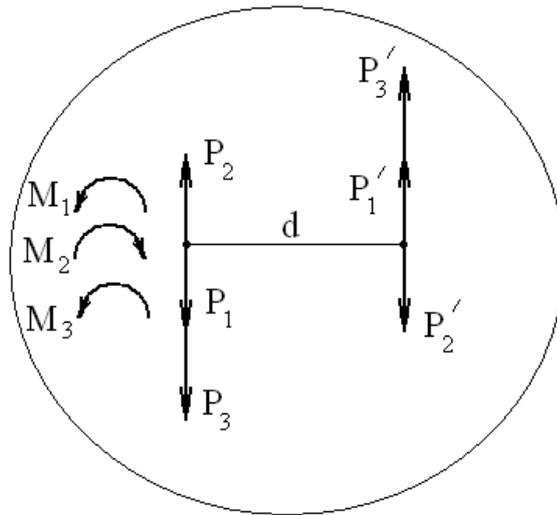


Рис. 1.24. Плоская система пар

2. Пространственная система пар.

Система пар, действующих на твердое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Пусть на тело действуют две пары сил с моментами M_1 и M_2 , лежащие в плоскостях I и II (рис. 1.25). На линии пересечения плоскостей возьмем отрезок $AB = d$, который примем за плечо, и приведем обе данные пары к этому плечу.

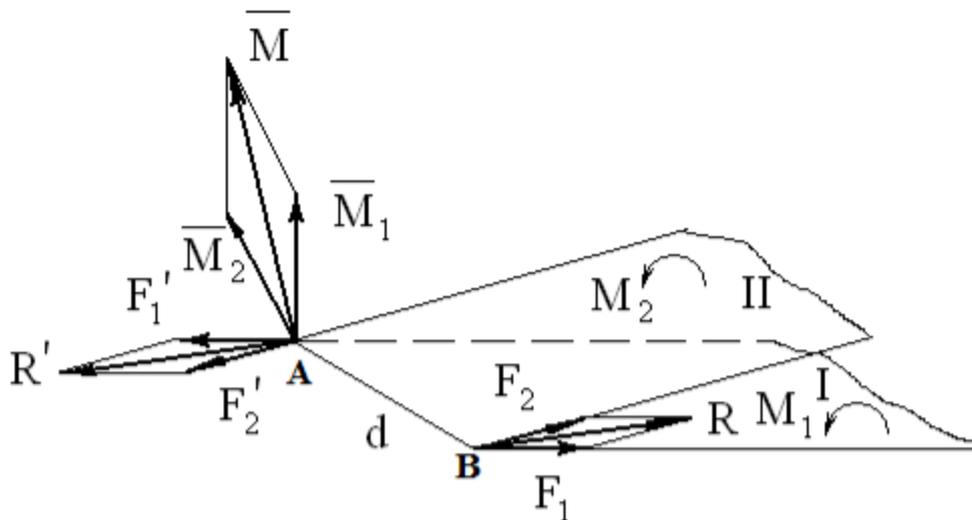


Рис. 1.25. Пространственная система пар

Тогда:

$$M_1 = F_1 \cdot d; \quad M_2 = F_2 \cdot d \quad (1.17).$$

Изобразим векторы моментов этих пар. Заменяем силы F_1 и F_2 равнодействующей $|R| = |R'|$, тогда

$$M = \bar{R} \times \bar{d} = \bar{F}_1 \times \bar{d} + \bar{F}_2 \times \bar{d} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \quad (1.18).$$

Если на тело действуют n пар с моментами M_1, M_2, \dots, M_n , тогда

$$M = \sum \bar{M}_K \quad (1.19).$$

Если слагаемые векторы не лежат в одной плоскости, то подсчет удобнее вести аналитически.

Из теоремы о проекции суммы векторов на ось можно записать:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{KX}; & M_y &= \sum M_{KY}; & M_z &= \sum M_{KZ} \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \end{aligned} \quad (1.20).$$

Условия равновесия пар сил:

$$\sum M_{KX} = 0; \quad \sum M_{KY} = 0; \quad \sum M_{KZ} = 0 \quad (1.21).$$

1.12. Плоская система сил

Теорема Пуансо. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно той точки, куда эта сила переносится.

Пусть на твердое тело действует сила \bar{F} , приложенная в точке А. Если в точке В приложить две уравновешенные силы \bar{F}', \bar{F}'' такие, что $F = F' = -F''$, то действие силы \bar{F} на твердое тело не изменится. Полученная система трех сил представляет собой силу $F' = F$ и пару (F, F'') с моментом $M = F \cdot AB = M_B(F)$ (рис. 1.26).

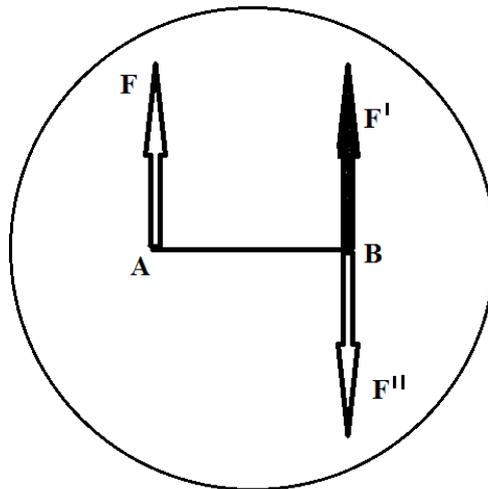


Рис. 1. 26. Система трех сил

Систему сил, лежащую в одной плоскости, можно привести к одной точке, которая называется центром приведения (рис. 1.27).

Пусть задана система сил $F_1, F_2 \dots F_n$. Перенесем все силы в центр O параллельно самим себе. Тогда на тело будут действовать силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$, приложенные в точке O , и система пар с моментами:

$$M_1 = M_O(F_1), \quad M_2 = M_O(F_2), \quad M_n = M_O(F_n) \quad (1.22).$$

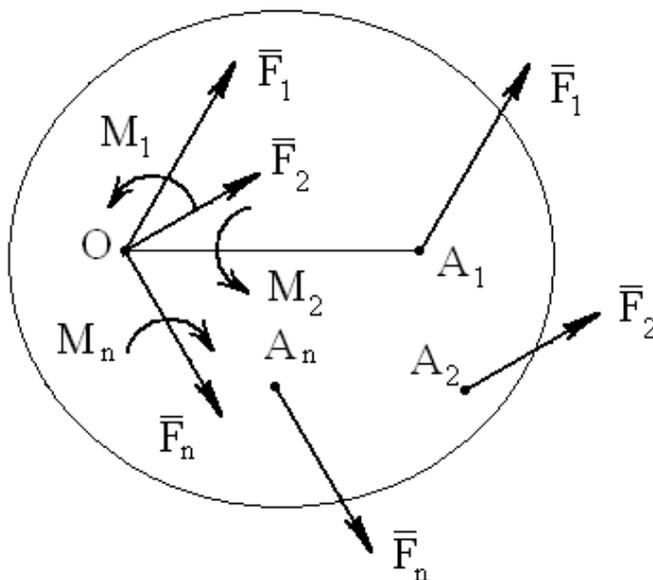


Рис. 1.27. Иллюстрация к теореме Пуансо

Систему сил можно заменить одной силой, приложенной в той же точке, а систему пар – одной парой, лежащей в той же плоскости:

$$\bar{R} = \sum F_k; \quad M_O = \sum M_O(\bar{F}_k) \quad (1.23).$$

Величина, равная геометрической сумме всех сил системы называется главным вектором системы.

Величина, равная геометрической сумме всех моментов сил системы относительно центра называется главным моментом системы относительно центра.

Заметим, что сила \bar{R} не является равнодействующей, так как она заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Вычисление главного вектора и главного момента, а также определение их направлений в плоскости носит название приведения системы сил к простейшему виду.

1.13. Условия равновесия произвольной плоской системы сил

1. Основная форма условий равновесия

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 0; \quad M_o = 0 \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad R_x = \sum F_{KX} = 0 \quad R_y = \sum F_{KY} = 0 \\ M_o &= \sum M_o(F_K) \end{aligned} \quad (1.24).$$

Следовательно, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

$$\sum F_{KX} = 0; \quad \sum F_{KY} = 0; \quad \sum M_o(F_K) = 0 \quad (1.25).$$

2. Вторая форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-либо двух центров A и B и сумма их проекций на ось, не перпендикулярную к прямой AB , были равны нулю.

$$\sum M_A(F_K) = 0; \quad \sum M_B(F_K) = 0; \quad \sum F_{KX} = 0 \quad (1.26).$$

Если

$$\sum M_A(F_K) = 0; \quad \sum M_B(F_K) = 0, \quad (1.27)$$

тогда система не может находиться в равновесии, а иметь равнодействующую R , проходящую через точки A и B (рис. 1.28).

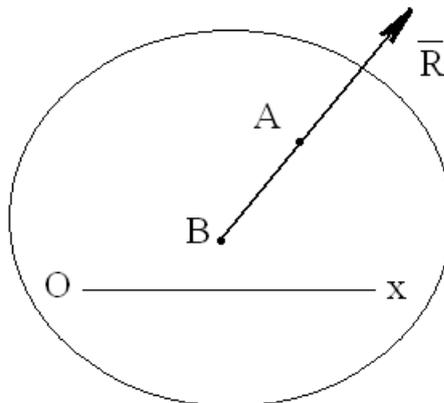


Рис. 1.28. Равнодействующая системы сил

Но по третьему условию $\sum F_{KX} = 0$, так как ось проведена не перпендикулярно линии АВ, то последнее условие может быть выполнено когда $R = 0$.

3. Третья форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех центров, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$M_A(F_K) = 0; \quad M_B(F_K) = 0; \quad M_C(F_K) = 0 \quad (1.28).$$

Для плоской системы сил во всех случаях получаются три условия равновесия. Основными считаются первые условия, так как в этом случае никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не накладывається.

2. Сопротивление материалов

2.1. Задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов - наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов выполняются расчеты, на основании которых определяются необходимые размеры деталей машин и конструкций инженерных сооружений.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, в которых наиболее существенными являются свойства твердых деформируемых тел, а законами движения тела, как жесткого целого, здесь пренебрегают. В то же время, вследствие общности основных положений, сопротивление материалов рассматривается как раздел механики твердых деформируемых тел.

Строгие теории механики деформируемого тела базируются на более точной постановке проблем, в связи с чем, для решения задач приходится применять более сложный математический аппарат и проводить громоздкие вычислительные операции. Вследствие этого, возможности применения таких методов в практических задачах ограничены.

В свою очередь, методы сопротивления материалов базируются на упрощенных гипотезах, которые, с одной стороны, позволяют решать широкий круг инженерных задач, а с другой, получать приемлемые по точности результаты расчетов.

При этом главной задачей курса является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений. То есть данный предмет является базовым для формирования инженерного мышления и подготовки бакалавров.

Все машины и сооружения состоят из отдельных деталей, на которые в процессе эксплуатации действуют внешние силы. Под действием сил элементы конструкций изменяют свои размеры и форму – деформируются.

Деформации, исчезающие после снятия нагрузок, называются упругими.

Деформации, остающиеся в теле после снятия нагрузок, называются остаточными или пластическими.

Прочность – это способность твердого тела воспринимать нагрузку без разрушения или появления в нем пластических деформаций.

Жесткость – это способность твердых тел сопротивляться деформированию.

Устойчивость – способность конструкции сохранять первоначальную форму или находиться в состоянии устойчивого равновесия.

При проектировании машин и сооружений выбирают такой конструкционный материал и определяют такие форму и размеры элементов, при которых под действием заданных внешних сил эти элементы не разрушаются, в них не возникают недопустимо большие деформации и не теряется устойчивость формы равновесия.

*Науку о методах расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость называют **сопротивлением материалов**.*

На детали машин и элементы конструкций в процессе их эксплуатации действуют уравновешенные системы сил. Для определения внешних сил, включая реакции опор, применяют методы статики.

В курсе «Сопротивление материалов» тесно связаны эксперимент и теория. Расчеты проводят с использованием экспериментальных механических характеристик, экспериментально проверяют все теоретические формулы.

В сопротивлении материалов все тела делят на три типа:

Брус – тело, один из размеров которого (длина) значительно больше двух других.

Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина) значительно меньше двух других размеров; частный случай оболочки – **пластина** – тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояния между которыми (толщина) значительно меньше двух других размеров.

Массив – тело, все три размера которого имеют один порядок.

2.2. Допущения, принятые в сопротивлении материалов

В сопротивлении материалов для создания общих методов расчета принят ряд допущений о свойствах материалов и характере деформаций:

1. Материал представляет сплошную среду, т.е. полностью заполняет объем тела. Это допущение позволяет использовать методы математического анализа.

2. Материал однороден, т.е. характеристики материала во всех точках, изготовленной из него детали, одинаковы.

3. Материал изотропен, т.е. обладает одинаковыми свойствами во всех направлениях. Материалы, имеющие различные свойства в разных направлениях, называют анизотропными (например, дерево).

4. Материал идеально упругий, т.е. после снятия нагрузок деформации полностью исчезают. При больших нагрузках в элементах конструкций проявляются пластические деформации.

5. Перемещения, возникающие под действием внешних сил в упругом теле, малы по сравнению с его размерами. Это допущение называется принципом начальных размеров. Допущение позволяет при составлении уравнений равновесия пренебречь изменениями формы и размеров конструкции.

6. Допущение о независимости действия сил. Результат действия на тело системы сил не зависит от последовательности их приложения и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

7. Допущение (гипотеза) о том, что сечения тела при его деформировании остаются плоскими.

2.3. Внутренние силовые факторы. Метод сечений. Основные виды деформаций

При деформировании тела возникают внутренние силы, которые оказывают сопротивление внешним воздействиям. В твердых телах атомы удерживаются на строго определенном расстоянии один от другого межатомными силами. При упругой деформации изменяются расстояния между атомами, что вызывает дополнительные внутренние силы, стремящиеся вернуть атомы на прежнее место - восстановить размеры и форму тела.

При увеличении внешних сил увеличиваются внутренние силы, и при критическом значении сил произойдет разрушение материала тела. Следовательно, для расчета на прочность необходимо уметь определять значения внутренних сил (*силовых факторов*) по известным внешним нагрузкам. Внутренние силы определяют с помощью *метода сечений*.

Твердое тело, нагруженное уравновешенной системой сил, рассечем мысленно плоскостью (рис. 2.1, а), и отбросим одну часть тела. Заменим действие отброшенной части тела на оставшуюся силами (рис. 2.1. б), и рассмотрим равновесие оставшейся части.

Отсеченная часть тела находится в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил и сил, приложенных к сечению, заменивших действие отброшенной части тела.

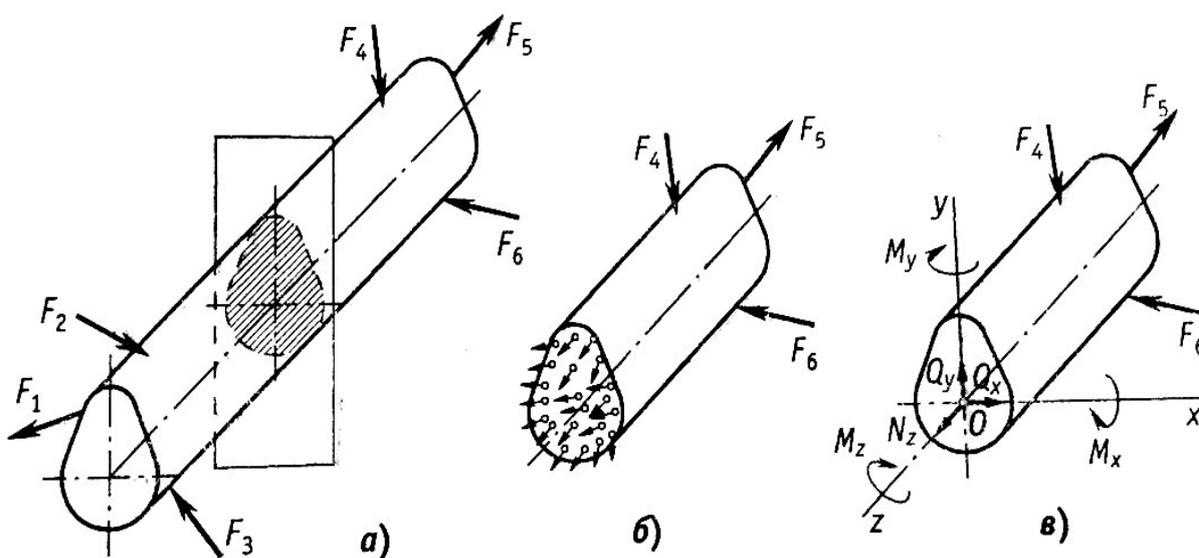


Рис. 2.1. Внутренние силовые факторы

Эти силы для целого тела были внутренними, и определить их методами статики невозможно. Для отсеченной части они стали внешними, и их можно определить из уравнений равновесия.

Сечение, проведенное перпендикулярно оси тела, называется поперечным.

Внутренние силы распределены непрерывно по всему сечению в соответствии с допущением об однородности материала (рис. 2.1, б). Методами статики невозможно установить закон распределения внутренних сил по сечению, но можно определить их главный момент и главный вектор. Приведем систему внутренних сил, распределенных по сечению бруса, к центру тяжести сечения и получим их статический эквивалент – главный вектор и главный момент. Разложим их по координатным осям x , y и z (ось z перпендикулярна сечению, оси x , y лежат в плоскости сечения). Если сечение имеет одну ось или две оси симметрии, целесообразно совместить с ними оси координат x и y . В результате получим в сечении шесть внутренних факторов (рис. 2.1, в):

N_z – **продольная сила**;

Q_x, Q_y – **поперечные силы**;

M_x, M_y – **изгибающие моменты**;

M_z – **крутящий момент** (обычно обозначаемый M_k).

Для определения значений внутренних силовых факторов составляют уравнения равновесия для отсеченной части тела. В общем случае, если на тело действует пространственная система сил, составляют систему из шести уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} + Q_x &= 0; & \sum_i M_{0x}(F_i) + M_x &= 0; \\ \sum_i F_{iy} + Q_y &= 0; & \sum_i M_{0y}(F_i) + M_y &= 0; \\ \sum_i F_{iz} + N_z &= 0; & \sum_i M_{0z}(F_i) + M_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При использовании метода сечений можно рассматривать равновесие любой отсеченной части – в соответствии с принципом действия и противодействия значения внутренних силовых факторов для обеих частей тела одинаковы. Целесообразно отбрасывать ту часть тела, на которую действует более сложная система сил.

Четырем различным видам внутренних силовых факторов соответствуют четыре вида деформации тела.

1. **Растяжение** или **сжатие**, если в сечении возникает только продольная сила N_z .
2. **Сдвиг**, если в сечении возникают только поперечные силы Q_x и Q_y .
3. **Чистый изгиб**, если в сечении возникают только изгибающие моменты M_x и M_y . Если в сечении, кроме изгибающих моментов, возникают поперечные силы, изгиб называют *поперечным*.
4. **Кручение**, если в сечении возникает крутящий момент M_z (M_k).

5. Если в сечении действует несколько силовых факторов, то возникает **сложный вид деформации** (изгиб с кручением).

2.4. Напряжение

Напряжением называется интенсивность действия внутренних сил в точке тела, то есть, напряжение — это внутреннее усилие, приходящееся на единицу площади. По своей природе напряжение — это *поверхностная нагрузка*, возникающая на внутренних поверхностях соприкосновения частей тела (рис. 2.2.). Напряжение, так же как и интенсивность внешней поверхностной нагрузки, выражается в единицах силы, отнесенных к единице площади: Па = Н/м² (МПа = 10⁶ Н/м²).

Рассечем тело произвольным сечением. Выделим небольшую площадку ΔS . Внутреннее усилие, действующее на нее, обозначим $\Delta \vec{R}$. Полное среднее напряжение на этой площадке $\vec{p} = \Delta \vec{R} / \Delta S$. Найдем предел этого отношения при $\Delta S \rightarrow 0$. Это и будет полным напряжением на данной площадке (точке) тела.

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta S}. \quad (2.2)$$

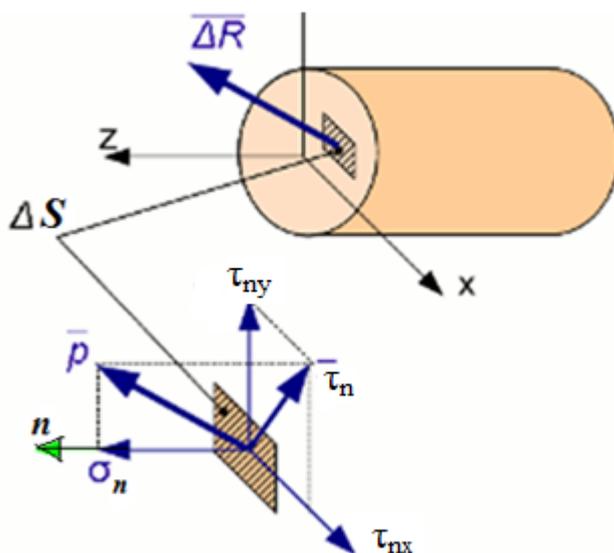


Рис. 2.2. Напряжение

Полное напряжение \vec{p} , как и равнодействующая внутренних сил, приложенных на элементарной площадке, является векторной величиной и может быть разложено на две составляющие: перпендикулярное к рассматриваемой площадке — **нормальное напряжение** σ_n и касательное к площадке — **касательное напряжение** τ_{nx} и τ_{ny} .

Здесь n — нормаль к выделенной площадке.

Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие, параллельные координатным осям x , y , связанным с поперечным сечением – τ_{nx} , τ_{ny} .

В названии касательного напряжения первый индекс указывает нормаль к площадке, второй индекс — направление касательного напряжения.

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \end{bmatrix} \quad (2.3).$$

Отметим, что в дальнейшем будем иметь дело главным образом не с полным напряжением \vec{p} , а с его составляющими σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} . В общем случае на площадке могут возникать два вида напряжений: нормальное σ и касательное τ .

Интенсивность касательных сил в рассматриваемой точке сечения называется касательным напряжением τ , а интенсивность нормальных сил – нормальным напряжением σ . Напряжения τ и σ выражаются формулами:

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}; \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} \quad (2.4)$$

Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения в рассматриваемой точке по данному сечению. Очевидно, что

$$p = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2} \quad (2.5)$$

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, представляют собой напряженное состояние в этой точке.

2.5. Центральное растяжение (сжатие)

Под *центральным растяжением (сжатием)* понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только продольные силы N , а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается, когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня.

Продольной осью стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 2.3.

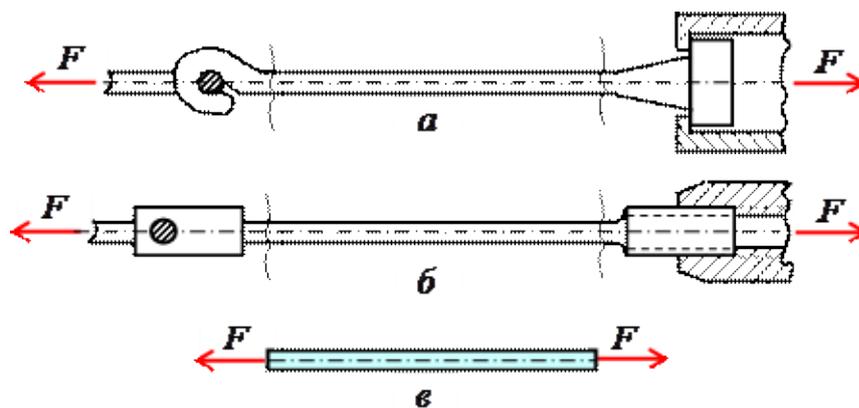


Рис. 2.3. Деформация центрального растяжения

Во всех случаях система внешних сил образует равнодействующую F , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 2.3, а, б) оказывается единой (рис. 2.3, в).

Метод сечений определяет во всех поперечных сечениях стержня нормальные силы N_z , равные силе F (рис. 2.4, а).

Сжатие отличается от растяжения только знаком силы N_z . При растяжении нормальная сила N_z направлена от сечения (рис. 2.4, б), а при сжатии – к сечению.

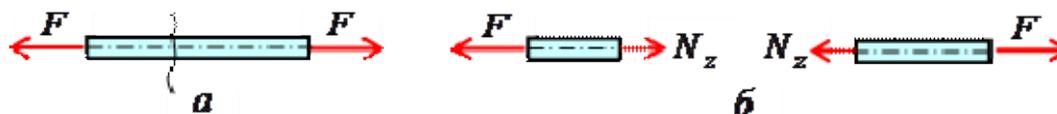


Рис. 2.4. Определение нормальных сил методом сечения:
а) сечение; б) направление нормальных сил в сечениях

Растягивающие продольные силы принято считать **положительными** (рис. 2.5, а), а сжимающие – **отрицательными** (рис. 2.5, б).

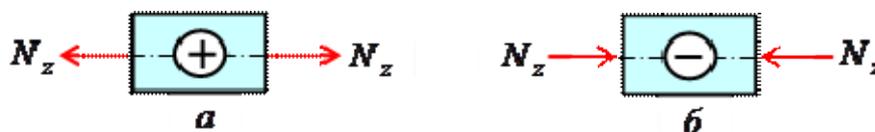


Рис. 2.5. Знаки нормальных сил: а) положительный; б) отрицательный

При расчете стержней, испытывающих деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи:

- 1) определение напряжений (от N_z), возникающих в стержне,
- 2) нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Продольные силы (N_z), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется *эпюрой продольных сил*.

Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие (например, найти N_{\max} при растяжении-сжатии). Сечение, где действует максимальное усилие, называют *опасным*.

Перед построением эпюр необходимо освободить брус от опорных связей (выделить объект равновесия) и приложить к нему все действующие внешние силы (активные и реактивные). Затем необходимо установить границы участков, в пределах которых закон изменения внутренних сил постоянный. Границами таких участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы или начинается и кончается распределенная нагрузка, а также сечения, где имеется перелом стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков, получаем уравнения изменения внутренних сил в пределах длины каждого участка бруса. Затем, используя, полученные зависимости строим графики (эпюры) этих усилий. Ординаты эпюр в определенном масштабе откладываем от базисной линии, которую проводим параллельно оси бруса.

На рис. 2.6, а изображен прямой брус, закрепленный одним концом и нагруженный тремя сосредоточенными силами, параллельными его оси. Численные значения сил: $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 20$ кН, $P_3 = 40$ кН. Для определения продольных сил заменим брус расчетной схемой (рис. 2.6, б) и воспользуемся методом сечений.

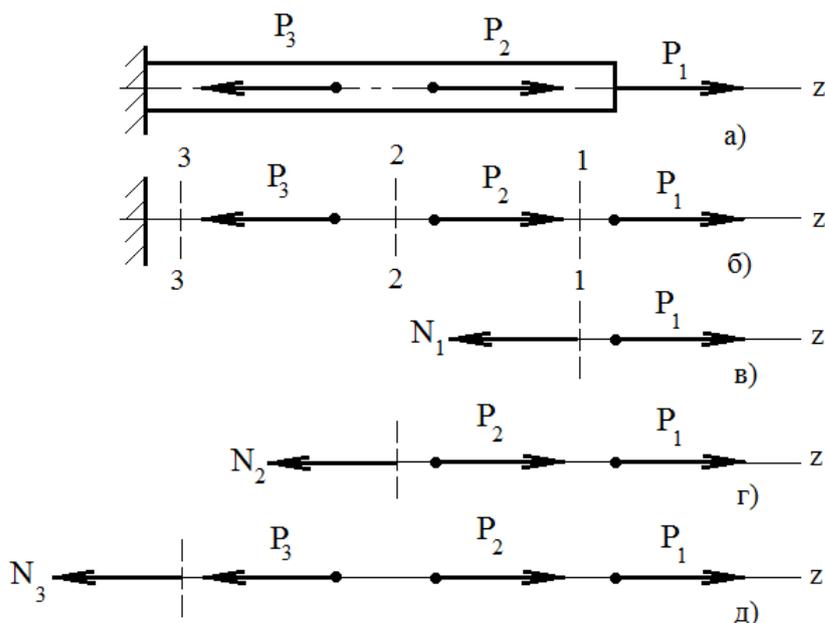


Рис. 2.6. Схема нагружения прямого бруса

Границами участков в данном случае являются сечения, в которых приложены внешние силы. Мысленно рассекаем брус в пределах первого со свободного конца бруса участка и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 2.6, в):

$$\sum F_{kz} = 0; \quad P_1 - N_1 = 0 \quad N_1 = P_1 = 10 \text{ кН} \quad (2.6).$$

Аналогично определим продольные силы на остальных участках (рис. 2.6, г, д).

$$\sum F_{kz} = 0; \quad P_1 + P_2 - N_2 = 0 \quad N_2 = P_1 + P_2 = 10 + 20 = 30 \text{ кН} \quad (2.7).$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad P_1 + P_2 - P_3 - N_3 = 0 \quad N_3 = P_1 + P_2 - P_3 = -10 \text{ кН} \quad (2.8).$$

По полученным результатам можно построить эпюру продольных сил – график, показывающий изменение продольных сил вдоль оси бруса. В том сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре продольных сил наблюдается скачок, численно равный значению внешней силы.

2.6. Напряжение в поперечных сечениях стержня

Нормальная сила N приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и определяется следующим образом:

$$N = \int_A \sigma dS \quad (2.9).$$

Поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует *гипотезе плоских сечений (гипотезе Бернулли)*.

Все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а, следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N}{S}, \quad (2.10).$$

где S - площадь поперечного сечения стержня.

В сечениях, близких к месту приложения внешних сил, гипотеза Бернулли нарушается: сечения искривляются, и напряжения в них распределяются неравномерно. По мере удаления от сечений, в которых приложены силы, напряжения, выравниваются и в сечениях, удаленных от места приложения сил на расстояние, равное наибольшему из размеров поперечного сечения, напряжения можно считать распределенными по сечению равномерно. Это положение позволяет при определении напряжений в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, не учитывать способ их приложения, заменять систему внешних сил статически

эквивалентной системой. Например, экспериментально установлено, что во всех трех случаях нагружения стержня (рис. 2.7, а) значения напряжений в сечениях, удаленных от крайних сечений на расстояние не менее высоты сечения h , одинаковы: $\sigma = \frac{N}{S}$ (рис. 2.7, б), а в сечениях, близких к местам приложения внешних сил, распределения напряжений по сечению различны (рис. 2.7, в).

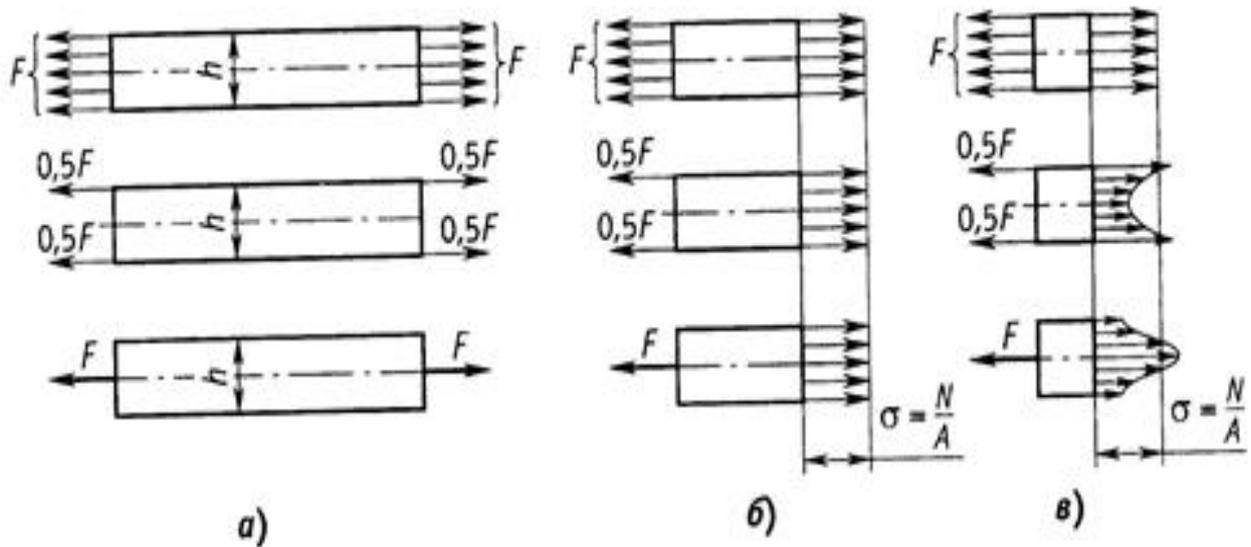


Рис. 2.7. Определение напряжений в сечении стержня:
 а) схема нагружения стержня; б) сечения, удаленные от крайних сечений;
 в) сечения, близкие к местам приложения внешних сил

Высказанное предположение о равномерном распределении нормальных напряжений в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 2.7, в); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций.

Нормальные напряжения при центральном сжатии определяют так же, как и при центральном растяжении, но считают отрицательными.

2.7. Деформации и перемещения. Закон Гука

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим - свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 2.8). До нагружения стержня его длина равнялась l , после нагружения она стала равной $(l + \Delta l)$ (рис. 2.8).

Величину Δl называют **абсолютной продольной деформацией (абсолютным удлинением)** стержня. В большинстве случаев оно мало по сравнению с его первоначальной длиной l ($\Delta l \ll l$).

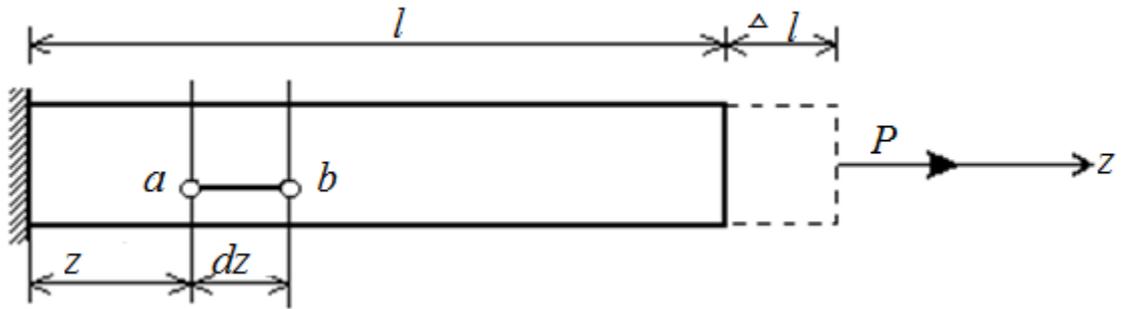


Рис. 2.8 Продольная деформация стержня

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ε остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.11).$$

Величина ε называется *относительной продольной деформацией*.

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (рис. 2.8). При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} \quad (2.12).$$

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде (*нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной линейной деформации ε*):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.13).$$

Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости материала первого рода (модуль продольной упругости)*. Его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться деформированию под действием внешней нагрузки:

сталь – $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; дерево – $E = 1 \cdot 10^4$ МПа;
 медь – $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; алюминий – $E = 0,675 \cdot 10^5$ МПа.

Из совместного рассмотрения уравнений (2.11) и (2.12) получим:

$$\Delta dz = \sigma \frac{dz}{E}, \quad (2.14)$$

откуда с учетом того, что

$$\sigma = \frac{N_z}{S} \text{ и } \Delta l = \int_0^l \Delta dz \quad (2.15)$$

окончательно получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{ES} \quad (2.16)$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = const$, имеет постоянное поперечное сечение $S = const$ и нагружен по концам силой P , то из (2.15) получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{ES}. \quad (2.17).$$

Зависимость (2.16) также выражает закон Гука. Знаменатель ES называется **жесткостью при центральном растяжении - сжатии** или **продольной жесткостью**.

Абсолютную деформацию каждого участка стержня определяют с помощью закона Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{SE} = \frac{\sigma l}{E} \quad (2.18),$$

где l – длина отсеченного участка стержня; E – модуль упругости 1-го рода, модуль Юнга.

Построение графика перемещений поперечных сечений стержня осуществляется по следующему правилу, справедливому для линейно-упругих сред: *перемещение крайнего правого сечения i -того участка стержня равно перемещению крайнего левого сечения этого же участка и плюс абсолютная деформация участка Δl_i* (рис. 2.9).



Рис. 2.9. Определение деформации через перемещение

$$\Pi_{i\text{прав}} - \Pi_{i\text{лев}} = \Delta l_i \quad \text{или} \quad \Pi_{i\text{прав}} = \Pi_{i\text{лев}} + \Delta l_i \quad (2.19).$$

Вычисление перемещений следует начинать с крайнего левого участка стержня, так как для него перемещение левого сечения равно нулю ($\Pi_{i\text{лев}} = 0$).

Расчет стержня на центральное растяжение - сжатие сопровождается проверкой на прочность и назначением новых величин поперечных сечений по участкам, исходя из условия прочности: *максимальное расчетное нормальное напряжение должно быть меньше допускаемого, которое известно из справочников по механической прочности для каждого материала.*

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{S} \leq [\sigma] \quad (2.20).$$

Назначение новых сечений осуществляется по формуле:

$$S_i = \frac{N_i}{[\sigma]} \quad (2.21).$$

2.8. Допускаемые напряжения. Расчеты на прочность

Прочность конструкций, выполненных из хрупкого металла, считается обеспеченной, если во всех поперечных сечениях всех её элементов фактические напряжения меньше предела прочности материала. В связи с приближенностью методики расчета величины нагрузок, напряжения в конструкции и предел прочности материала нельзя установить совершенно точно, поэтому необходимо, чтобы наибольшие расчетные напряжения не превышали некоторой величины, меньшей предела прочности, которая называется допускаемым напряжением. Значение допускаемого напряжения устанавливается путем деления предела прочности на величину, большую единицы, называемую коэффициентом запаса. Условие прочности конструкции, выполненной из хрупкого материала, выражается в виде:

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c] \quad (2.22).$$

Допускаемые напряжения зависят от предела прочности материала на растяжение и сжатие:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{[n_B]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{[n_B]} \quad (2.23)$$

где $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения соответственно при растяжении и сжатии;

$[n_B]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности ($2,5 \div 5$).

Для конструкций из пластичных материалов, у которых пределы прочности на растяжение и сжатие одинаковые, используется следующее условие прочности: $\sigma \leq [\sigma]$. Допускаемое напряжение для пластичных материалов определяют по пределу текучести:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}, \quad (2.24)$$

где $[n_T]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по пределу текучести ($1,5 \div 2,5$).

Расчет прочности, выполняемый с использованием условий прочности, называется расчетом по допускаемым напряжениям.

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач:

- а) проверка напряжений (проверочный расчет);
- б) подбор сечений (проектный расчет);
- в) определение грузоподъемности (определение допускаемой нагрузки).

2.9. Сдвиг

Материал нагруженного элемента конструкции кроме деформации центральное растяжение или сжатие может испытывать деформацию сдвига.

Сдвиг – это тип простой деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях из внутренних силовых факторов действуют только силы в плоских сечениях.

Внутренние силовые факторы – это силы, которые называются поперечными (сдвигающими). Они вызывают касательные напряжения или напряжения сдвига.

В сплошном материале деформация сдвига возникает при кручении тонкостенной трубы. Прямоугольные до деформации элементы материала стенок трубы превращаются в параллелограммы за счет изменения первоначально прямого угла на малый угол γ , называемый *углом сдвига* (рис. 2.10).

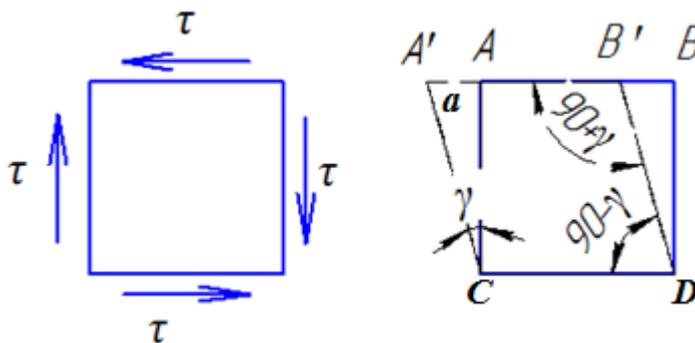


Рис. 2.10. Деформация сдвига

Развитие этой деформации приводит к разрушению, называемому *срезом* или, применительно к древесине, *скалыванием*. Примером сдвига является резка полосы ножницами. На сдвиг работают жесткие соединения конструкций – сварные, заклепочные и другие.

Напряженное состояние, при котором на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения τ , называется чистым сдвигом.

Деформация сдвига оценивается взаимным смещением граней AC и BD малого элемента (рис. 2.10), называемым *абсолютным сдвигом* и более полно – *относительным сдвигом (углом сдвига) γ* .

$$\frac{\Delta}{a} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma, \quad (2.25)$$

являющимся безразмерной величиной.

В предположении равномерного распределения касательных напряжений по сечению площадью S , они определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{S}, \quad (2.26)$$

где Q – поперечная сила в данном сечении.

Условие прочности записывается по минимальной площади среза S_{\min} , отражающей минимальное число соединяющих элементов (заклепок, болтов, штифтов и т.д.) или минимальную длину сварного шва.

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{S_{\min}} \leq [\tau]. \quad (2.27)$$

Величина допускаемых напряжений $[\tau]$ зависит от свойств материала

$$[\tau] \approx (0,55 \dots 0,65)[\sigma]. \quad (2.28)$$

В пределах упругости касательное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу

$$\tau = G\gamma \text{ – это закон Гука при сдвиге;}$$

G – модуль сдвига, Н/м^2 , характеризующий жесткость материала при сдвиге.

Закон Гука при сдвиге через абсолютные деформации:

$$\Delta = \frac{Q \cdot a}{G \cdot S}, \quad (2.29)$$

где a – расстояние между сдвигаемыми гранями; S – площадь грани.

Модуль упругости при сдвиге G , модуль продольной упругости E и коэффициент Пуассона μ материала связаны зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.30)$$

Для стали $G = 0,4E = 0,4 \cdot 2 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^4$ МПа = $8 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0,25$.

2.10. Кручение

Кручение – это такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент M_k , (другое обозначение T , M_z), а остальные силовые факторы (нормальная и поперечная силы и изгибающие моменты) отсутствуют. Или **кручением** называют деформацию, возникающую при действии на стержень пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к его оси (рис. 2.11).

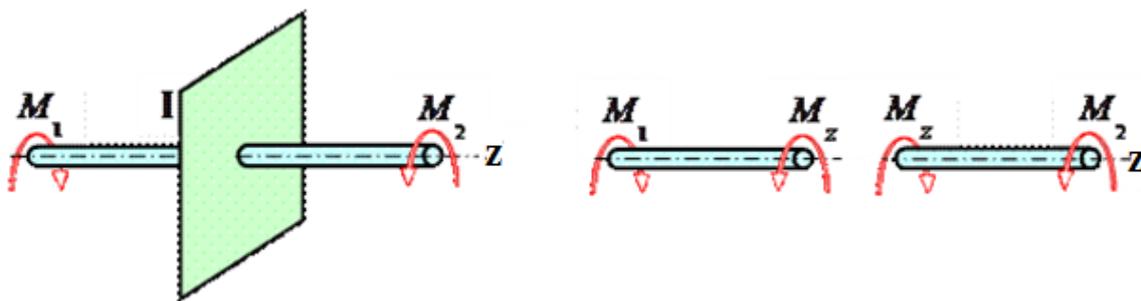


Рис. 2.11. Деформация кручения

Кручение возникает в валах, винтовых пружинах, в элементах пространственных конструкций и т.п.

Деформация кручения наблюдается, если прямой брус нагружен внешними моментами (парами сил M), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси.

В чистом виде деформация кручения встречается редко, обычно присутствуют и другие внутренние силовые факторы (изгибающие моменты, продольные силы).

Стержни круглого или кольцевого сечения, работающие на кручение, называют валами.

Внешние крутящие моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, там, где поперечная нагрузка смещена относительно оси вала.

При рассмотрении прямого бруса в состоянии покоя или равномерного вращения алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу, будет равна нулю.

При расчете брусков, испытывающих деформацию кручения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи:

- 1) определение напряжений (от M_k), возникающих в бруске,
- 2) нахождение угловых перемещений в зависимости от внешних скручивающих моментов.

При расчете валов обычно известна мощность, передаваемая на вал, а величины внешних скручивающих моментов, подлежат определению. В ряде случаев величины внешних крутящих моментов определяются по величине потребляемой мощности и по скорости вращения вала. Если вал делает в минуту n оборотов, то угол поворота вала за 1 сек, выраженный в радианах, равен $\frac{n}{60} \cdot 2\pi = \frac{\pi n}{30}$. Работа крутящего момента M_k за 1 сек, т. е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за 1 сек:

$$N = M_k \cdot \frac{\pi n}{30}, \quad M_k = \frac{30N}{\pi n} \text{ (Н} \cdot \text{м)},$$

– где мощность N выражена в Н·м/сек.

При кручении вала его поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга, вращаясь вокруг оси бруса.

Под действием внешнего скручивающего момента, приложенного на правом конце бруса, левый конец которого жестко закреплен, брус будет закручиваться.

Выделим из бруса элементарный цилиндр длиной $l = dx$ (рис. 2.12).

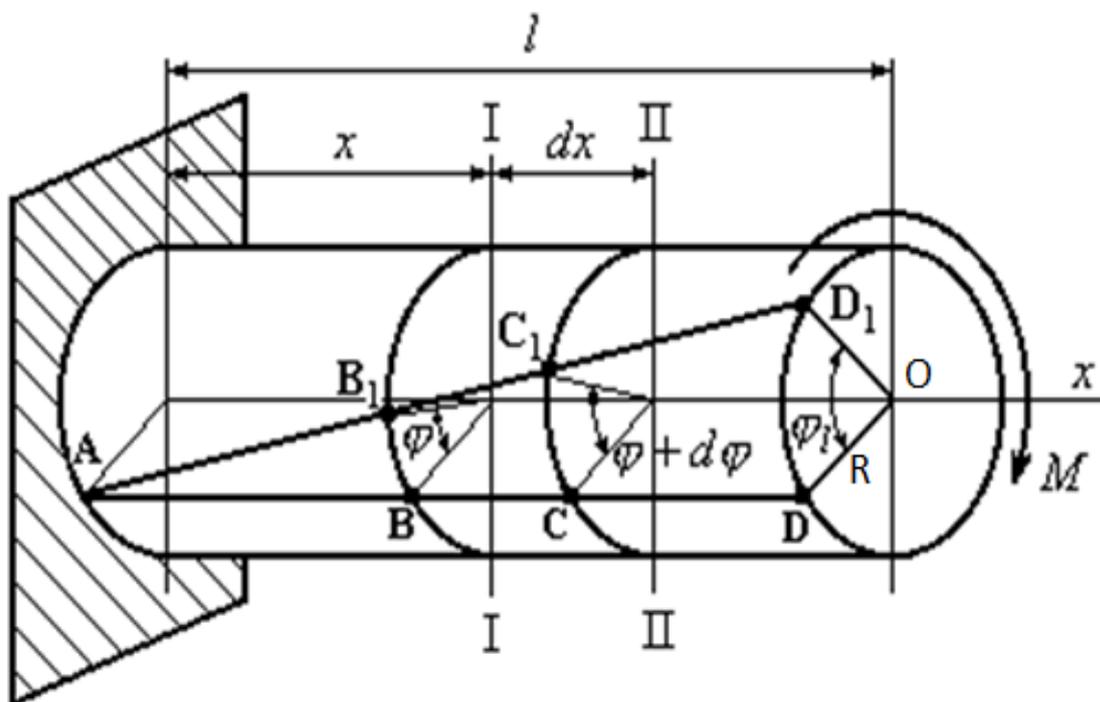


Рис. 2.12. Определение угла закручивания

Будем считать, что левое сечение бруса жестко закреплено. Под действием крутящего момента M правое сечение повернется на некоторый угол $d\varphi$. Так как $ds = \gamma \cdot dx = \rho \cdot d\varphi$, то получаем

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx} \rho, \quad (2.31)$$

где $\rho \Rightarrow 0 \div R$ – радиус сечения ($R = |DO|$).

Из данной зависимости видно, что угол сдвига изменяется по радиусу вала по линейному закону.

Деформация бруса при кручении характеризуется относительным углом закручивания:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (2.32).$$

При малых углах закручивания вала в теории кручения круглых стержней принимаются допущения:

1. Поперечные сечения, плоские и перпендикулярные к его оси до деформации, остаются плоскими (не коробятся) и перпендикулярными к оси вала и после деформации (гипотеза Бернулли).

2. Радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются и не изменяют своей длины.

3. Длина вала в результате закручивания не изменяется.

Поперечное сечение вала ведет себя при кручении, как жесткий диск, и деформацию кручения можно рассматривать, как результат сдвига одного поперечного сечения относительно другого. В этом случае в точках поперечного сечения вала возникают только касательные напряжения.

Теория кручения, основанная на упомянутых допущениях, подтверждается экспериментальными данными.

Согласно закону Гука при сдвиге, имеем $\gamma = \frac{\tau}{G}$.

Откуда получаем:

$$\tau = \frac{d\varphi}{dx} G \rho = \theta G \rho \quad (2.33).$$

Из полученной зависимости следует, что касательные напряжения изменяются по радиусу по линейному закону.

При кручении все внутренние силы, распределенные по поперечному сечению, приводятся к одной составляющей – к крутящему моменту. Касательные напряжения перпендикулярны радиусам, проведенные через точки их действия (рис. 2.13).

Крутящий момент M_k в сечении бруса определяется по формуле

$$M_k = \int_A \rho \tau_\rho dS \quad (2.34),$$

где ρ – плечо элементарной силы.

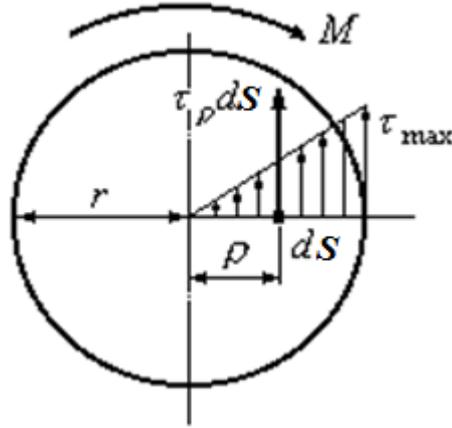


Рис. 2.13. Эпюра касательных напряжений

Подставляя значение касательного ускорения, получим

$$N = \int_A \theta G \rho^2 dS = \theta \cdot G \cdot I_\rho = \frac{d\varphi}{dx} G \cdot I_\rho \quad (2.35)$$

Элементарный угол закручивания бруса:

$$d\varphi = \frac{M_K \cdot dx}{G \cdot I_\rho} \quad (2.36)$$

полный угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_\rho} \quad (2.37).$$

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса будет определяться по зависимости (рис. 2.15):

$$\tau_{max} = \theta \cdot G \cdot \rho_{max} = \frac{M_K}{I_\rho} \rho_{max} = \frac{M_K}{\frac{I_\rho}{\rho_{max}}} = \frac{M_K}{W_\rho} \quad (2.38).$$

2.11. Прочность и жесткость при кручении

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau] \quad (2.39).$$

Условие жесткости:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_\rho} \leq [\varphi] \quad (2.40).$$

Для бруса круглого сечения эти условия принимают вид:

$$\tau = \frac{16M_k}{\pi d^3} \leq [\tau] \quad (2.41),$$

$$\varphi = \frac{32M_k \cdot l}{G \pi d^4} \leq [\varphi] \quad (2.42).$$

Выражение $0 \leq r \leq \frac{D}{2}$ показывает, что касательные напряжения τ изменяются по радиусу, по линейному закону от 0 до некоторого максимального значения при $r/2$ (рис. 2.14).

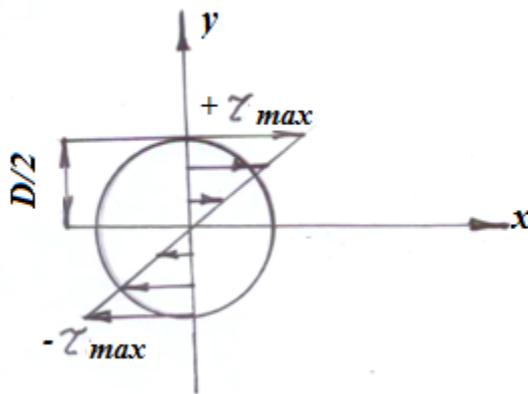


Рис. 2.14. Закон изменения касательных напряжений

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \approx 0,1 \cdot D^4 \quad (2.43).$$

Вопрос прочности стержня решается так. Выбирается опасное сечение из эпюры крутящих моментов и для этого сечения записывается условие прочности для периферийных слоев стержня при $r = D/2$.

$$\tau_{\text{рас}}^{\text{max}} = \frac{|M_{zi}^{\text{max}}|}{J_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{|M_{zi}^{\text{max}}|}{W_p} \leq [\tau] \quad (2.44),$$

$$\text{где } W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot D^4}{D} = 0,2D^3 \quad (2.45).$$

Из последнего уравнения легко вычисляется диаметр стержня для опасного сечения;

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{zi}|^{\max}}{0,2 \cdot [\tau]}} \quad (2.46).$$

Так определяется диаметр стержня из условия прочности, а для определения диаметра стержня из условия жесткости используется следующее требование:

$$\theta^{\max} = \frac{|M_{zi}^{\max}|}{G \cdot J_p} \leq [\theta] \quad (2.47),$$

где $[\theta]$ - допускаемый (нормированный) относительный угол закручивания, рад/м;

G - модуль упругости 2-го рода, характеризующий деформацию сдвига, МПа.

Тогда диаметр стержня из условия жесткости -

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{zi}|^{\max}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}} \quad (2.48).$$

График (эпюр) распределения касательных напряжений показывает, что сечение используется нерационально, т.е. наиболее нагружены периферийные волокна сечения. Поэтому, часто используются полые стержни, для которых коэффициент $\alpha = d / D$ позволяет рассчитать из условия прочности или жесткости наружный и внутренний диаметры.

$$\text{Для полого вала} \quad J_p = 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4) \quad (2.49);$$

$$\text{а} \quad W_p = 0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \quad (2.50),$$

где d - внутренний диаметр; D - наружный диаметр.

Для выяснения картины деформации стержня при кручении строят эпюру (график) угловых поворотов поперечных сечений по формуле:

$$\varphi_i^{\text{прав}} = \varphi_i^{\text{лев}} + \frac{l_i \cdot M_{\text{кр}i}}{G J_p} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (2.51),$$

где $\varphi_i^{\text{прав}}$ и $\varphi_i^{\text{лев}}$ - углы поворота крайних правого и левого сечений для i -го участка длиной l_i .

Второе слагаемое уравнения представляет собой абсолютную деформацию $\Delta \varphi_i$ при кручении i -го участка.

Для построения графика угловых поворотов поперечных сечений стержня принимают условно за неподвижное любое сечение и от него начинают построение.

2.12. Связь между угловыми деформациями

Кручение круглого бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и разворачиваются на угол γ (угол поворота образующей). Поперечные сечения разворачиваются на угол φ , называемый *углом закручивания* (угол поворота сечения, рис. 2.15).

Длина бруса и размеры поперечного сечения при кручении не изменяются.

Связь между угловыми деформациями определяется соотношением

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R}, \quad (2.52)$$

где l — длина бруса; R — радиус сечения.

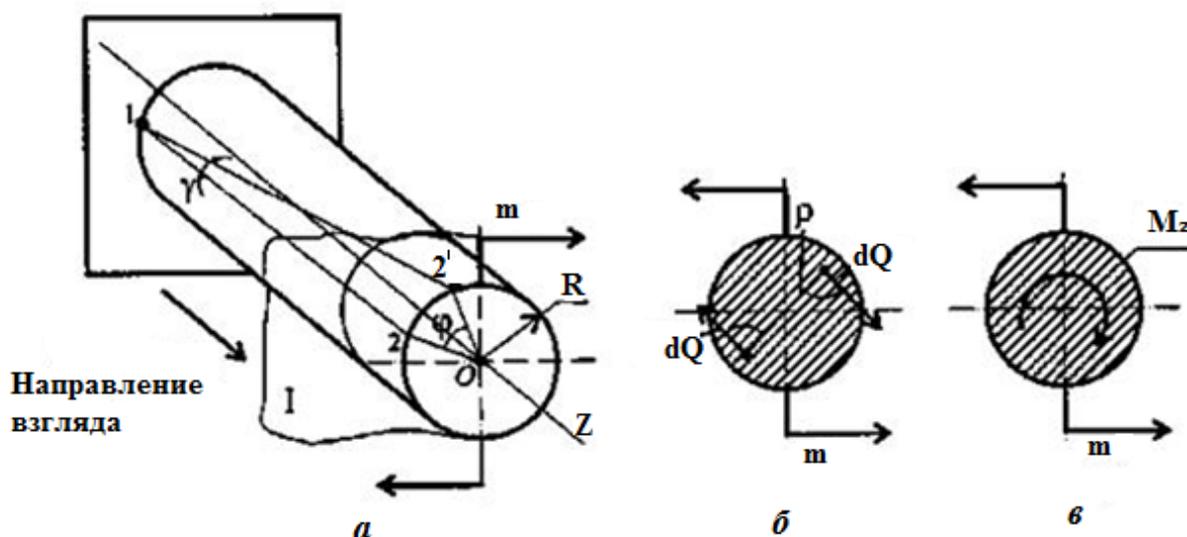


Рис. 2.15. Связь между угловыми деформациями: a — расчетная схема вала; $б$ — пара сил с моментом в сечении; $в$ — крутящий момент в сечении

Длина бруса значительно больше радиуса сечения, следовательно, $\varphi \gg \gamma$. Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах.

2.13. Построение эпюр крутящих моментов

Для определения напряжений и деформаций вала необходимо знать значения внутренних крутящих моментов M_k (M_z) в поперечных сечениях по длине вала. Диаграмму, показывающую распределение значений крутящих моментов по длине бруса, называют *эпюрой крутящих моментов*. Зная величины внешних скручивающих моментов и используя метод сечений, можно определить крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала.

В простейшем случае, когда вал нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия вала $\sum M_z = 0$ всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), крутящий момент M_z в любом поперечном сечении вала (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту $|M_1| = |M_2|$.

В более сложных случаях, когда к валу приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты M_k в поперечных сечениях различных участков вала неодинаковы.

На основании метода сечений *крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к валу по одну сторону от рассматриваемого сечения.*

При расчетах на прочность и жесткость знак крутящего момента не имеет никакого значения, но для удобства построения эпюр M_k примем следующее правило знаков: *крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части вала, действующий на него момент, представляется направленным по ходу часовой стрелки* (рис. 2.16).

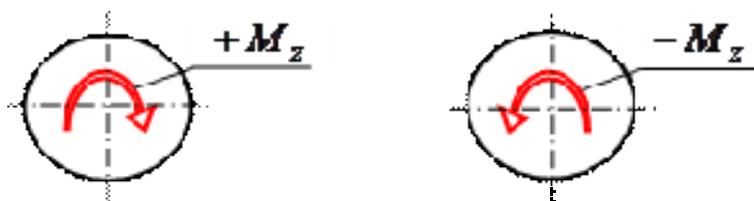


Рис. 2.16. Правило знаков

На рис. 2.17, а изображен стержень, жестко закрепленный в правом конечном сечении, к которому приложены три внешних скручивающих момента.

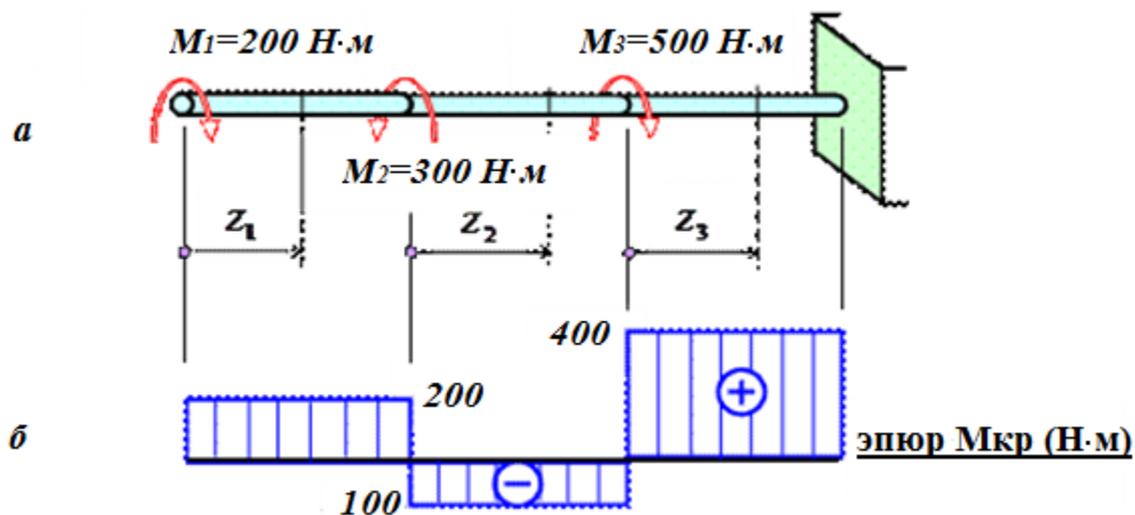


Рис. 2.17. Стержень жестко закрепленный: а – расчетная схема, б – эпюра крутящих моментов

Крутящие моменты в их поперечных сечениях удобно выражать через внешние моменты, приложенные со стороны свободного конца бруса. Это позволяет определять крутящие моменты, не вычисляя реактивного момента, возникающего в заделке.

Крутящий момент M_{z1} в сечении I численно равен $M_1=200$ Н·м и, согласно принятому правилу знаков, положителен.

Крутящий момент M_{z2} в сечении II численно равен алгебраической сумме моментов M_1 и M_1 , т.е. $M_{z2} = 200 - 300 = -100$ Н·м, а его знак зависит от соотношения этих моментов.

Аналогичным образом вычисляется крутящий момент M_{z3} в сечении III: $M_{z3} = 200 - 300 + 500 = 400$ Н·м.

Изменение крутящих моментов по длине вала покажем с помощью **эпюры крутящих моментов**. На рис. 2.17, б показана такая эпюра для стержня, изображенного на рис. 2.17, а.

Каждая ордината эпюры M_k в принятом масштабе равна величине крутящего момента, действующего в том поперечном сечении бруса, которому соответствует эта ордината.

В сечении, в котором к брусу приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведется расчет бруса на прочность и жесткость.

2.14. Изгиб

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором стержень загружен моментами в плоскостях, проходящих через продольную ось стержня.

Стержень, работающий на изгиб, называется балкой (или бруском). В дальнейшем будем рассматривать прямолинейные балки, поперечное сечение которых имеет хотя бы одну ось симметрии (рис. 2.18).

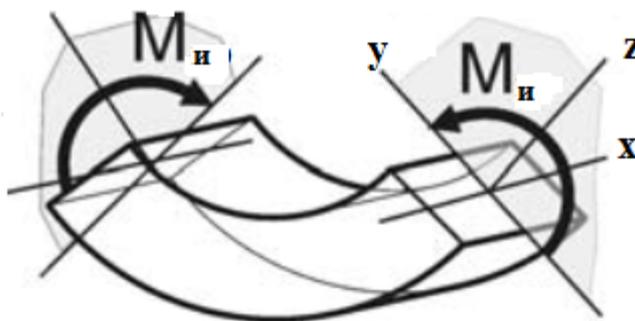


Рис. 2.18 . Деформация изгиба стержня

В сопротивлении материалов различают изгиб плоский, косой и сложный.

Плоский изгиб – изгиб, при котором все усилия, изгибающие балку, лежат в одной из плоскостей симметрии балки (в одной из главных плоскостей) (рис. 2.19).

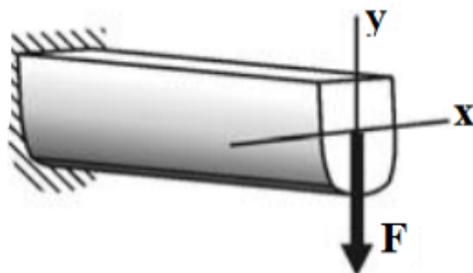


Рис. 2.19 . Плоский изгиб

Главными плоскостями инерции балки называют плоскости, проходящие через главные оси поперечных сечений и геометрическую ось балки (ось x).

Косой изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции (рис. 2.20).

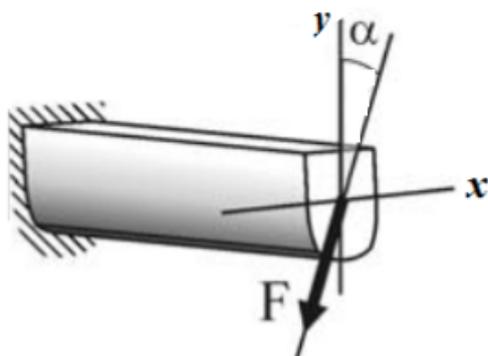


Рис. 2.20. Косой изгиб

Сложный изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в различных (произвольных) плоскостях (рис. 2.21).

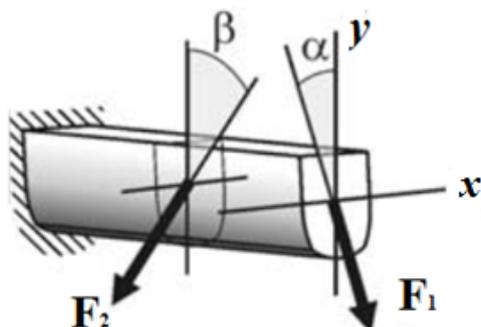


Рис. 2.21. Сложный изгиб

2.15. Определение внутренних усилий при изгибе

Рассмотрим два характерных случая изгиба: в первом – консольная балка изгибается сосредоточенным моментом M_o ; во втором – сосредоточенной силой F (рис. 2.22).

Используя метод мысленных сечений и составляя уравнения равновесия для отсеченных частей балки, определим внутренние усилия в том и другом случае:

$$\begin{aligned} 1 \text{ случай: } \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow Q_y = 0 \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = 0 \end{aligned} \quad (2.53).$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ случай: } \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow Q_y = F \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = -F \cdot z \end{aligned} \quad (2.54).$$

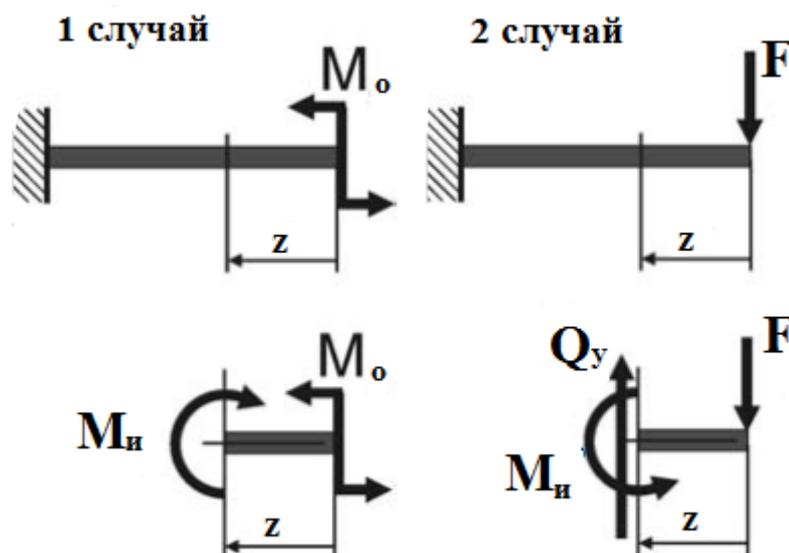


Рис. 2.22. Внутренние усилия при изгибе

Остальные уравнения равновесия, очевидно, тождественно равны нулю.

Таким образом, в общем случае плоского изгиба в сечении балки из шести внутренних усилий возникают два – **изгибающий момент M_z** и **поперечная сила Q_y** (или при изгибе относительно другой главной оси – изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z).

Плоский изгиб можно подразделить на чистый и поперечный.

Чистый изгиб – плоский изгиб, при котором в сечениях стержня из шести внутренних усилий возникает только один – изгибающий момент.

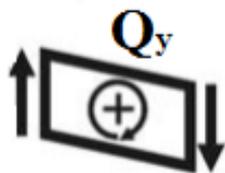
Поперечный изгиб – изгиб, при котором в сечениях стержня кроме внутреннего изгибающего момента возникает и поперечная сила.

К простым видам сопротивления относится лишь чистый изгиб; поперечный изгиб относят к простым видам сопротивления условно, так как в

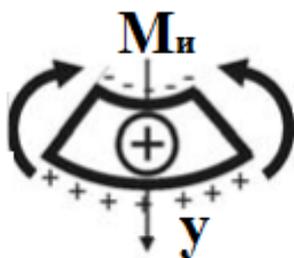
большинстве случаев (для достаточно длинных балок) действием поперечной силы при расчетах на прочность можно пренебречь.

При определении внутренних усилий будем придерживаться следующего правила знаков:

1) поперечная сила Q_y считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемый элемент балки по часовой стрелке;



2) изгибающий момент M_x считается положительным, если при изгибе элемента балки верхние волокна элемента оказываются сжатыми, а нижние – растянутыми (правило зонты).



Таким образом, задачи по определению внутренних усилий при изгибе решают по следующему плану:

1) на первом этапе, рассматривая условия равновесия конструкции в целом, определяют, если это необходимо, неизвестные реакции опор (для консольной балки реакции в заделке можно и не находить, если рассматривать балку со свободного конца);

2) на втором этапе выделяют характерные участки балки, принимая за границы участков точки приложения сил, точки изменения формы или размеров балки, точки закрепления балки;

3) на третьем этапе определяют внутренние усилия в сечениях балки, рассматривая условия равновесия элементов балки на каждом из участков.

Правила построения и проверки эпюр для задач на изгиб

1. На участке, где нет распределенной нагрузки q , эпюра поперечной силы Q_y имеет постоянное значение и параллельна оси балки, а эпюра изгибающего момента M_x изменяется по линейному закону (рис. 2.23, а).

2. На участке, где есть распределенная нагрузка q , эпюра поперечной силы Q_y изменяется по линейному закону ($q \cdot z$); эпюра изгибающего момента M_x – по закону квадратичной параболы $\left(\frac{q \cdot z^2}{2}\right)$, причём парабола направлена выпуклостью навстречу q (рис. 2.23, б).

3. В сечении, где есть внешняя сила F , эпюра поперечной силы Q_y имеет скачок на величину F , а эпюра изгибающего момента M_x имеет излом (рис. 2.23, в).

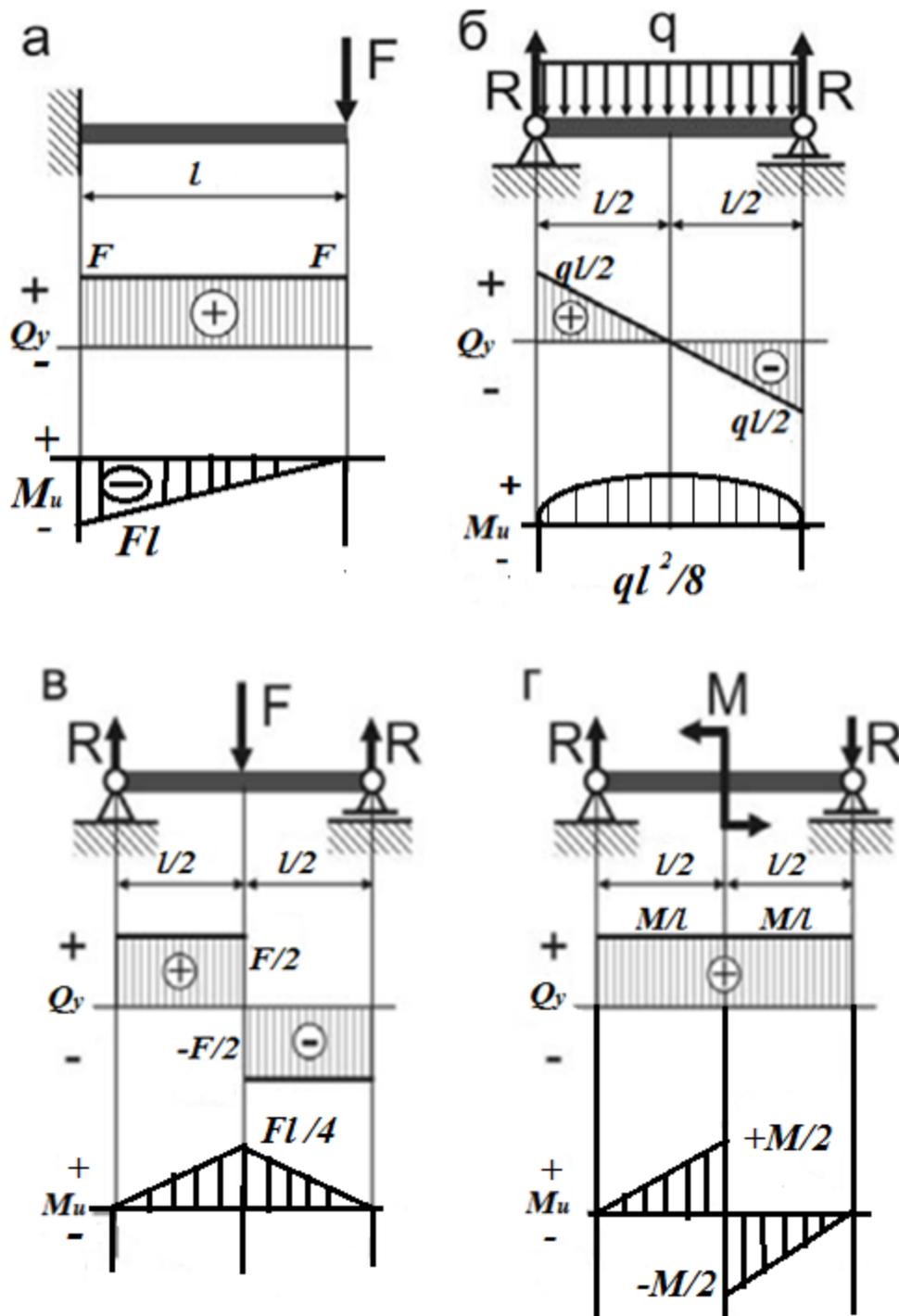


Рис. 2.23. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил: а – к балке приложена сосредоточенная сила; б – к балке приложена распределенная сила; в – в центре балки приложена сосредоточенная сила; г – в центре балки приложен момент

4. В сечении, где есть внешний момент M , эпюра M_u имеет скачок на величину этого момента M (рис. 2.23, г).
5. В сечении, где эпюра Q_y проходит через ноль, эпюра M_u имеет экстремум (рис. 2.23, б).

б. В концевых сечениях балки значения эпюр Q_y и M_x имеют значения соответственно значению внешних сил и внешних сил и внешних моментов (активных и реактивных, см. рис. 2.23).

2.16. Нормальные напряжения при чистом изгибе прямого бруса

Методами теории упругости можно получить точную зависимость для нормальных напряжений при чистом изгибе, если же решать эту задачу методами сопротивления материалов, необходимо ввести некоторые гипотезы.

Таких гипотез при изгибе три:

1) *гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли). Сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, а лишь поворачиваются относительно некоторой линии, которая называется нейтральной осью сечения балки. При этом волокна балки, лежащие с одной стороны от нейтральной оси будут растягиваться, а с другой - сжиматься; волокна, лежащие на нейтральной оси своей длины не изменяют;

2) *гипотеза о постоянстве нормальных напряжений* - напряжения, действующие на одинаковом расстоянии y от нейтральной оси, постоянны по ширине бруса;

3) *гипотеза об отсутствии боковых давлений* - соседние продольные волокна не давят друг на друга.

Кроме этих гипотез следует ввести ряд ограничений:

1. Балка имеет хотя бы одну плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает в условиях плоского изгиба без коробления или скручивания.

Приведенные выше гипотезы в обычных случаях изгиба верны только приблизительно. Однако вытекающие из них погрешности теории так невелики, что ими можно пренебречь.

Как было отмечено выше, под чистым изгибом понимается такой вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. Для тех участков бруса, где соблюдается данное условие, изгибающий момент, вдоль продольной оси z принимает постоянное значение. Так как в любом сечении стержня при чистом изгибе $M_x(z) = \text{const}$, то для однородного бруса постоянного поперечного сечения изменение кривизны постоянно вдоль оси z . Под действием изгибающих моментов ось бруса искривляется. Исходя из этого, ось бруса принимает форму дуги окружности с радиусом кривизны ρ (рис. 2.24). В данном случае с высокой степенью точности справедлива гипотеза плоских сечений. Следовательно, точки, расположенные до изгиба в плоскости

поперечного сечения бруса, в результате изгиба переместятся в пространстве таким образом, что их совокупность снова образует плоскость.

Процесс формирования деформаций при чистом изгибе может рассматриваться, как результат поворота плоских поперечных сечений друг относительно друга.

Рассмотрим два смежных сечения, отстоящих один от другого на расстоянии dz (рис. 2.24).

В результате изгиба эти сечения наклонятся, образуя между собой угол $d\theta$, в связи с чем верхние волокна удлиняются, а нижние – укоротятся. Очевидно, что при этом существует слой, длина которого не изменилась. Назовем его **нейтральным слоем** и обозначим отрезком CD . При этом $CD=C'D'=dz$. Произвольный отрезок AB , расположенный от CD на расстоянии y , в результате изгиба удлинится на величину $A'B'-AB$. С учетом построений, изображенных на рисунке 2.24, легко определить величину его относительной линейной деформации:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)d\theta - dz}{dz} = y \frac{d\theta}{dz} = \frac{y}{\rho} \quad (2.55).$$

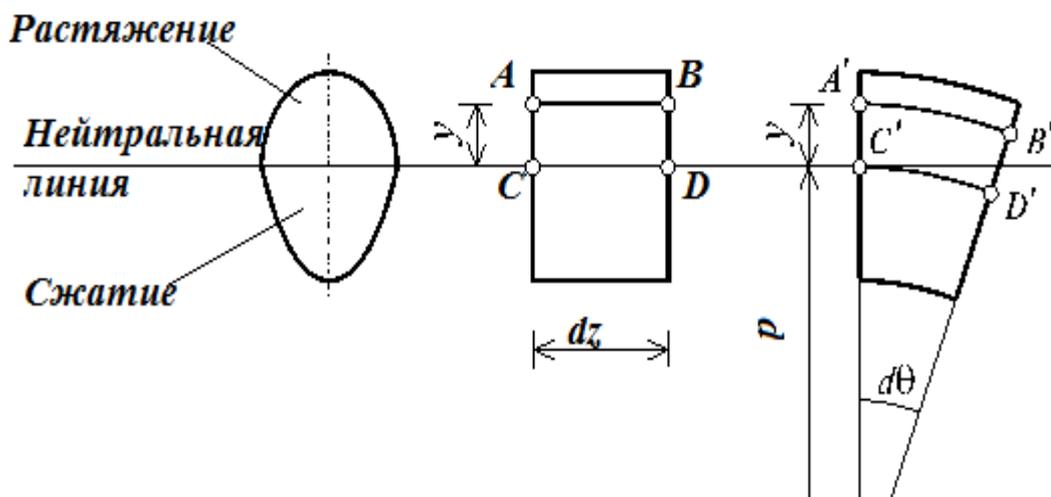


Рис. 2.24. Смежные сечения

Если предположить, что продольные волокна не давят друг на друга, то каждое из них будет находиться в условиях простого растяжения – сжатия. Тогда переход от деформаций к нормальным напряжениям σ можно осуществить посредством закона Гука:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (2.56).$$

Установим положение нейтральной оси x , от которой происходит отсчет координаты y (рис. 2.25). Учитывая, что сумма элементарных сил σdS по

площади поперечного сечения S дает нормальную силу N_z . Но при чистом изгибе $N_z=0$, следовательно:

$$N_z = \int_S \sigma dS = \frac{E}{\rho} \int_S y dS = 0 - \int_S y dS = 0 \quad (2.57).$$

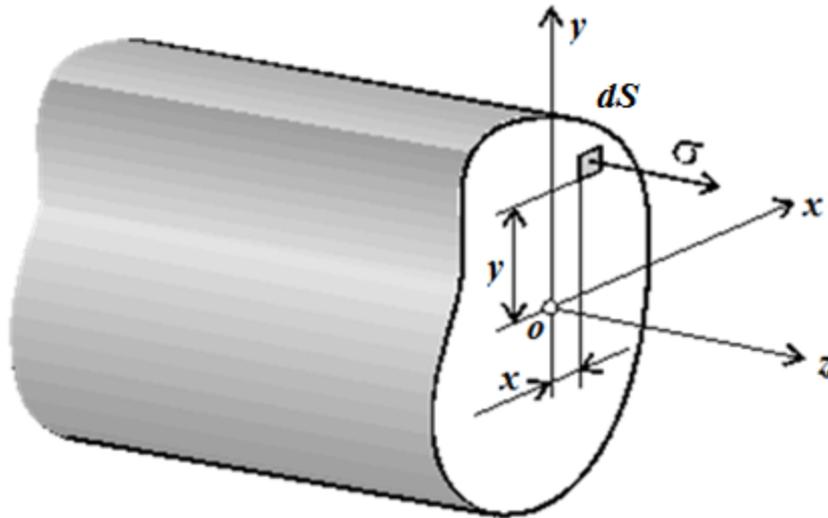


Рис. 2.25. Положение осей в сечении

Как известно, последний интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии (оси x). Статический момент равен нулю, значит, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

Выразим момент внутренних сил относительно нейтральной оси M_x через σ . Очевидно, что

$$M_k = \int_S \sigma y dS \quad (2.58).$$

С учетом выражения (2.56) получим:

$$M_k = \frac{E}{\rho} \int_S y^2 dS = \frac{E}{\rho} I_x \quad (2.59).$$

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (2.60).$$

где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна нейтрального волокна; EI_x – жесткость бруса.

Из формулы (2.56), исключая $\frac{1}{\rho}$, окончательно получим:

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} \quad (2.61).$$

Эта формула была впервые получена Ш. Кулоном в 1773 году.

Нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию точки от нейтральной линии сечения и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.

Из выражения (2.61) можно сделать ряд важных выводов:

1) напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки, в которой это напряжение определяется;

2) напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой;

3) нормальные напряжения не зависят, а упругие перемещения зависят от модуля упругости материала балки.

В нейтральном слое при $y = 0$ напряжения $\sigma = 0$, в сжатой зоне (при $y < 0$, рис. 2.24) напряжения становятся отрицательными, в растянутой зоне (при $y > 0$, рис. 2.24) напряжения становятся положительными. По мере удаления от нейтрального слоя нормальные напряжения σ в поперечном сечении бруса при его изгибе изменяются по линейному закону в зависимости от координаты y и принимают максимальное значение на уровне крайних волокон (при $y = y_{\max}$):

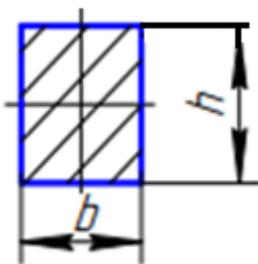
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (2.62),$$

где $W_x = \frac{I_x}{y_x}$ - осевой момент сопротивления сечения при изгибе.

Измеряется осевой момент сопротивления единицами длины в третьей степени, например (см^3). Физический смысл момента сопротивления состоит в следующем: чем больше W_x , тем больший изгибающий момент может принять на себя балка, не подвергаясь опасности разрушения. Таким образом, величина момента сопротивления характеризует *влияние формы и размеров поперечного сечения балки на ее способность сопротивляться внешним нагрузкам, не разрушаясь*.

Выражения W_x для различных форм поперечных сечений:

а) для прямоугольного сечения:

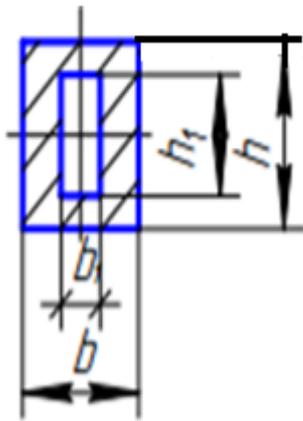


$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad [\text{м}^3] \quad (2.63)$$

$$\text{и} \quad \frac{b}{h} = \alpha;$$

где b - ширина сечения; h - высота сечения;

б) для полого прямоугольного сечения



$$W_x = \frac{b \cdot h^2 \cdot (1 - \gamma \cdot \beta^3)}{6} \quad (2.64),$$

где $\gamma = \frac{b_1}{b}$; $\beta = \frac{h_1}{h}$; $\alpha = \frac{b}{h} \rightarrow b = \alpha \cdot h$;

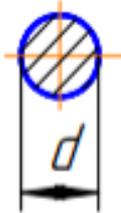
и тогда

$$h \geq 3 \sqrt[3]{\frac{6W_x}{\alpha \cdot (1 - \gamma \cdot \beta^3)}}; \quad (2.65)$$

$$W_x = \frac{\alpha \cdot h^3 \cdot (1 - \gamma \cdot \beta^3)}{6}$$

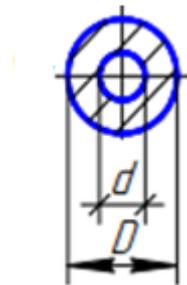
$$b = \alpha h; b_1 = \gamma \cdot b; h_1 = \beta \cdot h;$$

в) для круглого сечения:



$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 \quad (2.66)$$

г) для кольцевого сечения



$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4); \quad (2.67)$$

$$\alpha = \frac{d}{D};$$

д) W_x для сечений двутавр и швеллер выбираются по таблицам (см. приложение I, II).

В зависимости от того, чему лучше сопротивляется материал, приходится соответствующим образом конструировать сечение, выбирая его форму и размеры так, чтобы они удовлетворяли условию прочности.

Из условия прочности формулируют три рода задач при изгибе:

1. Проверка прочности: задана балка, нагрузка, известен материал. Строится эпюра M_x – определяется M_{max} , вычисляется W_x и проверяется условие прочности.

2. Определение максимально допустимой нагрузки по условию прочности. Заданы размеры балки, характер нагрузки, материал балки. Строится эпюра M_x – определяется M_{max} от параметра нагрузки, вычисляется W_x и находят наибольший параметр нагрузки.

3. Конструирование балки – определение размеров ее поперечного сечения. Для двутаврового сечения по таблице сортамента подбирают номер двутавра с W_x большим, чем правая часть.

2.17. Полная проверка прочности. Опасные сечения и точки

Для проверки на прочность по действующим на балку внешним нагрузкам строят эпюры изменения внутренних усилий по ее длине и определяют опасные сечения балки, для каждого из которых необходимо провести проверку прочности.

При полной проверке прочности таких сечений будет, как минимум, три (иногда они совпадают):

1. сечение, в котором изгибающий момент M_x - достигает своего максимального по модулю значения, - именно по этому сечению подбирают сечение всей балки;

2. сечение, в котором поперечная сила Q_y , достигает своего максимального по модулю значения;

3. сечение, в котором и изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y достигают по модулю достаточно больших величин.

В каждом из опасных сечений необходимо, построив эпюры нормальных и касательных напряжений, найти опасные точки сечения (проверка прочности проводится для каждой из них), которых также будет, как минимум, три:

1. точка, в которой нормальные напряжения σ_z , достигают своего максимального значения, - то есть точка на наружной поверхности балки наиболее удаленная от нейтральной оси сечения;

2. точка, в которой касательные напряжения τ достигают своего максимального значения, - точка, лежащая на нейтральной оси сечения;

3. точка, в которой и нормальные напряжения, и касательные напряжения, достигают достаточно больших величин (эта проверка имеет смысл для сечений типа тавра или двутавра, где ширина резко изменяет свое значение).

3. Контрольные задачи и примеры их решения

3.1. Равновесие тела под действием плоской системы сил

На заданную конструкцию действует плоская система сил, то есть все внешние силы, и пары сил лежат в одной плоскости.

Для решения поставленной задачи по определению реакций опор необходимо составить три уравнения статики, отражающие условие равновесия тела.

Расположение системы координат произвольно, однако лучше выбрать их положение так, чтобы большее количество проекций сил обращалось в нуль.

Выбор точек, относительно которых составляют моменты, также произволен, так как от их положения результат расчета не зависит.

Решение задачи начинают с изображения расчетной схемы, на которой проставляется система координат YOX и опоры не изображаются, а изображаются реакции опор (это делается на основе принципа освобождения от связи). В начале расчета направление реакций проставляется произвольно вдоль осей X и Y , а затем корректируется по результатам расчета: если получен знак « - » у реакции, то ее направление изменяется на противоположное. Кроме этого, распределенные нагрузки « q » заменяются сосредоточенной силой « Q ».

Применяя один из вариантов условий равновесия стержня, определяют реакции опор.

Для проверки правильности определения реакций необходимо составить еще одно уравнение равновесия тела, но отличающееся от первых трех.

Пример 1

К балке (стержню), изображенной на рис. 3.1, приложена внешняя нагрузка в виде: сосредоточенной силы F , направленной под углом α к горизонтали; сосредоточенного момента M (пары сил); равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и силы P , приложенной к середине балки. Определить реакции в шарнирных опорах A и B .

Дано:

$$F = 16 \text{ кН}; P = 5 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \alpha = 30^\circ; q = 1,2 \text{ кН/м}; a = b = c = d = 3 \text{ м}.$$

Определить:

$$R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}.$$

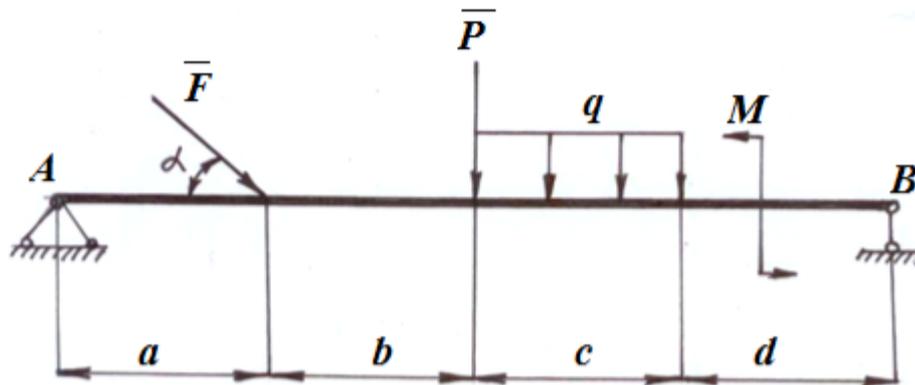


Рис. 3.1. Заданная схема

Решение

Опора **A** является шарнирно-неподвижной. Поэтому направление реакции R_A заранее неизвестно. Разложим R_A на составляющие R_{Ax} и R_{Ay} по осям X и Y , направленные в положительную сторону вдоль осей.

Опора **B** является шарнирно-подвижной, направление реакции заранее известно, то есть по направлению оси Y (вверх) (рис. 3.2).

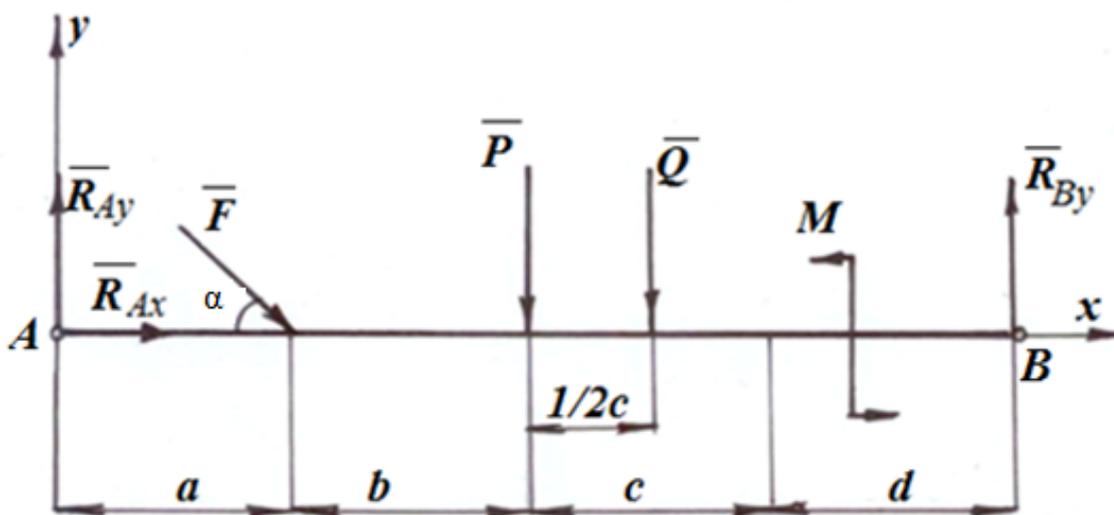


Рис. 3.2. Расчетная схема

Распределенную силу заменяем сосредоточенной $Q = q \cdot c$, приложенную посередине участка c .

Из рис. 3.2 видно, что заданная балка под действием системы внешних сил (заданных сил и реакций связи) находится в равновесии (то есть указанная система сил эквивалента нулю).

Составим уравнения равновесия.

1. Сумма моментов всех сил относительно т. А должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = -F \cdot \sin\alpha \cdot a - P(a+b) - Q\left(a+b+\frac{c}{2}\right) + M + R_{BY}(a+b+c+d) = 0$$

$$R_{BY} = \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot a + P(a+b) + Q\left(a+b+\frac{c}{2}\right) - M}{(a+b+c+d)} =$$

$$= \frac{16 \cdot 3 \cdot 0,5 + 5(3+3) + 3,6(3+3+1,5) - 20}{12} = 5,09 \text{ кН}$$

2. Сумма моментов всех сил относительно т. В должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = M + Q\left(d+\frac{c}{2}\right) + P(d+c) + F \cdot \sin\alpha(b+c+d) - R_{AY}(a+b+c+d) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{M + Q\left(d+\frac{c}{2}\right) + P(d+c) + F \cdot \sin\alpha(b+c+d)}{(a+b+c+d)} =$$

$$= \frac{20 + 1,2 \cdot 3 \cdot (3+1,5) + 5(3+3) + 16 \cdot 0,5(3+3+3)}{12} =$$

$$= 11,51 \text{ кН}$$

3. Сумма проекций всех сил на ось X:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_{AX} + F \cdot \cos\alpha = 0$$

$$R_{AX} = -F \cdot \cos\alpha = -16 \cdot 0,866 = -13,85 \text{ кН}.$$

Отрицательный знак у реакции R_{AX} говорит о том, что сила R_{AX} будет направлена в противоположную сторону $R'_{AX} = 13,85 \text{ кН}$ (рис. 3.3).

4. Проверка

Составим сумму проекций всех сил на ось Y:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = R_{AY} - F \cdot \sin\alpha - P - Q + R_{BY} = 11,51 - 16 \cdot 0,5 - 5 - 3,6 + 5,09 = 0$$

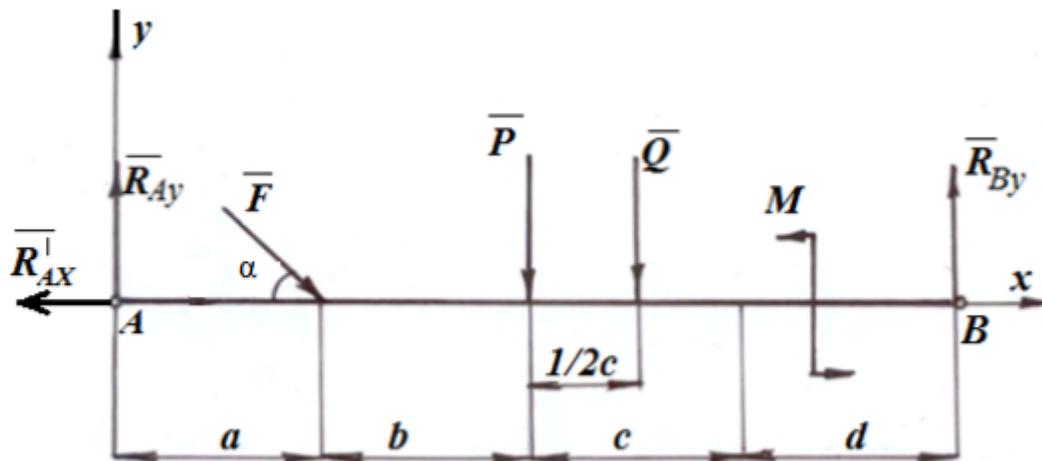


Рис.3.3. Направление реакций в опорах, определенное аналитическим методом

Проверка подтвердила правильность расчета реакций опор.

Пример 2

К балке (рис. 3.4), левый конец которой жестко закреплен в стену, приложена внешняя нагрузка в виде: сосредоточенного момента M , силы P , груза F , действующего через трос под углом α , и линейно распределенной нагрузки интенсивностью q . Определить реакции в жесткой заделке.

Дано:

$F = 16$ кН; $P = 5$ кН; $q = 1,2$ кН/м; $M = 20$ кНм; $a = b = c = d = 3$ м; $\alpha = 60^\circ$

Определить: R_{Ax} , R_{Ay} , M_{RA} .

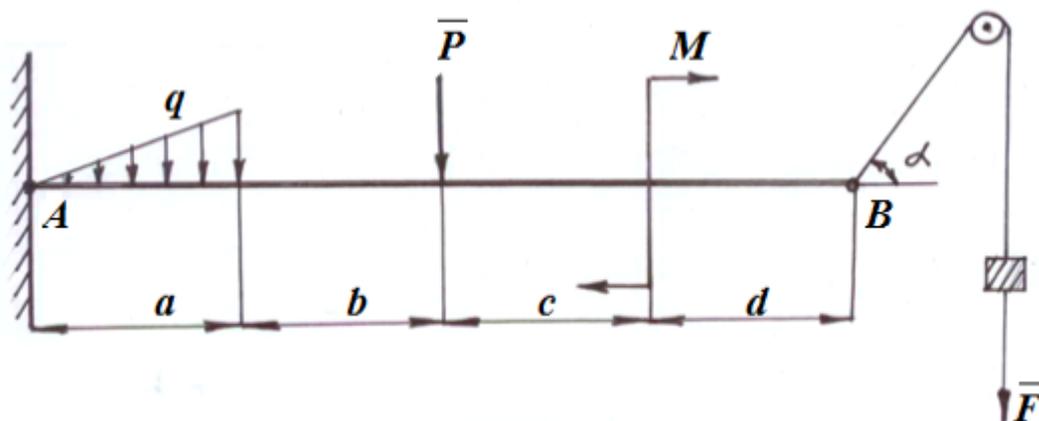


Рис.3.4. Заданная схема

Решение

1. Жесткая заделка – это такая связь, действие которой на балку проявляется в виде реакции R_A и реактивного момента M_{RA} . Так как направление реакции R_A заранее неизвестно, то ее можно разложить на две составляющие R_{Ax} и R_{Ay} (рис. 3.5).

Таким образом, имеем три неизвестные величины. По найденным значениям R_{Ax} и R_{Ay} можно определить и R_A .

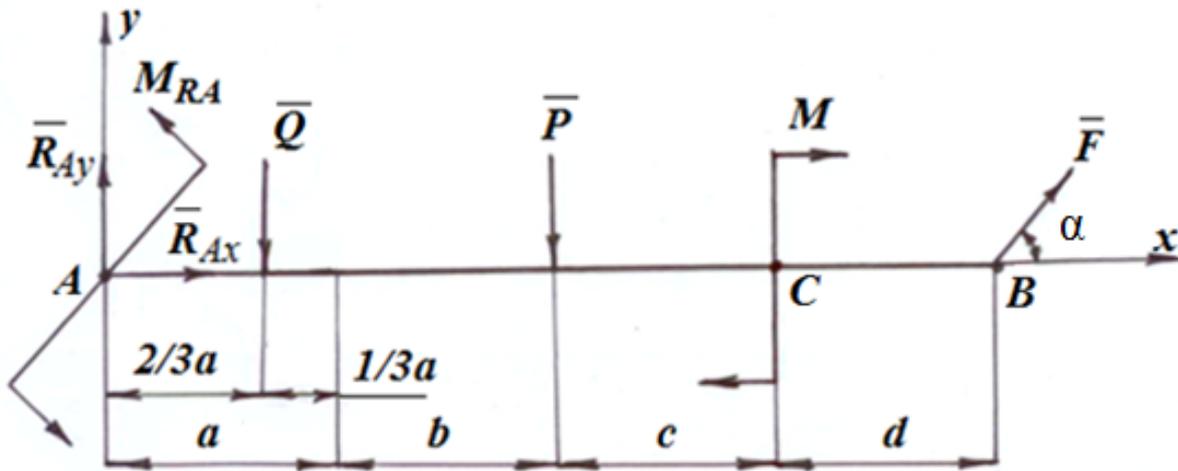


Рис. 3.5. Расчетная схема

Распределенную силу q заменяем сосредоточенной

$$Q = 0,5 \cdot q \cdot a = 1,8 \text{ кН.}$$

Составим уравнения равновесия стержня АВ.

1. Сумма моментов всех сил относительно т. А должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = M_{RA} - M - \frac{2}{3}a \cdot Q - P(a+b) + F \cdot \sin\alpha(a+b+c+d) = 0$$

$$\begin{aligned} M_{RA} &= M + Q \cdot \frac{2}{3}a + P(a+b) - F \cdot \sin 60(a+b+c+d) = \\ &= 20 + 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 5 \cdot (3+3) - 16 \cdot 0,5(3+3+3+3) = \\ &= -112,8 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Отрицательный знак момента M_{RA} говорит, что реакционный момент будет направлен по часовой стрелке $M'_{RA} = 112,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 3.6).

Сумма моментов всех сил относительно т. В должна равняться нулю.

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_y) = -M + P(c + d) + Q\left(b + c + d + \frac{a}{3}\right) - M'_{RA} - R_{Ay}(a + b + c + d) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{-M - M'_{RA} + P(c + d) + Q\left(b + c + d + \frac{a}{3}\right)}{a + b + c + d} = \frac{-20 - 112,8 + 5(3 + 3) + 1,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\left(3 + 3 + 3 + \frac{3}{3}\right)}{12} = -7,07 \text{ кН}$$

Отрицательный знак говорит о том, что реакция R_{Ay} должна быть направлена в противоположную сторону положительного направления оси Y, $R'_{Ay} = 7,07 \text{ кН}$ (рис. 3.6).

Сумма проекций всех сил на ось X должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_x = R_{Ax} + F \cdot \cos\alpha = 0$$

$$R_{Ax} = -F \cdot \cos 60 = -18 \cdot 0,5 = -8 \text{ кН}$$

Отрицательный знак означает, что направление реакции R_{xA} будет противоположное, т.е. направлено вдоль оси $-X$, $R'_{Ax} = 8 \text{ кН}$ (см. рис. 3.6).

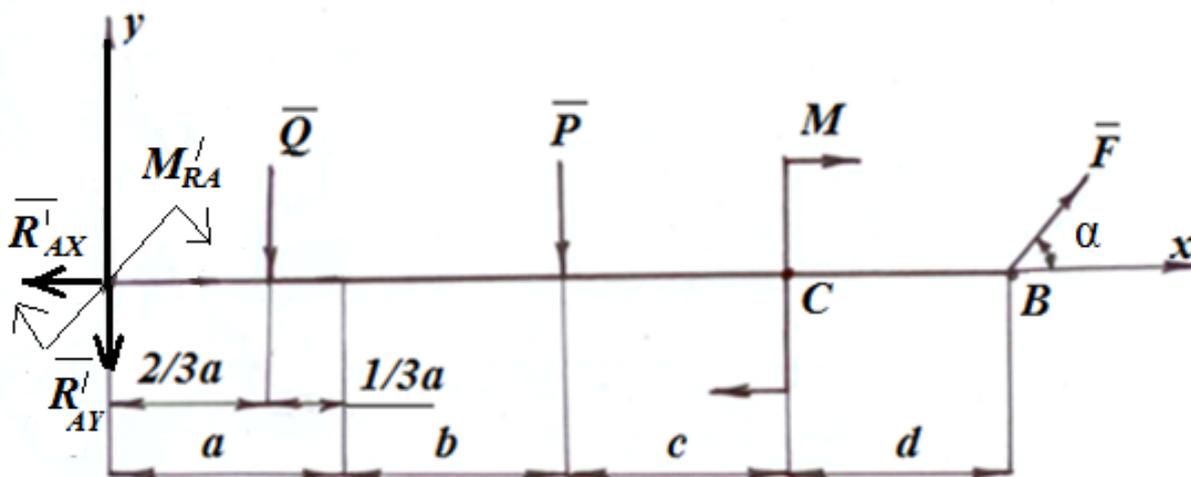


Рис. 3.6. Направление реакций в опоре, определенное аналитическим методом

3. **Проверка.** Сумма моментов всех сил относительно т. С.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n M_C (F_i) &= F \cdot \sin\alpha \cdot d - M + Pc + Q \left(c + b + \frac{a}{3} \right) + R'_{Ay} (a + b + c) - M'_{RA} = \\ &= 16 \cdot 3 \cdot 0,866 - 20 + 5 \cdot 3 + 1,8 \cdot 7 + 7,07 \cdot 9 - 112,8 \approx 0\end{aligned}$$

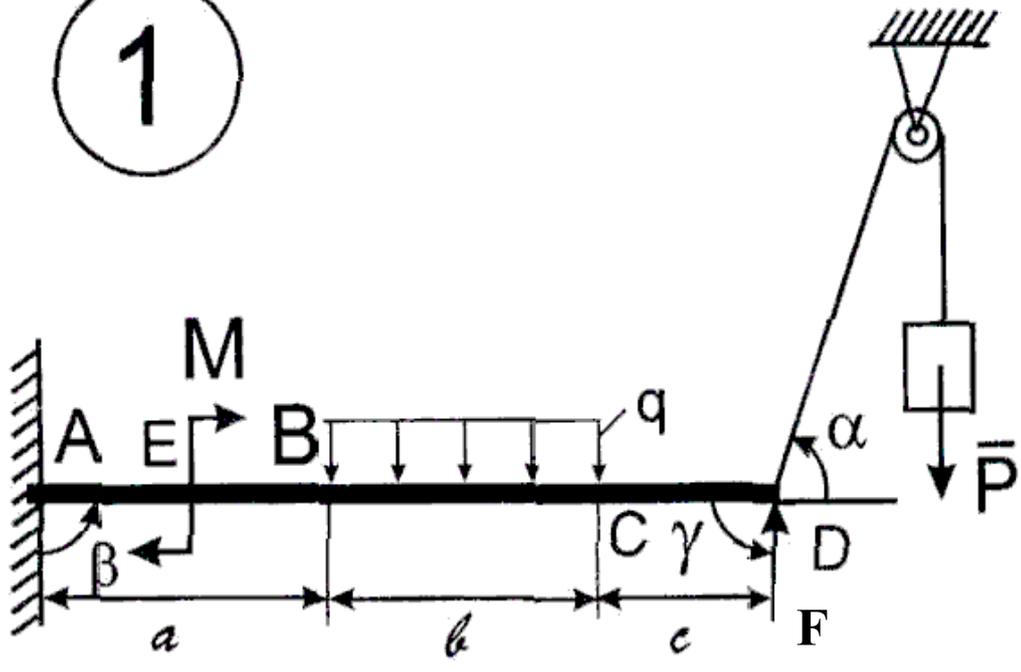
Проверка подтвердила правильность расчета реакций опор.

Расчетные схемы задания представлены на с. 69 - 80, а в таблице 1 на с. 81 -84 приведены исходные данные в виде 5 вариантов для каждой схемы.

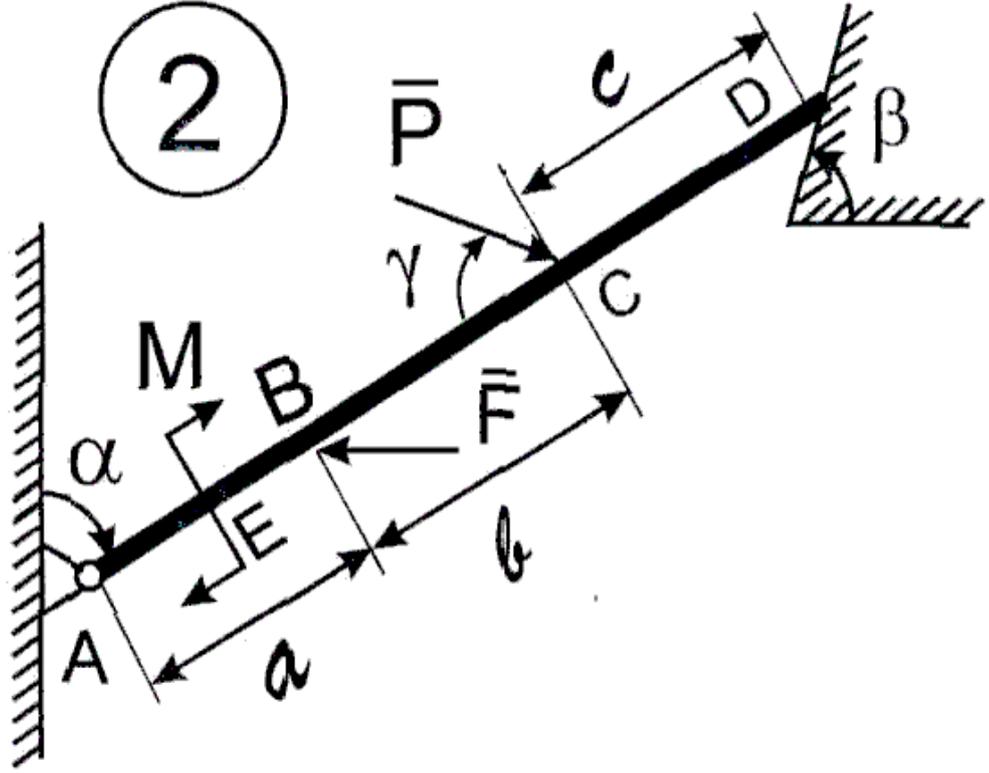
Студенту выдается номер схемы и номер варианта.

Исходя из заданной схемы, студент обязан изобразить расчетную схему согласно исходным данным.

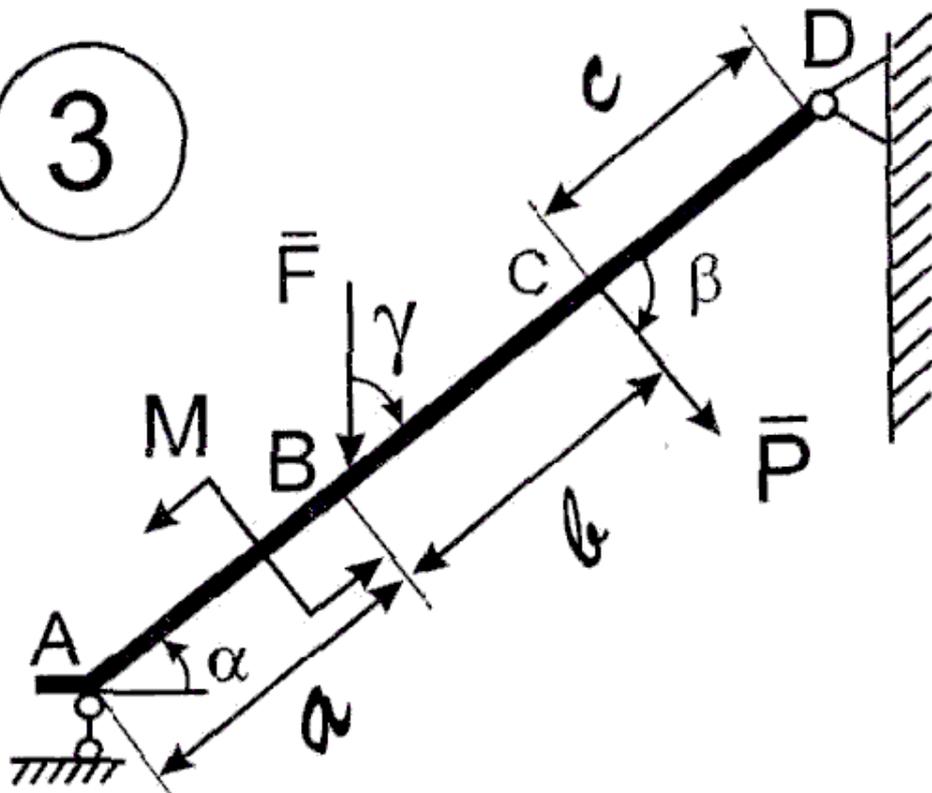
1



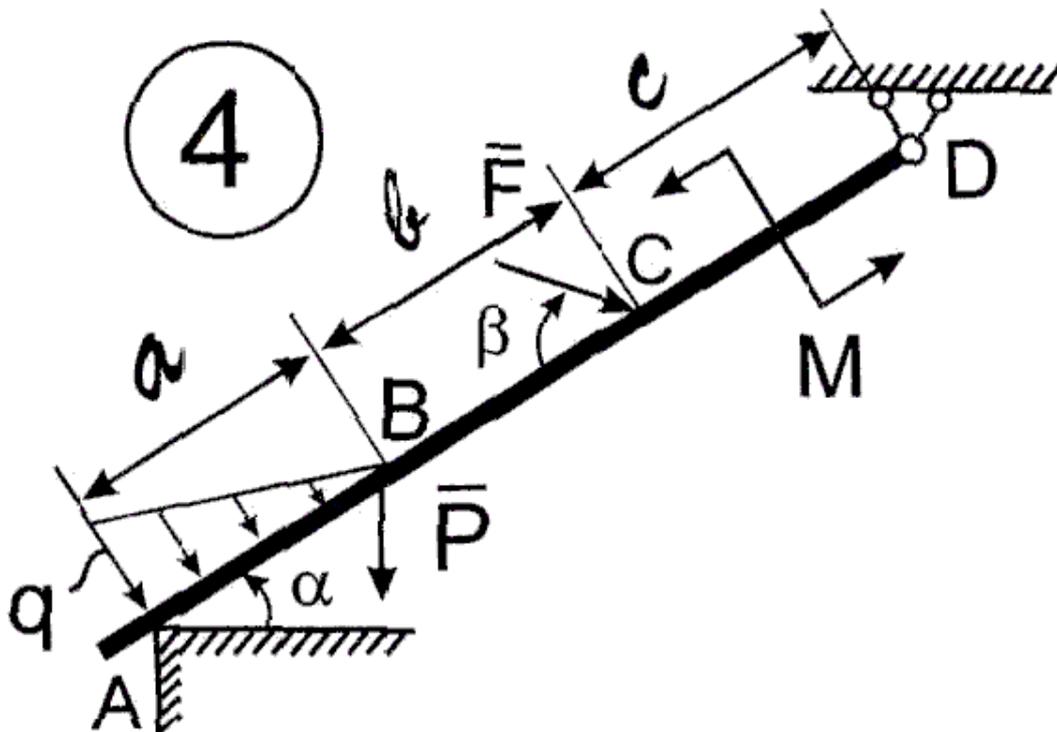
2



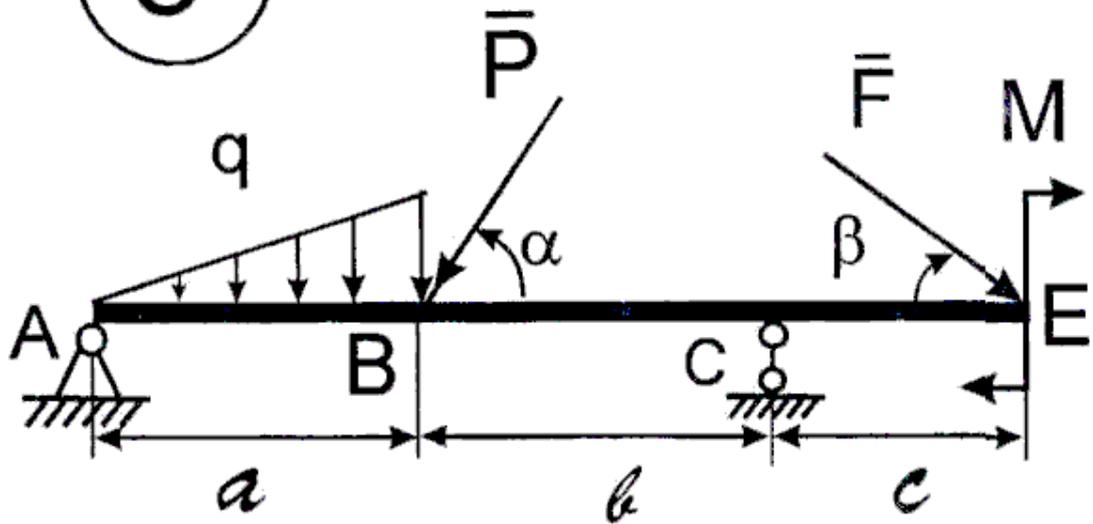
3



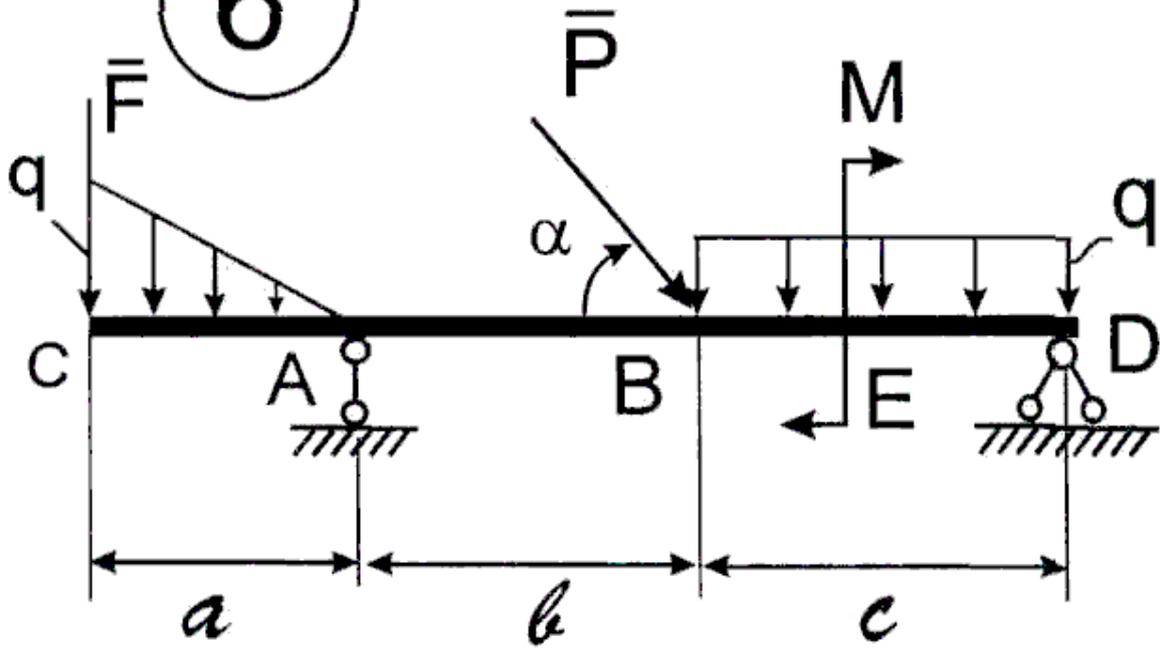
4



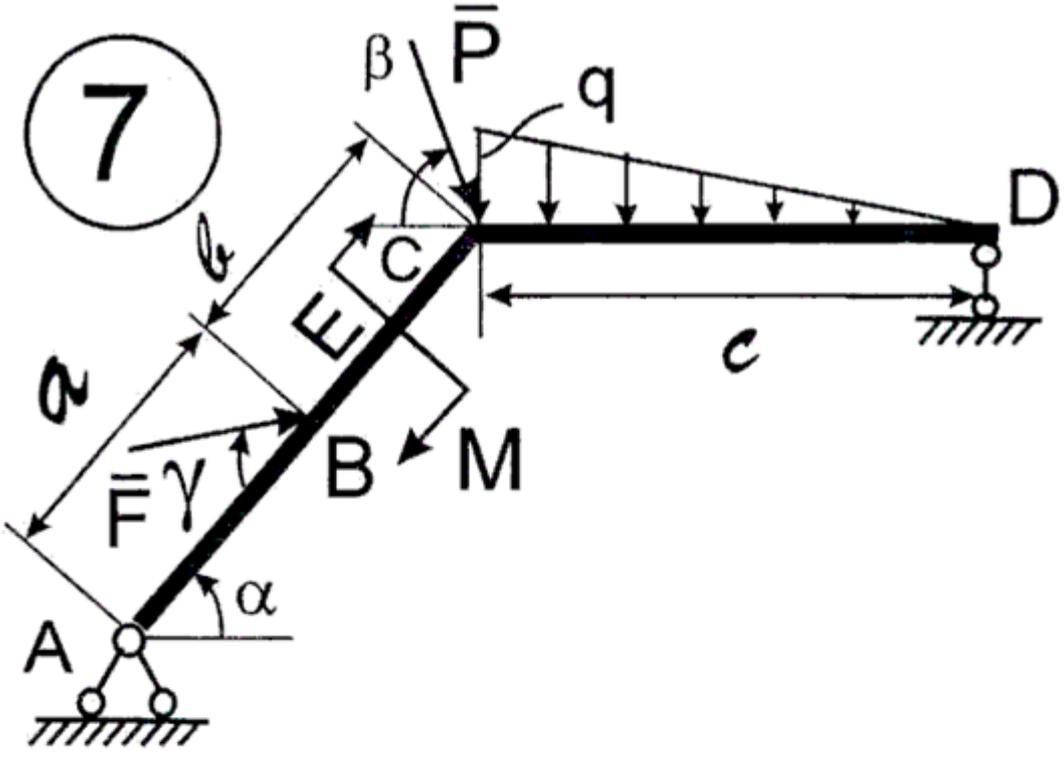
5



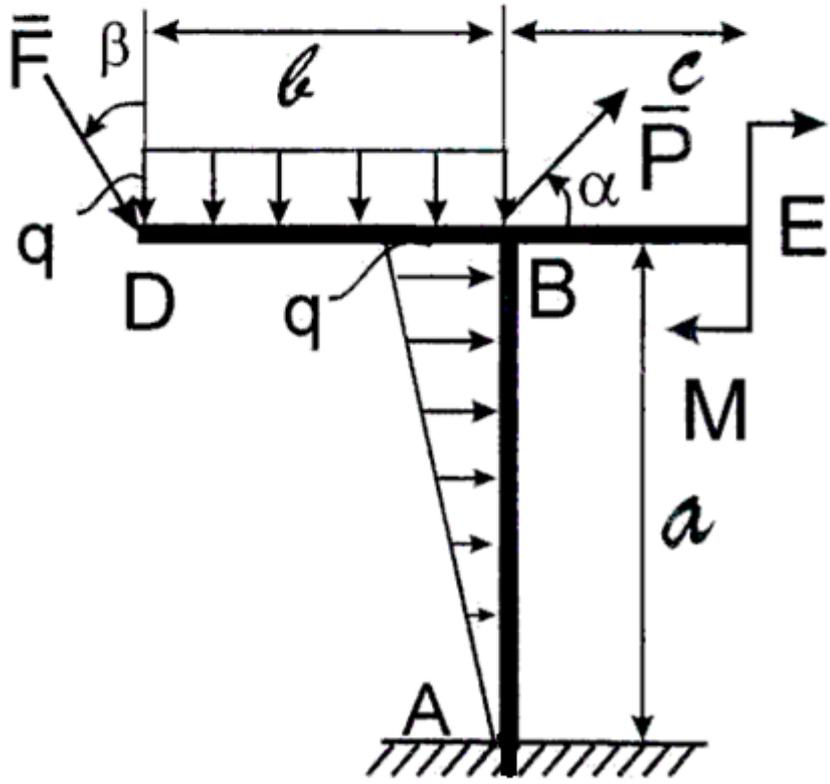
6



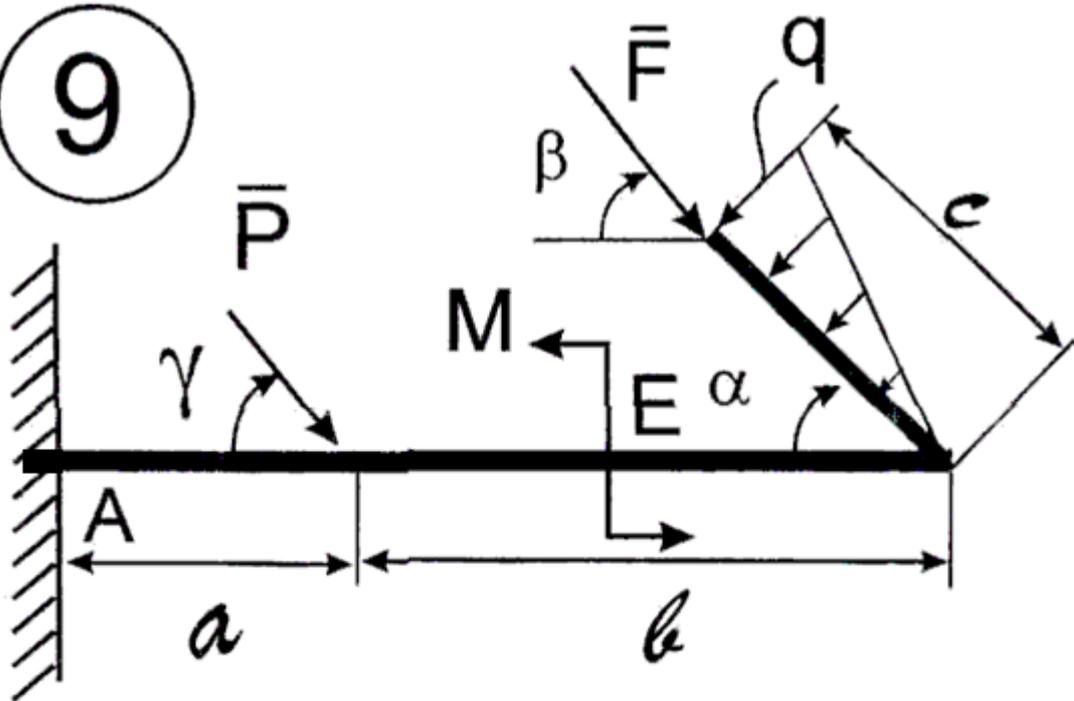
7



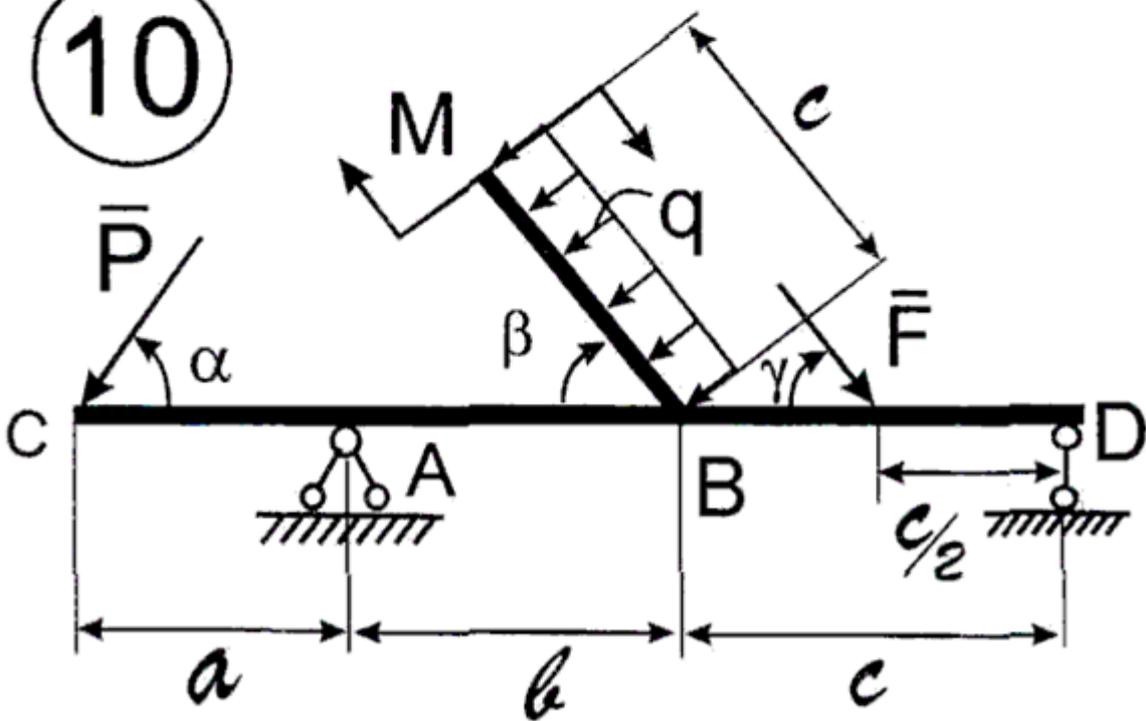
8



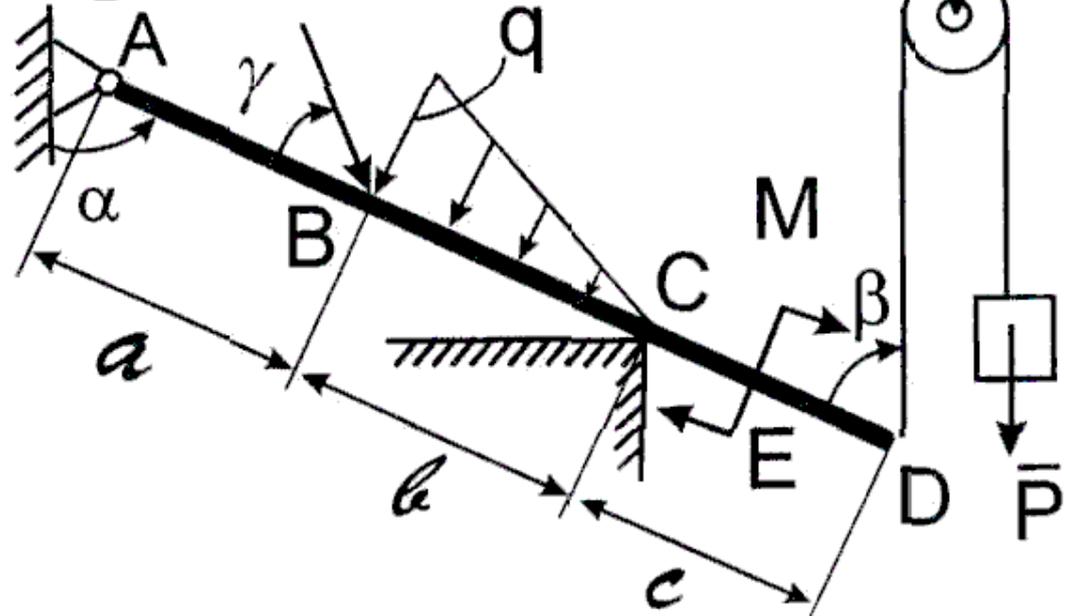
9



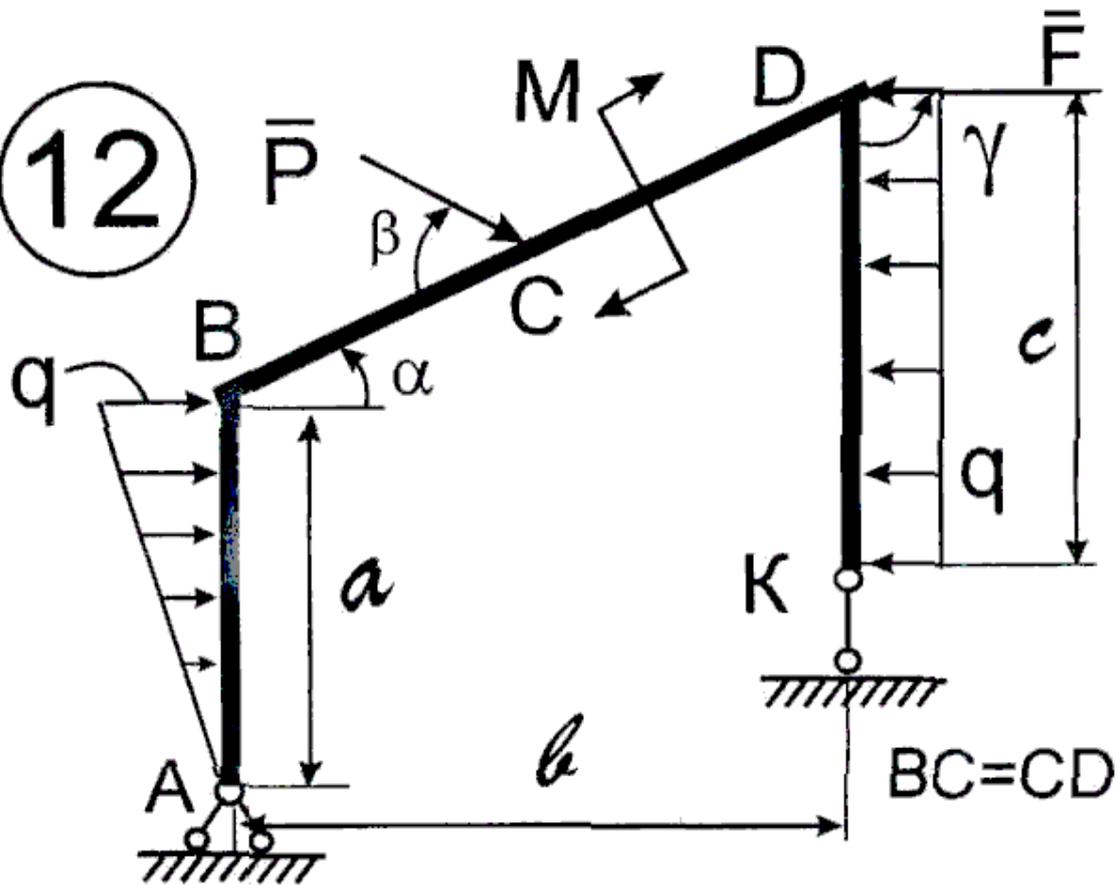
10



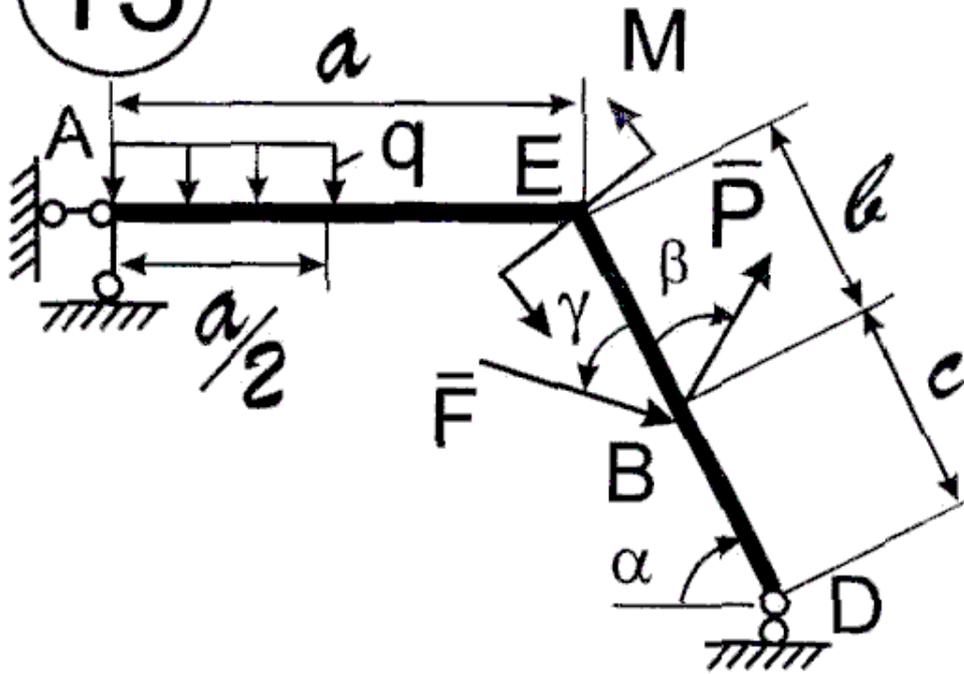
11



12



13

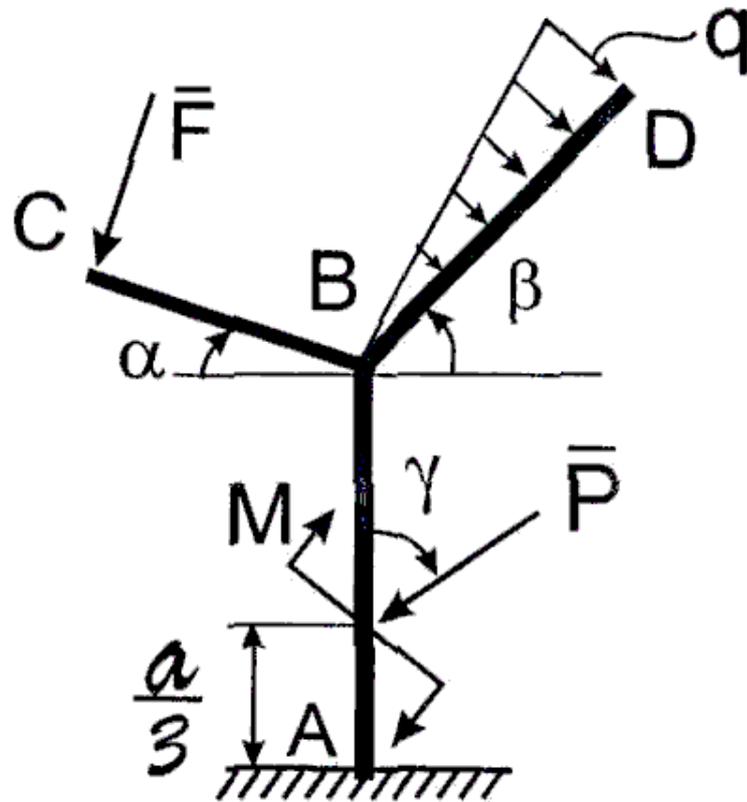


14

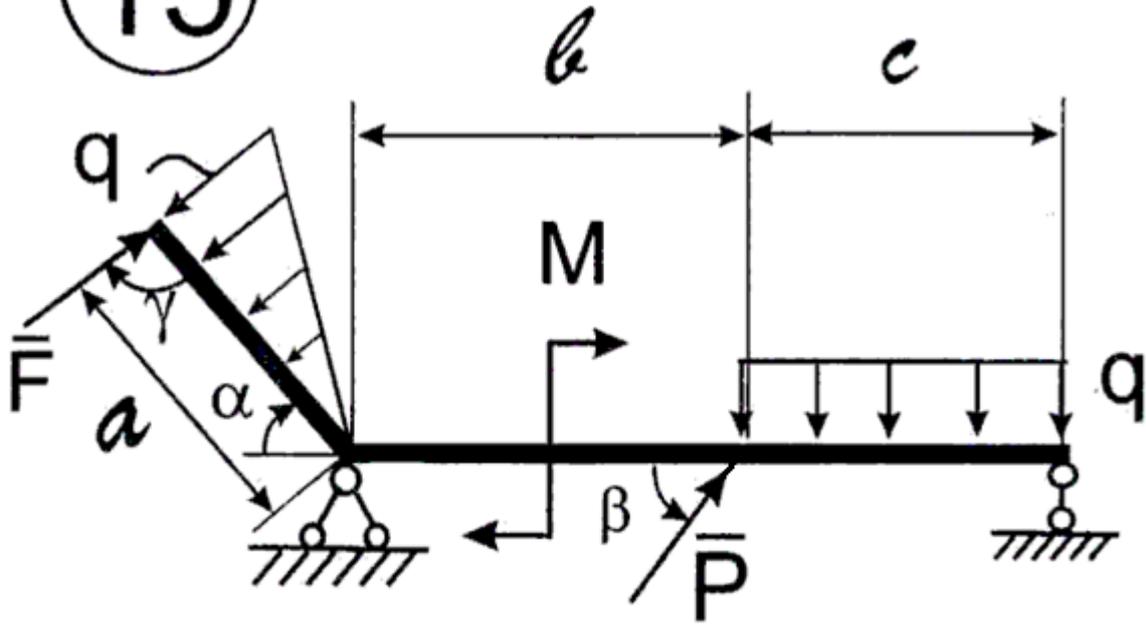
$$AB = a$$

$$BD = b$$

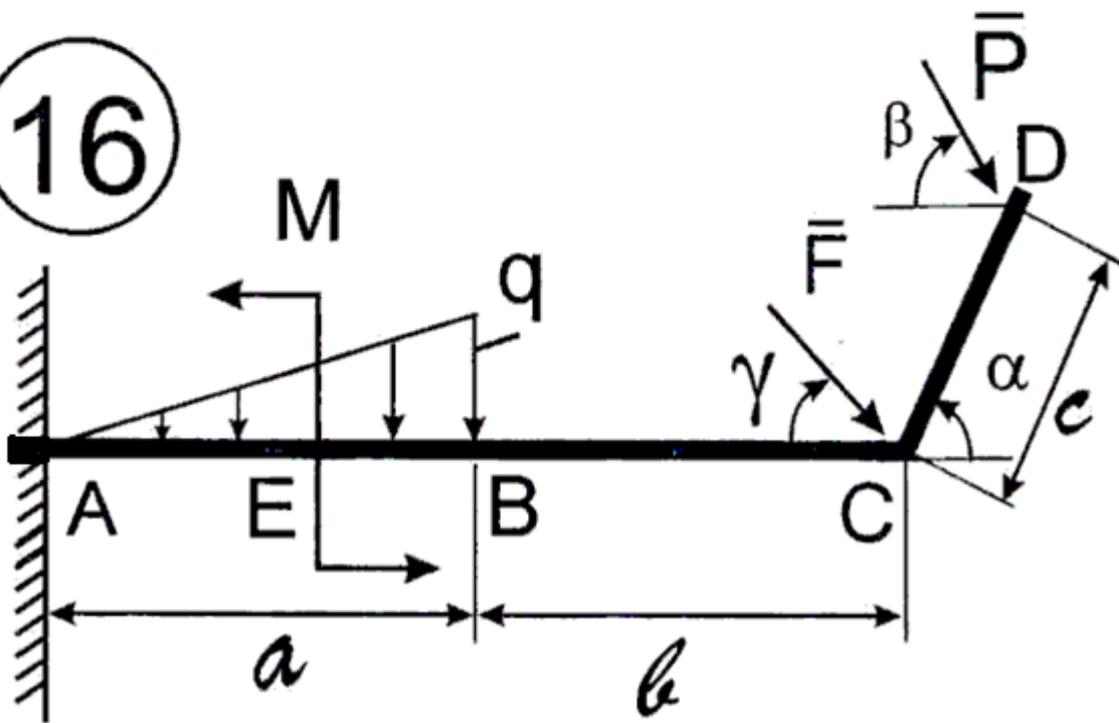
$$BC = c$$



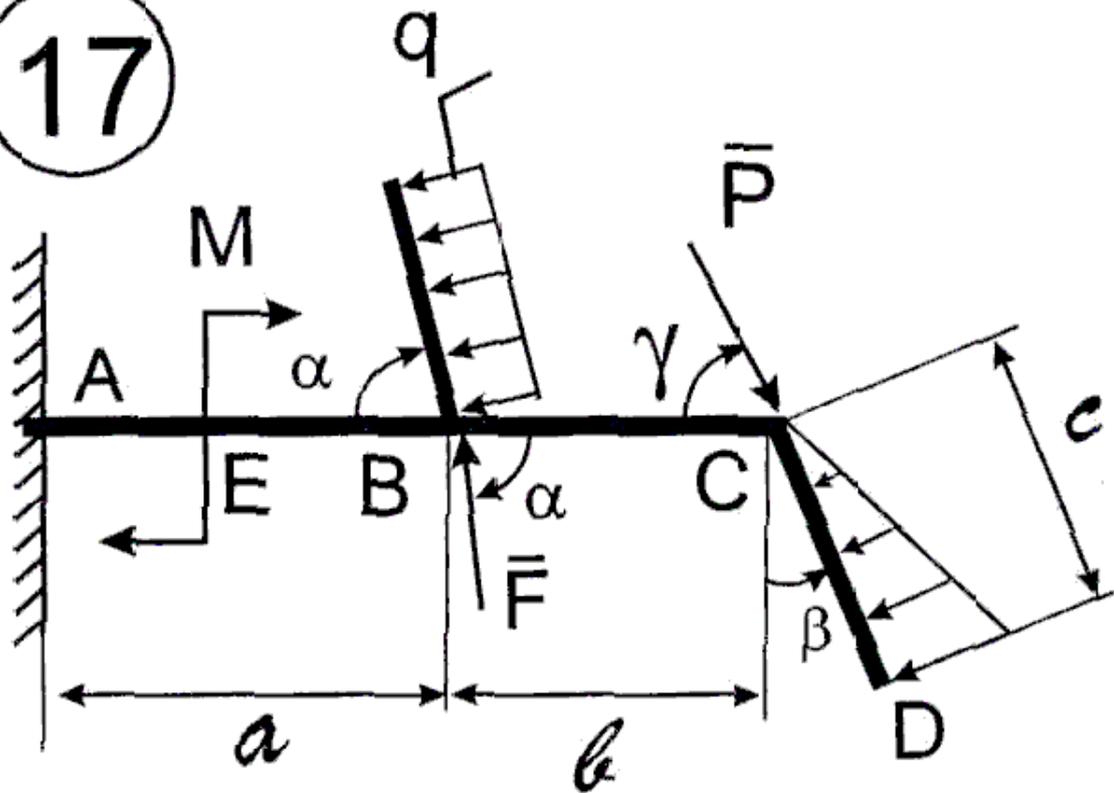
15



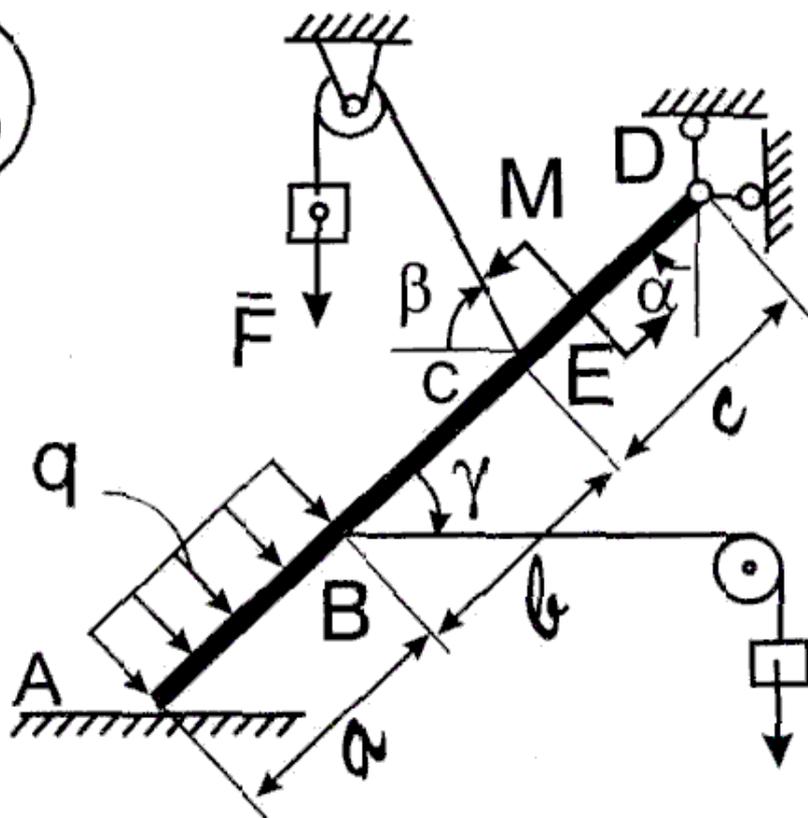
16



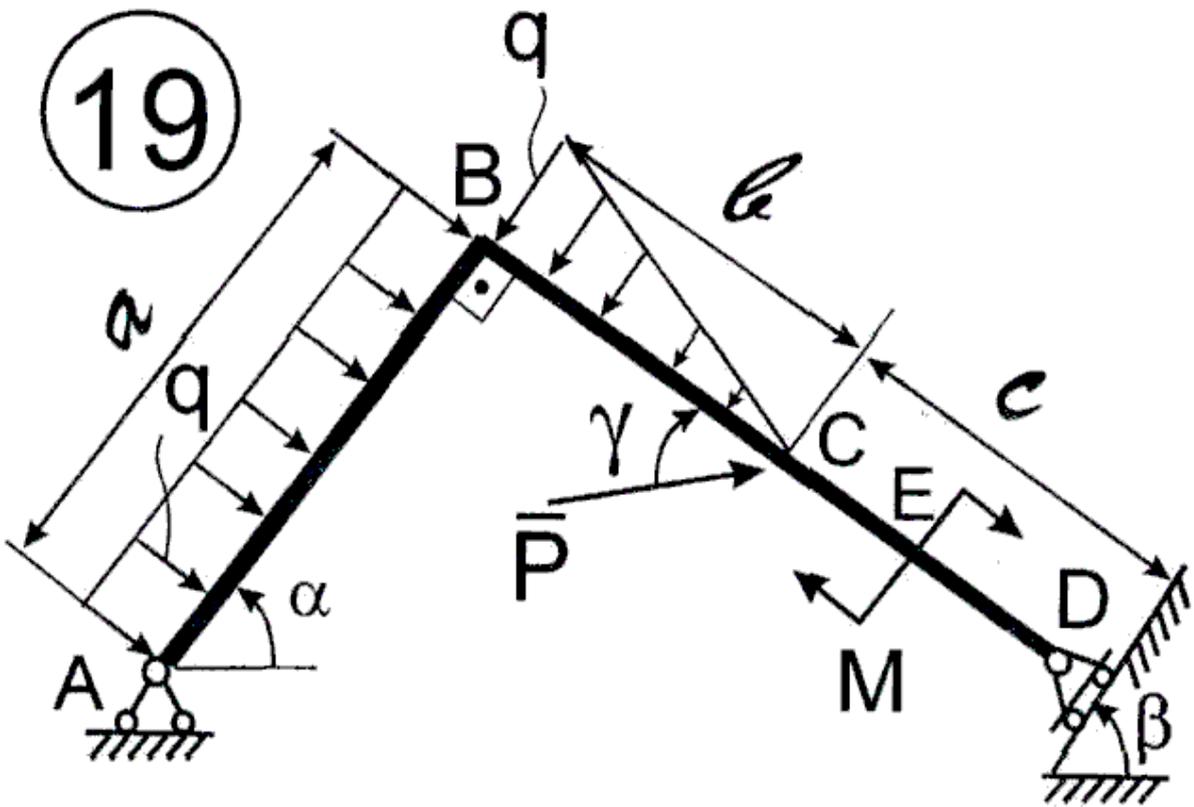
17



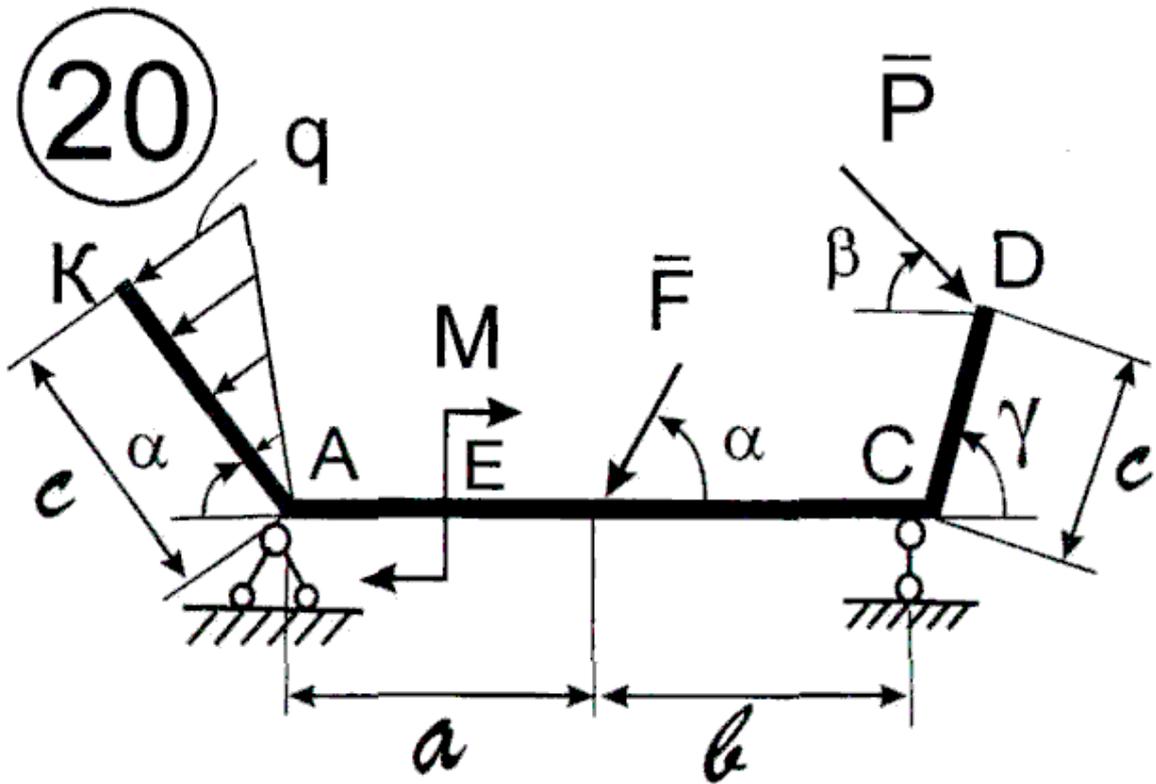
18



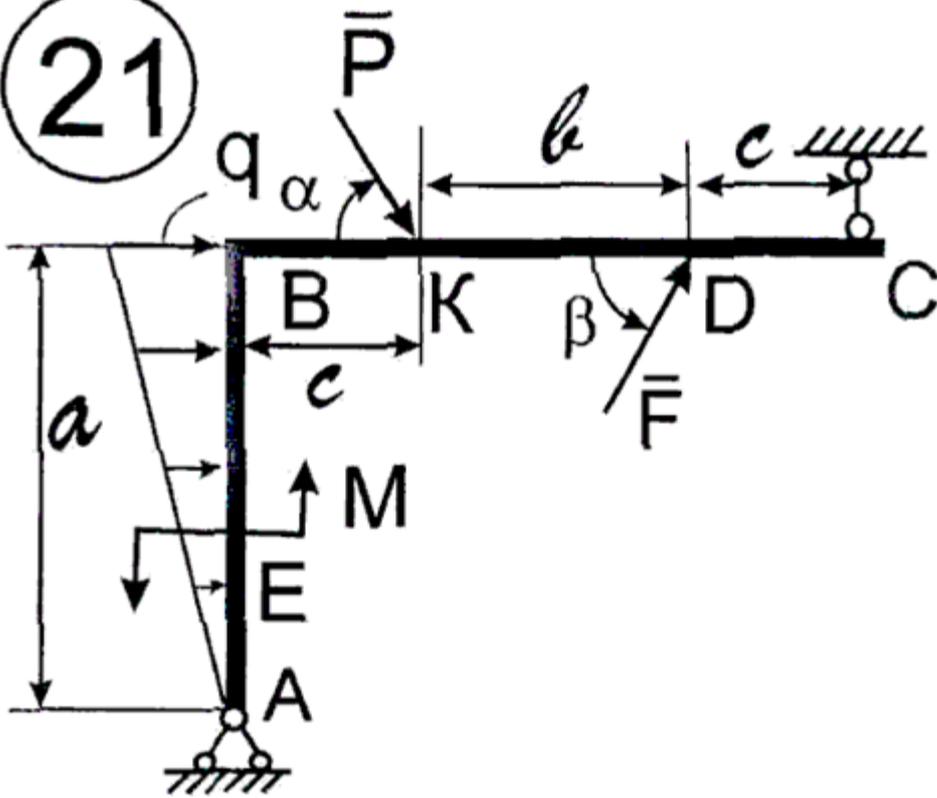
19



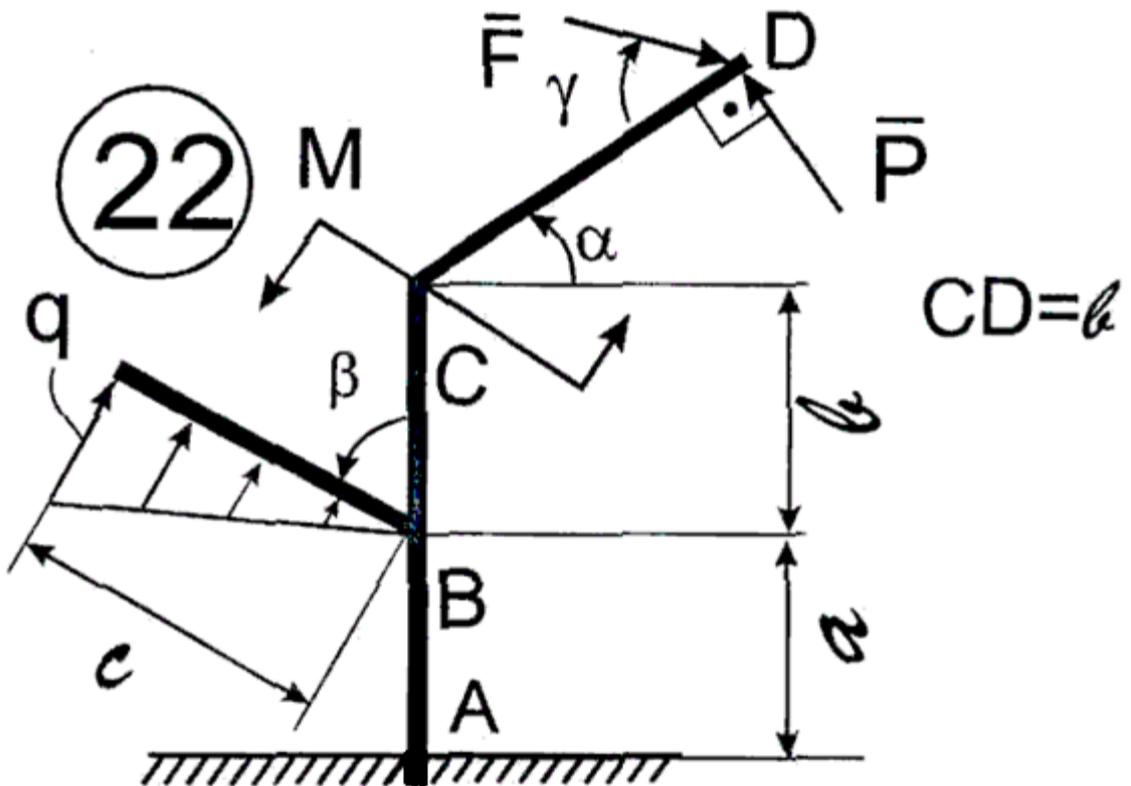
20



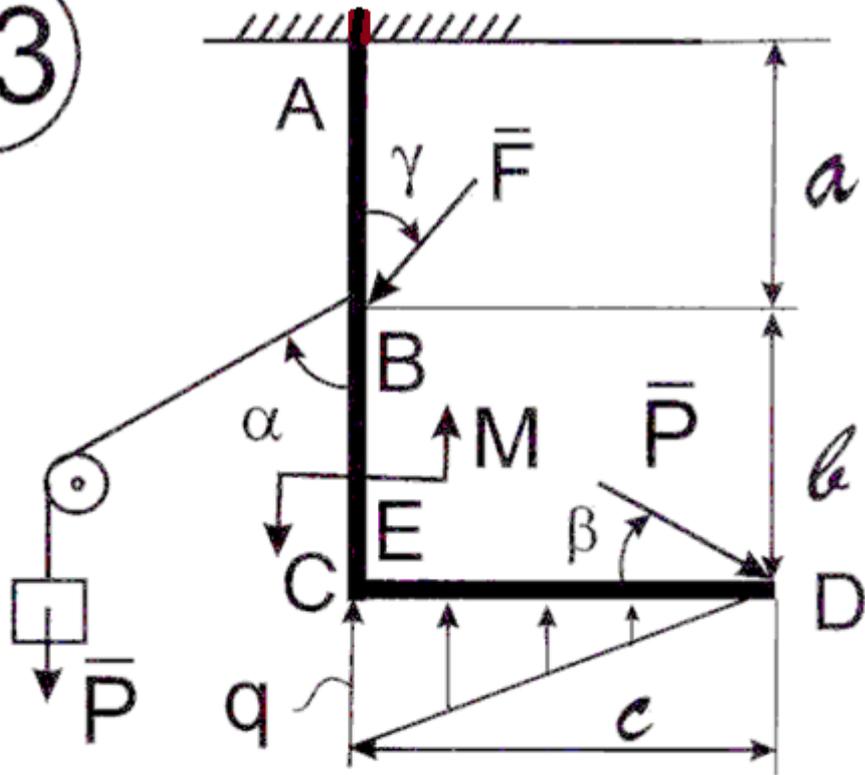
21



22



23



24

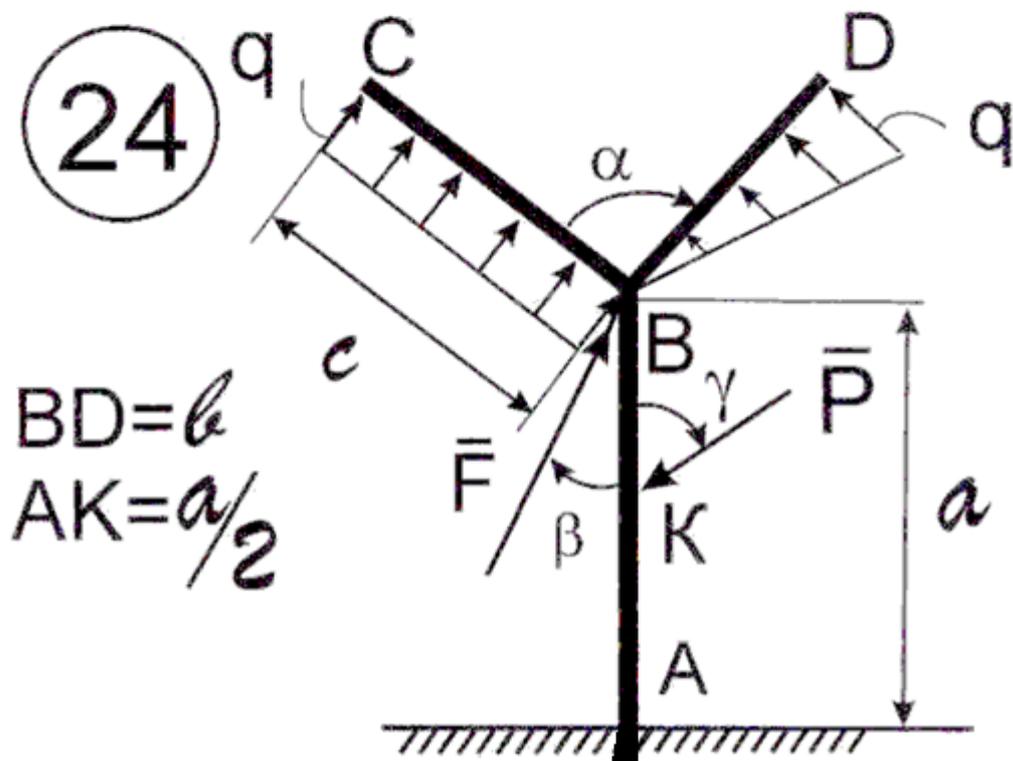


Таблица 1 – Исходные данные

№	№	a	b	c	α	β	γ	M	P	F	q
Сх.	Вар.	м	м	м	град	град	град	кН·м	кН	кН	кН/м
1	1	0,8	1,2	0,6	90	90	120	10	15	10	40
	2	0,9	1,0	1,5	30	45	60	30	10	20	50
	3	0,6	0,9	1,2	45	30	30	20	20	10	30
	4	0,5	1,1	1,4	60	45	45	15	25	15	20
	5	0,8	1,2	0,5	120	60	150	20	30	20	20
2	1	1,2	1,0	0,6	60	30	90	30	25	15	---
	2	0,8	0,7	1,5	45	60	30	40	15	30	---
	3	0,7	0,9	1,4	30	45	60	60	30	20	---
	4	0,6	0,6	1,8	60	30	45	50	20	40	---
	5	1,4	0,8	0,8	90	60	150	35	30	60	---
3	1	0,6	0,5	1,9	30	0	45	40	60	20	---
	2	0,5	0,5	0,5	60	45	30	30	50	25	---
	3	0,8	0,6	1,2	45	30	60	60	60	40	---
	4	0,7	0,7	0,7	30	60	45	50	40	30	---
	5	1,2	0,8	1,0	0	90	120	80	30	50	---
4	1	0,6	1,4	1,0	45	30	---	70	20	30	20
	2	1,2	0,8	1,5	60	45	---	40	50	20	40
	3	0,6	1,0	1,4	30	60	---	80	60	30	50
	4	0,8	1,7	1,5	30	0	---	50	30	40	40
	5	0,9	0,9	1,2	30	90	---	60	20	60	30
5	1	2,0	0,5	0,8	60	30	---	20	60	40	50
	2	1,0	1,0	1,0	90	45	---	30	50	60	40
	3	0,6	0,6	1,2	30	60	---	40	30	80	60
	4	0,9	1,2	0,9	45	90	---	40	50	50	40
	5	1,1	1,1	0,8	45	45	---	30	60	20	20
6	1	1,2	0,6	1,2	30	---	---	40	30	40	40
	2	1,4	1,6	0,6	45	---	---	20	40	50	50
	3	0,7	0,7	1,6	60	---	---	60	50	20	30
	4	0,8	0,9	1,3	90	---	---	50	20	40	30
	5	0,6	0,8	1,4	120	---	---	40	20	50	40

Продолжение таблицы 1

№	№	a	b	c	α	β	γ	M	P	F	q
Сх.	Вар.	м	м	м	град	град	град	кН·м	кН	кН	кН/м
7	1	1,0	0,4	1,4	45	30	90	30	50	30	20
	2	0,6	0,9	0,9	60	45	30	40	60	40	30
	3	0,8	0,8	0,9	30	60	45	50	40	50	40
	4	1,0	1,0	1,0	30	90	60	50	30	60	50
	5	0,7	0,8	1,5	45	180	150	30	60	60	70
8	1	1,1	0,6	1,5	0	90	---	25	30	60	50
	2	0,8	0,8	0,8	30	60	---	35	40	50	60
	3	1,2	1,2	1,2	45	30	---	45	40	40	40
	4	0,9	0,9	1,1	60	0	---	40	50	40	50
	5	1,0	1,0	1,0	90	45	---	50	60	60	30
9	1	0,9	1,2	0,9	30	0	45	20	30	40	70
	2	1,1	1,6	1,3	45	30	60	50	40	20	50
	3	1,0	1,4	1,5	60	45	30	50	50	30	40
	4	0,8	1,2	1,0	90	60	0	60	60	30	50
	5	1,2	0,8	1,2	0	90	90	60	50	50	50
10	1	0,7	0,8	0,8	0	180	150	20	40	40	70
	2	0,6	1,2	1,2	30	120	90	30	50	30	60
	3	0,5	0,9	0,9	45	90	60	40	50	40	40
	4	0,7	0,7	1,6	60	30	45	50	60	30	50
	5	0,5	0,8	1,5	90	60	30	60	60	40	40
11	1	0,9	0,8	1,2	60	30	0	50	35	40	30
	2	0,8	1,2	1,5	90	45	30	40	25	45	70
	3	1,2	1,0	1,0	45	60	45	60	45	30	30
	4	1,4	0,8	0,8	90	0	60	60	50	40	50
	5	0,7	0,9	1,4	30	90	90	50	60	45	50
12	1	0,6	0,6	1,2	0	90	120	40	20	20	40
	2	0,7	1,3	1,2	30	30	45	30	30	40	30
	3	0,8	1,2	1,4	60	45	0	60	20	40	30
	4	0,9	0,9	1,6	30	60	30	40	50	20	40
	5	1,0	1,0	1,3	45	0	60	30	40	20	50

Продолжение таблицы 1

№	№	a	b	c	α	β	γ	M	P	F	q
Сх.	Вар.	м	м	м	град	град	град	кН·м	кН	кН	кН/м
13	1	1,2	0,8	1,2	90	0	180	20	50	60	40
	2	1,4	0,7	0,3	30	45	60	3	60	40	50
	3	0,4	0,6	1,6	45	60	30	40	40	50	60
	4	1,5	1,5	1,0	60	30	90	30	50	40	30
	5	0,9	1,2	1,4	30	90	45	50	60	30	70
14	1	1,2	1,4	1,2	30	45	60	70	40	100	70
	2	1,1	1,0	1,4	45	60	30	80	60	100	80
	3	1,3	1,2	1,5	60	30	0	90	100	80	90
	4	1,8	0,8	1,1	30	120	120	100	90	80	100
	5	1,5	0,6	1,5	120	0	45	90	90	50	60
15	1	0,8	0,8	1,2	0	45	90	60	50	60	60
	2	0,9	1,1	1,0	90	0	45	50	60	100	100
	3	0,7	1,3	1,1	45	30	60	40	70	90	90
	4	1,3	0,8	0,9	60	90	30	30	80	80	80
	5	1,0	1,0	1,0	30	60	0	40	90	70	70
16	1	0,9	0,9	1,2	60	60	60	30	40	50	60
	2	0,7	1,0	1,3	30	30	30	40	30	60	80
	3	0,8	1,2	1,1	45	60	45	50	40	80	90
	4	0,6	1,4	1,0	90	120	150	60	80	70	50
	5	1,2	0,8	1,0	120	45	90	50	60	80	60
17	1	0,8	1,2	0,8	90	0	90	20	100	20	70
	2	0,5	1,5	0,5	30	90	0	40	100	40	60
	3	0,9	0,9	0,9	60	30	45	35	80	50	80
	4	0,7	0,7	0,7	45	45	30	50	90	30	70
	5	1,2	1,1	1,1	120	60	60	60	40	80	50
18	1	0,8	1,0	1,2	30	60	30	45	90	40	80
	2	0,9	1,1	1,5	45	30	60	30	45	30	40
	3	0,7	0,6	1,1	60	45	45	36	50	25	50
	4	0,6	0,7	1,2	60	90	150	50	60	40	60
	5	0,4	0,8	1,4	30	120	90	60	50	30	90

№	№	a	b	c	α	β	γ	M	P	F	q
Сх.	Вар.	м	м	м	град	град	град	кН·м	кН	кН	кН/м
19	1	0,9	1,6	1,6	30	60	0	20	50	20	40
	2	1,1	1,0	1,5	45	30	60	30	60	30	50
	3	0,8	1,2	1,4	60	60	45	45	40	60	60
	4	1,2	0,6	1,2	90	45	30	50	40	80	70
	5	0,7	1,2	1,1	60	0	90	60	30	70	80
20	1	1,0	0,8	1,2	30	90	30	30	50	40	50
	2	1,2	0,6	1,4	45	60	45	40	60	30	60
	3	1,1	0,7	1,3	60	90	60	50	80	40	70
	4	0,8	0,7	1,5	90	45	90	60	90	50	60
	5	0,9	0,8	1,6	120	30	0	60	80	30	50
21	1	1,4	0,7	1,4	90	90	---	30	40	60	50
	2	1,3	0,8	1,2	0	90	---	40	60	30	60
	3	1,2	0,9	1,4	45	30	---	50	70	30	40
	4	1,1	1,0	1,3	60	45	---	60	50	20	50
	5	1,0	1,1	1,2	30	60	---	40	40	80	60
22	1	0,6	0,7	1,2	0	90	0	50	50	25	30
	2	0,4	0,8	1,1	0	30	180	60	30	60	40
	3	0,5	0,6	1,0	30	60	120	70	70	35	50
	4	0,7	0,9	1,2	45	120	30	80	45	90	60
	5	0,8	0,7	1,0	60	45	45	90	90	50	70
23	1	0,9	0,9	1,2	90	0	0	30	50	50	40
	2	0,8	0,8	1,4	45	90	90	20	40	40	50
	3	1,0	1,0	1,2	60	45	30	40	50	35	60
	4	1,2	1,1	1,4	30	30	60	40	60	30	60
	5	0,9	1,0	1,6	0	60	45	30	70	40	50
24	1	0,8	0,6	2,2	180	180	180	---	80	40	40
	2	0,9	0,8	2,1	120	0	90	---	50	20	50
	3	0,7	0,8	1,5	60	30	30	---	40	20	70
	4	0,8	1,4	1,6	45	60	60	---	80	20	20
	5	0,9	0,6	1,4	30	45	45	---	20	80	30

3.2. Центральное растяжение (сжатие)

Пример.

Исходные данные для расчета: $P_1 = 100$ кН; $P_2 = 180$ кН; $P_3 = 250$ кН;
 $S = S_1 = S_2 = S_4 = 10$ см²; $S_3 = 20$ см²; $l_1 = 0,3$ м; $l_2 = 0,8$ м; $l_3 = l_4 = 0,4$ м.

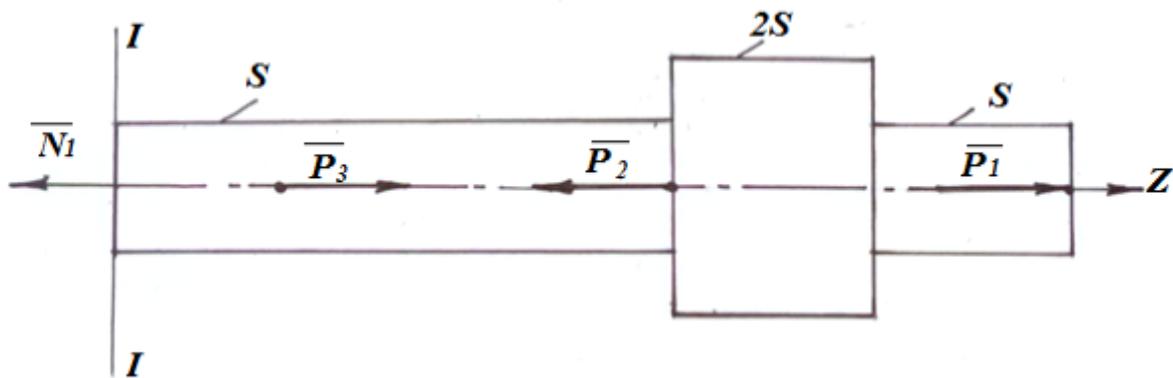
На рис. 3.7 указана конфигурация заданного стержня.

Определить: N_i , σ_i , Δl_i с обязательным изображением отсеченной части.



Рис. 3.7. Расчетная схема стержня

1. Участок 1, сечение I - I.



Сумма проекций всех сил на ось Z:

$$\sum F_{i,z} = -N_1 + P_3 - P_2 + P_1 = 0;$$

Внутренняя нормальная сила:

$$N_1 = P_3 - P_2 + P_1 = 250 - 180 + 100 = 170 \text{ (кН)};$$

На участке 1 деформация растяжения.

Нормальное напряжение:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{170 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 170 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

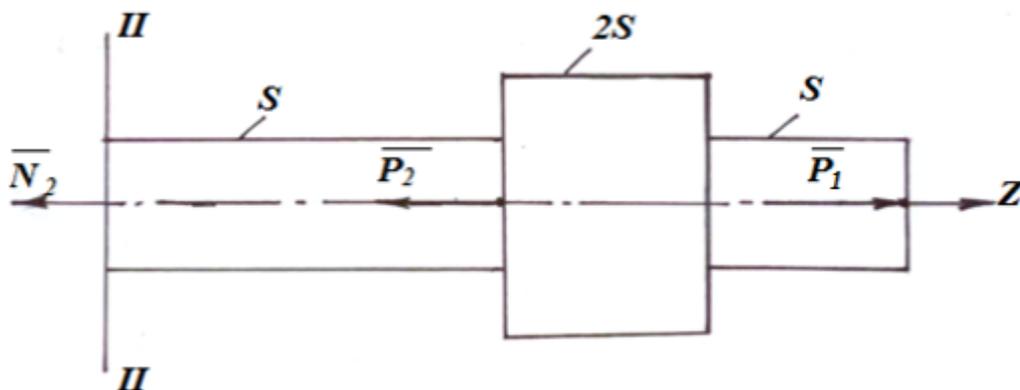
Расчетное напряжение превышает допускаемое напряжение более чем на 5%. Поэтому размер поперечного сечения изменим, при этом примем $\sigma'_1 = [\sigma]$ и тогда

$$S'_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{170 \cdot 10^3}{160} = 1062 \text{ мм}^2 = 10,62 \text{ см}^2$$

Определяем абсолютную деформацию участка:

$$\Delta l_1 = \frac{[\sigma] \cdot l_1}{E} = \frac{160 \cdot 0,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,24 \text{ мм}$$

2. Участок 2, сечение II - II.



Сумма проекций всех сил на ось Z (условие равновесия мысленно отсеченной части):

$$\sum F_{i,z} = -N_2 - P_2 + P_1 = 0;$$

$$N_2 = P_1 - P_2 = 100 - 180 = -80 \text{ (кН)};$$

Участок 2 испытывает деформацию сжатия.

Нормальное напряжение:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{-80 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -80 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Сравнение напряжений производится по абсолютной величине, так как знак минус означает сжатие.

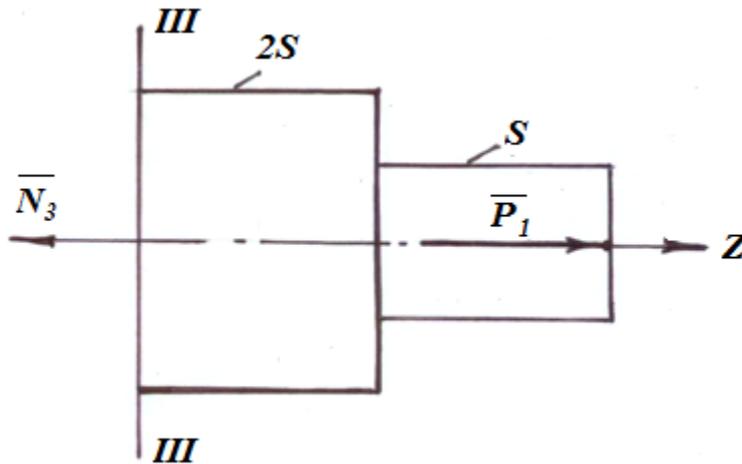
Расчетное напряжение в два раза меньше допускаемого и поэтому изменим размер поперечного сечения на участке 2, приняв $\sigma_2' = [\sigma]$:

$$S_2' = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{160} = 500 \text{ мм}^2 = 5 \text{ см}^2$$

Определим абсолютную деформацию:

$$\Delta l_2 = \frac{[\sigma] \cdot l_2}{E} = \frac{-160 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = -0,64 \text{ мм}$$

3. Участок 3, сечение III - III.



Сумма проекций всех сил на ось Z:

$$\sum F_{i,z} = -N_3 + P_1 = 0;$$

$$N_3 = P_1 = 100 \text{ (кН)};$$

На участке 3 деформация растяжения и нормальное напряжение:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{100 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 50 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

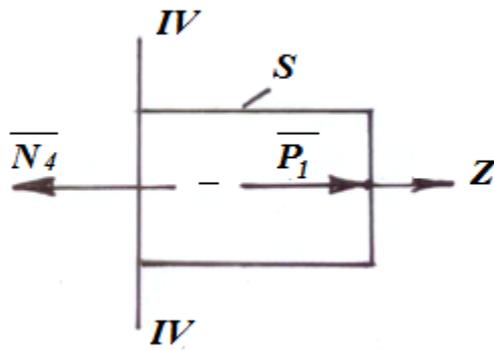
Расчетное напряжение значительно меньше допускаемого. Назначим $\sigma_3' = [\sigma]$ и определим новое поперечное сечение на участке:

$$S_3' = \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{160} = 625 \text{ мм}^2 = 6,25 \text{ см}^2$$

Абсолютное удлинение:

$$\Delta l_3 = \frac{[\sigma] \cdot l_3}{E} = \frac{160 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,32 \text{ мм}$$

4. Участок 4, сечение IV - IV.



Сумма проекций всех сил на ось Z:

$$\sum F_{i,z} = -N_4 + P_1 = 0;$$

$$N_4 = P_1 = 100 \text{ (кН)};$$

Участок 4 испытывает деформацию растяжения.

Нормальное напряжение:

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{S_4} = \frac{100 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Расчётное напряжение меньше допускаемого более, чем на 15%, поэтому изменим размер поперечного сечения на участке 4, приняв $\sigma'_4 = [\sigma]$:

$$S'_4 = \frac{N_4}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{160} = 625 \text{ мм}^2 = 6,25 \text{ см}^2$$

Абсолютная деформация на участке 4:

$$\Delta l_4 = \frac{[\sigma] \cdot l_4}{E} = \frac{160 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,32 \text{ мм}$$

5. Вычислим перемещения правых сечений участков стержня, начиная с первого:

$$\Pi_1^{\text{пр}} = \Pi_1^{\text{лев}} + \Delta l_1 = 0 + 0,24 = 0,24 \text{ мм};$$

$$\Pi_2^{\text{пр}} = \Pi_2^{\text{лев}} + \Delta l_2 = 0,24 - 0,64 = -0,4 \text{ мм}; \quad (\Pi_2^{\text{лев}} = \Pi_1^{\text{пр}})$$

$$\Pi_3^{\text{пр}} = \Pi_3^{\text{лев}} + \Delta l_3 = -0,4 + 0,32 = -0,08 \text{ мм}; \quad (\Pi_3^{\text{лев}} = \Pi_2^{\text{пр}})$$

$$\Pi_4^{\text{пр}} = \Pi_4^{\text{лев}} + \Delta l_4 = -0,08 + 0,32 = 0,24 \text{ мм}; \quad (\Pi_4^{\text{лев}} = \Pi_3^{\text{пр}})$$

На рис. 3.5 показаны эпюры рассчитанных величин и профиль скорректированного (рассчитанного из условия прочности) стержня.

Новые поперечные сечения стержня по участкам:

$$\text{Участок 1} \quad S'_1 = 10,6 \text{ см}^2$$

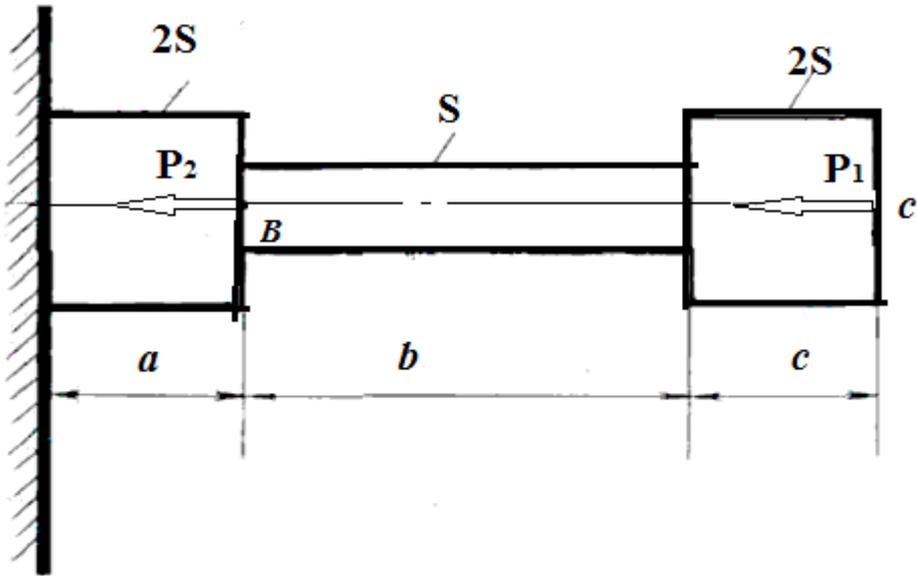
$$\text{Участок 2} \quad S'_2 = 5 \text{ см}^2$$

$$\text{Участок 3 и 4} \quad S'_3 = S'_4 = 6,25 \text{ см}^2$$

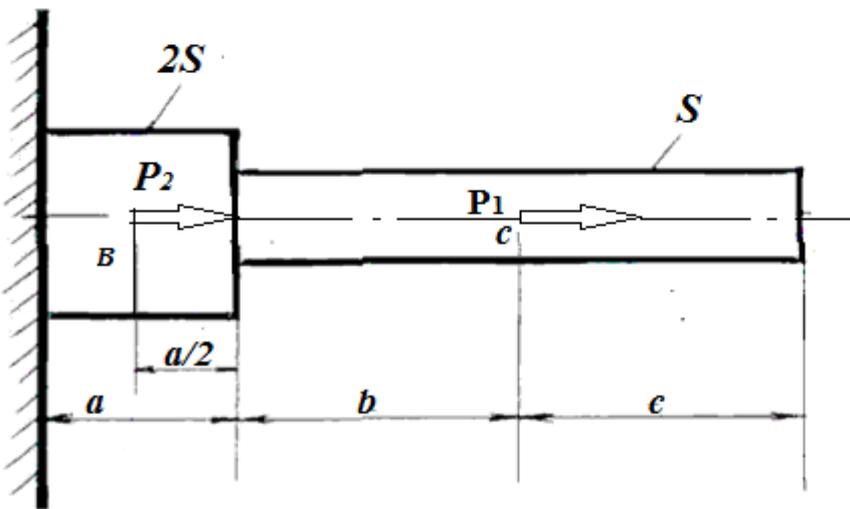
Примечание: рисовать отсеченные части стержня строго обязательно, при этом использовать линейку, оставлять поля. Все численные результаты снабжать единицами измерения.

На стр. 89 – 100 изображены заданные схемы для расчета стержней при деформации растяжение - сжатие, а на стр. 101–104 исходные данные к схемам.

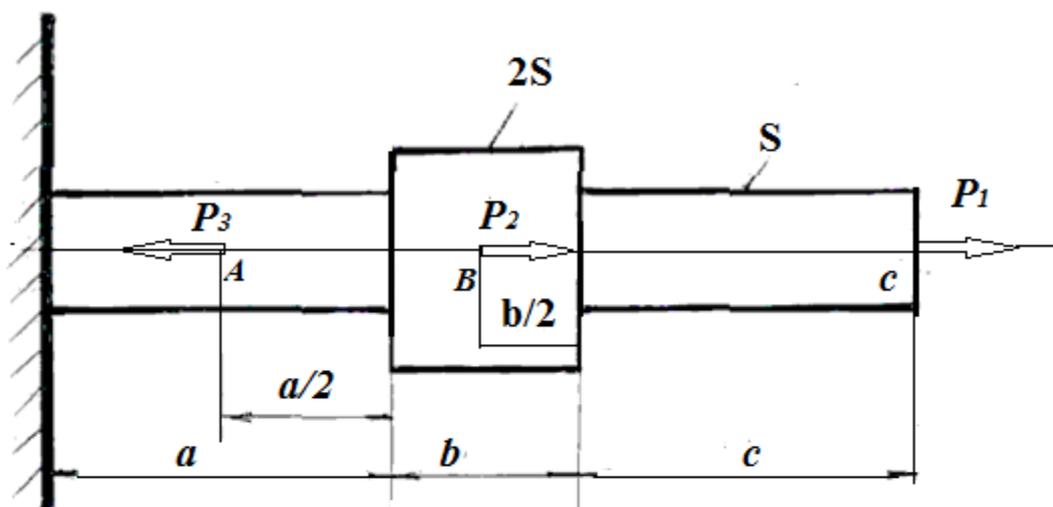
1



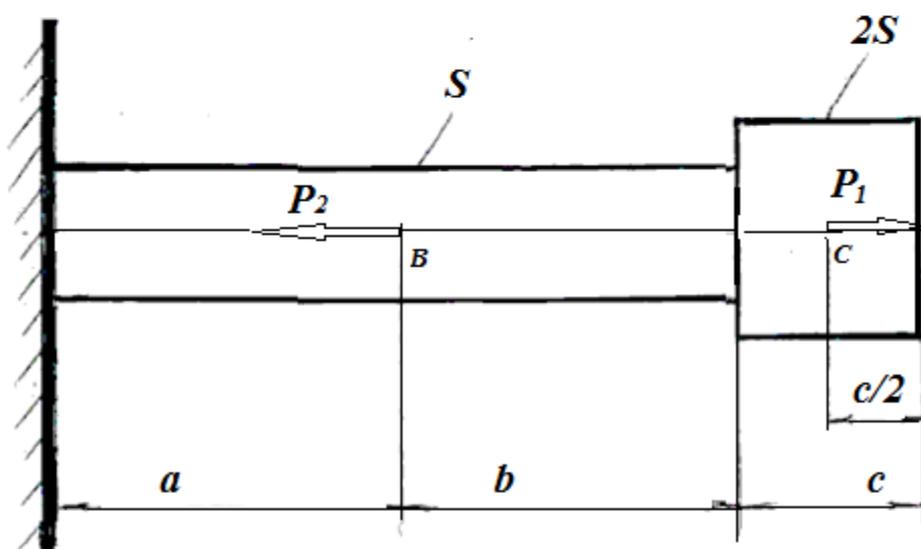
2



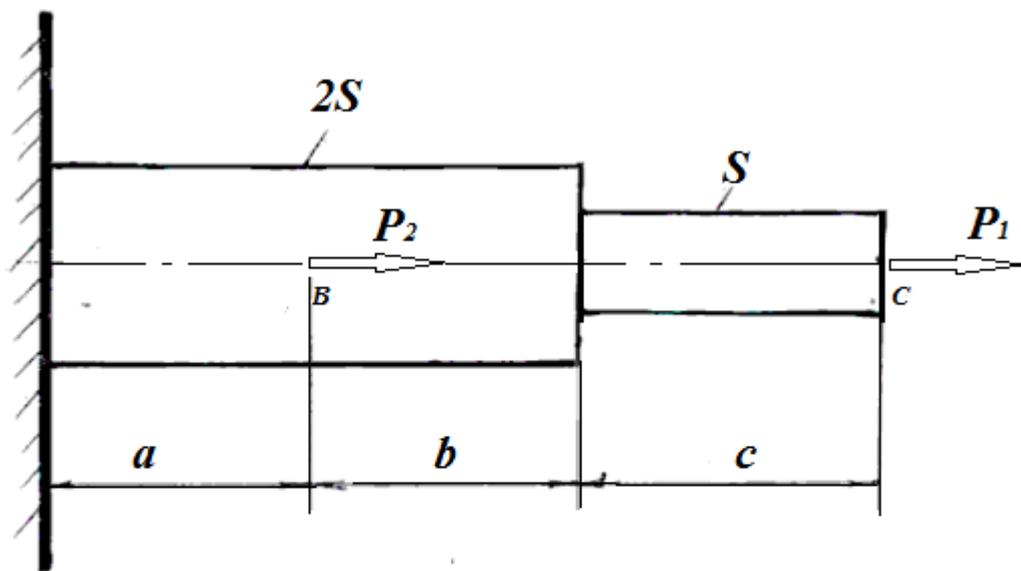
3



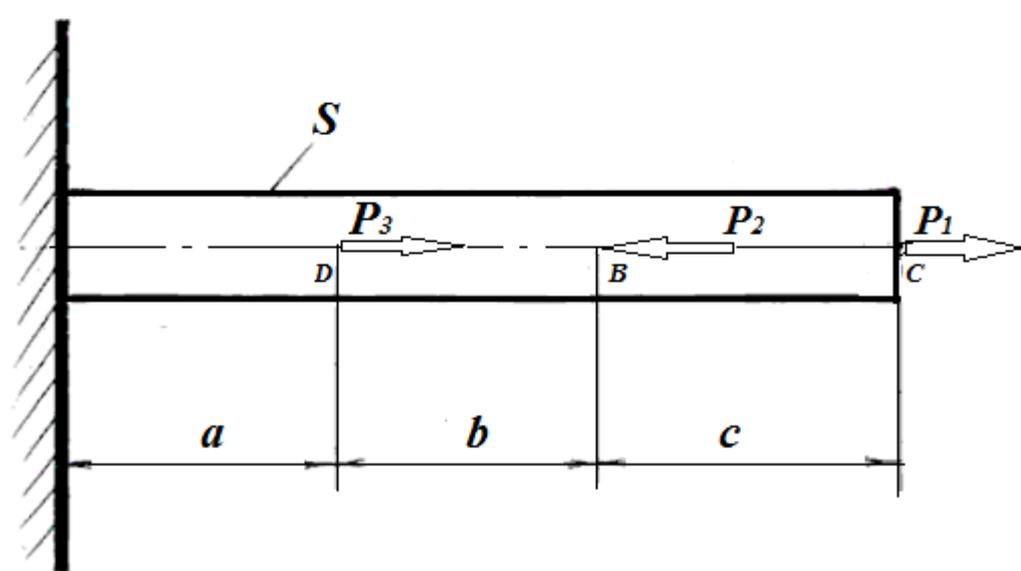
4



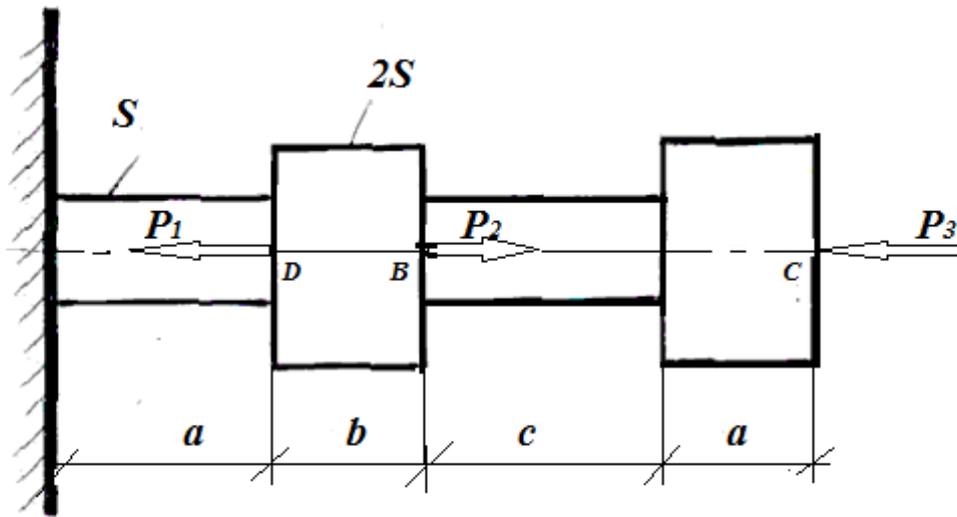
5



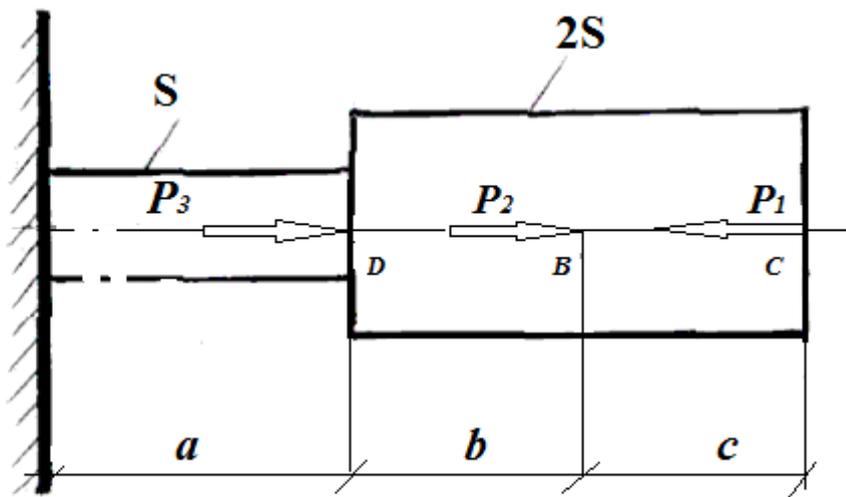
6



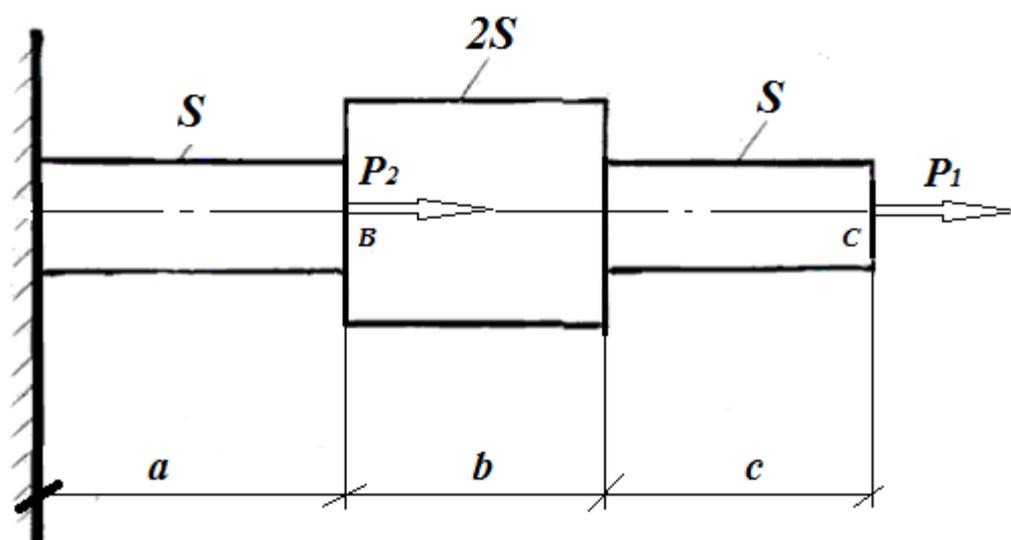
7



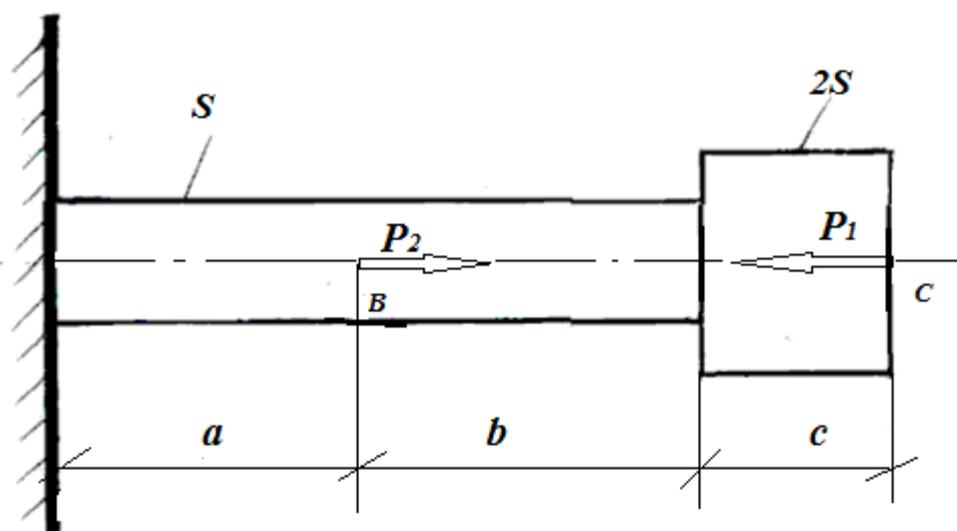
8



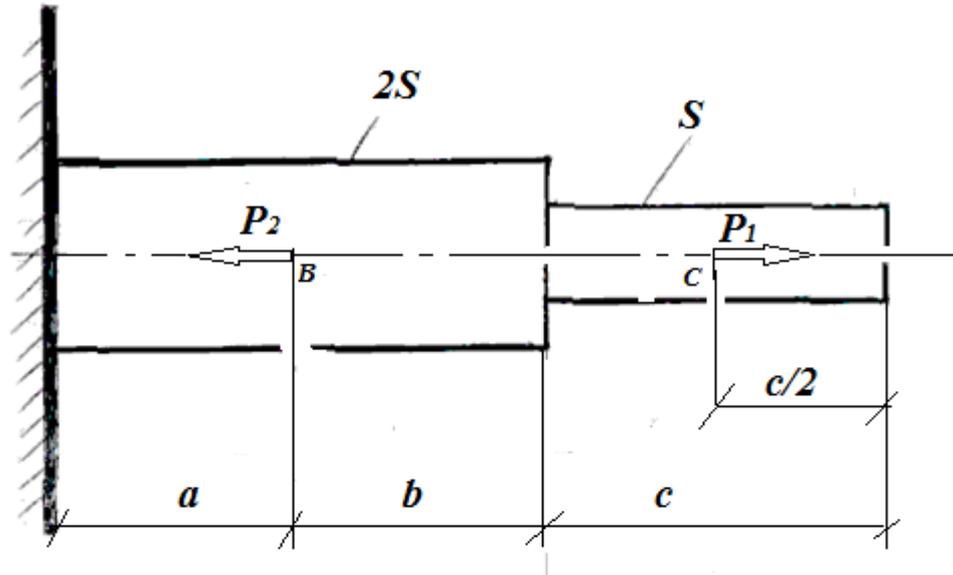
9



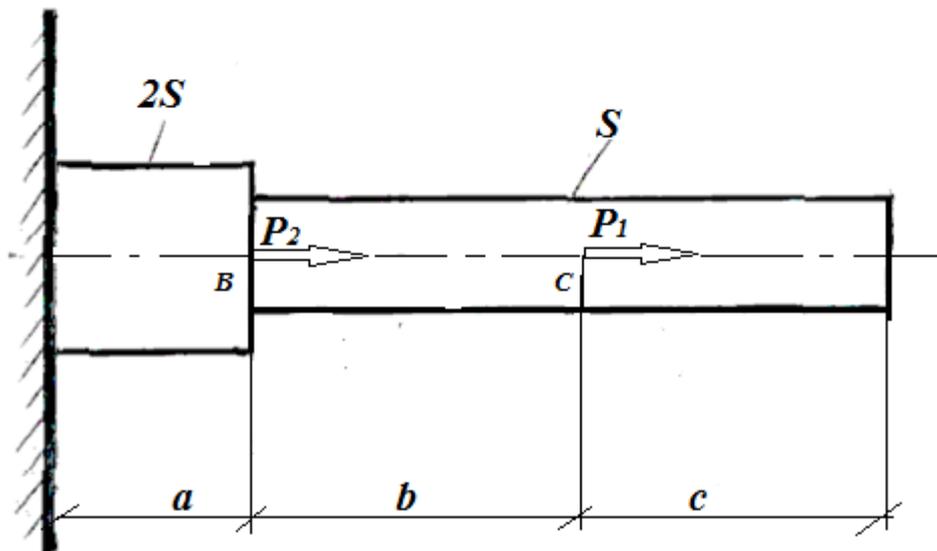
10



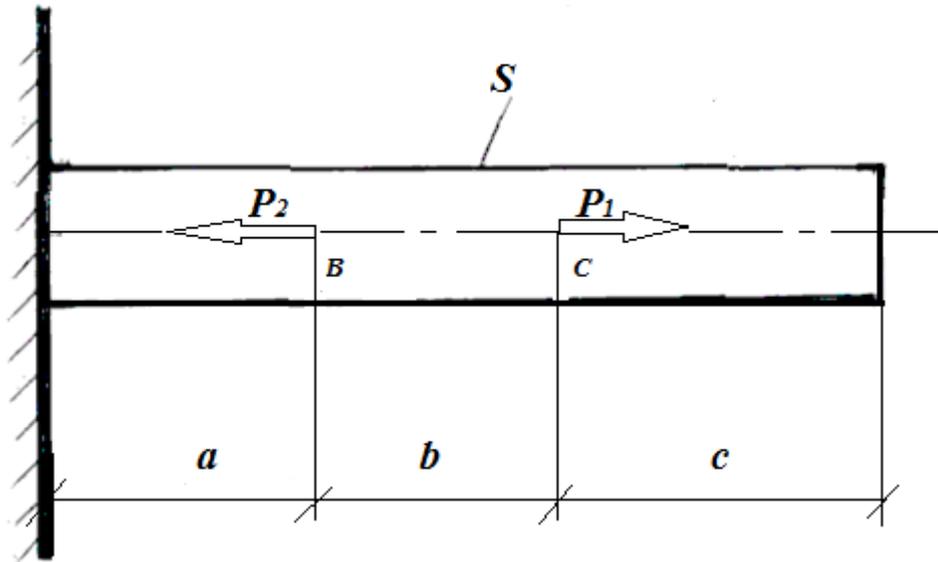
11



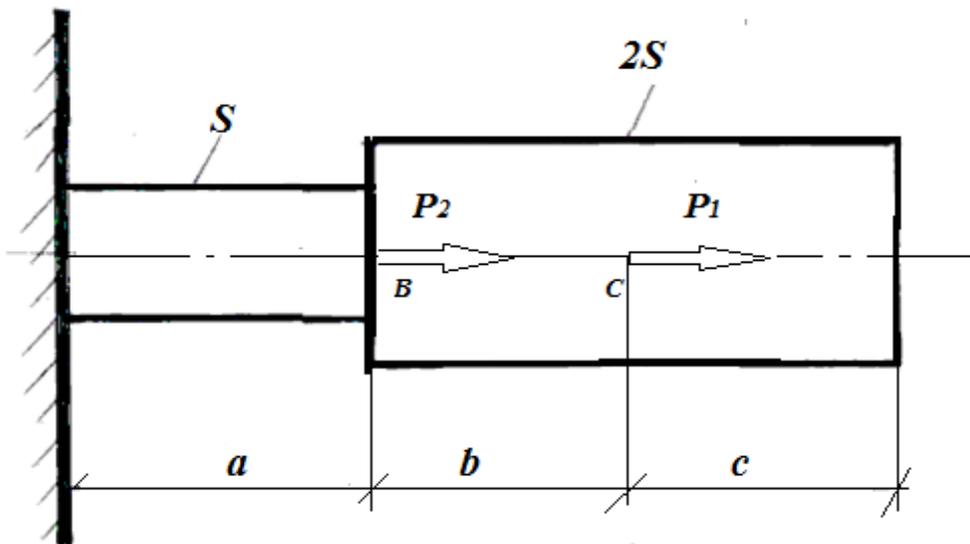
12



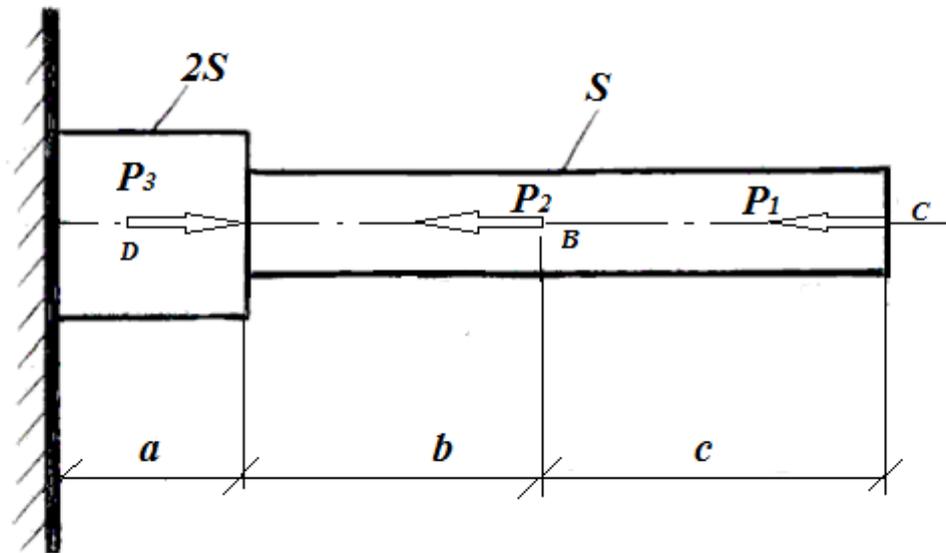
13



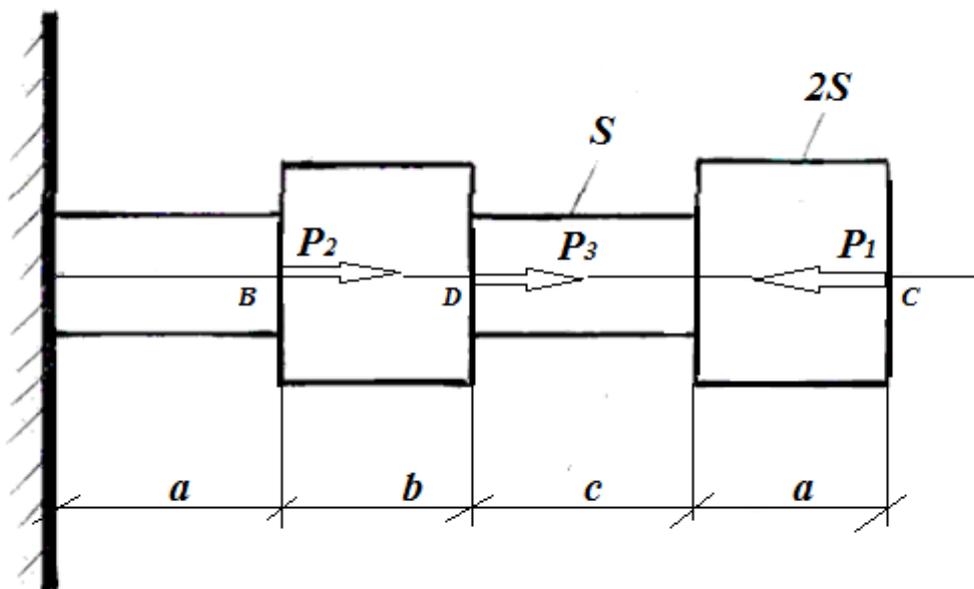
14



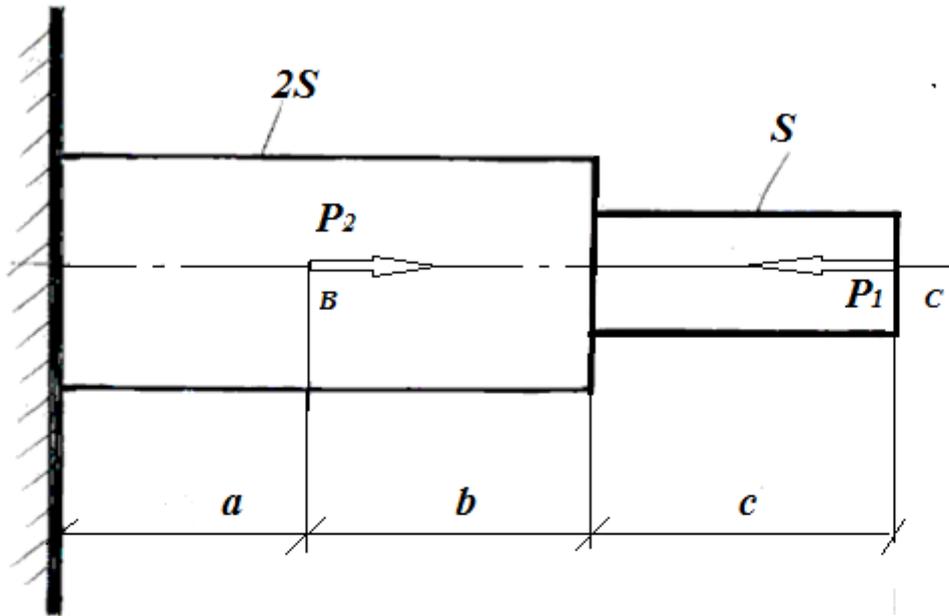
15



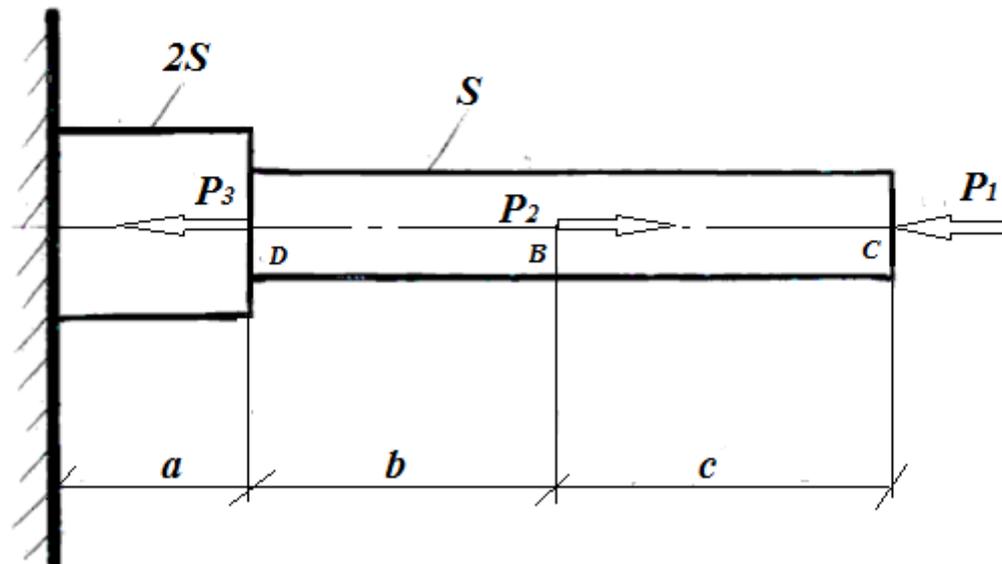
16



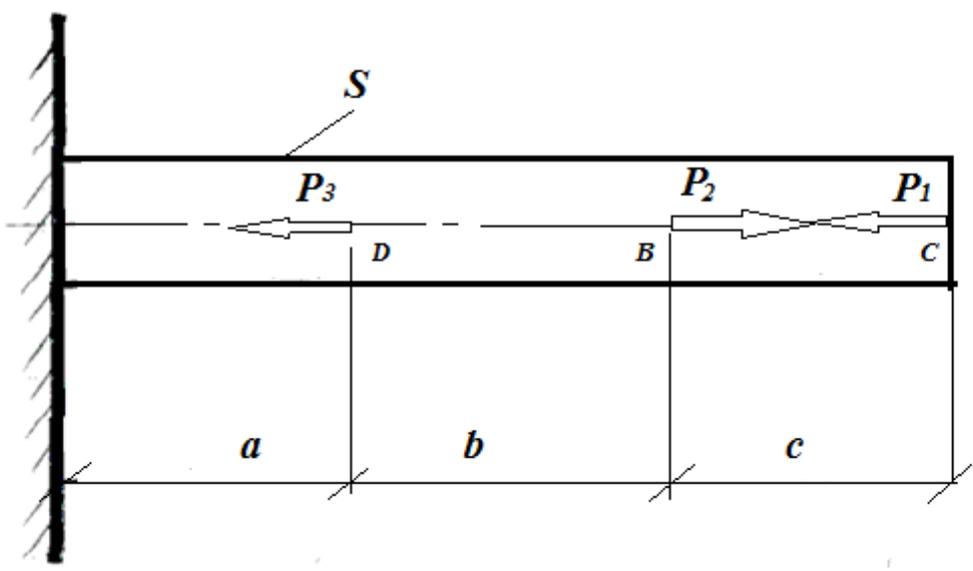
17



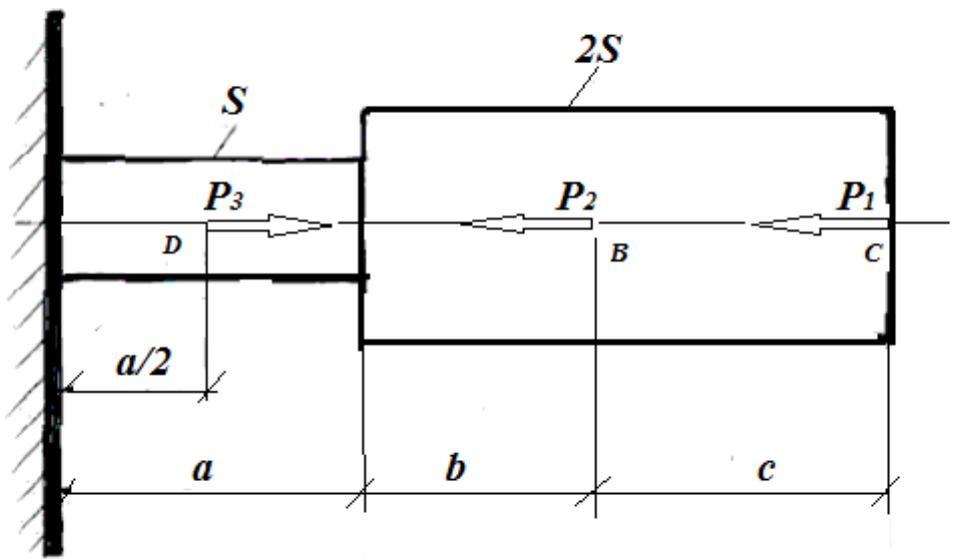
18



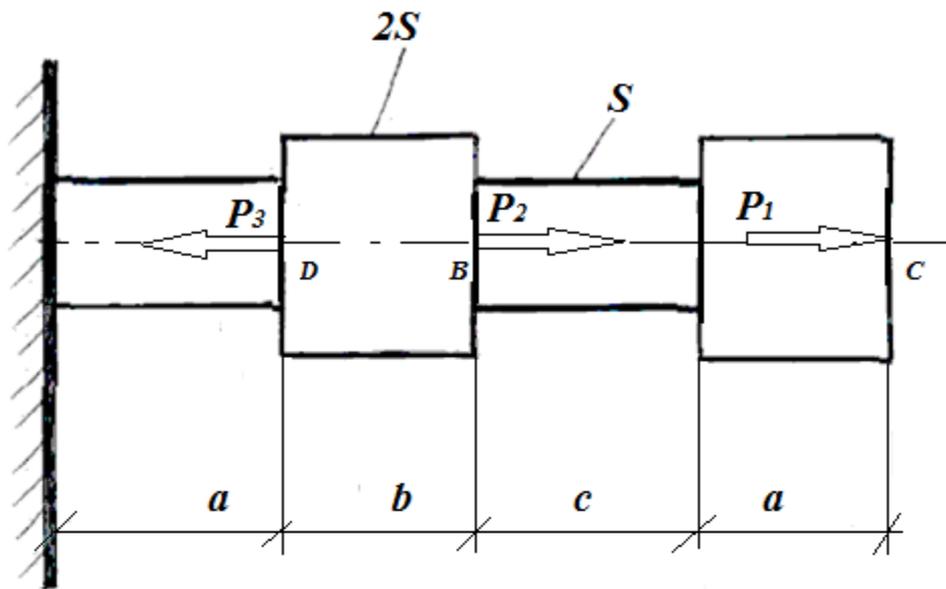
19



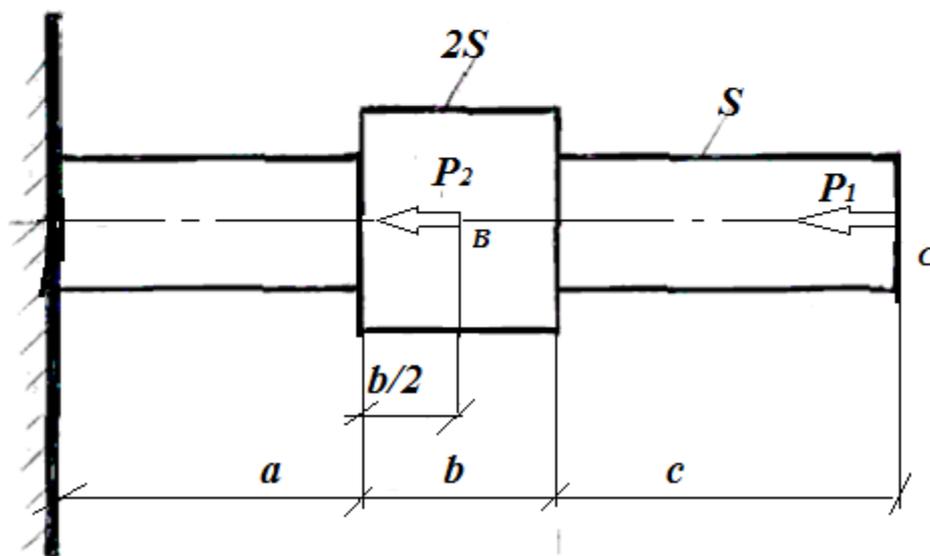
20



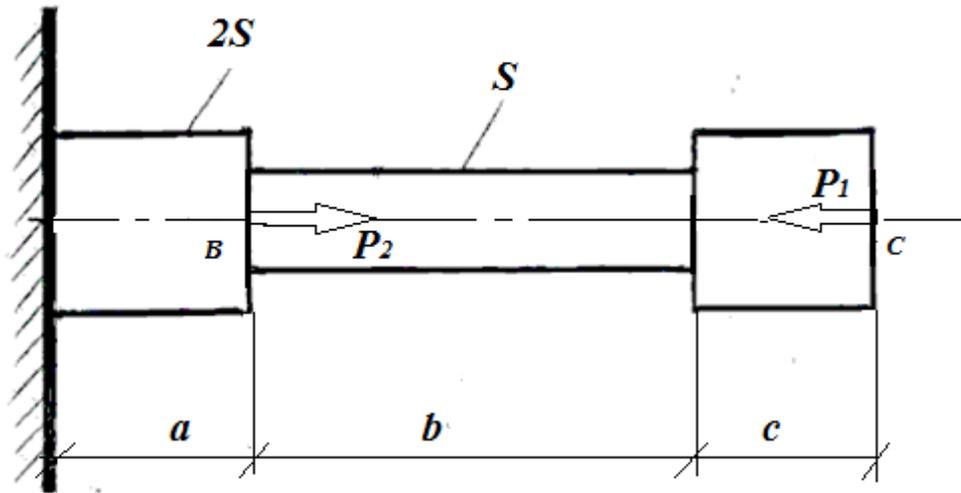
21



22



23



24

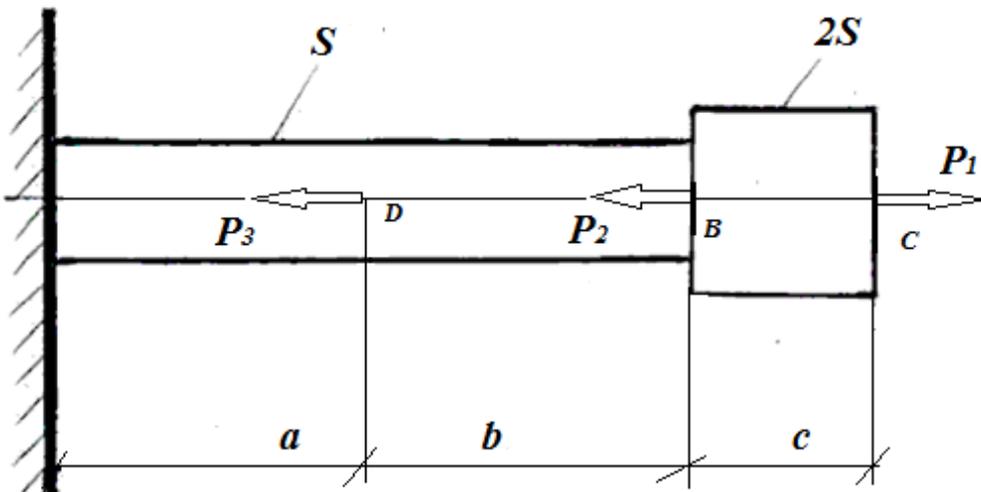


Таблица 2 – Исходные данные

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	P_1 кН	P_2 кН	P_3 кН	S см²	$[\sigma]$ МПа
1	1	0,4	0,2	0,3	100	150	---	5	160
	2	0,5	0,3	0,4	200	100	---	4	200
	3	0,4	0,4	0,4	50	100	---	2,5	200
	4	0,4	0,5	0,5	300	50	---	3,5	250
	5	0,3	0,6	0,3	150	100	---	3	220
2	1	1,2	0,8	0,7	75	125	---	2,5	300
	2	1,0	1,0	0,8	150	70	---	3	250
	3	0,8	0,6	0,8	200	50	---	4	280
	4	0,7	0,7	0,7	100	100	---	4	220
	5	0,6	0,8	0,6	120	120	---	3	250
3	1	1,1	1,0	1,0	80	60	40	4	160
	2	1,2	0,8	0,6	40	60	60	2	180
	3	0,8	0,8	0,8	50	50	200	4	200
	4	0,6	0,5	0,4	80	80	100	4	160
	5	0,9	1,0	0,7	100	50	200	2	200
4	1	0,4	0,4	0,4	200	75	---	4	220
	2	0,5	0,5	0,5	100	200	---	2,5	160
	3	0,6	0,4	0,4	150	50	---	3	300
	4	0,7	0,6	0,5	150	300	---	3	500
	5	0,4	0,5	0,6	200	100	---	4	320
5	1	0,5	0,6	0,5	80	100	---	5	160
	2	0,6	0,6	0,4	120	90	---	4	300
	3	0,4	0,4	0,5	150	80	---	5	250
	4	0,5	0,5	0,5	160	70	---	4	280
	5	0,4	0,4	0,6	90	100	---	2	250
6	1	0,6	0,6	0,6	100	200	150	5	160
	2	0,4	0,5	0,4	80	180	80	4	200
	3	0,7	0,6	0,5	90	150	90	3	200
	4	0,5	0,8	0,6	120	80	100	4	250
	5	0,8	0,4	0,5	150	100	80	4	280

Продолжение таблицы 2

№	№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	P₁	P₂	P₃	S	[σ]
Сх.	Вар.	м	м	м	кН	кН	кН	см²	МПа
7	1	0,5	0,5	0,5	200	100	100	5	300
	2	0,4	0,4	0,4	100	150	100	4	200
	3	0,6	0,6	0,6	300	100	150	5	400
	4	0,4	0,5	0,4	180	50	80	3	450
	5	0,7	0,6	0,5	150	500	100	5	250
8	1	0,8	0,8	0,8	300	100	100	3	300
	2	1,0	1,1	1,2	400	150	100	4	350
	3	0,7	0,7	0,7	200	50	300	3	400
	4	0,6	0,6	0,6	100	50	200	4	250
	5	0,4	0,5	0,7	250	90	280	3	300
9	1	0,6	0,6	0,6	200	100	---	5	400
	2	0,8	0,4	0,7	100	150	---	5	350
	3	0,5	0,7	0,8	400	50	---	9	380
	4	0,4	0,6	0,5	300	75	---	6	400
	5	0,7	0,5	0,4	200	50	---	4	250
10	1	1,1	1,0	0,8	300	100	---	6	450
	2	0,8	1,1	1,0	100	400	---	5	500
	3	0,9	0,7	0,6	200	300	---	4	400
	4	0,5	0,6	0,7	320	180	---	10	200
	5	0,4	0,5	0,6	440	210	---	5	350
11	1	0,9	0,9	0,9	90	300	---	4	200
	2	0,8	0,8	0,8	100	250	---	4	180
	3	0,7	0,6	0,5	120	280	---	3	300
	4	0,5	0,4	0,4	150	350	---	5	200
	5	0,4	0,8	0,6	300	200	---	6	400
12	1	0,6	0,5	0,5	200	200	---	4	350
	2	0,8	0,7	0,7	300	250	---	6	400
	3	0,5	0,4	0,6	100	200	---	4	200
	4	0,9	0,8	0,8	400	100	---	5	500
	5	0,4	0,6	0,4	250	150	---	5	400

Продолжение таблицы 2

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	<i>P</i> ₁ кН	<i>P</i> ₂ кН	<i>P</i> ₃ кН	<i>S</i> см ²	[<i>σ</i>] МПа
13	1	0,5	0,5	0,5	400	200	---	8	250
	2	0,7	0,7	0,7	300	100	---	6	300
	3	0,6	0,6	0,6	280	120	---	4	500
	4	0,4	0,5	0,6	350	150	---	5	350
	5	0,8	0,4	0,5	450	300	---	9	300
14	1	0,8	0,8	0,8	110	150	---	5	400
	2	0,7	0,7	0,7	160	120	---	7	300
	3	0,6	0,6	0,6	200	80	---	4	400
	4	0,4	0,5	0,3	300	140	---	5	600
	5	0,5	0,6	0,7	100	100	---	4	350
15	1	0,9	1,1	1,2	50	80	160	4	160
	2	1,2	1,0	0,8	60	70	230	5	250
	3	0,8	1,2	1,2	100	100	450	5	200
	4	0,7	0,6	0,9	200	200	200	5	500
	5	0,9	0,8	0,7	150	100	400	6	200
16	1	1,2	1,0	0,9	200	150	250	4	400
	2	0,8	0,6	0,8	150	100	100	2,5	150
	3	0,9	0,9	0,9	250	200	200	4	350
	4	1,0	1,0	1,0	350	150	100	5	400
	5	0,7	0,7	0,7	400	200	300	5	600
17	1	0,5	0,5	0,5	200	450	---	4	200
	2	0,4	0,4	0,4	400	200	---	5	500
	3	0,9	0,5	0,6	300	100	---	6	200
	4	0,6	0,6	0,6	100	400	---	4	180
	5	0,7	0,7	0,7	150	450	---	3	200
18	1	0,8	0,9	1,1	400	100	400	8	250
	2	1,2	1,1	1,0	100	300	400	2,5	200
	3	1,1	1,2	1,1	200	400	400	4	350
	4	1,0	1,0	1,0	300	200	300	5	400
	5	0,5	0,6	0,7	400	100	300	8	350

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	<i>P</i> ₁ кН	<i>P</i> ₂ кН	<i>P</i> ₃ кН	<i>S</i> см ²	[<i>σ</i>] МПа
19	1	1,2	1,2	1,2	100	200	100	4	250
	2	1,1	1,1	1,1	150	300	250	5	160
	3	1,0	1,0	1,0	200	100	100	5	250
	4	0,9	0,9	0,9	100	400	100	6	300
	5	0,8	0,8	0,8	150	500	200	7	250
20	1	0,4	0,6	0,5	300	100	200	5	200
	2	0,5	0,4	0,6	400	50	150	6	250
	3	0,8	0,7	0,6	100	300	100	5	400
	4	0,9	0,8	1,1	500	50	300	5	350
	5	1,1	1,0	1,1	50	400	250	4	400
21	1	1,0	1,0	1,0	200	100	150	4	200
	2	1,2	1,2	1,2	100	100	300	4	250
	3	0,8	0,8	0,8	300	100	600	5	250
	4	1,2	0,9	0,9	400	100	700	5	500
	5	0,6	0,7	0,5	400	200	300	6	400
22	1	0,4	0,2	0,6	100	200	---	2,5	200
	2	0,8	0,4	0,8	200	200	---	5	200
	3	0,9	0,3	0,9	300	100	---	6	300
	4	1,1	0,5	1,1	250	150	---	5	350
	5	1,2	0,6	1,2	150	250	---	5	250
23	1	0,8	0,4	0,5	200	500	---	4	300
	2	0,5	0,5	0,6	600	200	---	6	400
	3	0,4	0,4	0,4	300	600	---	5	350
	4	0,3	0,3	0,4	800	500	---	5	300
	5	0,6	0,5	0,8	250	500	---	5	250
24	1	1,2	1,2	1,2	400	300	200	4	200
	2	1,0	1,1	1,0	600	200	100	5	300
	3	0,9	1,0	1,1	200	300	300	4	300
	4	1,2	1,0	0,8	800	400	200	6	200
	5	0,8	0,4	0,4	100	200	100	4	180

3.3. Расчет стержня на прочность и жесткость при кручении

Пример.

Вид расчетной схемы показан на рис. 3.8.

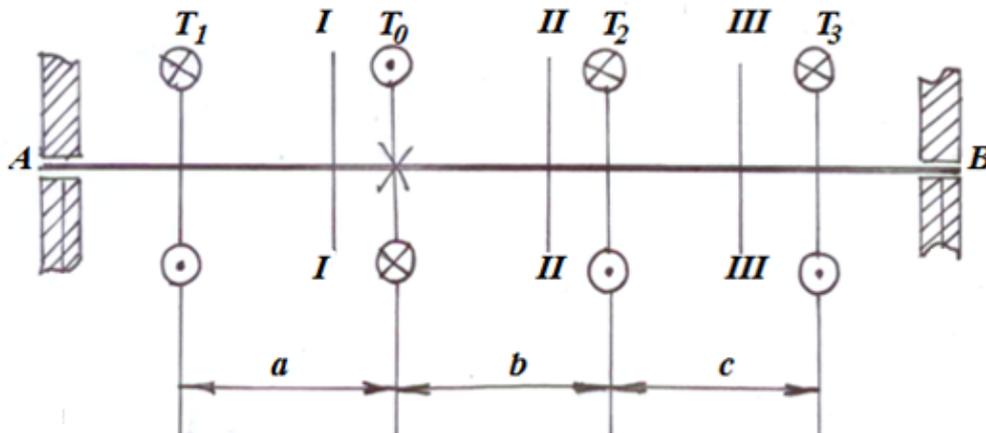


Рис. 3.8. Расчетная схема вала

Исходные данные: на равномерно вращающийся вал действуют четыре внешних скручивающих момента мощностью $N_1 = 20$ кВт; $N_2 = 30$ кВт; $N_3 = 40$ кВт; $a = 0,5$ м; $b = 0,2$ м; $c = 0,4$ м; $n = 200$ об/мин; $[\tau] = 55$ МПа; $\theta = 0,1$ град/м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\alpha = d/D = 0,95$.

Требуется определить:

1. T_0 .
2. Вычислить и построить эпюры внутренних крутящих моментов $M_{z,i}$ и угловых поворотов поперечных сечений вала φ_i .
3. Определить из условий прочности и жесткости диаметры сплошного сечения вала по участкам и округлить их значения до стандартного.
4. Вычислить размеры сплошного и полого сечений вала (для $\alpha=0,7$; $\alpha=0,95$) в опасном сечении и сравнить их по экономичности.

Решение:

1. Определяем скручивающие моменты:

$$T_1 = 9550 \frac{N_1}{n} = 9550 \frac{20}{200} = 955 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$T_2 = 9550 \frac{N_2}{n} = 9550 \frac{30}{200} = 1432,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$T_3 = 9550 \frac{N_3}{n} = 9550 \frac{40}{200} = 1910 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2. Из условия равновесия вала определим T_0 , рассматривая вал с конца оси Z и произвольно назначив его направление:

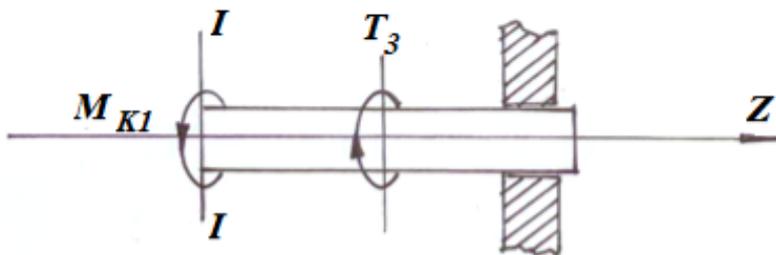
$$\sum M_z = -T_1 + T_0 - T_2 - T_3 = 0$$

$$T_0 = T_1 + T_2 + T_3 = 955 + 1432,5 + 1910 = 4297,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Если знак получится отрицательным, то надо изменить его направление T_0 .

3. Определим внутренние крутящие моменты по участкам вала.

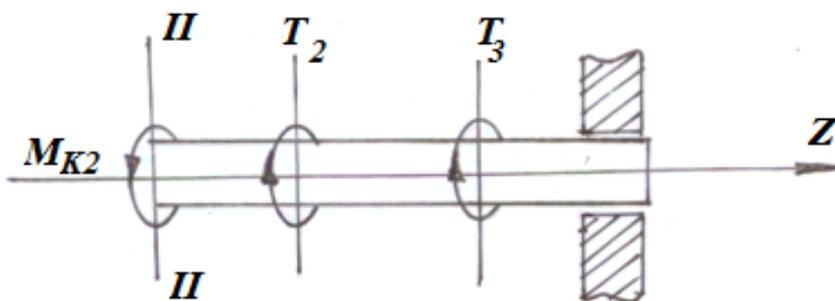
Участок I, сечение 1-1:



$$M_{\text{кр.1}} = T_3 = 1910 \text{ (Н}\cdot\text{м)}$$

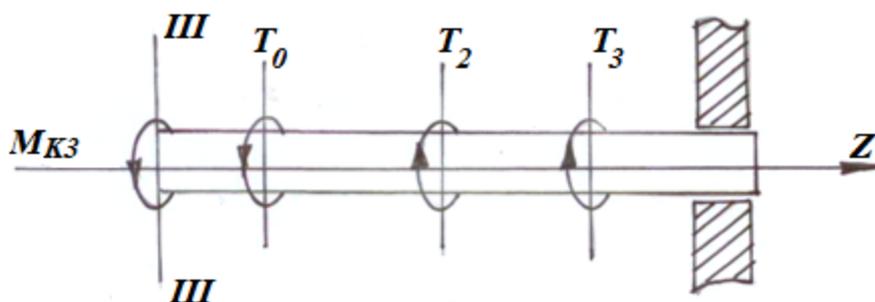
Так как $M_{\text{кр.1}}$ получился со знаком (+), то его направление по часовой стрелке, при взгляде на него со стороны сечения.

Участок II, сечение 2-2:



$$M_{\text{кр.2}} = T_2 + T_3 = 1432,5 + 1910 = 3342,5 \text{ (Н}\cdot\text{м)}$$

Участок III, сечение 3-3:



$$M_{кр.3} = -T_0 + T_2 + T_3 = -4297,5 - 3342,5 = -955 \text{ (Н·м)}$$

На участке III внутренний крутящий момент отрицательный, следовательно, его направление против часовой стрелки.

По значениям вычисленных $M_{кр.i}$ построить в масштабе эпюры внутренних крутящих моментов с учетом знаков (см. рис. 3.7).

5. Используя условие прочности и жесткости, вычислить диаметр сплошного вала для опасного сечения по участкам. Полученные значения диаметров округлить до стандартного значения по ГОСТ 12080-66:

12, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 63, 65, 70, 71, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 120, 125, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 240, 250, 280, 300 мм.

Опасным участком является участок II, так как в любом его сечении действует максимальный по модулю крутящий момент.

$$D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{k1}|}{0,2 \cdot [\tau]}}; \quad D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{1910 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 55}} = 55,7 \text{ мм};$$

По стандарту $D_1 = 60$ мм.

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{k2}|^{\max}}{0,2 \cdot [\tau]}}; \quad D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{3342,5 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 55}} = 67,2 \text{ мм};$$

Принять стандартное значение диаметра $D_2 = 70$ мм.

$$D_3 \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{k3}|}{0,2 \cdot [\tau]}}; \quad D_3 \geq \sqrt[3]{\frac{955 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 55}} = 44,2 \text{ мм};$$

По стандарту $D_3 = 45$ мм.

Определить диаметры вала по участкам, используя условие жесткости, если для стального вала $G = 0,4 \cdot E$.

$$D_1 \geq 4 \sqrt{\frac{1910,57,3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1}} = 10^{-2} \cdot 4 \sqrt{\frac{1910,57,3}{8}} = 10^{-2} \cdot 10,8 \text{ м} = 108 \text{ мм};$$

Принять $D_1 = 110$ мм из стандартного ряда.

$$D_2 \geq 4 \sqrt{\frac{M_{k2} \cdot 180}{0,1 \cdot G \cdot [\theta] \cdot \pi}} = 4 \sqrt{\frac{3342,5 \cdot 180}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot 3,14}}$$

$$= 10^{-2} \cdot 4 \sqrt{\frac{3342,5 \cdot 180}{8 \cdot 3,141}} = 10^{-2} \cdot 12,43 = 0,1243 \text{ м} = 124,3 \text{ мм};$$

$D_2 = 125$ мм (из стандартного ряда).

$$D_3 \geq 4 \sqrt{\frac{955 \cdot 57,3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1}} = 0,0909 \text{ м} = 90,9 \text{ мм};$$

$D_3 = 100$ мм из стандартного ряда.

Так как диаметры вала, вычисленные из условия жесткости больше, чем вычисленные из условия прочности, то принять к изготовлению диаметры большего размера, то есть из условия жесткости:

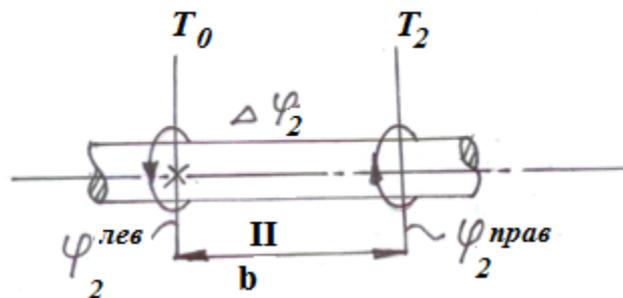
$D_1 = 110$ мм; $D_2 = 125$ мм; $D_3 = 100$ мм.

5. Вычислить и построить эпюры угловых поворотов поперечных сечений вала.

Принять по условию задачи за неподвижное сечение - сечение с моментом T_0 .

При расчете φ_i использовать формулу: $\varphi_i^{\text{пр}} = \varphi_i^{\text{лев}} + \Delta\varphi_i$

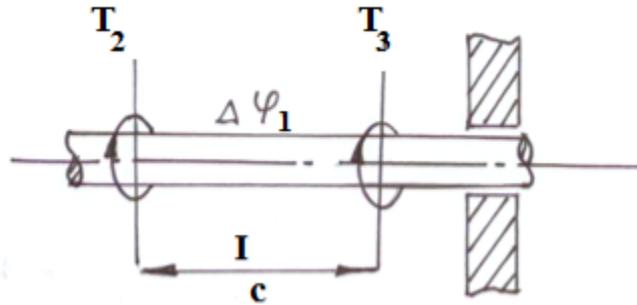
Начнем с участка II:



$$\varphi_2^{\text{пр}} = \varphi_2^{\text{лев}} + \Delta\varphi_2 = 0 + \frac{M_{k2} \cdot b \cdot 57,3^\circ}{G \cdot J_{\rho 2}} = \frac{3342,5 \cdot 0,2 \cdot 57,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2,44 \cdot 10^{-5}} = 0,0196^\circ;$$

$$J_{p2} = 0,1 \cdot D_2^4 = 0,1 \cdot 0,125^4 = 2,44 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

Участок I:

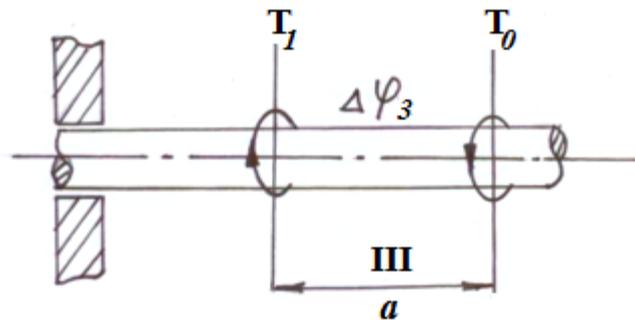


$$\begin{aligned} \varphi_I^{\text{пр}} &= \varphi_I^{\text{лев}} + \Delta\varphi_I \\ \varphi_I^{\text{лев}} &= \varphi_{II}^{\text{пр}} \end{aligned}$$

$$\varphi_1^{\text{прав}} = 0,0196 + \frac{1910 \cdot 0,4 \cdot 57,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,46 \cdot 10^{-5}} = 0,0196 + 0,0374 = 0,057^\circ$$

$$J_{p1} = 0,1 \cdot d_1^4 = 0,1 \cdot 0,11^4 = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$$

Участок III:



$$\begin{aligned} \varphi_{III}^{\text{пр}} &= \varphi_{III}^{\text{лев}} + \Delta\varphi_3, \\ \text{но } \varphi_{III}^{\text{пр}} &= 0, \text{ тогда} \end{aligned}$$

$$\varphi_3^{\text{лев}} = -\Delta\varphi_3 = -\frac{M_{\text{кр3}} \cdot a \cdot 57,3}{G \cdot J_{p3}} = -\frac{-955 \cdot 0,557,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^{-5}} = 0,034^\circ$$

$$J_{p3} = 0,1 \cdot 0,1^4 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$$

Эпюры φ_i показан на рис. 3.9.

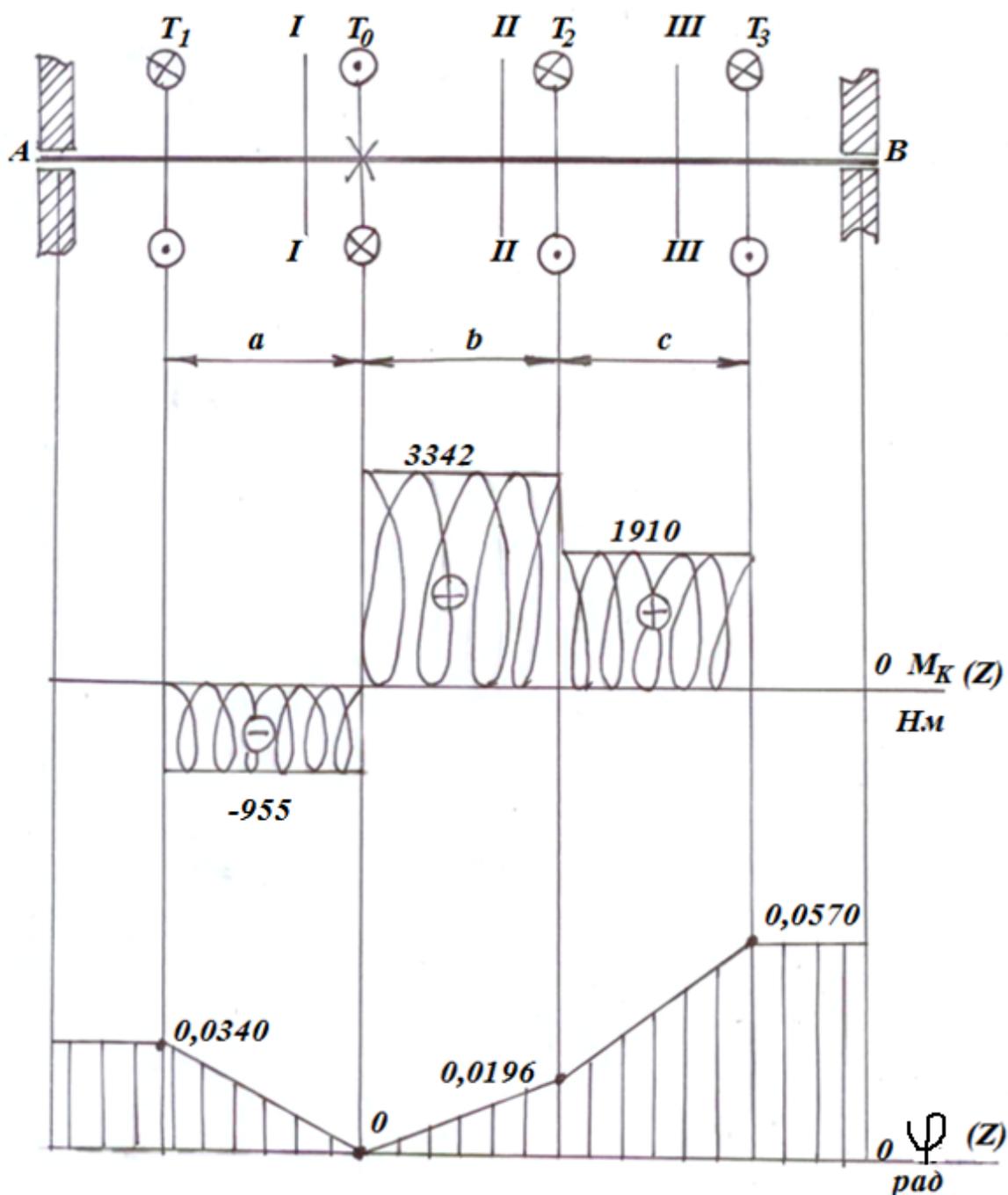


Рис. 3.9. Расчетная схема вала с эпюрами

Из рисунка видно, что все поперечные сечения вала повернутся по часовой стрелке относительно сечения с T_0 , если смотреть с конца оси Z .

6. Определить диаметры и размеры сечений для полых валов только в опасном сечении из условия жесткости для сравнения экономичности по затратам металла при $\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 0,7$.

$$\text{Для полого вала } J_p = 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4)$$

$$W_p = \frac{0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4)}{D/2} = 0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4);$$

Тогда для $\alpha_1 = 0,95$:

$$D_{(\alpha_1)} \geq 4 \sqrt{\frac{M_{k2} \cdot 57,3}{0,1 \cdot G \cdot (1 - \alpha_1^4) \cdot [\theta]}} = 4 \sqrt{\frac{3342,5 \cdot 57,3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,95^4) \cdot 0,1}} =$$

$$= 10^{-2} \cdot 4 \sqrt{\frac{3342,5 \cdot 57,3}{8 \cdot (1 - 0,81)}} = 10^{-2} \cdot 18,84 = 0,1884 \text{ м} = 188,4 \text{ мм};$$

Принять $D_{(\alpha_1)} = 200 \text{ мм}$, $d_{(\alpha_1)} = 0,95 \cdot 200 = 190 \text{ мм}$

$$S_{(\alpha_1)} = 0,785 \cdot (D_{(\alpha_1)}^2 - d_{(\alpha_1)}^2) = 0,785 \cdot (0,04 - 0,036) = 0,00314 \text{ м}^2 = 31,4 \text{ см}^2.$$

Для $\alpha_2 = 0,7$:

$$D_{(\alpha_2)} \geq 4 \sqrt{\frac{3342,5 \cdot 57,3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,7^4) \cdot 0,1}} = 10^{-2} \cdot 4 \sqrt{\frac{3342,5 \cdot 57,3}{8 \cdot (1 - 0,24)}} =$$

$$= 10^{-2} \cdot 13,32 = 0,1332 \text{ м} = 133,2 \text{ мм};$$

Для $\alpha_2 = 0,7$ принять $D_{(\alpha_2)} = 140 \text{ мм}$,

$$d_{(\alpha_2)} = 0,7 \cdot 140 = 98 \text{ мм};$$

$$S_{(\alpha_2)} = 0,785 \cdot (D_{(\alpha_2)}^2 - d_{(\alpha_2)}^2) = 0,785 \cdot (0,0177 - 0,0096) = 0,0063 \text{ м}^2 = 63 \text{ см}^2;$$

$$S_{(\alpha)} = 0,785 \cdot 0,125^2 = 0,0122 \text{ м}^2 = 122 \text{ см}^2;$$

Выгоднее сечение с $\alpha_1 = 0,95$; так как оно меньше и, следовательно, экономичнее по затратам.

На стр. 112 – 123 изображены расчетные схемы заданий, а на стр. 124 – 127 таблицы № 3 и № 4, содержащие исходные данные.

Суть заданий следующая.

Для заданной расчетной схемы требуется:

1. Для схем с нечетным номером из условия равновесия определить T_0 , а для схем с четным номером - момент в заделке.

2. Методом сечения вычислить и построить эпюру внутренних крутящих моментов M_{ki} .

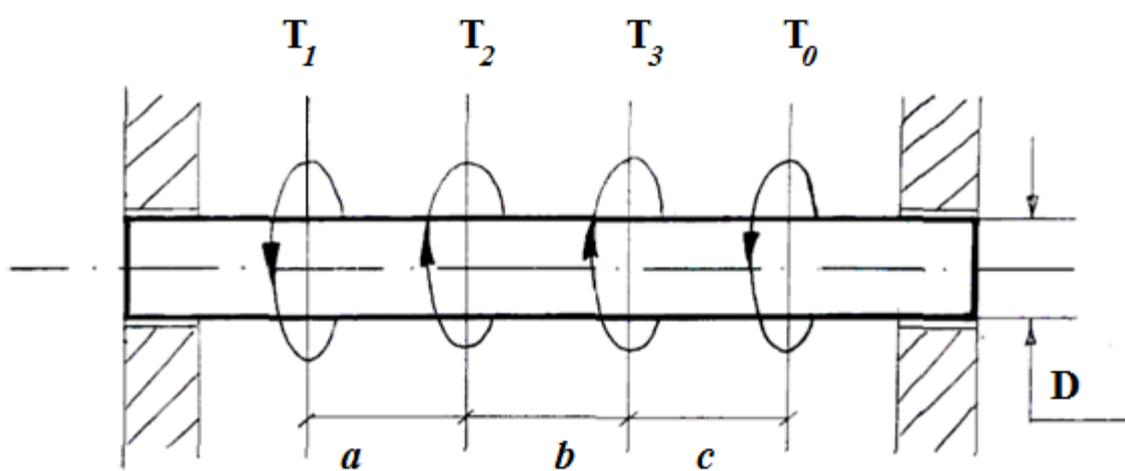
3. Определить диаметры сплошных сечений стержня по участкам из условий прочности и жесткости. Результаты округлить до стандартных сечений и назначить значения диаметров по участкам к изготовлению.

4. Вычислить абсолютные деформации по участкам стержня и построить эпюру угловых поворотов сечений. Принять $G = 0,4 \cdot E$.

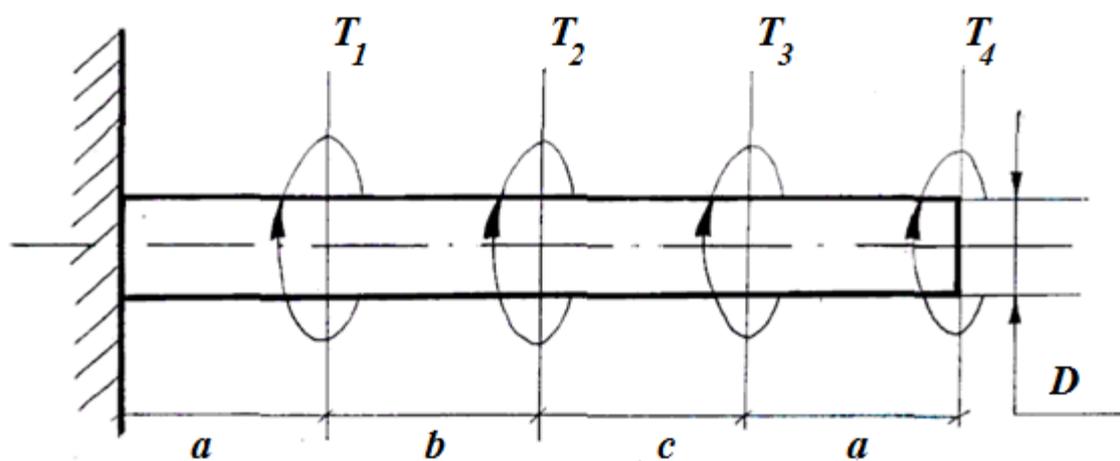
5. Вычислить d и D полого сечения стержня только для опасных сечений при $\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 0,7$; ($\alpha = d/D$).

6. Сравнить экономичность по затратам материала для сечений с

$\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 0,7$, для чего вычислить площади поперечных сечений.

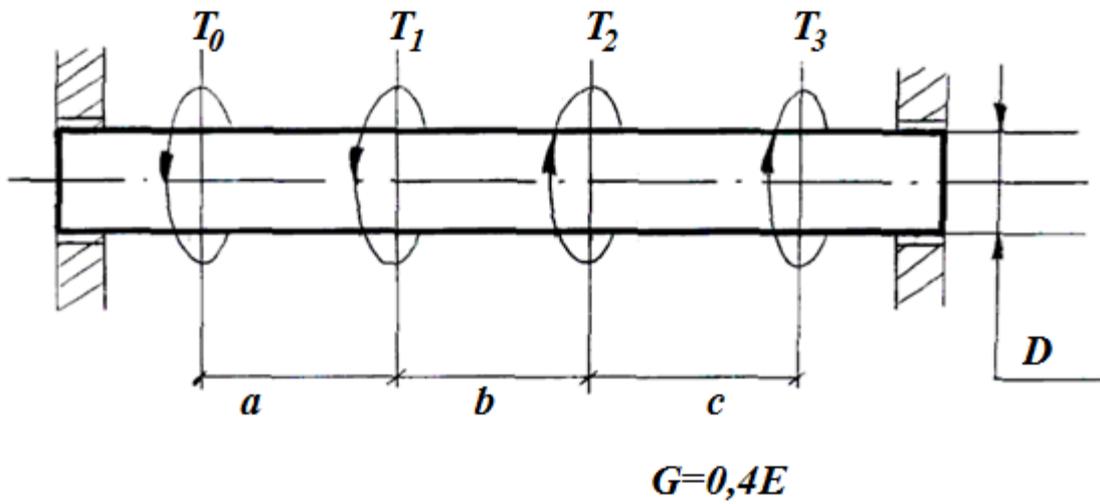
1

$$G=0,4E$$

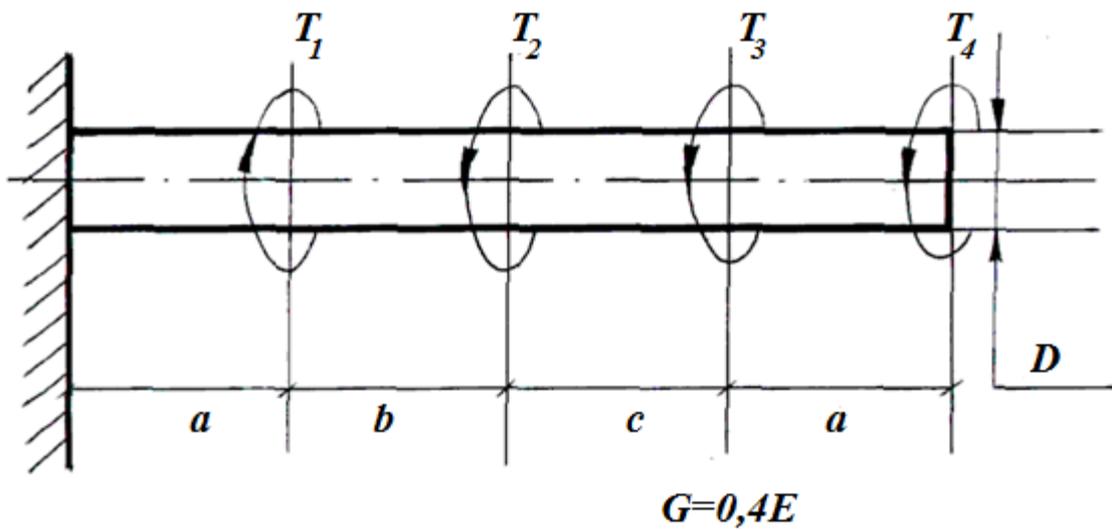
2

$$G=0,4E$$

3

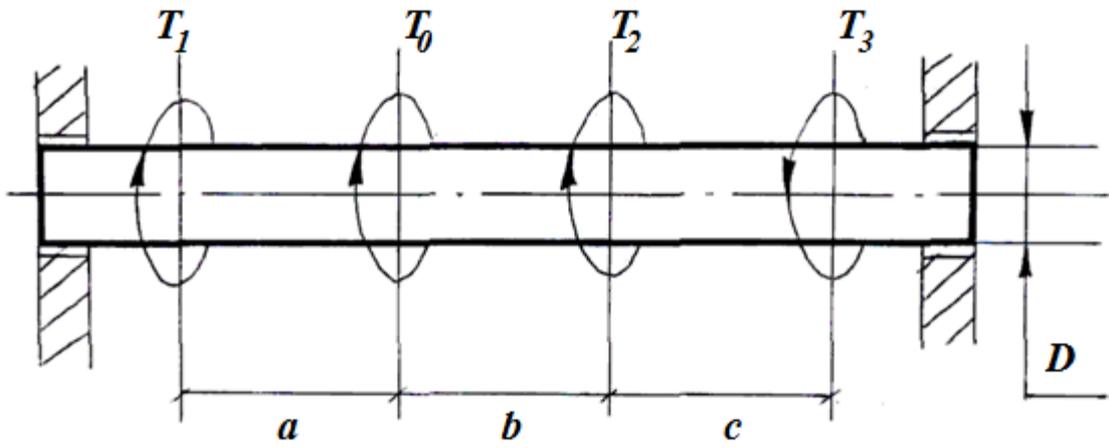


4

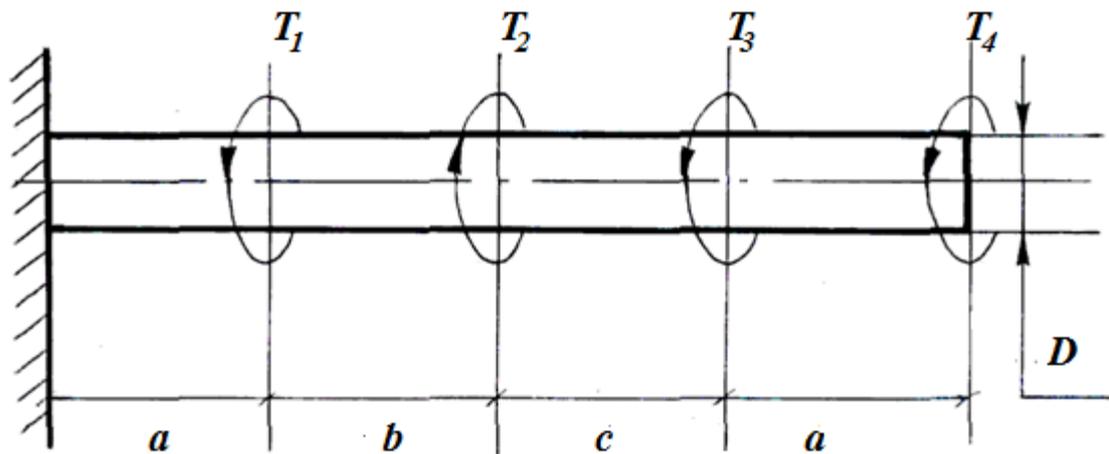


5

$G=0,4E$

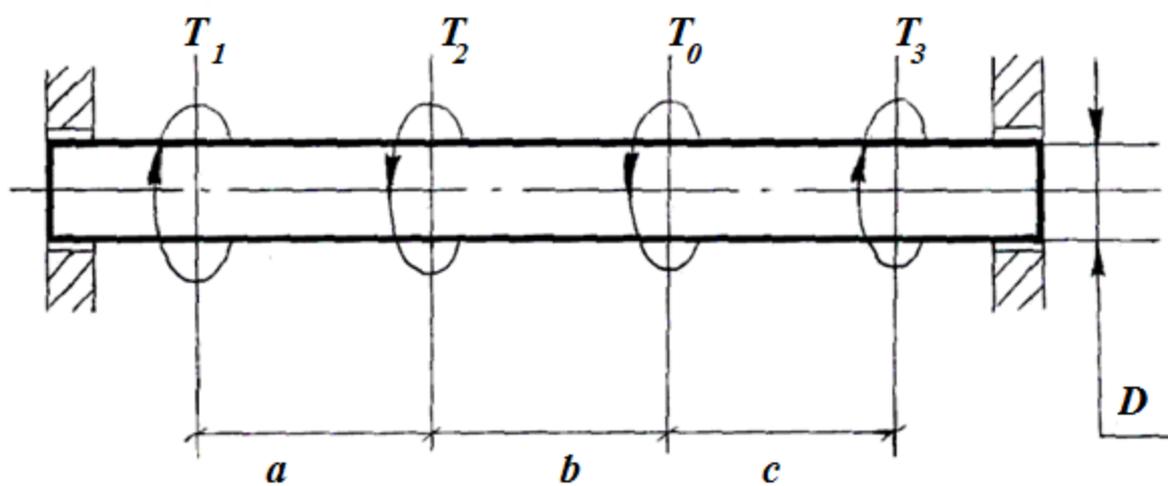
**6**

$G=0,4E$

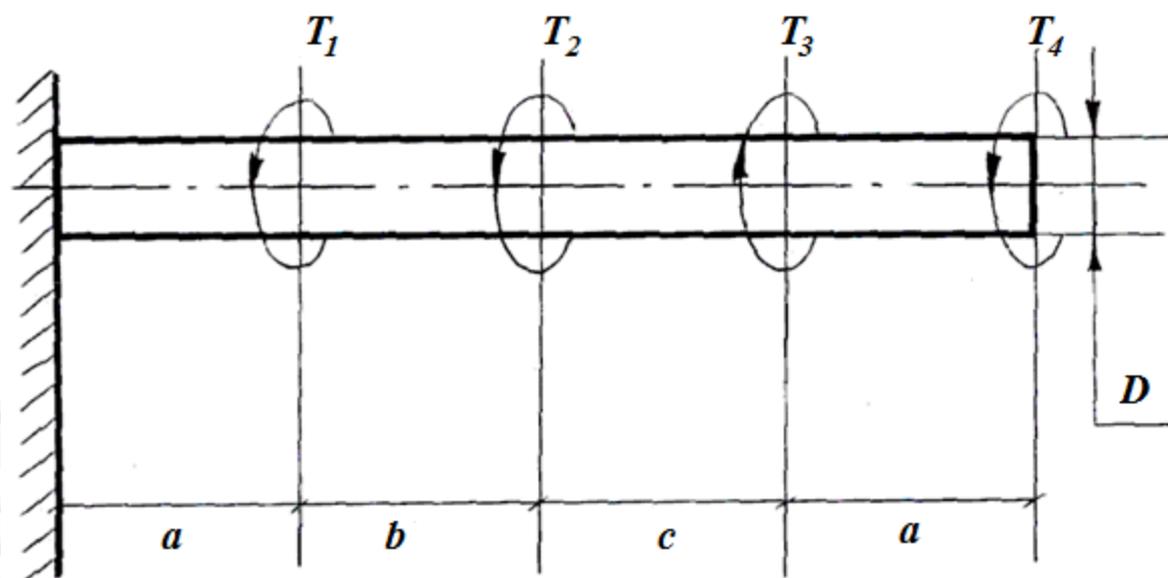


7

$G=0,4E$

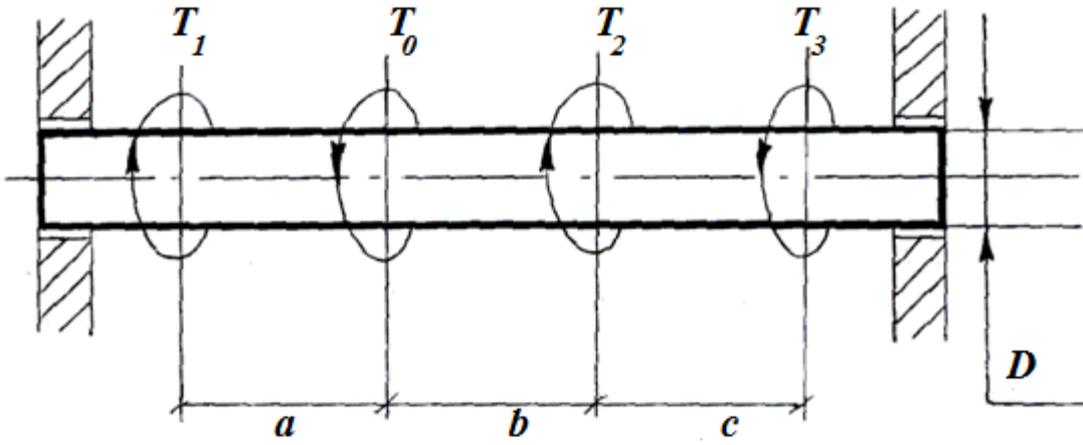
**8**

$G=0,4E$

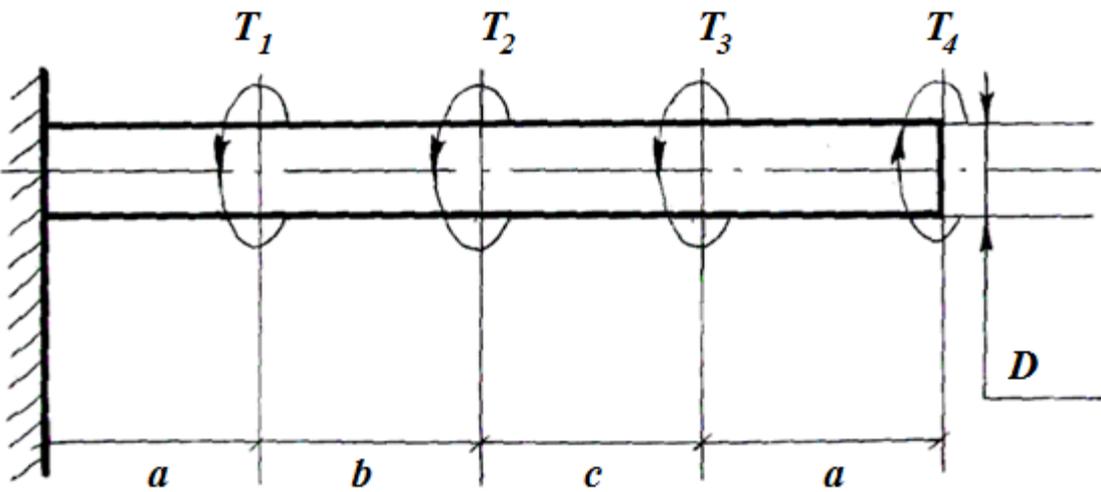


9

$G=0,4E$

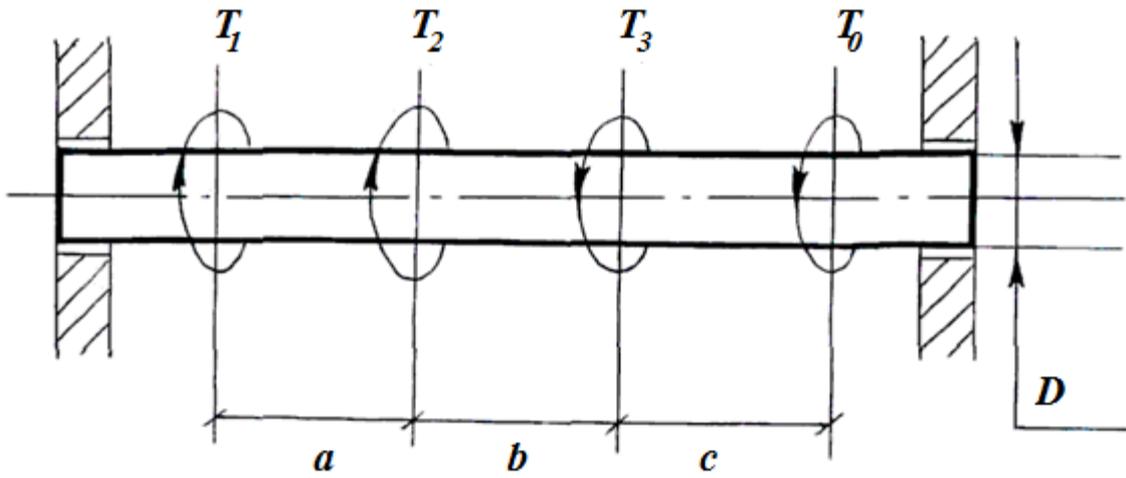
**10**

$G=0,4E$

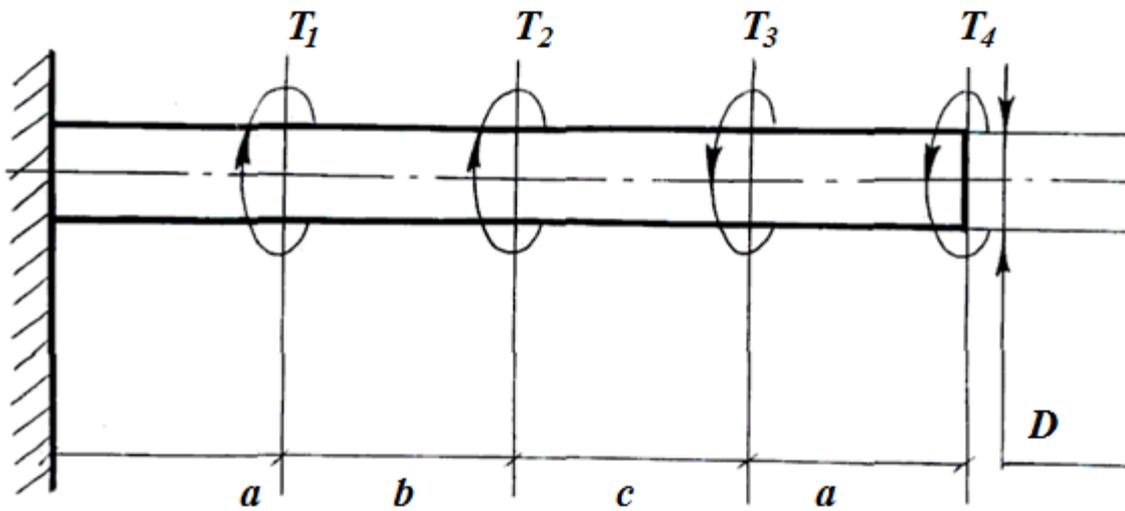


11

$G=0,4E$

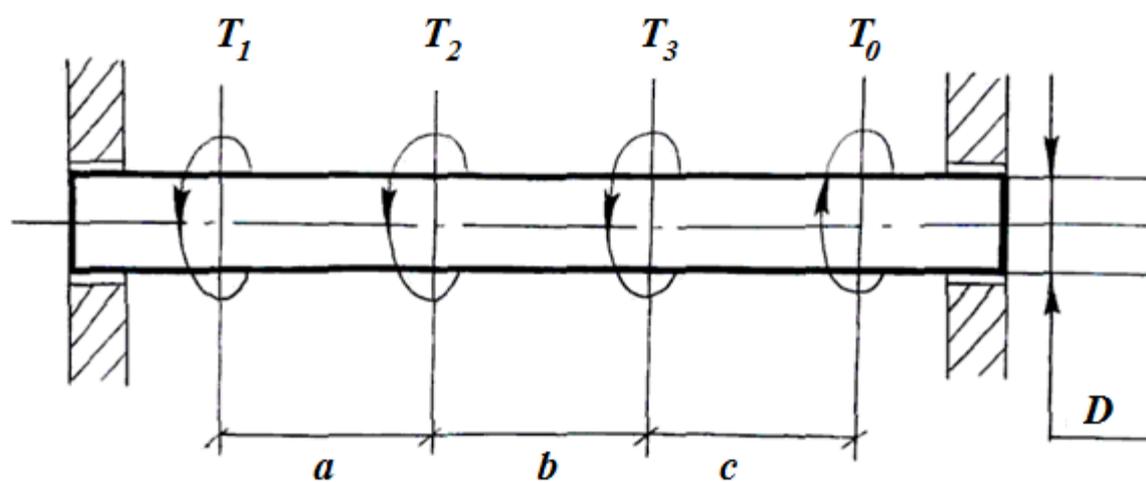
**12**

$G=0,4E$

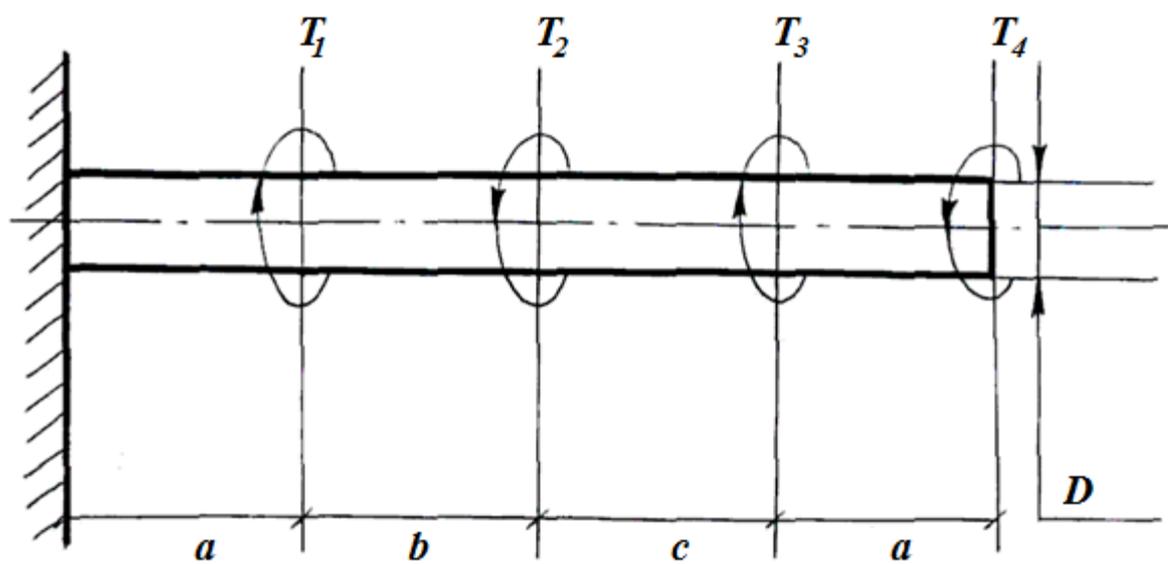


13

$G=0,4E$

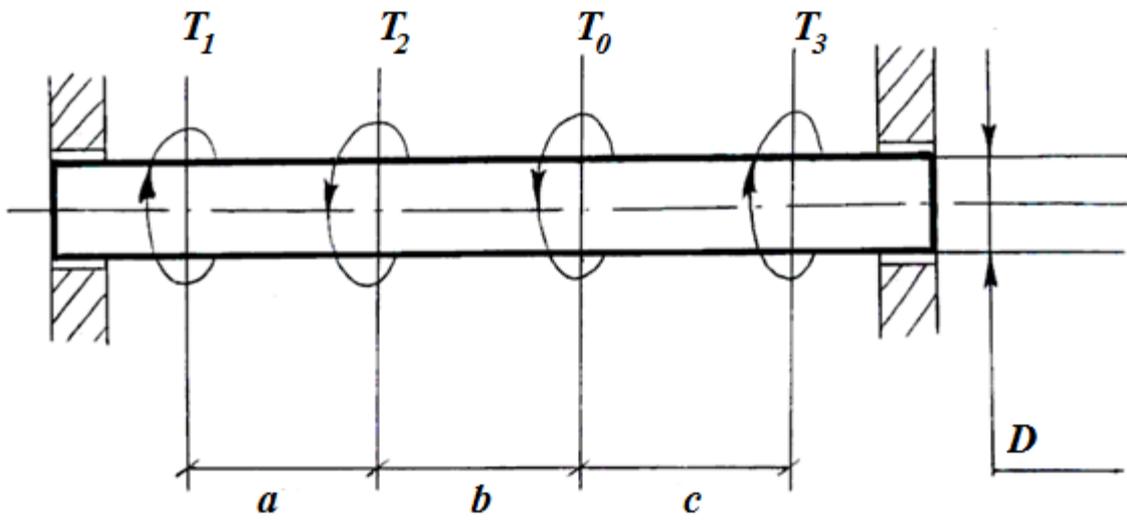
**14**

$G=0,4E$

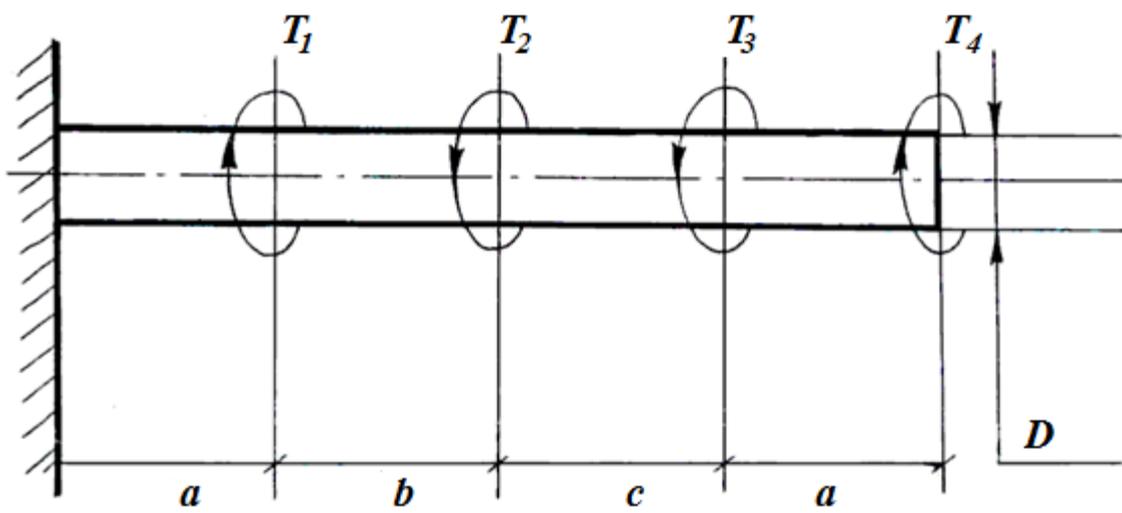


15

$G=0,4E$

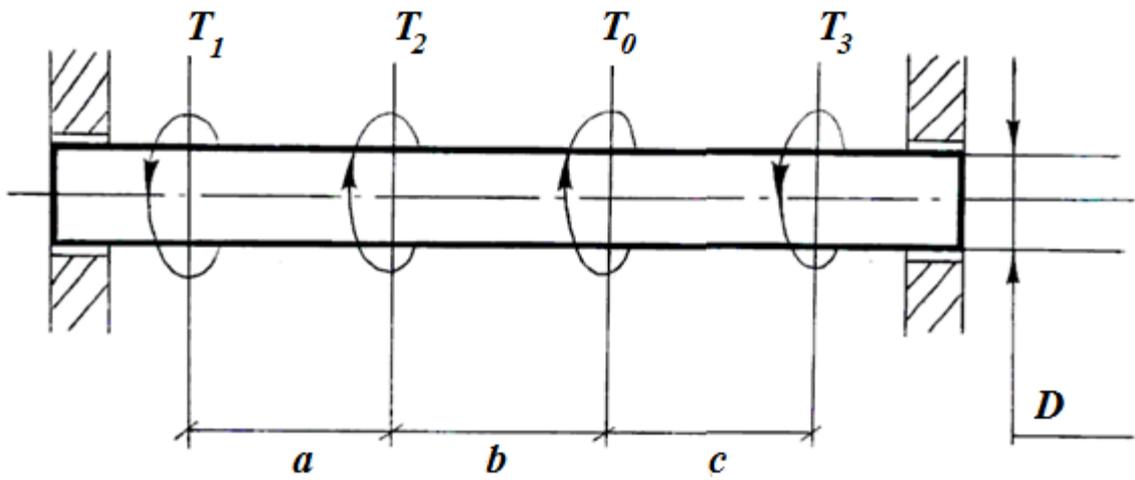
**16**

$G=0,4E$

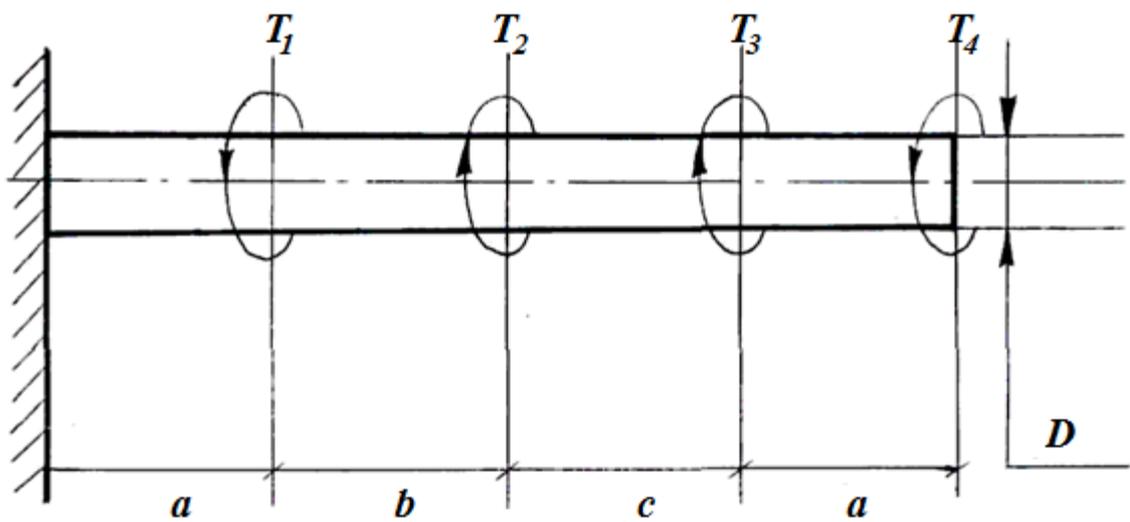


17

$G=0,4E$

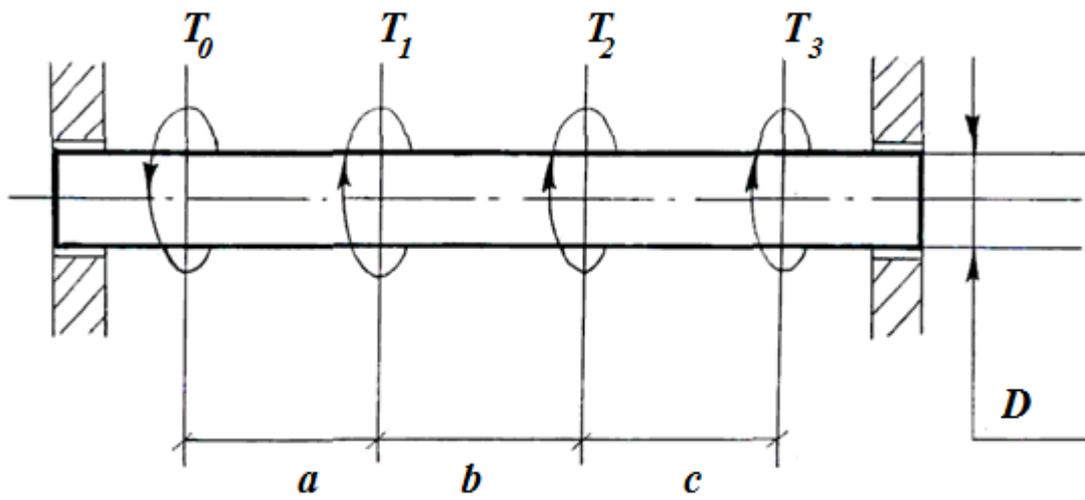
**18**

$G=0,4E$



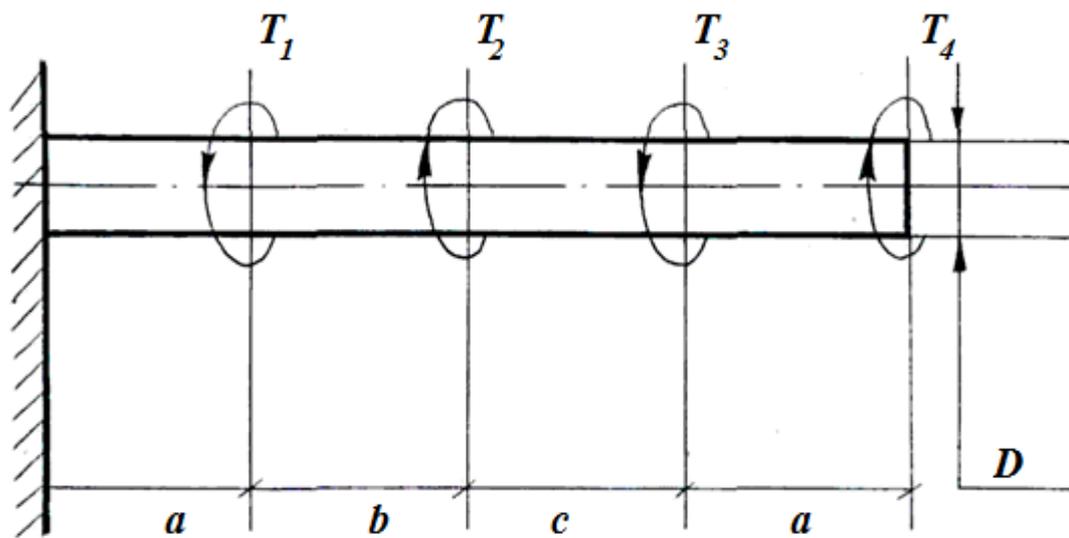
19

$$G=0,4E$$



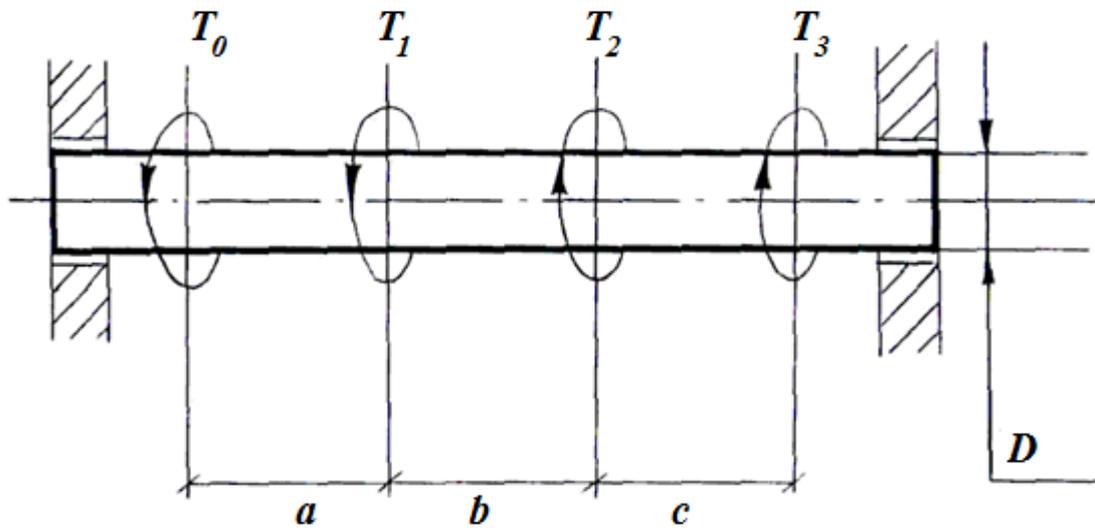
20

$$G=0,4E$$

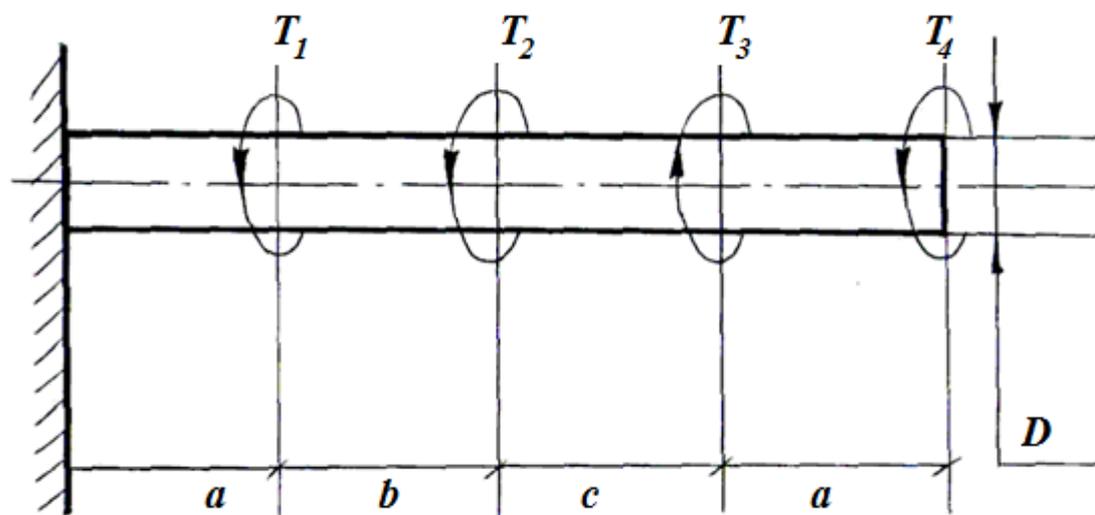


21

$G=0,4E$

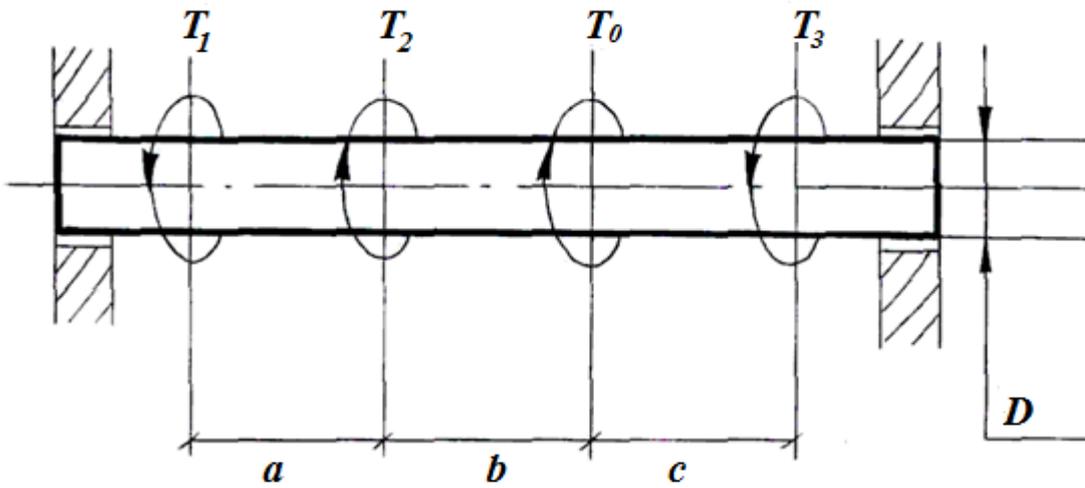
**22**

$G=0,4E$



23

$G=0,4E$

**24**

$G=0,4E$

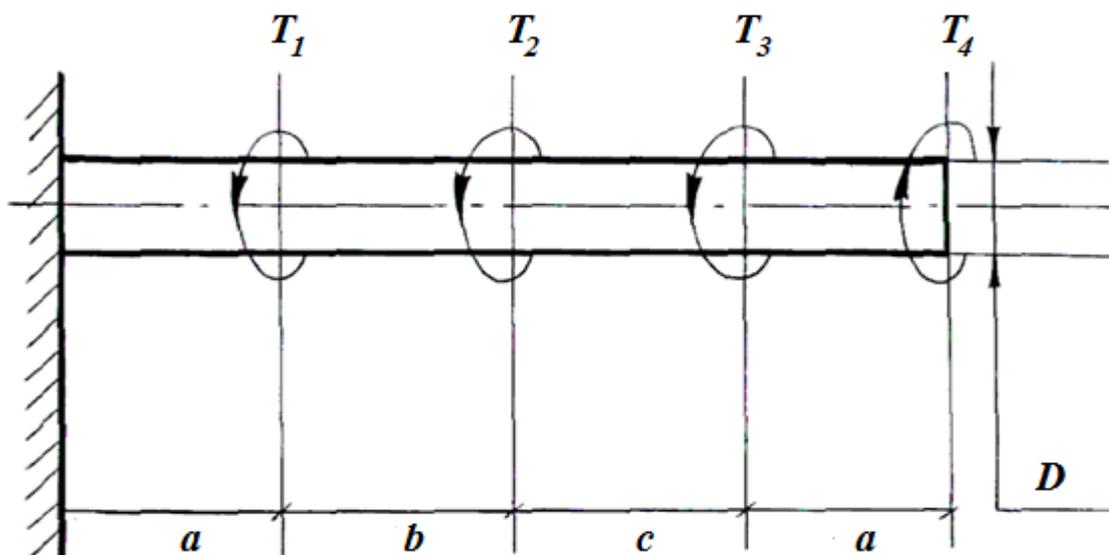


Таблица 3 – Исходные данные (нечетные номера)

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	N_1 кВт	N_2 кВт	N_3 кВт	$[\theta]$, град м	$[\tau]$ МПа	<i>n</i> обр мин	Се- че- ние $\varphi=0$
1	1	1,0	0,8	1,1	28	48	54	0,20	45	200	T_0
	2	0,5	0,8	0,9	20	10	30	0,10	40	300	T_1
	3	0,9	0,7	0,8	50	10	40	0,40	60	400	T_2
	4	0,7	0,9	0,9	30	50	60	0,50	35	350	T_0
	5	0,8	0,6	1,0	15	10	20	0,10	50	250	T_3
3	1	0,9	0,7	0,8	44	55	20	0,15	70	250	T_1
	2	1,0	1,0	0,8	50	30	45	0,30	50	300	T_3
	3	0,8	0,6	0,8	20	50	35	0,40	80	400	T_2
	4	0,7	0,7	0,7	10	15	25	0,20	40	330	T_0
	5	0,6	0,8	0,6	12	20	30	0,30	50	280	T_1
5	1	0,6	0,5	0,3	25	36	42	0,10	60	300	T_3
	2	1,2	0,8	0,6	40	60	60	0,20	80	350	T_1
	3	0,8	0,8	0,8	50	40	20	0,40	50	400	T_2
	4	0,6	0,5	0,4	30	50	10	0,30	60	200	T_3
	5	0,9	1,0	0,7	10	50	20	0,25	70	230	T
7	1	0,2	0,9	0,4	26	46	57	0,25	55	350	T_0
	2	0,5	0,7	0,6	30	20	42	0,50	60	400	T_1
	3	0,6	0,5	0,4	50	50	30	0,30	35	300	T_3
	4	0,7	0,6	0,5	50	30	25	0,10	50	250	T_2
	5	0,4	0,5	0,6	20	10	25	0,40	40	500	T_1
9	1	1,2	0,4	1,1	70	45	50	0,35	60	400	T_2
	2	0,6	1,0	0,4	20	30	25	0,40	30	450	T_1
	3	0,4	0,4	0,5	50	35	42	0,50	50	500	T_3
	4	1,1	0,5	0,5	60	70	55	0,25	80	350	T_0
	5	0,4	0,4	1,21	50	40	38	0,20	50	500	T_1
11	1	0,5	0,2	0,4	27	40	51	0,40	80	450	T_1
	2	0,4	0,5	0,4	80	180	80	0,10	200	500	T_2
	3	0,7	0,6	0,5	90	150	90	0,25	200	400	T_3
	4	0,5	0,8	0,6	120	80	100	0,15	250	280	T_0
	5	0,8	0,4	0,5	150	100	80	0,35	280	550	T_2

Окончание таблицы 3

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	N_1 кВт	N_2 кВт	N_3 кВт	$[\theta]$, град м	$[\tau]$ МПа	n обр мин	Се- че- ние $\varphi=0$
13	1	1,4	1,1	1,3	22	35	45	0,30	95	500	T_0
	2	1,2	0,8	0,9	20	10	30	0,20	80	400	T_1
	3	0,9	1,1	0,8	50	10	40	0,35	60	450	T_2
	4	0,7	0,9	0,9	30	40	60	0,40	75	550	T_0
	5	0,8	1,2	1,0	15	10	20	0,10	90	550	T_3
15	1	0,9	0,6	0,3	30	45	58	0,45	75	550	T_2
	2	1,0	1,1	0,8	50	30	45	0,30	70	500	T_3
	3	0,7	0,6	0,8	20	50	35	0,40	80	400	T_1
	4	0,7	0,9	0,5	10	15	25	0,35	65	530	T_0
	5	1,0	0,8	0,6	12	20	30	0,30	50	480	T_1
17	1	0,6	0,5	0,3	25	36	42	0,10	60	300	T_3
	2	1,2	0,8	0,6	40	60	60	0,20	80	350	T_1
	3	0,8	0,8	0,8	50	40	20	0,40	50	400	T_2
	4	0,6	0,5	0,4	30	50	10	0,30	60	200	T_3
	5	0,9	1,0	0,7	10	50	20	0,25	70	230	T
19	1	0,2	0,9	0,4	26	46	57	0,25	55	350	T_0
	2	0,5	0,7	0,6	30	20	42	0,50	60	400	T_1
	3	0,6	0,5	0,4	50	50	30	0,30	35	300	T_3
	4	0,7	0,6	0,5	50	30	25	0,10	50	250	T_2
	5	0,4	0,5	0,6	20	10	25	0,40	40	500	T_1
21	1	1,2	0,4	1,1	70	45	50	0,35	60	400	T_2
	2	0,6	1,0	0,4	20	30	25	0,40	30	450	T_1
	3	0,4	0,7	0,5	50	35	42	0,50	50	500	T_3
	4	1,1	0,5	0,5	60	70	55	0,25	80	350	T_0
	5	0,6	0,4	1,2	50	40	38	0,20	50	500	T_1
23	1	0,5	0,2	0,4	27	40	51	0,40	80	450	T_1
	2	0,8	0,5	0,6	80	180	80	0,10	200	500	T_2
	3	0,7	0,6	0,5	90	150	90	0,25	200	400	T_3
	4	0,5	0,8	0,6	120	80	100	0,15	250	280	T_0
	5	0,8	0,4	0,5	150	100	80	0,35	280	550	T_2

Таблица 4 – Исходные данные (четные номера)

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	$T_1=T_2=T_3=T_4$ Н·м	$[\theta]$, град м	$[\tau]$ МПа
2	1	1,1	1,1	1,1	1100	0,20	55
	2	1,2	0,8	0,9	1200	0,10	50
	3	0,9	1,1	0,8	1300	0,15	60
	4	0,9	0,9	0,9	1000	0,20	55
	5	0,8	1,2	1,0	1400	0,10	50
4	1	1,2	1,2	1,2	1200	0,45	45
	2	1,0	1,1	0,8	1000	0,30	40
	3	0,8	0,8	0,8	1300	0,40	50
	4	0,7	0,9	0,5	1400	0,35	55
	5	1,0	0,8	0,6	1500	0,30	50
6	1	1,3	1,3	1,3	1300	0,10	50
	2	1,2	0,8	0,6	1100	0,20	60
	3	0,8	0,8	0,8	1200	0,40	50
	4	0,6	0,8	0,7	1400	0,30	50
	5	0,9	1,0	0,7	1000	0,25	50
8	1	1,2	0,9	1,4	1800	0,45	70
	2	1,5	1,7	1,6	1700	0,50	60
	3	1,6	1,5	1,4	1600	0,30	55
	4	1,7	1,6	1,5	1500	0,25	50
	5	1,4	1,5	1,6	1700	0,40	60
10	1	1,5	1,5	1,5	1500	0,35	55
	2	1,6	1,5	1,4	1400	0,40	60
	3	1,4	1,7	1,5	1600	0,20	50
	4	1,4	1,5	1,5	1300	0,25	80
	5	1,6	1,4	1,2	1600	0,20	50
12	1	1,6	1,6	1,6	1600	0,40	60
	2	1,8	1,5	1,6	1000	0,10	70
	3	1,7	1,6	1,5	1800	0,25	50
	4	1,5	1,8	1,6	2000	0,15	55
	5	1,8	1,4	1,5	1500	0,35	80

№ Сх.	№ Вар.	<i>a</i> м	<i>b</i> м	<i>c</i> м	$T_1=T_2=T_3=T_4$ Н·м	$[\theta]$, град м	$[\tau]$ МПа
14	1	1,7	1,7	1,7	1700	0,30	65
	2	1,2	1,2	1,2	1200	0,20	50
	3	1,1	1,1	1,1	1300	0,25	60
	4	0,9	0,9	0,9	1000	0,20	55
	5	1,3	1,3	1,3	1400	0,10	50
16	1	1,8	1,8	1,8	1800	0,45	70
	2	1,4	1,4	1,4	1700	0,30	80
	3	0,8	0,8	0,8	1900	0,40	60
	4	1,0	1,0	1,0	1600	0,35	65
	5	1,0	1,0	1,0	1500	0,30	75
18	1	1,9	1,9	1,9	1900	0,60	75
	2	1,6	1,6	1,6	1100	0,20	40
	3	1,8	1,8	1,8	1200	0,25	50
	4	1,7	1,7	1,7	1400	0,30	45
	5	1,5	1,5	1,5	1000	0,1	40
20	1	1,2	0,9	1,4	2000	0,55	80
	2	1,5	1,7	1,6	1700	0,50	70
	3	1,6	1,5	1,4	1600	0,30	55
	4	1,7	1,6	1,5	1500	0,25	50
	5	1,4	1,5	1,6	1700	0,45	60
22	1	1,1	1,1	1,1	1100	0,20	35
	2	1,6	1,5	1,4	1400	0,40	60
	3	1,4	1,7	1,5	1600	0,20	70
	4	1,4	1,5	1,5	1300	0,25	50
	5	1,6	1,4	1,4	1600	0,30	60
24	1	1,6	1,6	1,6	1200	0,15	40
	2	1,5	1,5	1,5	1000	0,10	35
	3	1,7	1,7	1,7	1800	0,25	70
	4	1,8	1,8	1,8	2000	0,15	75
	5	1,4	1,4	1,4	1500	0,35	60

3.4. Прямой простой изгиб балки

Условия задания

Для заданной балки требуется:

1) Вычислить и построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов $m_{изг}$.

2) Определить размеры наиболее опасного сечения балки, если материал балки известен и форма поперечного сечения балки задана на расчетной схеме.

3) Из заданных поперечных сечений выбрать наиболее рациональное.

Пример.

Для балки, изображенной на рис. 3.10, изготовленной из стали марки Ст.3 и прямоугольного сечения, построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов $m_{изг}$ и определить размеры опасного сечения.

Исходные данные:

$P = 30$ кН; $M = 50$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $a = b = c = 1$ м; $[\sigma] = 160$ МПа; $h/b = 2$.

Решение:

1. Определение реакции R_{Ay} и момента M_{RA} в заделке (смотри расчетную схему).

Составим уравнения равновесия балки:

а) сумма моментов всех сил относительно т. А:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\overline{F_i}) = M_{RA} - P \cdot a - q \cdot c \cdot (a + b + c / 2) - M = 0;$$

$$M_{RA} = P \cdot a + q \cdot c \cdot (a + b + c / 2) + M = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \cdot (2.5) + 50 = 130 \text{ (кН} \cdot \text{м)};$$

б) сумма моментов всех сил относительно т. В:

$$\sum_{i=1}^n M_B(\overline{F_i}) = -M + q \cdot c \cdot (a + c / 2) + P \cdot (a + b + c) +$$

$$+ M_{RA} - R_{Ay} \cdot (2a + b + c) = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{-M + q \cdot c \cdot (a + c / 2) + P \cdot (a + b + c) + M_{RA}}{2a + b + c}$$

$$R_{Ay} = (-50 + 20 \cdot 1 \cdot 1,5 + 30 \cdot 3 + 130) / 4 = 50 \text{ кН}$$

В качестве проверки используем уравнение:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,y} = R_{Ay} - P - q \cdot c = 50 - 30 - 20 \cdot 1 = 0;$$

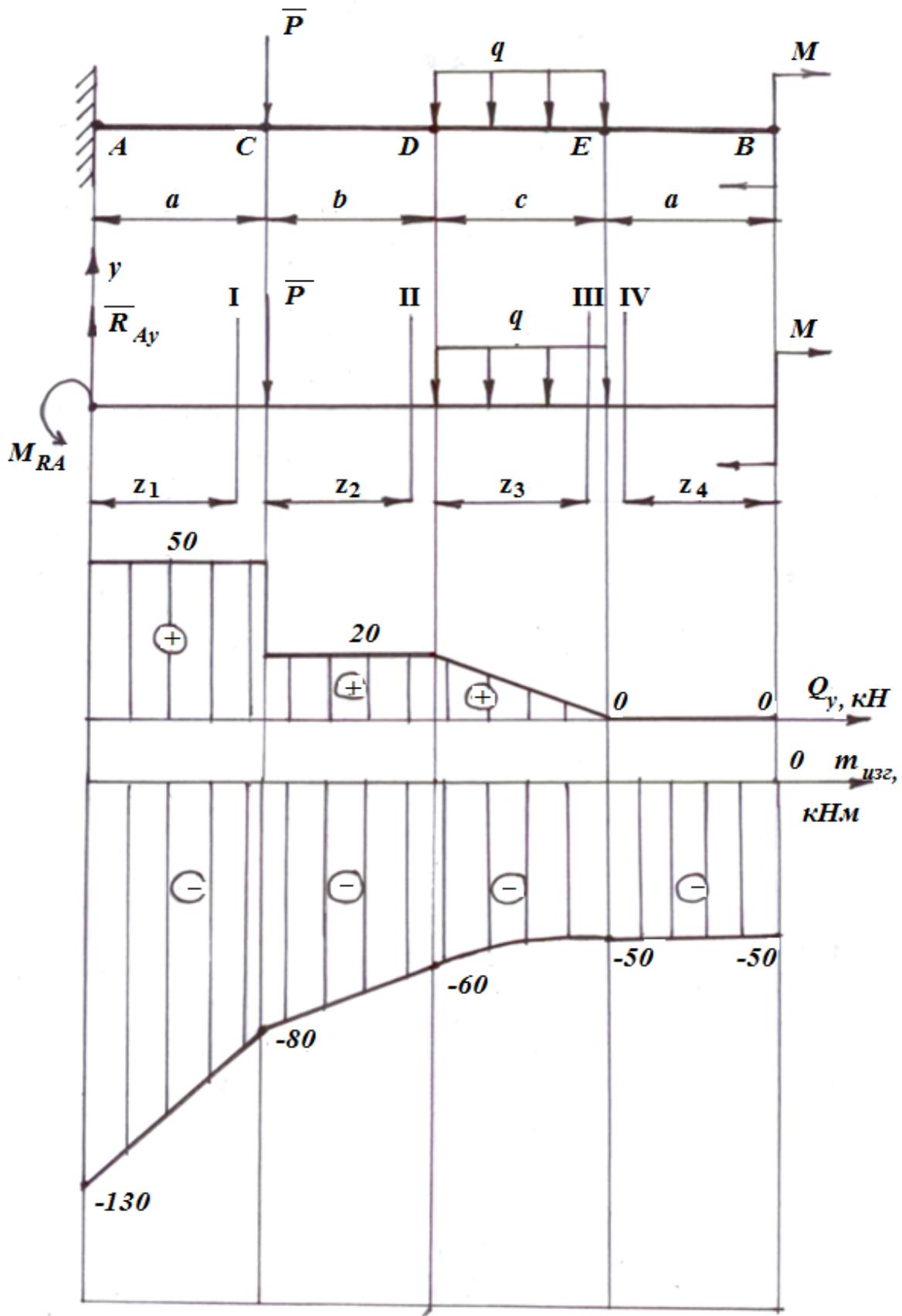
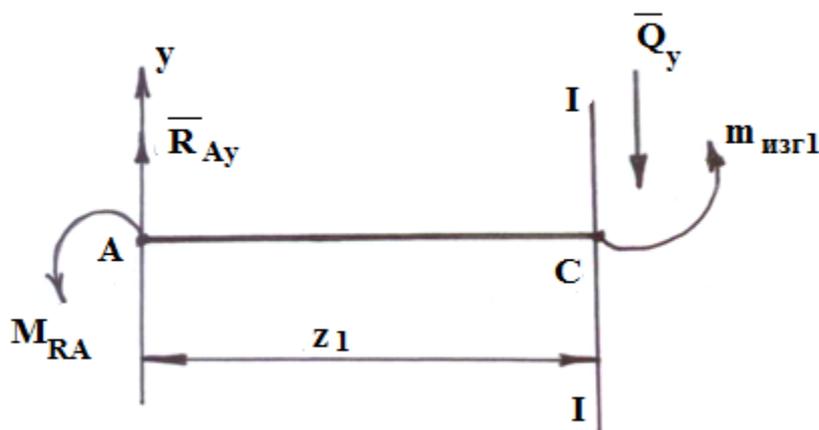


Рис. 3.10. Расчетная схема балки с эпюрами

2. Вычисление Q_i и $m_{изг,i}$ и построение их эшюр

2.1. На участке АС. Длина участка Z_1 изменяется в пределах $0 \leq Z_1 \leq a$.



Поперечная сила $\sum F_y = R_{Ay} - Q_{y1} = 0$, $Q_{y1} = R_{Ay} = 50$ кН.

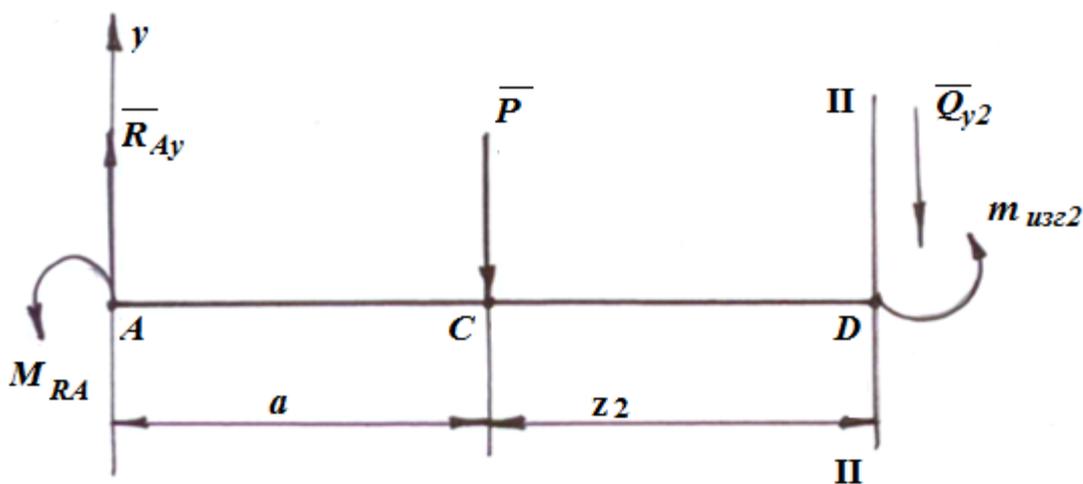
Поперечная сила не изменяется по линейному закону, то есть ее значение постоянно на всем участке АС.

Записываем уравнение для определения изгибающего момента на участке АС: $\sum M_c = M_{RA} - R_{Ay} \cdot Z_1 + m_{изг.1} = 0$, $m_{изг.1} = -M_{RA} + R_{Ay} \cdot Z_1$.

Изгибающий момент зависит от длины участка Z_1 . Находим значение $m_{изг.1}$ в точке А при $Z_1 = 0$: $m_{изг.1}(0) = -M_{RA} + R_{Ay} \cdot 0 = -M_{RA} = -130$ кН·м;

В точке С при $Z_1 = a = 1$ м: $m_{изг.1}(a) = -M_{RA} + R_{Ay} \cdot a = -130 + 50 \cdot 1 = -80$ кН·м.

2.2. Определяем Q_{y2} и $m_{изг.2}$ на участке СД = Z_2 , $0 \leq Z_2 \leq b$.



$\sum F_y = R_{Ay} - P - Q_{y2} = 0$; $Q_{y2} = R_{Ay} - P = 50 - 30 = 20$ кН – значение поперечной силы не зависит от длины участка Z_2 .

$\sum M_D = M_{RA} - R_{Ay} \cdot (a + Z_2) + P \cdot Z_2 + m_{изг.2} = 0$;

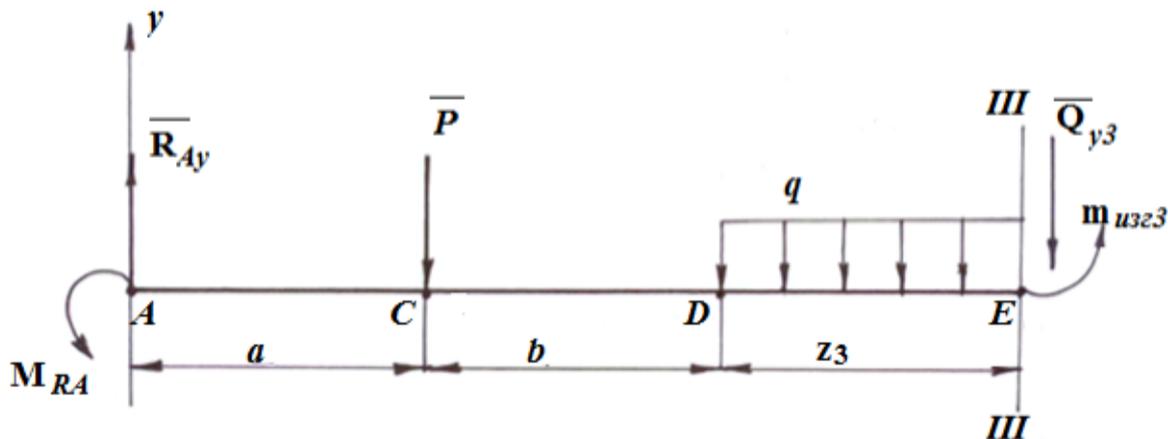
$m_{изг.2} = -M_{RA} + R_{Ay}(a + Z_2) - P \cdot Z_2$ – изгибающий момент зависит от длины участка Z_2 .

Находим значение изгибающего момента в точке Д при $Z_2 = 0$

$m_{изг.2} = -130 + 50 \cdot (1+0) - 30 \cdot 0 = -80$ кН·м.

В точке С при $Z_2 = b = 1$ м; $m_{изг.2} = -130 + 50 \cdot (1+1) - 30 \cdot 1 = -60$ кН·м.

2.3. Определяем Q_{y3} и $m_{изг.3}$ на участке ДЕ длиной $Z_3 = c$, где $0 \leq Z_3 \leq c$.



$\sum F_y = R_{Ay} - P - q \cdot Z_3 - Q_{y3} = 0$, тогда $Q_{y3} = R_{Ay} - P - q \cdot Z_3$ – поперечная сила Q_{y3} изменяется по линейному закону в зависимости от значения Z_3 .

В точке Д при $Z_3 = 0$ получим значение $Q_{y3}(0) = R_{Ay} - P - q \cdot 0 = 50 - 30 = 20$ кН.

В точке Е при $Z_3 = c = 1$ м, то $Q_{y3} = R_{Ay} - P - q \cdot c = 50 - 30 - 20 \cdot 1 = 0$.

$\sum M_E = M_{RA} - R_{Ay}(a + b + Z_3) + P(b + Z_3) + q \cdot Z_3(Z_3/2) + m_{изг.3} = 0$

$M_{изг.3} = -M_{RA} + R_{Ay}(a + b + Z_3) - P(b + Z_3) - q \cdot Z_3(Z_3/2)$.

В точке Д при $Z_3 = 0$;

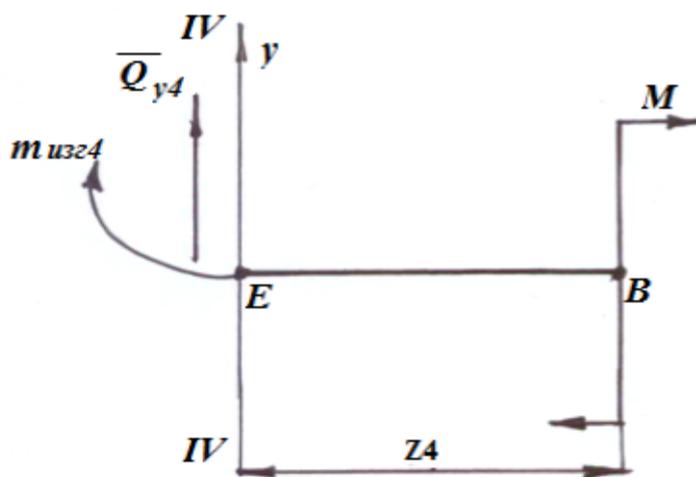
$m_{изг.3} = -M_{RA} + R_{Ay}(a + b + 0) - P(b + 0) - q \cdot 0(0/2) = -130 + 50(1+1) - 30(1+0) - 20 \cdot 0 \cdot 0,2 = -60$ кН·м.

В точке Е при $Z_3 = c = 1$ м;

$m_{изг.3} = -M_{RA} + R_{Ay}(a + b + c) - P(b + c) - q \cdot c(c/2) = -130 + 50(1 + 1 + 1) - 30(1 + 1) - 20 \cdot 1 \cdot 1/2 = -50$ кН·м

На участке ДЕ изгибающий момент изменяется по закону параболы, поэтому проверяем эту зависимость на экстремум. При поперечной силе равной нулю получаем экстремальное значение изгибающего момента. В точке Е - $Q_{y3} = 0$, то есть $Z_3 = 1$ м, а экстремальное значение $m_{изг.3} = -50$ кН·м.

2.4. Определяем на участке ВЕ поперечную силу Q_{y4} и изгибающий момент $m_{изг.4}$.



Длина участка ВЕ изменяется в пределах $0 \leq Z_4 \leq a$.

$$\sum F_y = -Q_{y4} = 0; Q_{y4} = 0.$$

$\sum M_D = -M - m_{изг.4} = 0$, $m_{изг.4} = -M$ – изгибающий момент не зависит от длины участка Z_4 , $m_{изг.4} = \text{const} = -50 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

4. Строим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента $m_{изг.}$.

По эпюрам определяем максимальное значение изгибающего момента $|m_{изг.}^{\text{макс}}| = 130 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

5. Определяем размеры поперечного прямоугольного сечения:

$$W_X \geq \frac{m_u^{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{130 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,8125 \cdot 10^{-3} (\text{м}^3) =$$

$$= 812,5 (\text{см}^3);$$

$$\text{Для прямоугольного сечения: } W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,5 \cdot h^3}{6};$$

$$\text{при } b = 0,5h; \frac{0,5h^3}{6} \geq 812,5 (\text{см}^3);$$

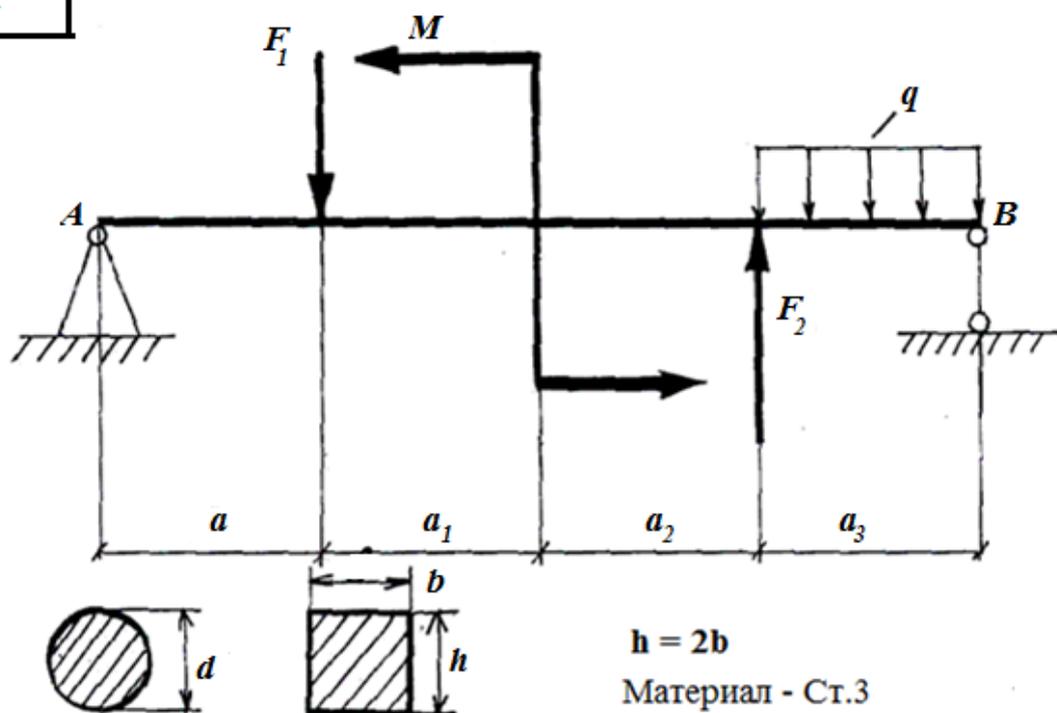
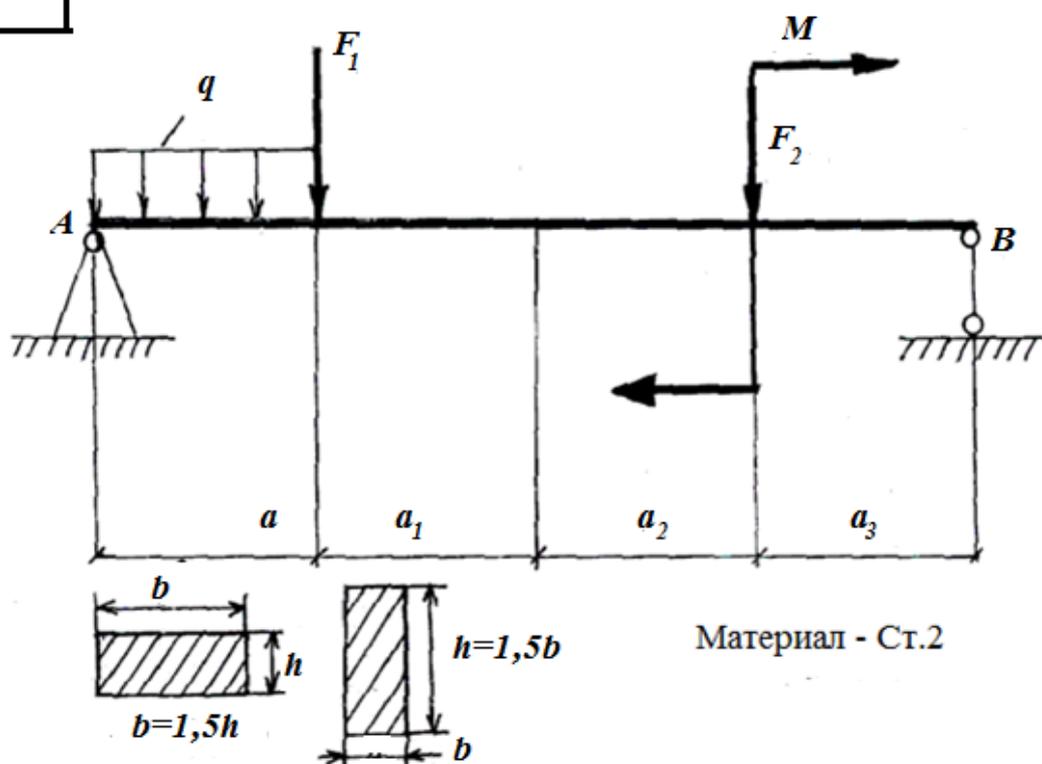
$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 812,5}{0,5}} = 21,36 (\text{см});$$

Принимаем: $h = 22 \text{ см}$; тогда $b = 11 \text{ см}$; площадь: $S = b \cdot h = 242 (\text{см}^2)$.

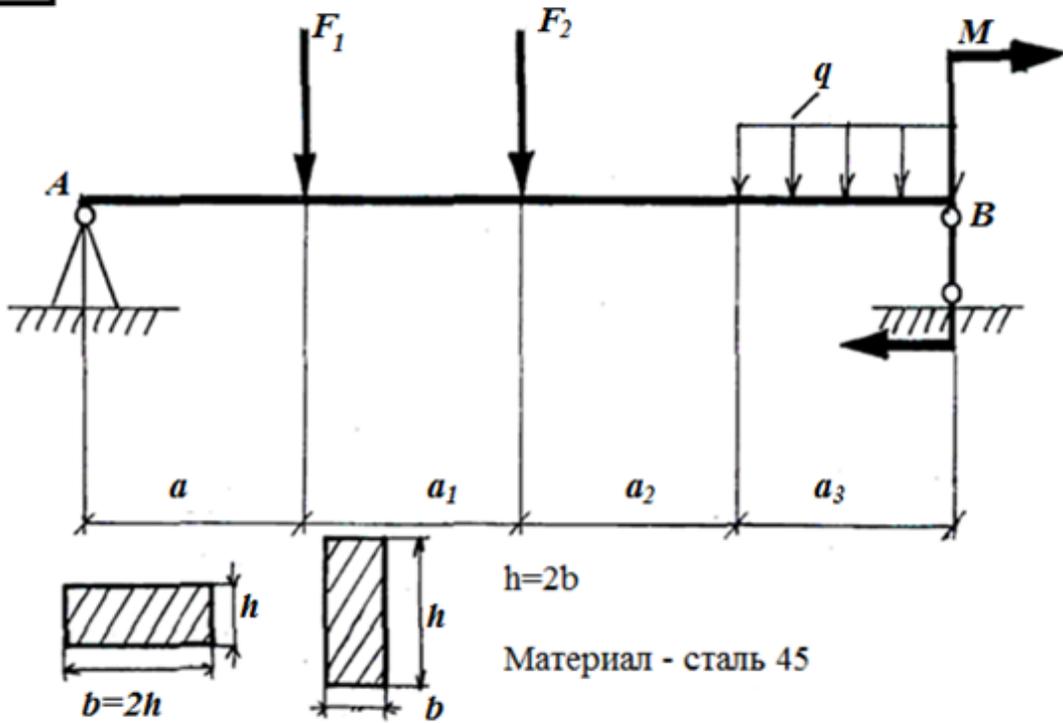
На страницах 133 - 144 даны схемы заданий, а на стр. 145 - 148 варианты исходных данных для выполнения задания.

Таблица допускаемых напряжений

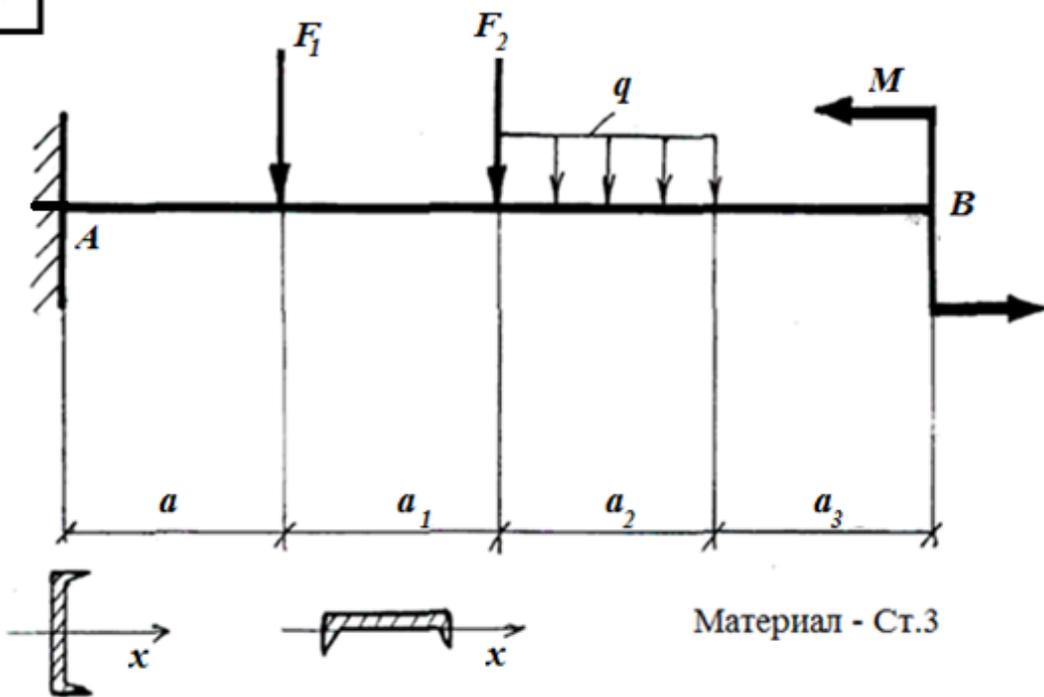
Конструкционный материал	Допускаемое напряжение на растяжение - сжатие $[\sigma]$, МПа
Ст. 0 и Ст. 2	120-140
Ст. 3	160
Сталь 45	320
Сталь 40Х	400
Сталь 40ХН	800

1**2**

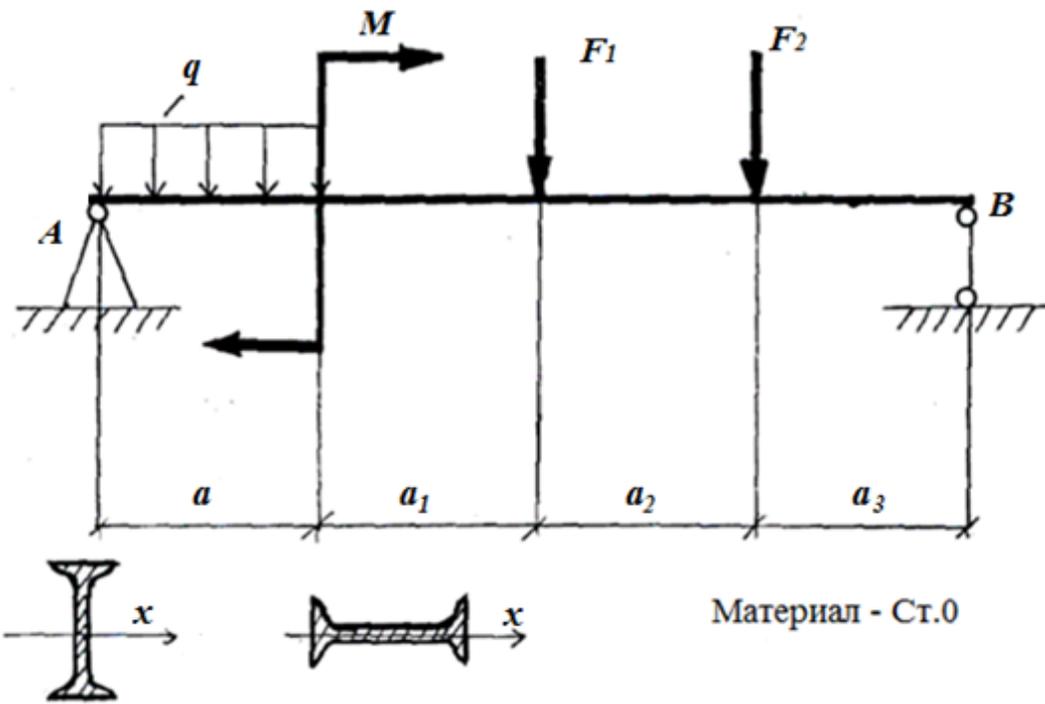
3



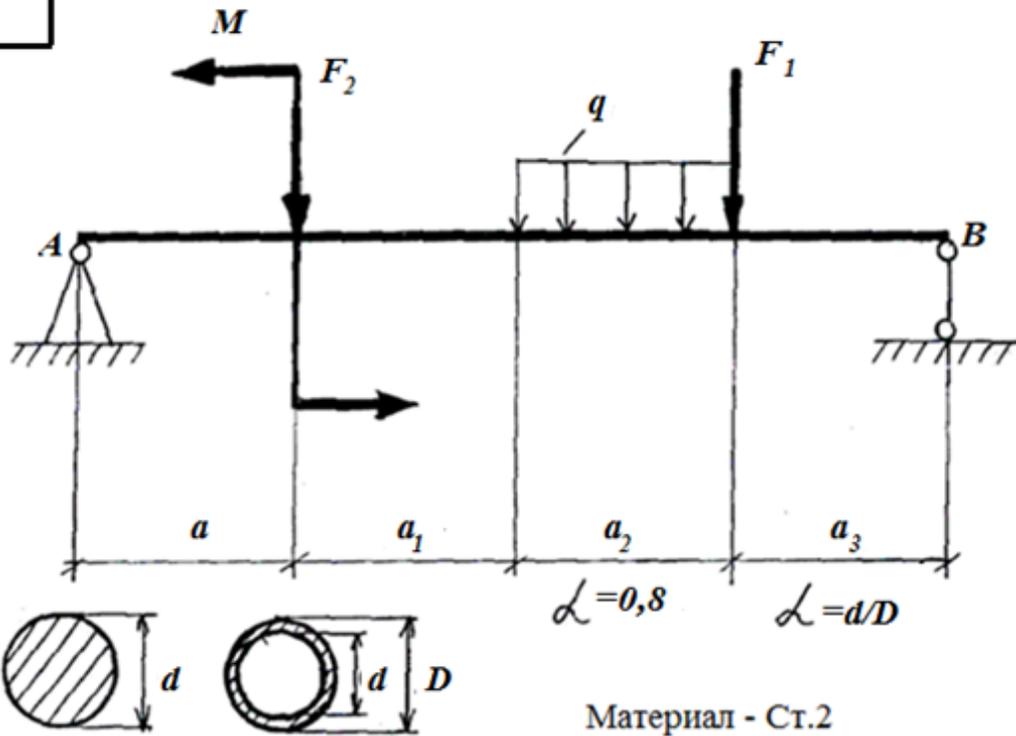
4



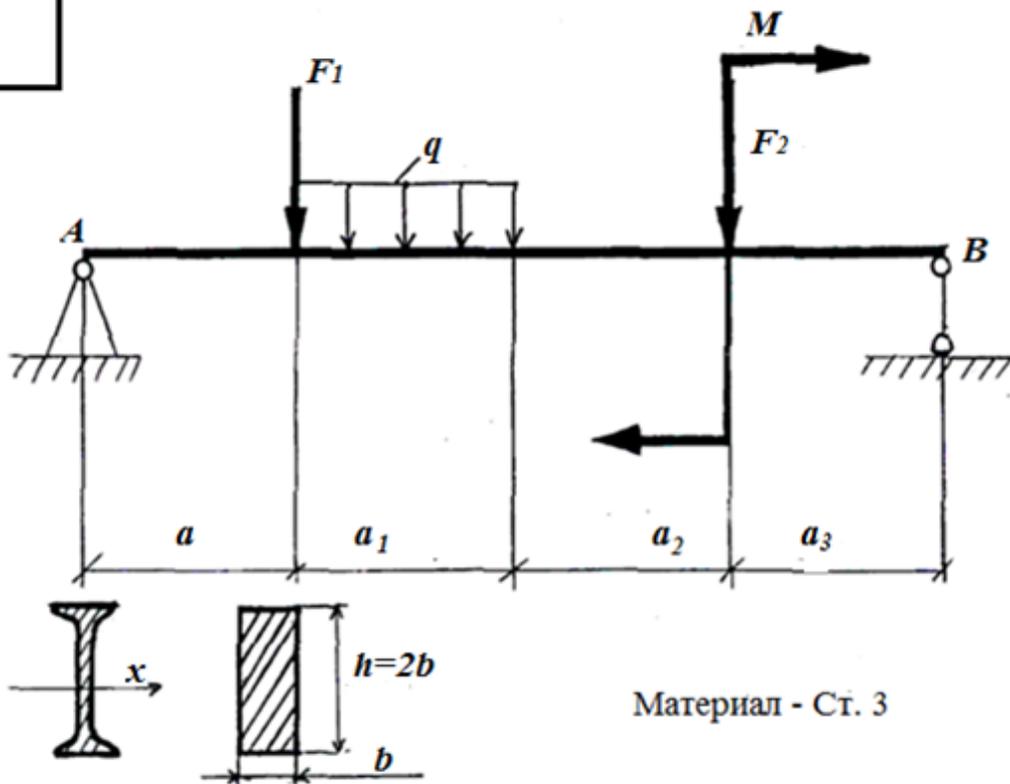
5



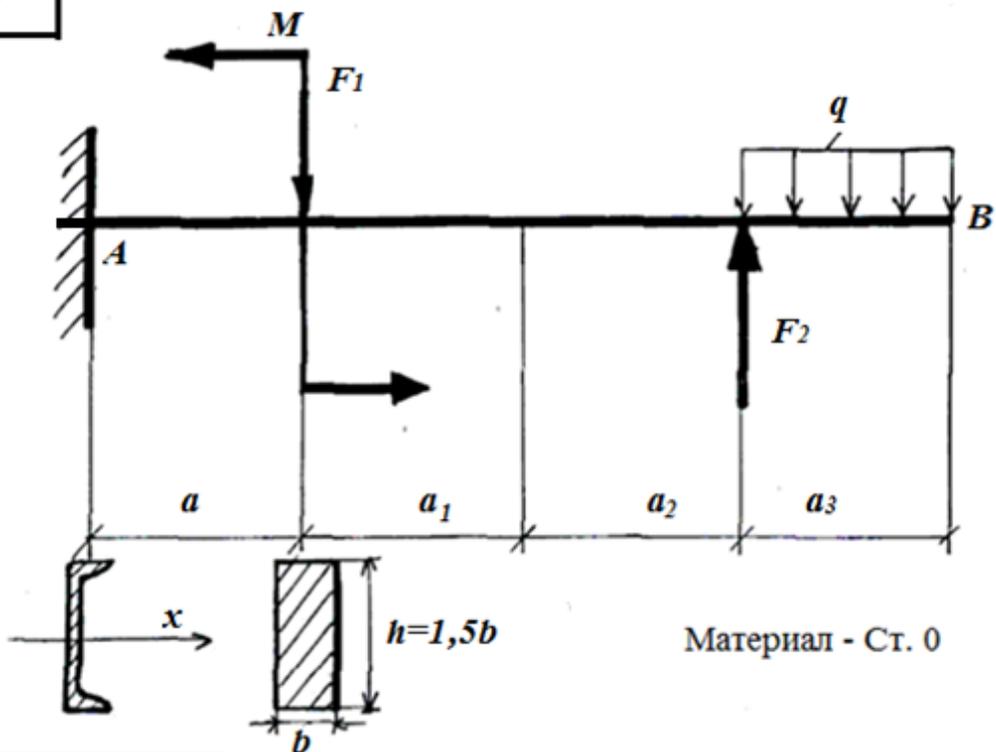
6



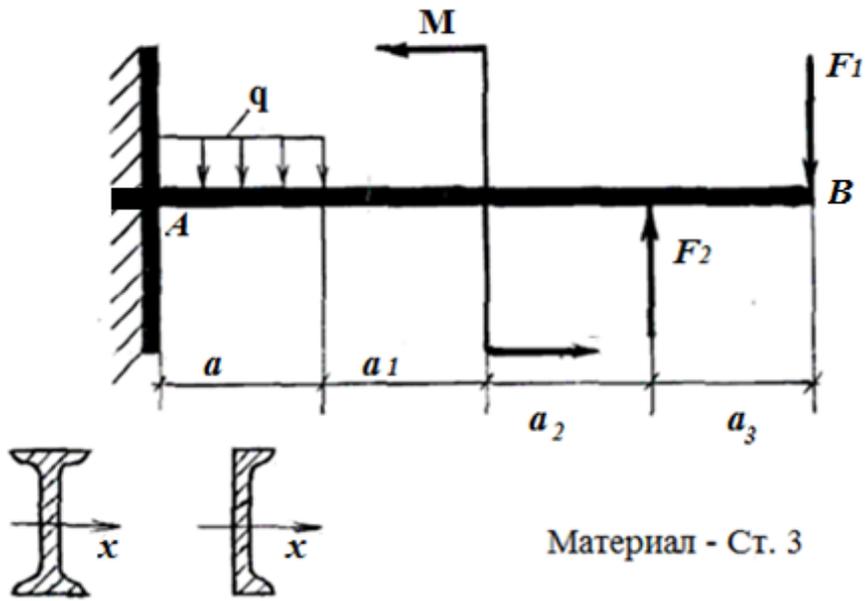
7



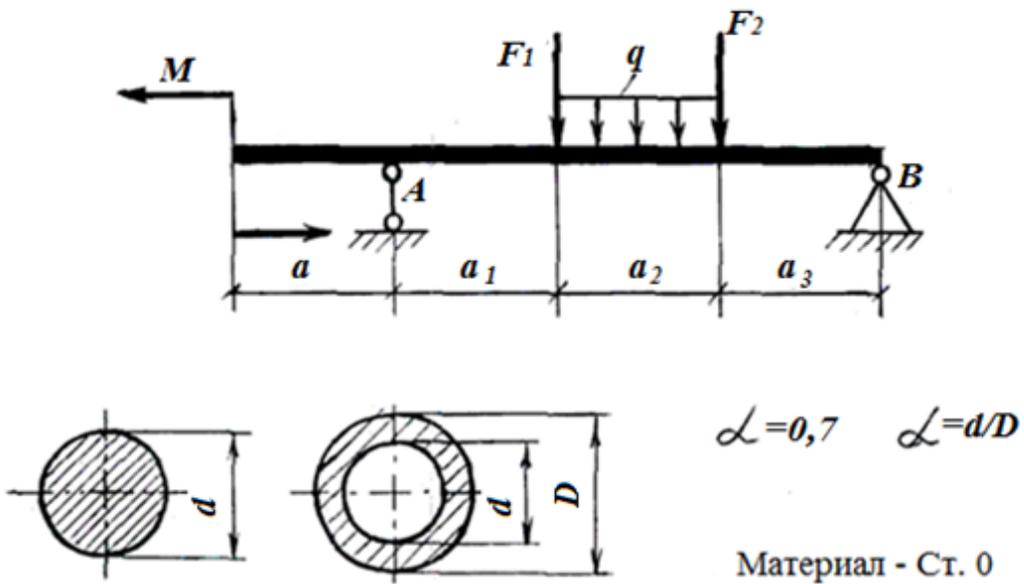
8



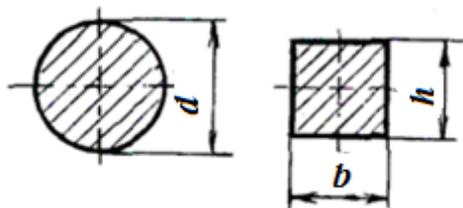
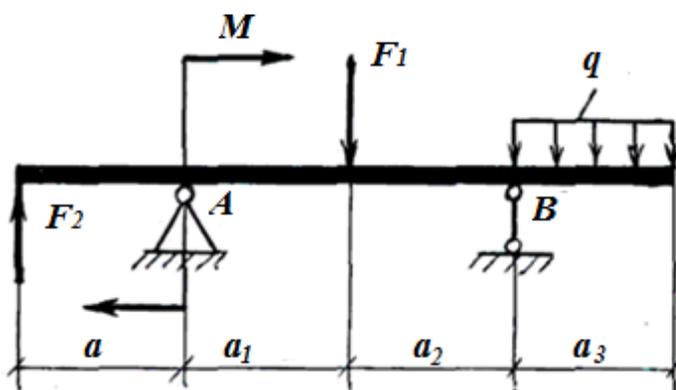
9



10



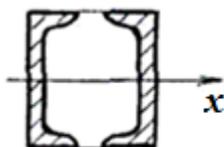
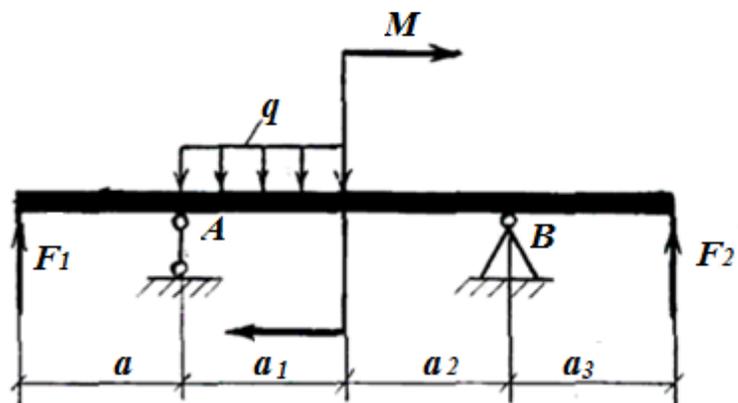
11



$$h=b$$

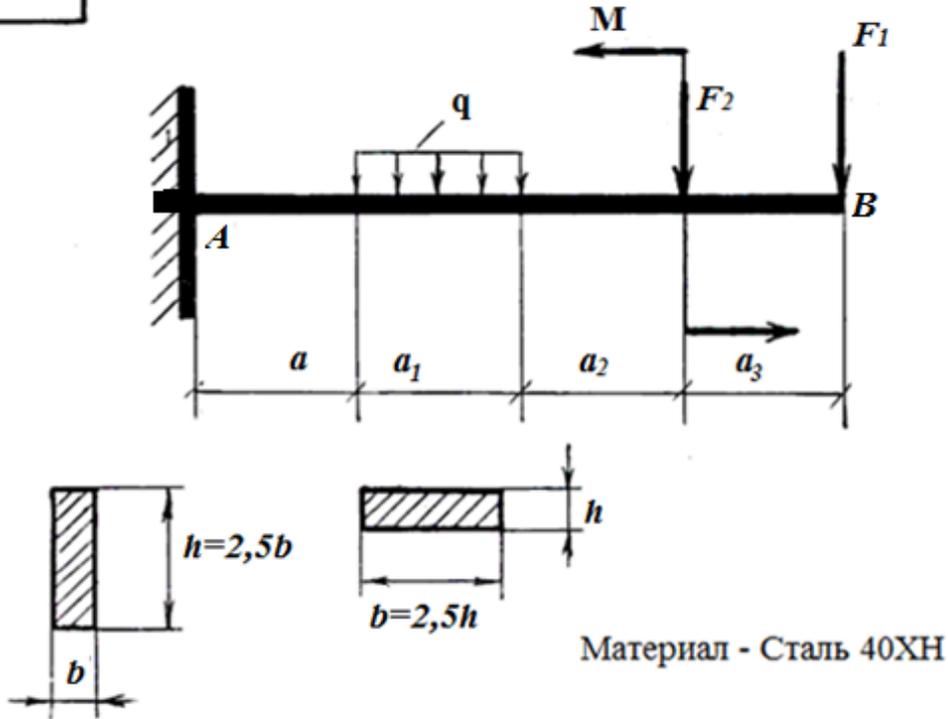
Материал - Сталь 40X

12

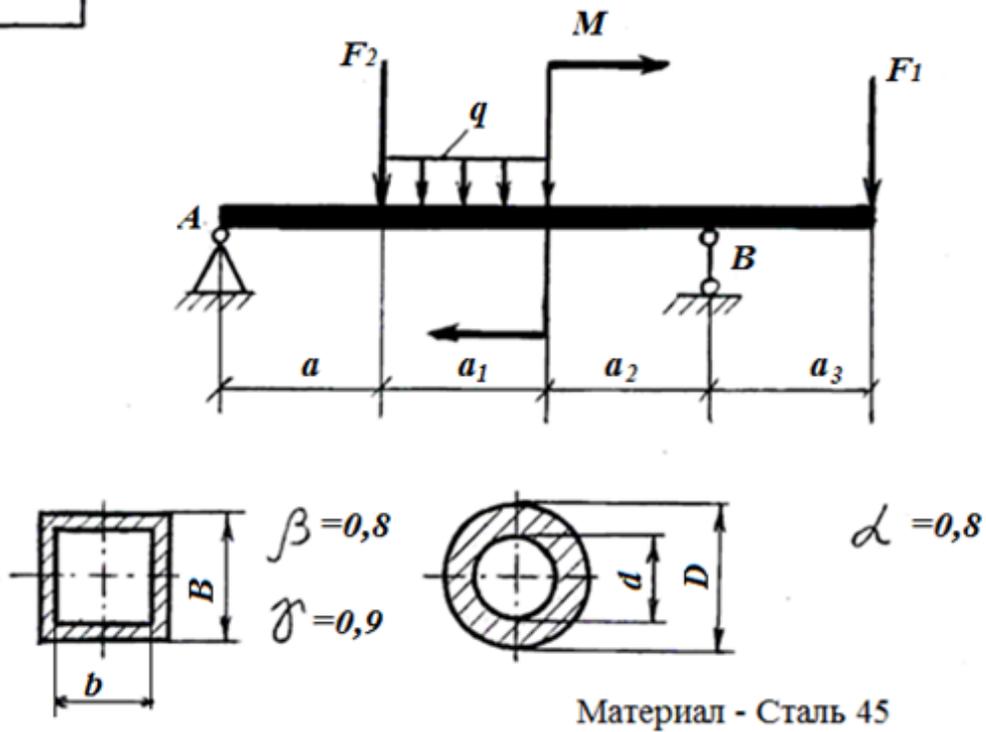


Материал - Ст. 2

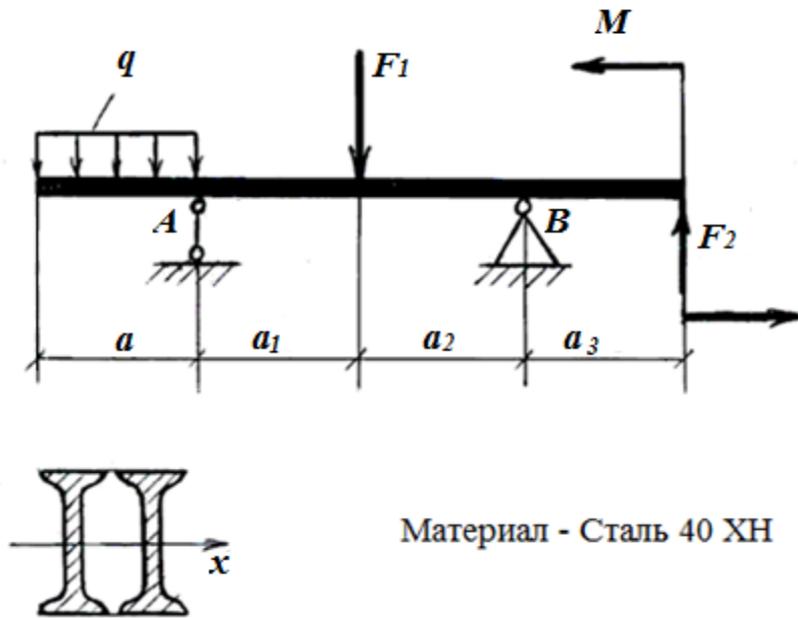
13



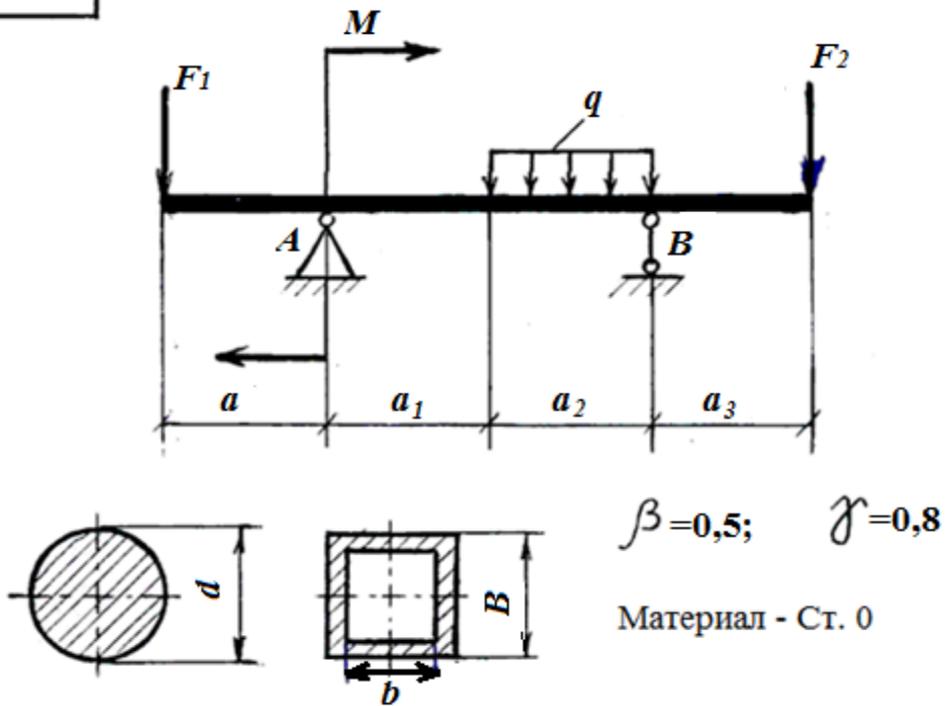
14



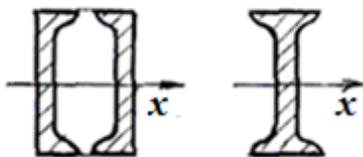
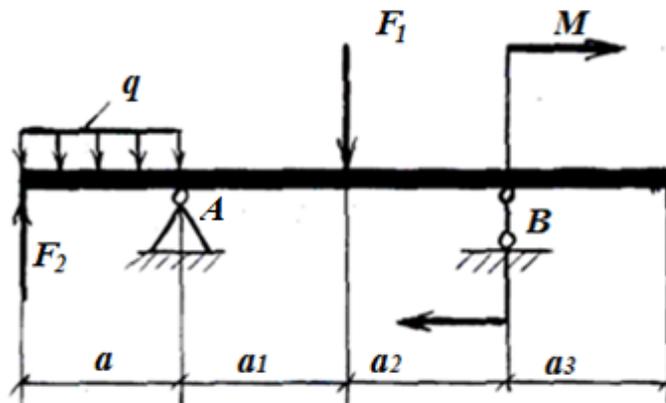
15



16

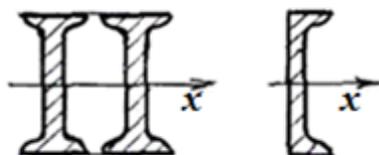
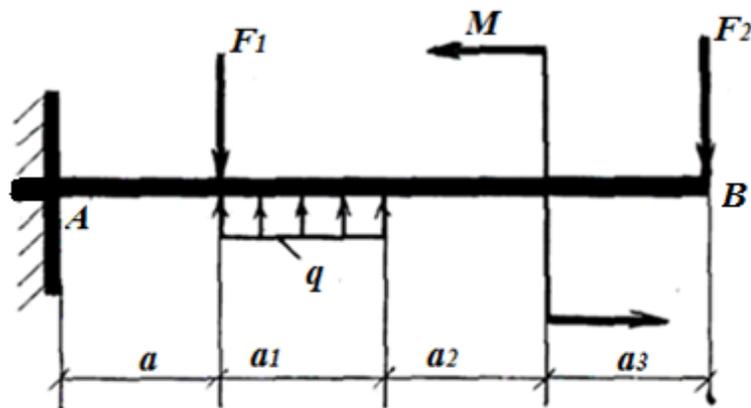


17



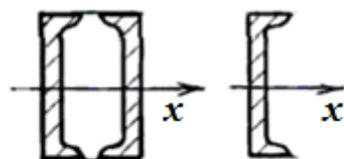
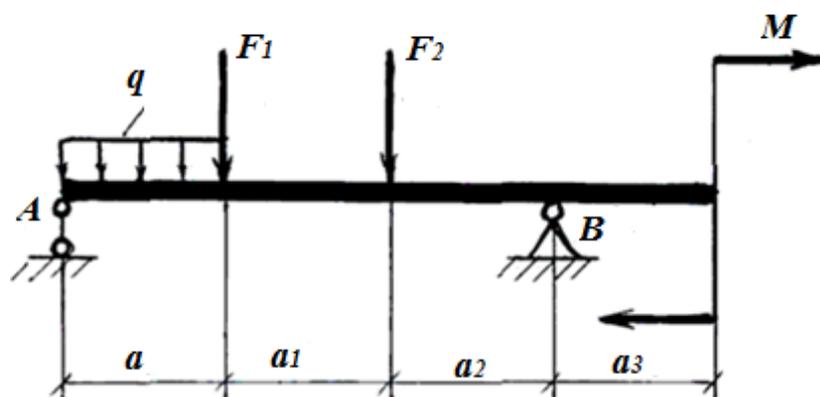
Материал - Сталь 45

18



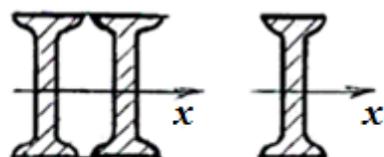
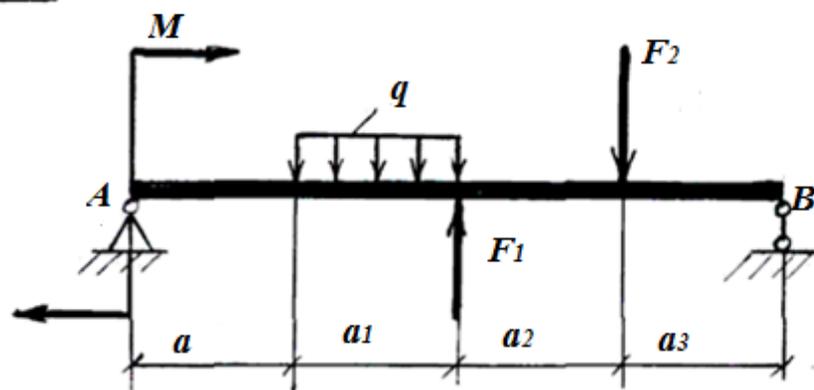
Материал - Сталь 40 X

19



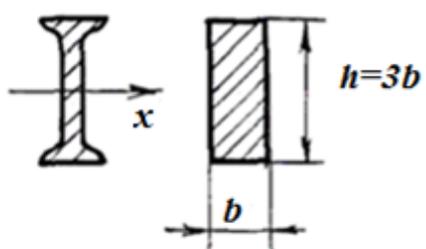
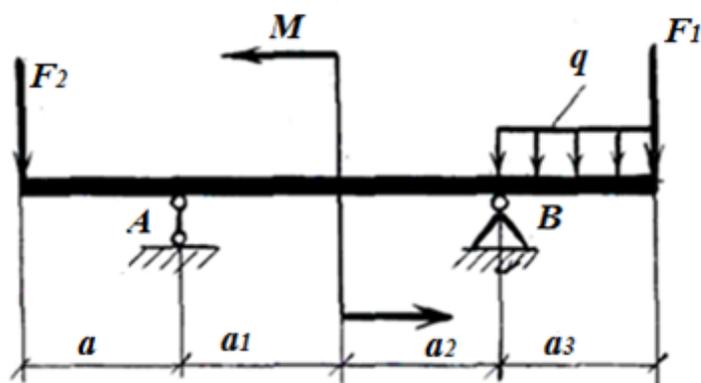
Материал - Сталь 40 ХН

20



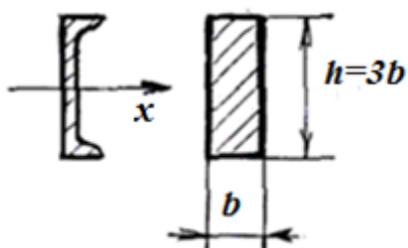
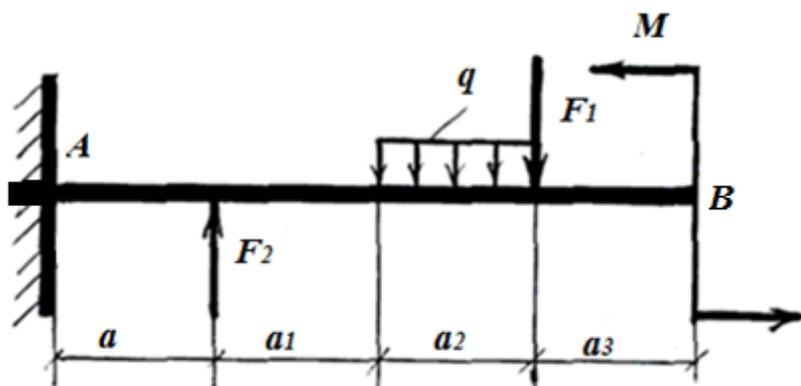
Материал - Ст. 2

21



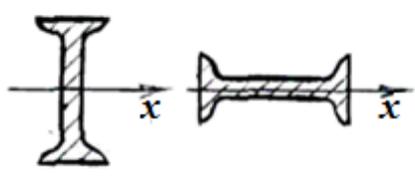
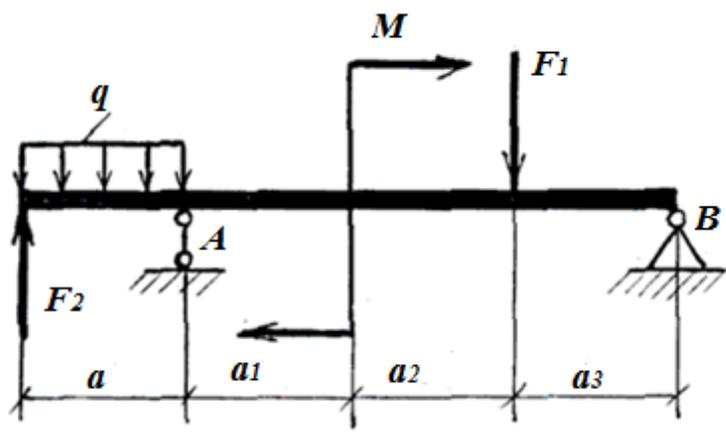
Материал - Сталь 45

22



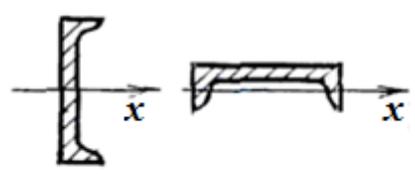
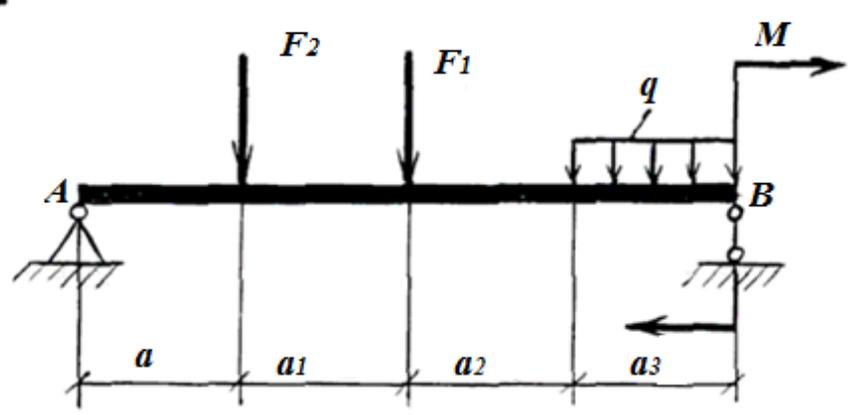
Материал - Ст. 3

23



Материал - Ст. 3

24



Материал - Ст. 0

Таблица 5 – Исходные данные

№	№	a₁	a₂	a₃	a	F₁	F₂	M	q
Сх.	Вар.	м	м	м	м	кН	кН	кН·м	кН/м
1	1	0,9	1,0	1,2	1,5	10	12	25	20
	2	0,8	2,0	1,4	2,0	12	14	12	18
	3	0,7	2,1	1,6	0,8	50	20	15	16
	4	0,5	1,2	1,8	1,6	15	40	35	20
	5	0,6	1,5	2,0	1,7	50	30	32	25
2	1	0,4	3,0	1,5	1,4	20	40	35	30
	2	0,9	2,8	1,3	2,1	15	20	70	40
	3	0,8	2,4	2,2	1,8	12	10	50	40
	4	0,7	1,3	2,5	1,6	10	15	60	30
	5	0,5	1,5	3,0	1,4	15	20	20	20
3	1	0,6	2,0	1,8	2,4	10	12	42	35
	2	1,0	2,6	1,6	0,8	20	30	36	28
	3	2,0	0,8	2,0	1,2	80	40	10	8
	4	2,1	0,9	2,2	0,8	30	40	20	18
	5	0,5	1,5	1,5	1,5	40	30	15	20
4	1	3,2	1,6	1,2	2,0	12	8	14	16
	2	4,0	1,8	0,5	1,2	10	10	15	14
	3	4,2	2,0	0,8	1,0	30	40	10	20
	4	2,2	2,2	0,6	2,0	10	12	20	20
	5	3,2	1,8	2,5	1,5	8	12	25	15
5	1	2,4	2,6	0,4	1,6	10	8	14	24
	2	3,6	1,4	1,2	1,8	12	6	15	25
	3	3,8	1,2	1,6	1,4	8	16	17	24
	4	3,5	1,5	1,0	2,0	20	12	18	26
	5	4,0	1,0	0,8	2,2	22	30	10	20
6	1	1,0	1,6	0,9	2,4	10	12	20	20
	2	2,0	1,8	1,2	1,0	40	10	40	30
	3	1,5	2,0	2,5	1,0	40	20	20	15
	4	1,8	2,2	1,8	1,2	20	20	30	12
	5	2,1	2,4	2,9	0,6	20	30	10	10

Продолжение таблицы 5

№	№	a₁	a₂	a₃	a	F₁	F₂	M	q
Сх.	Вар.	м	м	м	м	кН	кН	кН·м	кН/м
7	1	1,8	0,5	4,2	1,5	20	60	20	30
	2	1,6	0,9	3,1	1,4	40	20	30	20
	3	1,5	0,8	2,7	3,0	20	30	18	40
	4	2,0	2,1	2,9	1,0	18	36	24	20
	5	2,0	1,8	2,2	1,0	25	20	20	30
8	1	0,5	3,5	1,8	1,2	10	15	40	32
	2	0,4	2,6	1,6	1,4	20	16	42	18
	3	0,3	1,7	1,4	1,6	15	30	35	25
	4	0,5	2,5	2,0	2,0	40	30	20	16
	5	1,0	1,8	2,0	2,2	30	20	25	24
9	1	0,3	2,0	2,4	1,2	15	90	28	36
	2	0,4	1,8	1,6	1,5	30	60	25	35
	3	0,5	2,2	3,0	1,4	20	80	35	28
	4	0,6	2,0	2,8	1,6	40	100	45	30
	5	0,8	0,6	1,8	1,2	20	70	30	40
10	1	0,8	1,5	3,0	1,5	110	30	40	25
	2	0,9	1,8	2,8	2,5	35	90	50	30
	3	1,0	2,0	2,5	2,6	25	80	55	35
	4	0,9	1,6	0,7	0,8	120	40	60	40
	5	1,0	1,4	1,1	0,9	100	60	70	50
11	1	0,9	3,0	1,4	4,0	50	110	65	35
	2	2,6	2,8	1,5	0,5	85	60	70	45
	3	4,0	2,6	1,2	0,6	45	95	80	60
	4	0,8	3,2	1,6	0,8	60	40	20	20
	5	0,8	0,8	1,8	0,8	50	50	40	40
12	1	1,2	0,4	3,8	4,5	12	10	28	30
	2	1,4	0,5	4,1	4,5	10	16	50	50
	3	1,6	0,8	5,0	5,0	14	13	60	60
	4	1,8	1,1	4,0	3,6	10	15	40	30
	5	2,0	0,9	3,0	2,8	2,5	120	20	30

Продолжение таблицы 5

№	№	a₁	a₂	a₃	a	F₁	F₂	M	q
Сх.	Вар.	м	м	м	м	кН	кН	кН·м	кН/м
13	1	1,8	0,6	4,8	4,5	32	50	22	36
	2	1,6	0,5	3,6	4,0	18	80	60	40
	3	1,4	0,5	3,5	3,5	25	130	70	50
	4	1,2	0,4	2,5	3,6	100	18	35	30
	5	1,5	0,4	2,0	4,0	35	110	45	35
14	1	1,2	3,0	2,4	0,4	50	90	45	40
	2	1,6	0,5	1,5	4,0	15	18	80	60
	3	1,4	0,4	2,8	4,0	16	20	10	20
	4	1,8	0,9	3,2	4,1	60	16	38	30
	5	1,5	0,8	3,5	5,0	50	110	50	40
15	1	0,6	4,0	5,0	1,2	40	100	60	60
	2	0,5	3,8	6,0	1,4	30	90	70	40
	3	0,4	4,2	5,0	1,6	20	70	40	30
	4	0,5	4,0	4,0	1,8	20	50	30	30
	5	0,6	3,8	3,0	1,5	100	30	40	20
16	1	1,0	2,0	4,2	3,2	50	70	20	30
	2	1,2	1,8	3,6	4,2	40	130	22	20
	3	1,8	2,2	3,5	3,5	20	40	18	40
	4	1,0	2,0	3,5	4,5	45	120	24	50
	5	0,9	2,1	2,8	4,2	40	100	26	40
17	1	0,6	0,9	1,8	0,4	30	14	80	100
	2	0,7	1,1	1,5	0,6	20	50	90	80
	3	1,0	0,6	0,8	1,5	15	60	70	90
	4	0,8	1,2	1,4	1,0	50	50	100	120
	5	0,9	0,7	1,2	0,8	60	60	45	50
18	1	1,0	0,8	1,1	0,9	70	40	50	70
	2	0,5	1,5	1,0	0,7	20	30	100	60
	3	0,6	1,3	1,3	0,8	40	20	60	80
	4	0,8	1,2	1,1	0,9	45	30	90	70
	5	0,7	1,3	0,9	1,1	35	42	85	80

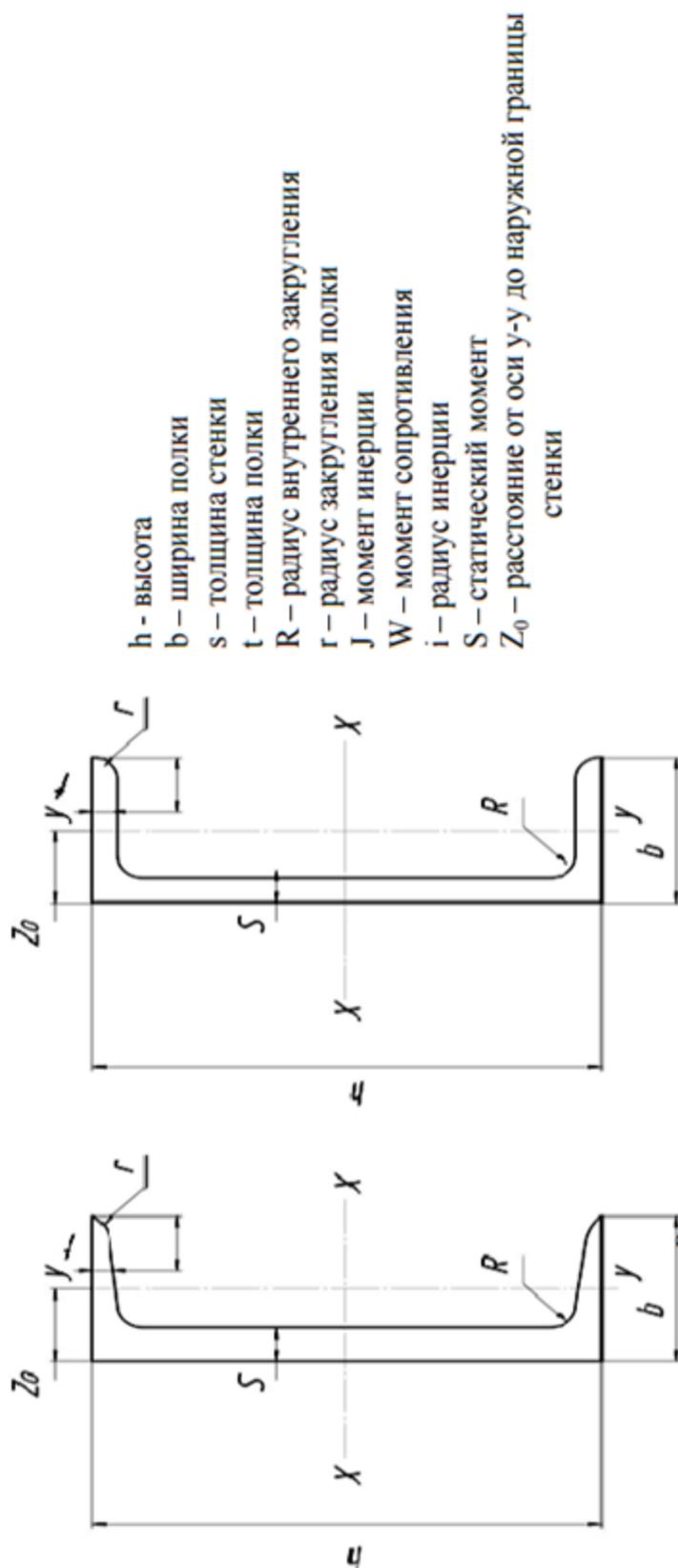
Окончание таблицы 5

№ Сх.	№ Вар.	a ₁ м	a ₂ м	a ₃ м	a м	F ₁ кН	F ₂ кН	M кН·м	q кН/м
19	1	0,9	2,0	1,0	0,5	24	32	110	90
	2	1,0	2,1	1,2	1,2	25	30	42	60
	3	0,5	0,6	1,1	1,4	14	10	30	40
	4	0,6	1,4	1,3	1,2	15	12	40	30
	5	0,7	0,9	1,1	1,3	16	14	70	50
20	1	1,2	0,8	0,9	1,0	17	13	80	60
	2	1,3	0,9	1,1	1,2	18	15	90	70
	3	1,4	1,0	1,0	1,0	19	16	100	80
	4	1,5	1,2	1,2	1,2	20	17	50	60
	5	1,1	0,8	0,8	0,8	22	18	40	50
21	1	1,5	0,7	1,2	0,7	30	20	85	45
	2	0,9	0,8	2,0	1,0	20	35	45	30
	3	0,8	0,7	1,5	0,9	22	40	50	40
	4	0,7	0,9	1,6	0,8	36	25	70	50
	5	0,6	0,8	1,4	0,7	38	22	60	60
22	1	0,7	1,0	0,5	1,0	40	24	102	80
	2	0,8	1,2	0,7	1,0	50	25	75	50
	3	0,9	1,3	0,6	1,2	25	40	90	70
	4	0,6	1,1	0,8	1,1	45	35	60	40
	5	0,5	1,4	0,9	0,8	25	30	80	60
23	1	0,5	2,0	0,8	1,1	15	20	40	30
	2	0,8	2,5	1,1	1,4	17	22	50	40
	3	0,4	1,8	1,2	1,5	18	19	60	50
	4	0,5	2,2	1,7	1,2	16	24	70	60
	5	0,6	2,1	1,9	1,3	20	32	42	50
24	1	0,8	3,1	1,2	1,5	15	30	45	40
	2	1,0	3,4	1,4	2,1	20	20	65	50
	3	0,8	1,6	1,6	0,9	25	25	55	45
	4	0,7	3,0	1,8	2,0	30	40	30	40
	5	0,6	2,5	1,7	3,0	40	20	35	48

Швеллеры стальные горячекатаные

(по ГОСТ 82/10—72)

Швеллеры изготовляются с уклоном внутренних граней полок и с параллельными гранями полок
Размеры и справочные величины для осей швеллеров



Номер швеллера	Справочные величины для осей											Z0, см					
	x — x*				Масса 1м профиля, кг	Площадь сечения, см ²	y — y				Z0, см						
	Jx, см ⁴	Wx, см ³	ix, см	Sx, см ³			Jy, см ⁴	Wy, см ³	iy, см								
h	b	s	t	R	r	rl	h	b	s	t	R	r	rl				
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	3,5	6,10	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,01	2,75	0,954	1,16
6,5	65	30	4,4	7,2	6,0	2,5	3,5	7,51	5,90	48,0	15,0	2,54	9,00	8,70	3,08	1,080	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	3,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,10	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
10	100	40	4,5	7,0	7,0	3,0	4,0	10,9	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
12	120	52	4,8	7,3	7,5	3,0	4,5	13,3	10,4	304,0	50,0	4,78	29,00	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	4,5	15,0	12,3	491,0	70,2	5,00	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	4,5	17,0	13,3	545,0	77,8	5,00	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
16	100	64	5,0	8,4	8,5	3,5	5,0	18,1	14,2	747,0	93,4	6,42	54,10	03,30	13,80	1,870	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	5,0	19,5	15,3	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	5,0	20,7	16,3	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,04
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	5,0	22,2	17,4	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	5,5	23,4	18,4	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,200	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	5,5	25,2	19,8	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,00	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	6,0	28,1	21,0	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	6,0	28,8	22,6	2330,0	212,0	8,99	121,00	187,00	30,00	2,550	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	6,0	30,6	24,0	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,003	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	6,0	32,9	25,8	3180,0	265,0	9,84	151,00	254,00	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	6,5	33,2	27,7	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	7,0	40,5	31,8	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	7,5	46,5	36,5	7980,0	434,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	8,5	53,4	41,9	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	9,0	61,5	48,3	15220,0	761,0	15,70	414,00	642,00	73,40	3,230	2,75

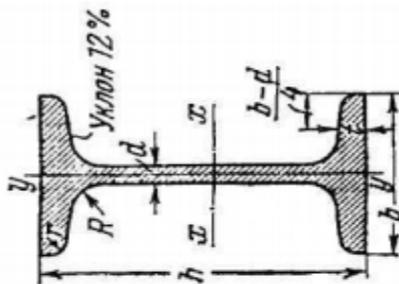
* Для швеллеров с параллельными гранями полок справочные величины для осей и расстояния Z0 увеличены до 10%, точные данные см. ГОСТ 8240-72.

Пример обозначения швеллера № 20 с уклоном внутренних граней полок из стали марки Ст3;

Швеллер 20 ГОСТ 8240 – 72 Ст.3 ГОСТ535 – 58

То же, с параллельными гранями полок (П) из стали марки Ст3: Швеллер 20П ГОСТ 8240—72 Ст3 ГОСТ 535—58

Сталь горячекатанная
Балки двутавровые
ГОСТ 8239-72



Номер балки	h	b	s	t	R	r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей					
									x-x			y-y		
									J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^* , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12

Номер балки	мм							Масса, г, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	s	t	R	r	x-x			y-y					
							J_x , cm^4		W_x , cm^3	i_x , cm	S_x^* , cm^3	J_y , cm^4	W_y , cm^3	i_y , cm	
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Вопросы к экзамену (зачету)

1. Теоретическая механика. Статика

1. Предмет статики и её основные задачи.
2. Основные понятия статики: сила, система сил, уравновешенная система сил, внешние и внутренние силы, сосредоточенные и распределенные силы.
3. Аксиомы статики и некоторые их следствия.
4. Виды систем сил (плоские и пространственные).
5. Понятие: свободное и несвободное тело; связь, типы связей; реакции связей; принцип освобождения от связей.
6. Система сходящихся сил, условия её равновесия в геометрической и аналитической форме.
7. Способы сложения сил: геометрический и аналитический. Пояснить на примере.
8. Теорема о трех силах и её применение к определению направления реакции.
9. Момент силы относительно точки. Понятие векторного и алгебраического момента силы относительно точки. Пример.
10. Пара сил. Момент пары сил (векторный и алгебраический). Свойства пар сил, сложение пар сил.
11. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
12. Теорема Пуансо о параллельном переносе силы. Покажите на примере.
13. Понятие произвольной плоской системы сил. Приведение её к заданному центру (точке O).
14. Понятие главного вектора и главного момента.
15. Условие равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил (три варианта условий).
16. Момент силы относительно оси. Пример.
17. Условие равновесия тела под действием пространственной системы сил.

2. Сопротивление материалов

1. Основные задачи, решаемые в разделе «Сопротивление материалов», Основные допущения в сопромате.
2. Что такое деформация, понятие об упругой и остаточной деформациях?
3. Понятие о внутренних силовых факторах.
4. Какие внутренние силовые факторы могут возникать в поперечных сечениях детали?
5. Что такое метод сечений и как им пользоваться?
6. Что такое напряжение?
7. Какие внутренние факторы будут в поперечных сечениях перпендикулярных к оси стержня при растяжении и сжатии и как они определяются?
8. Как строятся эпюры продольных сил, и какова цель этого построения? 9. Как определяются напряжения при растяжении и сжатии?
10. Как распределяются напряжения в поперечных сечениях, перпендикулярных продольной оси стержня при растяжении и сжатии?

11. Условия прочности при деформациях растяжения и сжатия.
12. Сформулируйте и запишите закон Гука при растяжении. Как определяется деформация при растяжении-сжатии?
13. В чем сущность проектного и проверочного расчетов при растяжении и сжатии.
14. Построение эпюр напряжений и перемещений при растяжении и сжатии.
15. Дать определение предельных, расчетных и допускаемых напряжений.
16. Изобразить диаграмму растяжения для углеродистой стали и указать характерные точки на этой диаграмме.
17. Как определить упругие и остаточные деформации по диаграмме растяжения?
18. Какой внутренний силовой фактор вызывает деформацию сдвига?
19. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях деталей при сдвиге, и каков закон их распределения?
20. Сформулируйте и запишите закон Гука при сдвиге.
21. Сформулируйте и запишите условие прочности при сдвиге. Какие проверочные и проектные задачи решаются по данным условиям?
22. Объясните явление смятия и какова методика определения расчетных напряжений смятия.
23. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки при изгибе?
24. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях балки при изгибе?
25. Правило знаков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
26. Правила контроля правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
27. Сформулируйте и запишите уравнение прочности при изгибе.
28. Как распределяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при изгибе?
29. Как определяются необходимые площади поперечных сечений балок при изгибе?
30. Какие проверочные и проектные расчеты позволяет решать условие прочности при изгибе?
31. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях при кручении?
32. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении, и каков закон их распределения?
33. Правило знаков при построении эпюр крутящих моментов.
34. Сформулируйте и запишите условие прочности при кручении.
35. Что такое «геометрические характеристики сечений» и для чего они нужны?
36. Приведите примеры проверочных и проектных задач при деформации кручения.
37. Коэффициент запаса прочности (допускаемый и расчетный), как он определяется?

Библиографический список

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов/ С. М. Тарг; – 12-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2001.
2. Диевский, В. А. Теоретическая механика: учеб. пособие / В. А. Диевский; - 3-е изд., испр. – С П б.: Изд-во «Лань», 2009.
3. Митюшов, Е. А. Теоретическая механика: учебник для студ. вузов / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. – М.: - Изд. Центр «Академия», 2006.
4. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учеб. для студ. втузов / П. А. Степин. – М.: Наука, 1997.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов/ А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. Шк., 1989.
6. Иоселевич, Г. В. Прикладная механика / Г. В. Иоселевич и др. – М.: Высш. Шк., 1989.
7. Джамай, В. В. Прикладная механика: учебник для вузов / В.В. Джамай и др. под ред. В. В. Джамая. – М.: Дрофа, 2004.
8. Шинкаренко, А. А. Сопротивление материалов: учеб. пособие /А. А. Шинкаренко, А. И. Киреева. – Ростов н/Д: Феникс, 2009.

Учебное издание

Степанова Татьяна Юрьевна

Бойцова Вера Вячеславовна

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный
химико-технологический университет»

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7