

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

А.Э. Козловский

РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
НА СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Учебное пособие

Иваново 2016

УДК 539.3

**Козловский А.Э.**

Расчёт элементов конструкций на сдвиг и кручение: учеб. пособие / А.Э. Козловский; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2016. – 100 с.

В пособии исследованы различные виды напряжённого состояния. Приводятся теоретические сведения о деформациях сдвига и кручения. Предложены к выполнению две лабораторные работы по испытанию материалов на сдвиг и кручение, а также три контрольных задания для самостоятельной работы с примерами выполнения.

Предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения по направлению подготовки бакалавров «Технологические машины и оборудование».

Ил. 49. Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты:

кафедра наземных транспортных средств и технологических машин Текстильного института Ивановского государственного политехнического университета; профессор, кандидат технических наук В.М.Хадеев (генеральный директор Ивановского инженерного центра исследования прочности строительных конструкций «Исследователь»).

© Козловский А.Э., 2016

© ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет», 2016

## Оглавление

1. Напряжённое и деформированное состояния .....	4
1.1. Напряжённое состояние в точке тела .....	4
1.2. Исследование напряжённого состояния при известных главных напряжениях .....	7
1.3. Чистый сдвиг .....	11
1.4. Деформация сдвига.....	13
1.5. Энергия деформации при сдвиге .....	15
2. Кручение .....	16
2.1. Определение внутренних усилий при кручении .....	16
2.2. Определение напряжений при кручении бруса круглого сечения ..	21
2.3. Определение перемещений при кручении круглого бруса .....	27
2.4. Определение геометрических характеристик круглого сечения .....	29
2.5. Расчёты на прочность и жёсткость при кручении .....	31
2.6. Построение эпюр при расчётах на прочность и жёсткость .....	35
2.7. Энергия деформации при кручении .....	44
2.8. Статически неопределимые задачи при кручении .....	46
2.9. Расчёт цилиндрических винтовых пружин .....	49
2.10. Практические расчёты на сдвиг .....	56
2.11. Расчёт неразъёмных соединений .....	61
3. Механические испытания на сдвиг и кручение .....	66
3.1. Определение модуля сдвига материала пружины .....	66
3.2. Испытания материалов на срез и скалывание .....	73
4. Контрольные задачи и примеры их решения .....	78
4.1. Расчёт плоского напряжённого состояния .....	78
4.2. Расчёт статически неопределимой задачи на кручение .....	82
4.3. Расчёт цилиндрических винтовых пружин .....	88
Контрольные вопросы для самоконтроля .....	94
Библиографический список .....	99

# 1. Напряжённое и деформированное состояния

## 1.1. Напряжённое состояние в точке тела

В учебном пособии «Расчёт элементов конструкций на растяжение и сжатие» были даны первичные понятия о **напряжённом состоянии** в точке деформируемого тела и проведено исследование напряжённого состояния для точек растянутого (сжатого) бруса.

Рассмотрим основные положения общей теории напряжённого состояния. Теория гласит:

*напряжённое состояние в данной точке тела характеризуется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих на бесчисленном множестве различно ориентированных в пространстве площадок, которые можно провести через эту точку.*

Предположим, что в окрестности исследуемой точки выделен бесконечно малый элемент, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и напряжения, возникающие на его гранях, известны. Каждое из этих напряжений может быть разложено на три составляющих, параллельных координатным осям (рис. 1).

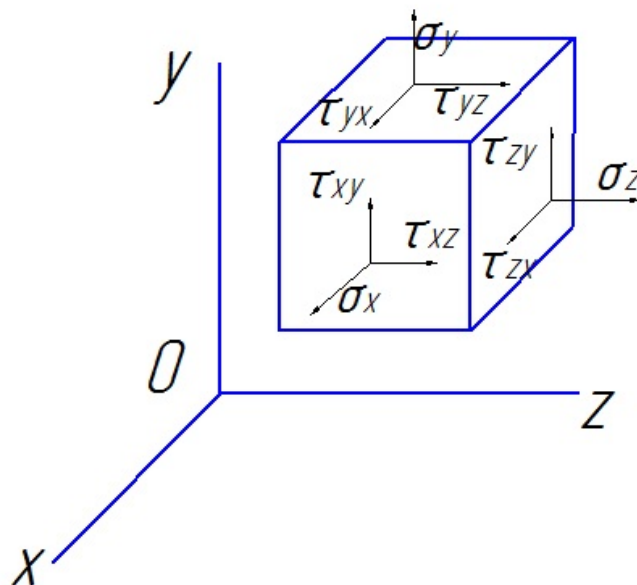


Рис. 1. Общий случай напряжённого состояния

Таким образом, в общем случае на **трёх исходных** площадках возникают девять составляющих напряжений: нормальные напряжения  $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$  и касательные напряжения  $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ .

Индекс нормального напряжения указывает ось, параллельно которой действует напряжение. Первый индекс касательного напряжения указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия рассматриваемого напряжения, второй индекс показывает, какой оси параллельно данное напряжение.

Из закона парности касательных напряжений следует:

*составляющие касательных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру этих площадок, равны по абсолютному значению, т. е.*

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Следовательно, из девяти компонентов напряжённого состояния независимы лишь шесть.

*Основное положение теории напряжённого состояния* может быть сформулировано следующим образом:

*напряжённое состояние в точке тела задано, если известны напряжения на любых трёх проходящих через неё взаимно перпендикулярных площадках.*

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через исследуемую точку, всегда имеются *три взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых отсутствуют. Эти площадки и возникающие на них нормальные напряжения называют главными.*

Главные напряжения обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При этом большее (с учётом знака) главное напряжение обозначается  $\sigma_1$ , а меньшее (с учётом знака) обозначается  $\sigma_3$ . Напряжение  $\sigma_2$  имеет промежуточное значение. Растягивающее напряжение считают положительным, напряжение сжатия – отрицательным.

Таким образом, должно соблюдаться следующее алгебраическое неравенство:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

В частных случаях, когда два (или все три) главных напряжения равны между собой, число главных площадок бесконечно велико. Следовательно, в общем случае главных площадок три, в частных случаях их может быть бесконечно много.

Если главные напряжения в данной точке известны (заданы или определены), то наиболее удобно принять их за исходные. Классификацию

видов напряжённого состояния ведут именно по главным напряжениям. Рассмотрим эту классификацию.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, напряжённое состояние называют *объёмным, пространственным* или *трёхосным* (рис. 2).

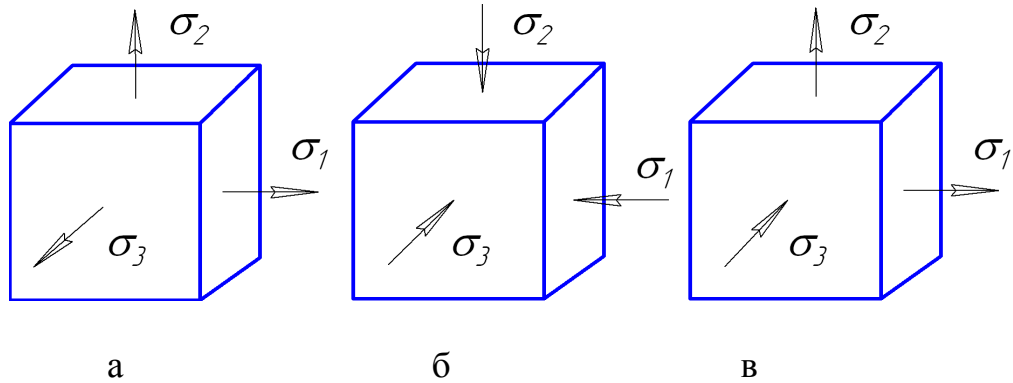


Рис. 2. Разновидности объёмного напряжённого состояния: а – трёхосное растяжение; б – трёхосное сжатие; в – трёхосное смешанное напряжённое состояние

В случае если одно из главных напряжений равно нулю, напряжённое состояние называют *плоским, двухмерным* или *двухосным* (рис. 3).

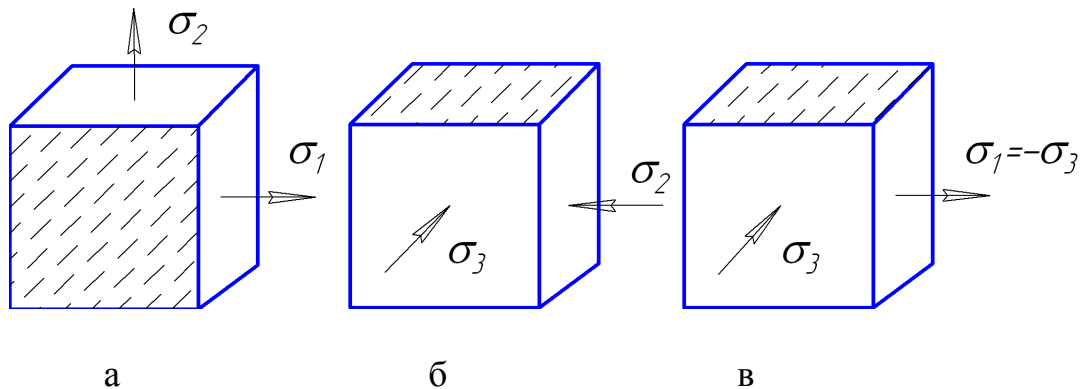


Рис. 3. Разновидности плоского напряжённого состояния: а – двухосное растяжение; б – двухосное сжатие; в – частный случай двухосного смешанного напряжённого состояния (чистый сдвиг)

Если лишь одно из главных напряжений отлично от нуля, напряжённое состояние является *линейным, одномерным* или *одноосным* (рис. 4).

Площадки, свободные от главных напряжений, называют *нулевыми главными площадками*, на рисунках они заштрихованы.

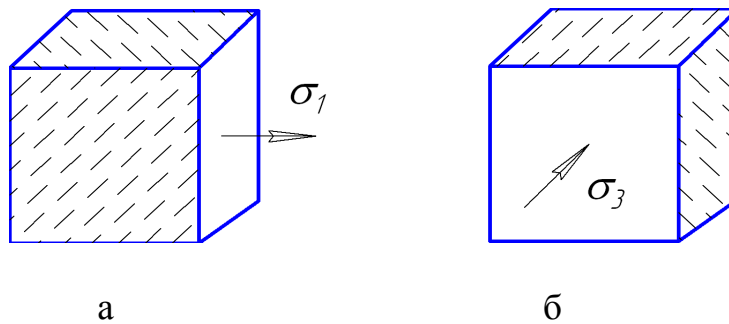


Рис. 4. Разновидности линейного напряжённого состояния: а – одноосное растяжение; б – одноосное сжатие

**Максимальное** для данной точки тела **касательное напряжение**  $\tau_{max}$  возникает на площадке, параллельной вектору  $\sigma_2$  и делящей пополам прямой угол между площадками действия  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Это напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 .$$

Площадка, на которой возникает напряжение  $\tau_{max}$ , на рис. 5 отмечена штриховкой. На площадке, перпендикулярной ей (на рисунке она не показана), возникает такое же по значению касательное напряжение.

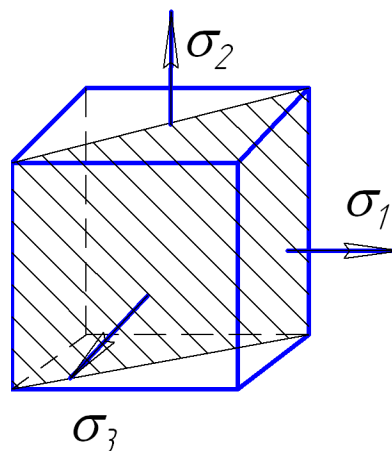


Рис. 5. Расположение площадок действия максимальных касательных напряжений

## 1.2. Исследование напряжённого состояния при известных главных напряжениях

Ранее было указано, что для исследования напряжённого состояния должны быть известны напряжения на **любых трёх взаимно перпендикулярных площадках**, проходящих через данную точку.

Математическое решение такого исследования является наиболее простым, когда изначально известны **главные напряжения**, которые действуют **по главным площадкам**, на которых **касательные напряжения равны нулю**.

Предположим, что в окрестности некоторой точки деформируемого тела выделен элемент (в виде кубика), грани которого совпадают с главными площадками, и главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  на этих гранях известны (рис. 6, а).

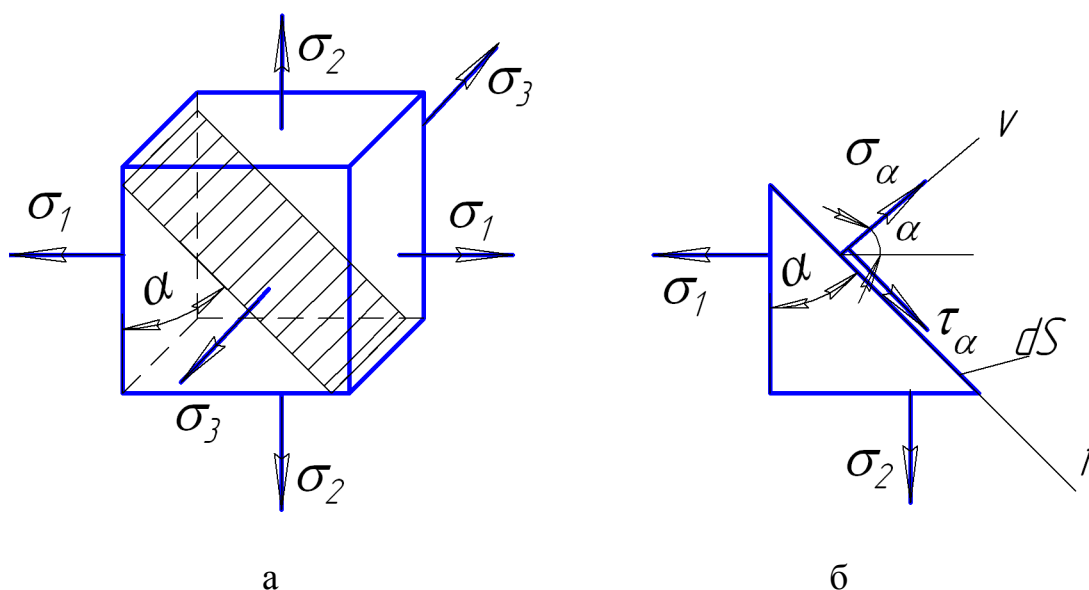


Рис. 6. К исследованию напряжённого состояния: а – главные площадки и главные напряжения; б – к определению напряжений

Исследовать напряжённое состояние – это значит получить формулы, по которым можно было бы определить нормальные и касательные напряжения на любой площадке, проходящей через исследуемую точку. Ограничимся здесь определением нормальных и касательных напряжений для серии площадок, параллельных одному из главных напряжений.

**Серией или семейством площадок называют совокупность бесчисленного множества площадок, параллельных одной и той же оси или, что тоже самое, перпендикулярных одной и той же плоскости.**

Рассечём элемент (кубик) произвольной плоскостью, составляющей угол  $\alpha$  с левой гранью и параллельной вектору  $\sigma_3$  (рис. 6, а). На рисунке секущая плоскость заштрихована.

Применим метод сечений и рассмотрим равновесие отсечённой трёхгранной призмы (рис. 6, б). Для удобства изобразим лишь одну (переднюю) грань призмы, по которой действует главное напряжение  $\sigma_3$ .



Обозначим элементарную площадь наклонной площадки  $dS$ . Тогда элементарные площади площадок, по которым действуют главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , соответственно будут равны  $dS \cdot \cos \alpha$  и  $dS \cdot \sin \alpha$ .

Определим нормальное  $\sigma_\alpha$  и касательное  $\tau_\alpha$  напряжения, действующие на наклонной площадке. Для этого составим уравнения равновесия для сил, действующих на отсечённую призму, спроецировав их на оси  $\nu$  и  $t$ .

$$\Sigma_{F\nu} = 0; \quad \sigma_\alpha dS - (\sigma_1 dS \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_2 dS \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

откуда 
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha.$$

$$\Sigma_{Ft} = 0; \quad \tau_\alpha dS - (\sigma_1 dS \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_2 dS \sin \alpha) \cos \alpha = 0,$$

откуда 
$$\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha,$$

или 
$$\tau_\alpha = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.$$

Таким образом, нормальные и касательные напряжения, действующие по любым произвольным площадкам, параллельным главному напряжению  $\sigma_3$ , вычисляются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.$$

Проанализируем полученные результаты.

1. Напряжения, возникающие на площадках рассматриваемой серии, не зависят от главного напряжения, параллельного этим площадкам (в рассматриваемом случае от  $\sigma_3$ ).

2. Из тригонометрии известно, что

$$\cos^2 \alpha = 0,5(1 + \cos 2\alpha) \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = 0,5(1 - \cos 2\alpha).$$

Тогда

$$\sigma_\alpha = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2) + 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha.$$

Из этой формулы следует, что *максимальное нормальное напряжение* будет равно:

$$\sigma_{max} = \sigma_{\alpha=0} = \sigma_1.$$

Минимальное напряжение равно:

$$\sigma_{min} = \sigma_{\alpha=90} = \sigma_2 .$$

Следовательно, *наибольшее и наименьшее* нормальные напряжения для рассматриваемой серии площадок – это *главные напряжения*.

3. Так как

$$\sin 2\alpha = -\sin 2(\alpha + 90^\circ) ,$$

касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по модулю и противоположны по знаку. Это подтверждает *закон парности касательных напряжений* для исследованного частного случая.

4. Максимальное касательное напряжение для данной серии площадок возникает на площадке, нормаль к которой составляет угол  $45^\circ$  (или  $135^\circ$ ) с направлением действия  $\sigma_1$  :

$$\tau_{max} = \tau_{\alpha=45} = \tau_{\alpha=135} = \tau_{12} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) .$$

5. Полученные выше формулы справедливы (при соответствующей замене индексов) для любой из трёх серий площадок, каждая из которых параллельна одному из главных напряжений. Для каждой из этих серий площадок есть своё наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{12} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{для площадок, параллельных } \sigma_3);$$

$$\tau_{23} = 0,5(\sigma_2 - \sigma_3) \quad (\text{для площадок, параллельных } \sigma_1);$$

$$\tau_{13} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (\text{для площадок, параллельных } \sigma_2).$$

Согласно правилу индексов ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) из этих трёх частных максимумов  $\tau$  наибольшим, т.е. действительно максимальным для данной точки тела оказывается напряжение  $\tau_{13}$ .

6. В частном случае, когда  $\sigma_1 = \sigma_2$ , ни на одной площадке исследуемой серии не возникает касательных напряжений, т.е. все площадки этой серии *главные*.

7. Если все три главных напряжения равны между собой:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , то для данной точки тела *любая* проходящая через неё *площадка является главной*.

### 1.3. Чистый сдвиг

Рассмотрим частный случай *плоского напряжённого состояния*, для которого отличные от нуля *главные напряжения равны по модулю и противоположны по знаку* (рис. 7). Данный случай напряжённого состояния называется **чистым сдвигом**. Происхождение этого названия будет разъяснено ниже.

Растягивающие напряжения считают положительными, сжимающие – отрицательными. Следовательно, согласно правилу индексов растягивающее напряжение  $\sigma_1$  является максимальным главным напряжением, а сжимающее напряжение  $\sigma_3$  – минимальным главным напряжением. По условию рассматриваемого случая  $\sigma_1 = -\sigma_3$ , промежуточное главное напряжение  $\sigma_2 = 0$ . Нулевая главная площадка на рисунке заштрихована.

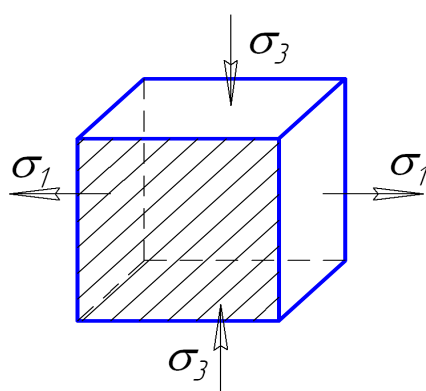


Рис. 7. Схема напряжённого состояния чистого сдвига

Рассечём элемент произвольной плоскостью, параллельной нулевому напряжению  $\sigma_2$  (рис. 8, а).

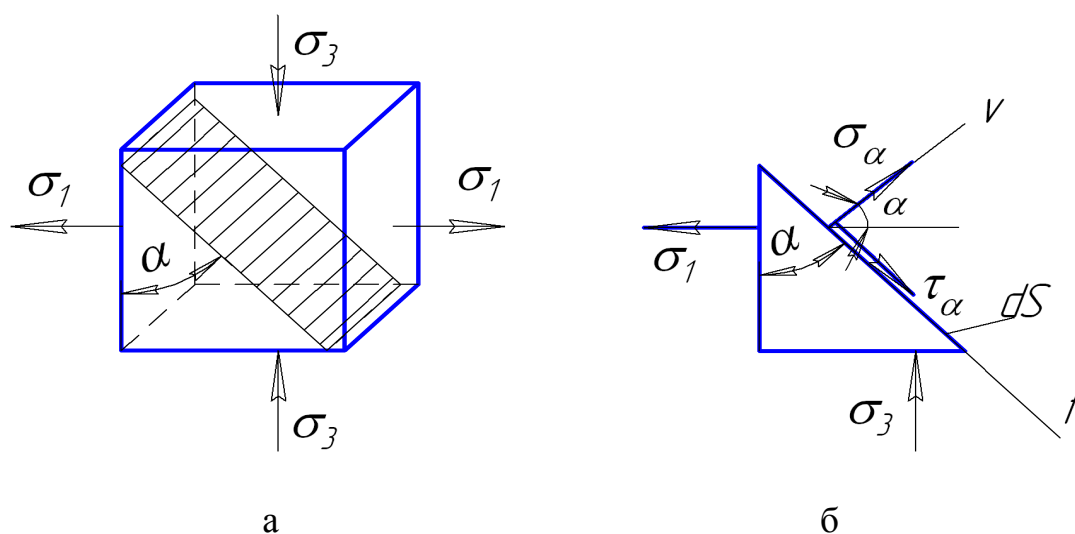


Рис. 8. Чистый сдвиг: а – схема напряжённого состояния; б – к определению напряжений

Составим уравнения равновесия для сил, действующих на отсечённую трёхгранную призму, спроецировав их на оси  $\nu$  и  $t$  (рис. 8, б). Обозначим площадь наклонной площадки через  $dS$  и определим возникающие на этой площадке напряжения  $\tau_\alpha$  и  $\sigma_\alpha$ . Учтём, что  $|\sigma_1| = |\sigma_3|$ .

$$\sum F\nu = 0 \quad \sigma_\alpha dS + (\sigma_3 dS \sin\alpha) \sin\alpha - (\sigma_1 dS \cos\alpha) \cos\alpha = 0 ;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha - \sigma_1 \sin^2\alpha ;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos 2\alpha .$$

$$\sum Ft = 0 \quad \tau_\alpha dS - (\sigma_1 dS \cos\alpha) \sin\alpha - (\sigma_3 dS \sin\alpha) \cos\alpha = 0 ;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + \sigma_3 \sin\alpha \cos\alpha = 2\sigma_1 \sin\alpha \cos\alpha ;$$

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \sin 2\alpha .$$

Из последнего выражения следует, что **максимальные касательные напряжения** при чистом сдвиге действуют по площадкам, расположенным под углом  $\alpha = 45^\circ$  или  $\alpha = 135^\circ$  и равны главному напряжению  $\sigma_1$ :

$$\tau_{max} = \tau_{\alpha=45^\circ} = \tau_{\alpha=135^\circ} = \sigma_1 .$$

Это напряжение **максимально для данной точки тела**, а не только для исследуемой серии площадок, так как эти площадки параллельны главному напряжению  $\sigma_2$  (смотри с. 7):

$$\tau_{max} = \tau_{13} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_1 .$$

**Нормальные напряжения** на площадках, расположенных под углами  $\alpha = 45^\circ$  и  $\alpha = 135^\circ$ , равны нулю:

$$\sigma_{\alpha=45^\circ} = \sigma_{\alpha=135^\circ} = 0 .$$

Отсюда следует вывод: **при чистом сдвиге на площадках действия максимальных касательных напряжений нормальные напряжения отсутствуют.**

Таким образом, **чистый сдвиг – единственный случай плоского напряжённого состояния, когда через точку можно провести две взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения максимальны, а нормальные – отсутствуют.**

Из проведённого исследования вытекает и другое определение:

**Чистый сдвиг – это такое плоское напряжённое состояние, при котором вокруг данной точки можно выделить элемент таким образом, чтобы на четырёх его гранях действовали только равные между собой касательные напряжения.**

Последнее определение можно рассматривать как объяснение названия, принятого для данного частного случая напряжённого состояния.

На рис. 9 показаны главные площадки (по ним действуют главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ) и площадки действия максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$ .

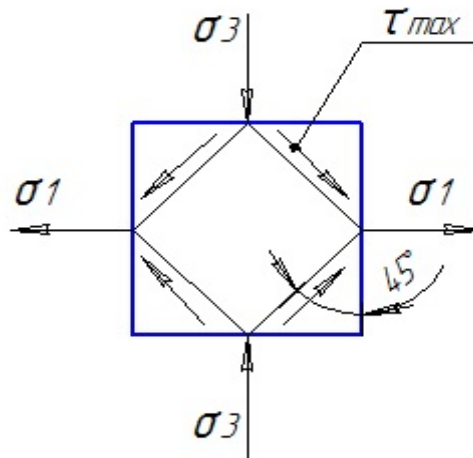


Рис. 9. Площадки действия главных и максимальных касательных напряжений при чистом сдвиге

#### 1.4. Деформация сдвига

Рассмотрим вопрос – что является мерой деформации сдвига? Для этого выделим вокруг точки бесконечно малый элемент в виде параллелепипеда, испытывающий деформацию чистого сдвига, т.е. выделенный площадками, по которым возникают только касательные напряжения. Размеры этого элемента обозначим  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ .

Изобразим элемент в проекции на плоскость, параллельную нулевой главной площадке (рис. 10). Так как нас интересует деформация элемента, а не его перемещения как твёрдого тела, будем считать одну из граней неподвижной (жёстко заделанной).

До деформации элемент представлял собой прямоугольник  $ABCD$ . В результате деформации элемент изменит свою форму. Его проекция будет представлять собой уже не прямоугольник, а параллелограмм  $AB'C'D$ .

Мерой деформации сдвига служит изменение первоначального прямого угла между гранями элемента, т.е. угол  $\gamma$ .

Угол  $\gamma$  называется **угловой деформацией** или **углом сдвига**. Угол сдвига выражается в **радианах**.

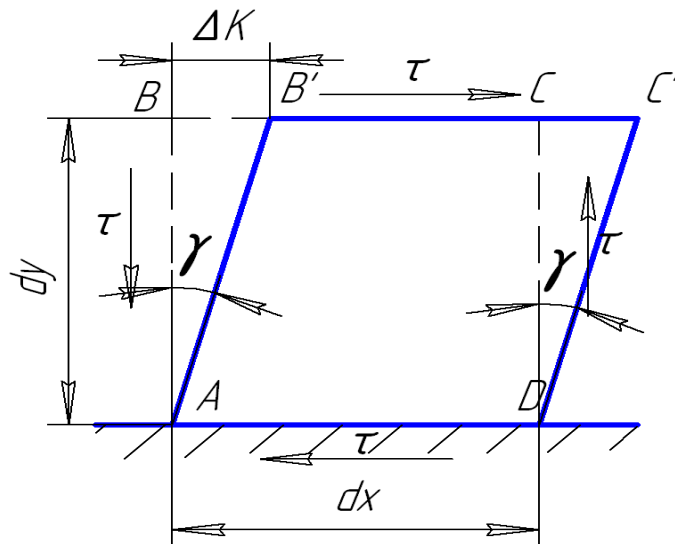


Рис. 10. Схема деформации сдвига

Теоретические расчёты и опытные данные показывают, что для многих материалов до определённого предела нагружения между углом сдвига и соответствующим касательным напряжением существует линейная зависимость:

$$\tau = G\gamma.$$

Эта зависимость выражает *закон Гука при сдвиге: касательные напряжения при сдвиге прямо пропорциональны угловым деформациям.*

Из свойства взаимности касательных напряжений легко установить свойство взаимности угловых деформаций: *угловые деформации двух взаимно перпендикулярных площадок равны по значению и противоположны по знаку.*

Коэффициент пропорциональности  $G$  является *упругой постоянной материала*. Её величина характеризует *жёсткость материала при деформации сдвига*. Она называется *модулем упругости второго рода* или *модулем сдвига*, или *модулем Гука*. Как и модуль упругости первого рода (модуль Юнга  $E$ ) модуль сдвига  $G$  имеет размерность  $МПа$ .

Доказано, что для изотропного тела между тремя упругими постоянными – модулем Юнга, модулем Гука и *коэффициентом Пуассона  $\mu$*  – существует следующая зависимость:

$$G = E / [ 2 \cdot (1 + \mu) ] .$$

Как известно, значение коэффициента Пуассона лежит в пределах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ . Следовательно, модуль сдвига составляет  $0,33 \div 0,5$  от модуля продольной упругости.

Для многих металлов и сплавов, в частности для стали,  $G \approx 0,4 E$ . При решении задач принимают для стали модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Напомним, что модуль Юнга для стали принимают равным  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

### 1.5. Энергия деформации при сдвиге

Определим *потенциальную энергию деформации*, накопленную в элементе при сдвиге.

В процессе деформации на верхнюю грань элемента  $BC$  (рис. 10) действует сила  $\tau \cdot dx \cdot dz$ . В результате этого грань  $BC$  перемещается на величину  $\Delta K$  в положение  $B'C'$ . Из рисунка следует, что это перемещение равно:

$$\Delta K = \operatorname{tg} \gamma \cdot dy.$$

Из-за малости угла  $\gamma$  следует, что  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$  (тангенс малого угла примерно равен самому углу). Тогда:

$$\Delta K = \gamma \cdot dy.$$

Таким образом, сила  $\tau \cdot dx \cdot dz$  совершает работу на перемещении  $\Delta K = \gamma \cdot dy$ .

По *теореме Клайперона потенциальная энергия деформации* равна половине произведения силы на перемещение, т.е.:

$$dU = \frac{(\tau \cdot dx \cdot dz)(\gamma \cdot dy)}{2}.$$

*Удельная энергия деформации* (т.е. энергия деформации, отнесённая к объёму элемента  $dx \cdot dy \cdot dz$ ) при чистом сдвиге будет равна:

$$du = \frac{(\tau \cdot dx \cdot dz)(\gamma \cdot dy)}{2 \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)} = \frac{\tau \gamma}{2}.$$

Наконец, так как из закона Гука следует, что  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , то окончательная формула для определения удельной потенциальной энергии деформации при сдвиге примет вид:

$$du = \frac{\tau^2}{2G}.$$

## 2. Кручение

### 2.1. Определение внутренних усилий при кручении

**Кручение** – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – **крутящий момент  $M_k$** . В некоторых источниках его обозначают как  $M_z$ .

Деформация кручения возникает при нагружении бруса *внешними скручивающими моментами  $M$*  или *парами сил*, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси бруса  $z$ . Моменты этих пар будем также называть внешними скручивающими моментами и обозначать  $M$  (рис. 11).

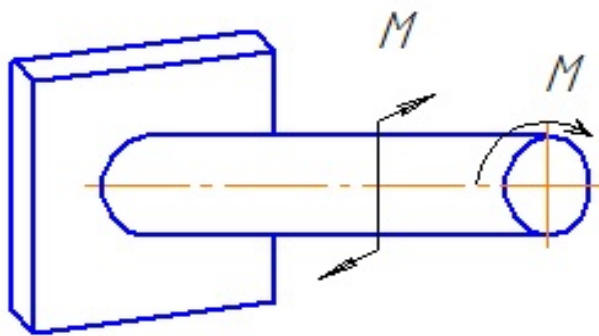


Рис. 11. Действие на брус внешних скручивающих моментов и пар сил

Поперечная нагрузка  $F$ , смещённая относительно оси бруса на расстояние  $r$ , также вызывает крутящий момент  $M_k = F \cdot r$  (рис. 12). Но в этом случае наряду с крутящим моментом возникают и другие внутренние усилия – поперечные силы и изгибающие моменты.

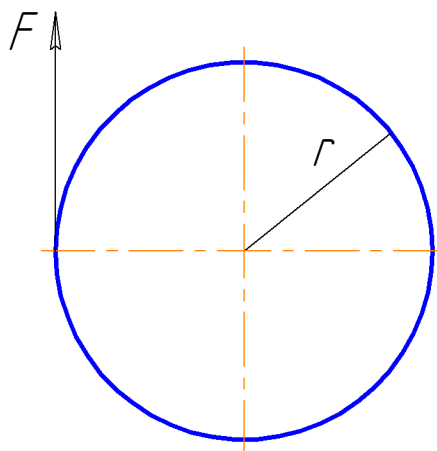


Рис. 12. Частный случай, вызывающий деформацию кручения



Для определения внутреннего крутящего момента  $M_k$ , возникающего в поперечном сечении бруса под действием внешних скручивающих моментов, применим *метод сечений*. Мысленно отбросив отсечённую часть бруса, рассмотрим равновесие оставшейся части (рис. 13).

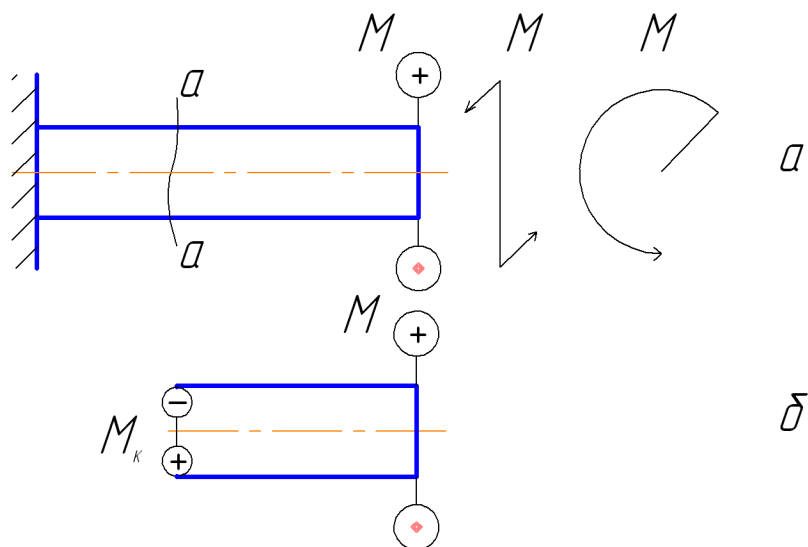


Рис. 13. Определение внутреннего крутящего момента  $M_k$  по известному внешнему скручивающему моменту  $M$  с помощью метода сечений: а – способы обозначения скручивающих моментов; б – равновесие отсечённой части бруса

На рис. 13, а показаны способы условного графического изображения моментов при решении задач на кручение. Так, если момент представлен в виде двух кружков, то кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, а кружок с крестом – силу, направленную от наблюдателя.

Применив метод сечений и рассмотрев равновесие оставленной части (рис. 13, б), приходим к выводу, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении бруса, должны дать внутренний *крутящий момент*  $M_k$ , уравнивающий *внешний скручивающий момент*  $M$ , т. е.  $M_k = M$ .

Легко убедиться, что крутящий момент во всех поперечных сечениях рассматриваемого бруса одинаков.

Знак крутящего момента не имеет физического смысла (в отличие от продольной силы при деформации растяжения-сжатия), но для практических расчётов необходимо условиться о следующем правиле знаков.

Будем считать крутящий момент положительным, если он при взгляде на сечение действует по часовой стрелке, и отрицательным – если он представляется направленным против часовой стрелки (рис. 14). Соответственно внешний момент направлен в противоположную сторону.

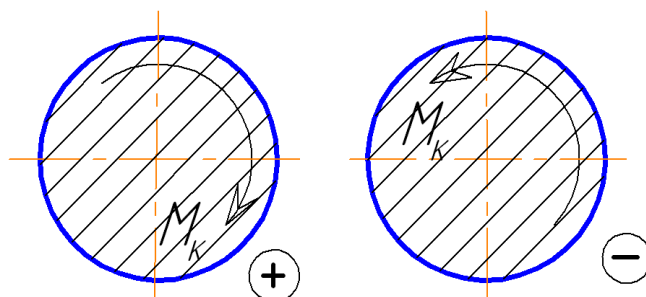


Рис. 14. Правило знаков при определении крутящего момента

В более общем случае нагружения бруса, когда на него действует несколько внешних моментов, **крутящий момент, возникающий в произвольном поперечном сечении бруса, численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к оставленной части (с учётом правила знаков).**

Во всех случаях будем считать, что алгебраическая сумма скручивающих моментов равна нулю, т. е. брус находится в равновесии.

Для расчёта на прочность при кручении, так же как и при растяжении (сжатии) бруса, надо найти его *опасное сечение*. В случае если размеры поперечного сечения по длине бруса постоянны, опасными будут сечения, в которых *крутящий момент максимален*.

График, показывающий закон изменения крутящих моментов по длине бруса, называется **эпюрой крутящих моментов  $M_k$** .

Построение этих эпюр принципиально ничем не отличается от построения эпюр продольных сил и производится на основе сформулированного выше правила вычисления крутящих моментов.

Брус разбивается на участки, границами которых являются места приложения скручивающих моментов.

Построим эпюру крутящих моментов для бруса с постоянными по длине размерами поперечных сечений, нагруженного скручивающими моментами  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$  (рис. 15). С этой целью разобьём его на **участки 1, 2 и 3**, в пределах каждого из которых крутящий момент неизменен.

С помощью метода сечений определим крутящие моменты  $M_{k1}$ ,  $M_{k2}$  и  $M_{k3}$  на каждом участке. Следует отметить, что брус, его отсечённые части и сама эпюра находятся между собой в проекционной связи и являются *неделимым графическим изображением*.

Эпюра имеет форму прямоугольников, которые штрихуются строго вертикальными тонкими линиями. В местах приложения внешних скручивающих моментов ординаты эпюры скачкообразно изменяются на величину приложенного здесь внешнего момента.

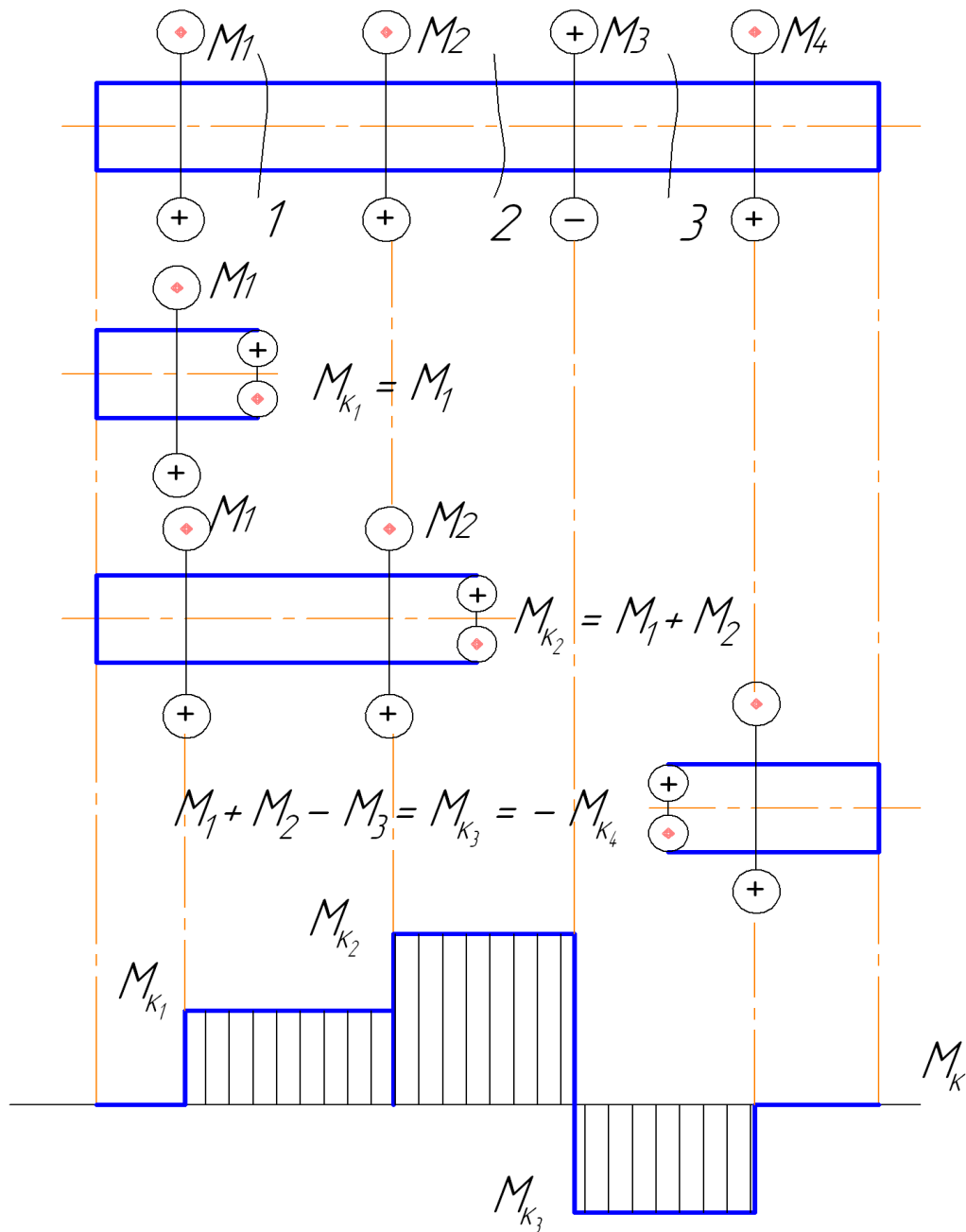


Рис. 15. Построение эпюры крутящих моментов  $M_k$

Характер деформации при кручении существенно зависит от *формы поперечного сечения* бруса. Методами сопротивления материалов можно решать задачи на кручение лишь для бруса *круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения*.

При некоторых дополнительных допущениях можно решить задачу о кручении брусков *тонкостенного замкнутого профиля*.

При расчётах на кручение брусков с *некруглым поперечным сечением* используют специальные таблицы, составленные на основании экспериментальных исследований.

Теория кручения бруса круглого поперечного сечения чаще всего используется при расчёте **валов**.

**Валами называют вращающиеся стержни, работающие на кручение.** Внешние моменты обычно передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, муфт и других деталей.

Валы рассчитывают при проектировании и проверке работоспособности механических приводов.

Известно, что работа любого вала характеризуется двумя показателями:

- мощность  $P$ , подводимая к валу или передаваемая валом;
- число оборотов вала в минуту  $n$ .

Построим эпюру крутящих моментов  $M_k$  применительно к валу, изображённому на рис. 16. В сечении **II** на вал подводится мощность  $P_2$ , в сечениях **I** и **III** с вала передаются мощности  $P_1$  и  $P_3$ .

Не учитывая механические потери энергии, будем считать, что мощность, подводимая к валу, равна сумме мощностей, передаваемых валом, т.е.  $P_2 = P_1 + P_3$ .

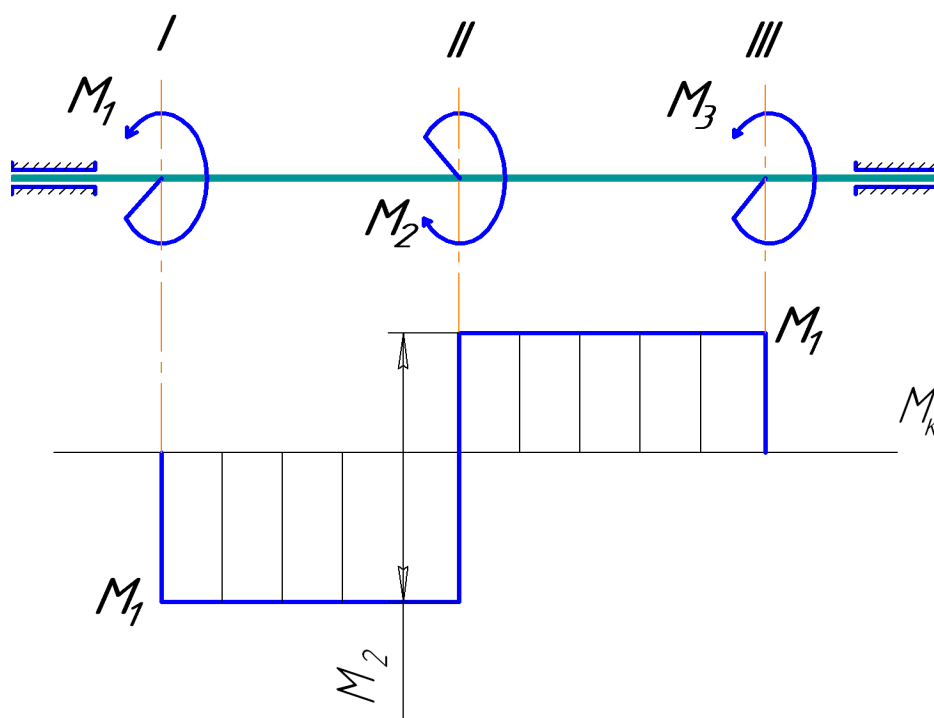


Рис. 16. Построение эпюры крутящих моментов для вращающегося вала

Вращающие моменты, скручивающие вал можно рассчитать по формуле:

$$M = \frac{P}{\omega},$$

где  $M$  – скручивающий момент,  $H \cdot м, H \cdot мм$ ;  $P$  – мощность, подведённая к валу или переданная им,  $Вт, кВт, МВт$ ;  $\omega$  – угловая скорость вращения вала,  $рад/с, с^{-1}$ .

Угловая скорость вращения связана с числом оборотов вала в минуту следующей формулой:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30},$$

где  $2\pi$  – длина окружности,  $рад$ ;  $n$  – число оборотов вала в минуту,  $об/мин$ .

Таким образом, при равномерном вращении вала алгебраическая сумма приложенных к нему вращающих моментов равна нулю. В нашем примере  $M_2 = M_1 + M_3$ , где  $M_1 = P_1/\omega$ ,  $M_2 = P_2/\omega$ ,  $M_3 = P_3/\omega$ .

Поэтому во всех случаях будем считать, что алгебраическая сумма внешних скручивающих вал моментов равна нулю, т. е. брус находится в равновесии.

## 2.2. Определение напряжений при кручении бруса круглого сечения

Теория кручения бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения основана на следующих допущениях.

1. Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации (*гипотеза Бернулли*).

2. Радиусы поперечных сечений при деформации бруса не искривляются.

3. Материал бруса при деформации следует закону Гука (это допущение является общим для всех видов деформаций).

4. Так как в поперечных сечениях бруса при кручении не возникают продольные силы, то расстояния между сечениями не изменяются.

Справедливость принятых допущений подтверждается тем, что полученные на основе их формулы совпадают с формулами, полученными в теории упругости без этих допущений, и хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Рассмотрим брус, жёстко защемлённый одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом  $M$  (рис. 17).

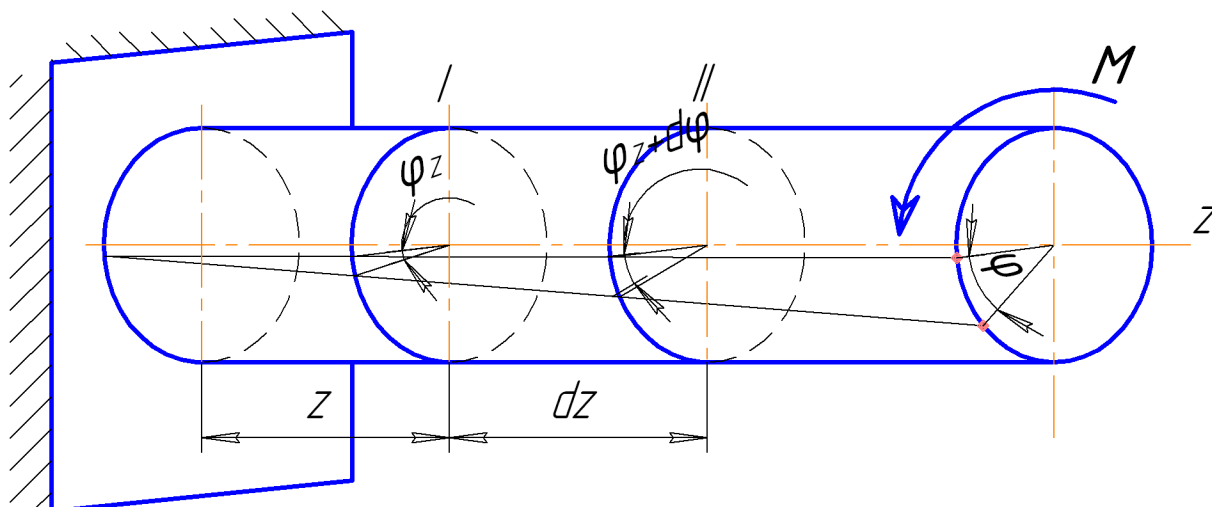


Рис. 17. Поворот поперечных сечений круглого бруса при его скручивании внешним моментом  $M$

При деформации бруса его поперечные сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему первоначальному положению или, что то-же, по отношению к неподвижному сечению (заделке).

Угол поворота будет тем больше, чем дальше отстоит данное сечение от заделки. Так, для произвольного сечения  $I$ , отстоящего от заделки на расстоянии  $z$ , он равен  $\varphi_z$ , для сечения  $II$  –  $(\varphi_z + d\varphi)$ . Здесь  $d\varphi$  – угол поворота сечения  $II$  относительно сечения  $I$ , или угол закручивания элемента бруса длиной  $dz$ .

В общем случае угол поворота произвольного сечения равен углу закручивания части бруса, заключённой между этим сечением и заделкой. Таким образом, угол поворота  $\varphi$  торцового сечения представляет собой полный угол закручивания рассматриваемого бруса.

Выделим часть рассмотренного бруса двумя бесконечно близкими поперечными сечениями  $I$  и  $II$ , расстояние между которыми равно  $dz$ . Будем считать эту часть защемленной в сечении  $I$  (рис. 18).

Точка  $B$ , взятая на контуре сечения  $II$ , в результате его поворота на угол  $d\varphi$  перейдёт в положение  $B_1$ , точка  $A$  при этом останется в первоначальном положении.

Тогда элемент  $dz$  будет испытывать деформацию сдвига (отрезок  $AB$  сдвигается в положение  $AB_1$ ), которая характеризуется углом сдвига  $\gamma_{max}$ .

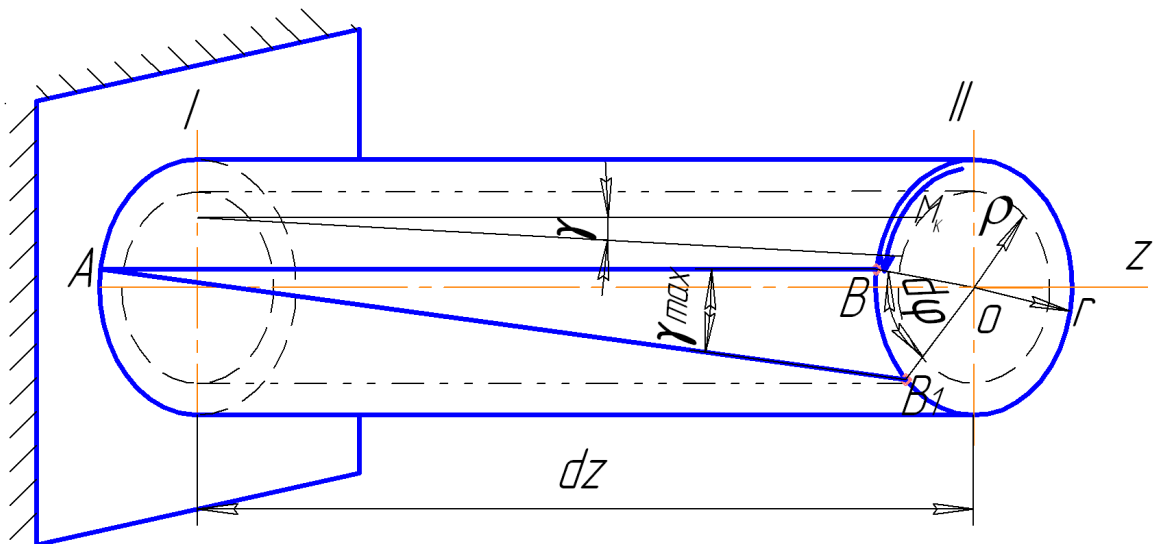


Рис. 18. Деформация сдвига при кручении и вызываемый ею внутренний крутящий момент  $M_k$

Определим угол сдвига.

Из прямоугольного треугольника  $ABB_1$  ( $\angle ABB_1 = 90^\circ$ ):

$$\operatorname{tg} \gamma_{\max} = \frac{BB_1}{AB} .$$

Выделенный элемент бесконечно мал, а тангенс малого угла примерно равен самому углу, т.е.  $\operatorname{tg} \gamma_{\max} \approx \gamma_{\max}$ .

С учётом того, что длина дуги  $BB_1 = r d\varphi$  (где  $r$  – радиус поперечного сечения бруса) и  $AB = dz$ , имеем:

$$\gamma_{\max} = \frac{r d\varphi}{dz} .$$

Если мысленно выделить из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного радиуса  $\rho$  и длиной  $dz$  (рис. 18) и повторить те же рассуждения, получим выражение угла сдвига для любой точки бруса:

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dz} .$$

Применяя метод сечений, легко убедиться, что крутящий момент во всех поперечных сечениях рассмотренного бруса одинаков:  $M_k = M$ .

Рассмотрим поперечное сечение радиусом  $r$ , в котором действует внутренний крутящий момент  $M_k$  (рис. 19). Выделим элементарную площадку  $dS$  на расстоянии  $\rho$  от центра сечения.

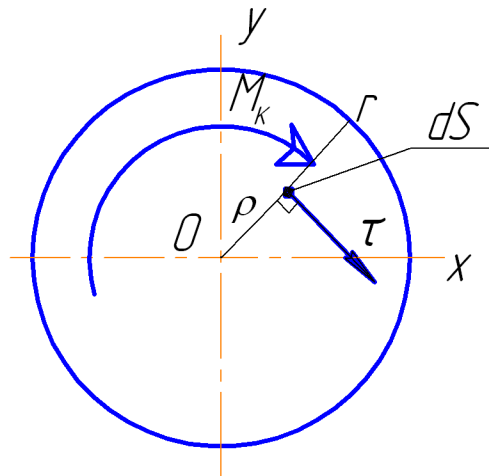


Рис. 19. К расчёту напряжений при кручении

Выразим крутящий момент через касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении.

Из характера деформации следует, что при повороте поперечного сечения каждая его точка (кроме лежащей на оси бруса) перемещается по дуге окружности, концентричной контуру сечения. Направление этого перемещения, а значит и возникающего в этой точке касательного напряжения перпендикулярно радиусу, проведённому в эту точку.

Элементарная касательная сила, приходящаяся на площадку  $dS$  равна произведению  $\tau \cdot dS$ . Момент этой силы относительно точки  $O$  (оси  $z$ ) равен:

$$dM_k = (\tau dS) \cdot \rho .$$

Суммируя (интегрируя) эти элементарные моменты по всей площади поперечного сечения, получим выражение крутящего момента, действующего в сечении:

$$M_k = \int_S \tau \rho dS .$$

Так как в поперечных сечениях бруса действуют лишь касательные напряжения, то *напряжённое состояние* в точках скручиваемого бруса представляет собой *чистый сдвиг*.

Поэтому можно применить закон Гука для сдвига:  $\tau = G \cdot \gamma$ . Подставив в эту зависимость полученное ранее значение угла сдвига  $\gamma$ , имеем:

$$\tau = \frac{G \rho d\varphi}{dz} .$$

Подставим теперь значение  $\tau$  в формулу для крутящего момента:



$$M_{\kappa} = \int_S G \rho \frac{d\varphi}{dz} \rho dS .$$

При интегрировании по площади поперечного сечения величина  $d\varphi/dz$  постоянна и, так же как и модуль сдвига  $G$ , может быть вынесена за знак интеграла:

$$M_{\kappa} = G \frac{d\varphi}{dz} \int_S \rho^2 dS .$$

Интеграл, входящий в это выражение, представляет собой *величину чисто геометрического характера*, называемую **полярным моментом инерции сечения** и обозначаемую  $J_p$ :

$$J_p = \int_S \rho^2 dS .$$

**Полярный момент инерции представляет собой взятую по всей площади сечения сумму произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до начала координат (центра тяжести сечения).**

Полярный момент инерции имеет размерность  $m^4$ ,  $см^4$ ,  $мм^4$ . Таким образом, *эта геометрическая характеристика для круглого бруса зависит лишь от его диаметра.*

Подставим новую величину в выражение крутящего момента и перепишем его теперь в виде:

$$M_{\kappa} = G J_p \frac{d\varphi}{dz} ,$$

откуда:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\kappa}}{G J_p} .$$

Подставляя значение  $d\varphi/dz$  в формулу для касательных напряжений, имеем:

$$\tau = G \rho \frac{M_{\kappa}}{G J_p} ,$$

или окончательно

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \rho .$$

Эта формула позволяет определить значение касательного напряжения *в любой точке поперечного сечения*. Из неё следует, что *напряжения распределены вдоль любого радиуса сечения по линейному закону*.

*В точках, равноудаленных от центра сечения, напряжения одинаковы.*

Эпюры касательных напряжений для круглого сплошного и кольцевого поперечных сечений показаны на рис. 20.

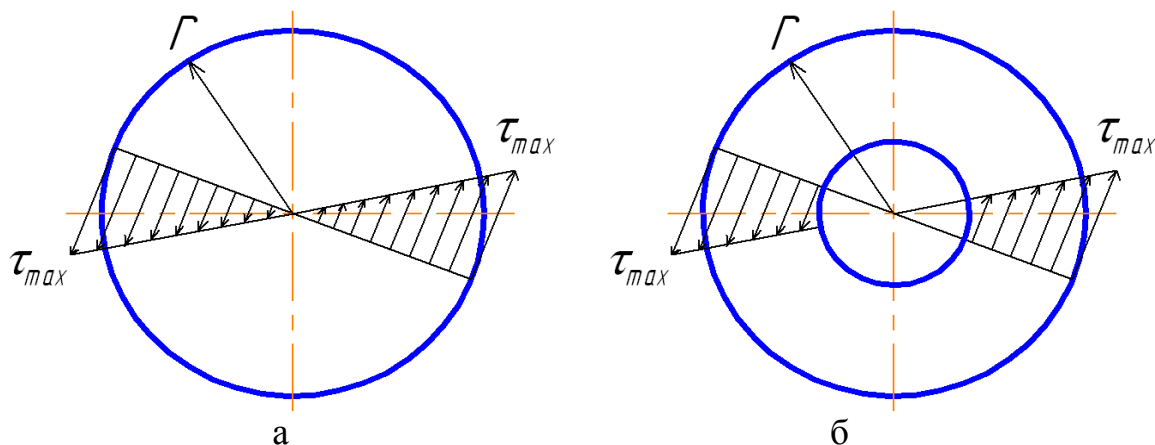


Рис. 20. Распределение касательных напряжений по круглому поперечному сечению: а – сплошному; б – кольцевому

Как видно из рисунка **наибольшего значения касательные напряжения достигают в точках контура поперечного сечения.** Применительно к брусу (валу) максимальные касательные напряжения возникают на его поверхности.

Максимальные касательные напряжения могут быть определены путём подстановки в выражение для  $\tau$  вместо произвольного радиуса  $\rho$  его наибольшего значения, т. е.  $r$  :

$$\tau_{max} = \frac{M_K r}{J_p} .$$

Введя новое обозначение  $W_p = J_p / r$  , получим следующее выражение для **максимального касательного напряжения**:

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_p} .$$

Величину  $W_p$  , равную отношению полярного момента инерции сечения к его радиусу, называют **полярным моментом сопротивления сечения**. Его размерность  $m^3$  ,  $cm^3$  ,  $mm^3$  .

**Полярный момент сопротивления является чисто геометрической характеристикой прочности бруса круглого поперечного сечения при кручении.**

### 2.3. Определение перемещений при кручении круглого бруса

Ранее было выяснено, что перемещения при кручении круглого бруса выражаются *углом закручивания*  $\varphi$ , представляющим собой взаимный поворот одного поперечного сечения относительно другого вокруг оси бруса.

Взаимный поворот бесконечно близких сечений (угол закручивания элемента бруса длиной  $dz$ ) был обозначен  $d\varphi$ . Формулу для его определения получим из выражения:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_K}{GJ_p}.$$

Тогда

$$d\varphi = \frac{M_K dz}{GJ_p}.$$

Суммируя элементарные углы закручивания, найдем *полный угол закручивания участка бруса длиной l*:

$$\varphi = \int_l \frac{M_K dz}{GJ_p}.$$

В самом общем случае, когда для отдельных участков бруса *законы изменения крутящих моментов или полярных моментов инерции (или тех и других одновременно) различны*, следует пользоваться формулой

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{K_i} dz}{GJ_{p_i}}.$$

*Модуль сдвига* материала, из которого изготовлен брус,  $G$  как правило, *одинаков для всего бруса*.

В частном случае, если *диаметр бруса (вала) постоянен и крутящий момент имеет во всех сечениях одинаковое значение*, то угол закручивания участка длиной  $l$ , будет равен:

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_p}.$$

Это выражение называют *формулой Гука для определения деформаций при кручении*, по аналогии с подобной формулой для определения абсолютной деформации при растяжении или сжатии:

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES} .$$

В числителе правой части этих выражений стоит произведение соответствующего внутреннего силового фактора на длину бруса, а в знаменателе – жёсткость сечения бруса.

Произведение  $GJ_p$  условно называют *жёсткостью сечения круглого бруса при кручении*.

*Модуль сдвига  $G$  характеризует жёсткость материала, а полярный момент инерции  $J_p$  является геометрической характеристикой жёсткости бруса.*

Если брус состоит из нескольких участков, в пределах которых крутящий момент  $M_k$  и полярный момент инерции  $J_p$  неизменны, то общий угол закручивания бруса равен:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{k_i} l_i}{GJ_{p_i}} .$$

Необходимо подчеркнуть важную деталь. Работоспособность вала в гораздо большей степени зависит не от абсолютного угла закручивания  $\varphi$ , а от его относительного значения.

**Относительным углом закручивания  $\varphi_0$  называется угол закручивания, приходящийся на единицу длины бруса:**

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{GJ_p} .$$

*Относительный угол закручивания не зависит от длины вала, а лишь от его диаметра и материала, из которого он изготовлен, а также от приложенных к нему скручивающих моментов.*

Все приведённые формулы дают значение угла закручивания  $\varphi$  в *радианах*. Однако при *практических расчётах* часто необходимо переводить размерность угла в *градусы* или наоборот.

Для такого перевода надо вспомнить, что  $2\pi$  (рад) = 360 (град), откуда

$$1 \text{ рад} = \frac{360}{2\pi} = 57,3 \text{ град} .$$

## 2.4. Определение геометрических характеристик круглого сечения

Площадь поперечного сечения является геометрической характеристикой его прочности и жёсткости лишь *при равномерном распределении напряжений по поперечному сечению* (например, при центральном растяжении-сжатии).

Как было показано ранее, *при работе круглого бруса на кручение напряжения распределяются по его сечению неравномерно*. Выяснено также, что в этом случае прочность и жёсткость бруса зависят не от *площади его сечения  $S$* , а от более сложной геометрической характеристики – *полярного момента инерции сечения  $J_p$*  и его производной – *полярного момента сопротивления  $W_p$* .

Выведем формулы для вычисления полярного момента инерции и полярного момента сопротивления. Сделаем это для кольцевого сечения с наружным диаметром  $d$  и внутренним диаметром  $d_0$  (рис. 21).

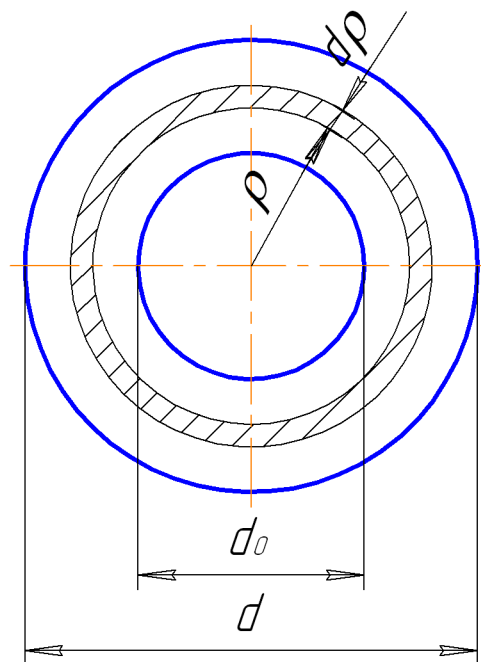


Рис. 21. К определению геометрических характеристик круглого сечения

Мысленно разобьём сечение на бесчисленное множество бесконечно тонких колец. Выделим одно из них на расстоянии  $\rho$  от центра сечения и обозначим его ширину как  $dr$ .

Как было установлено ранее, полярный момент инерции сечения имеет размерность длины в четвёртой степени и определяется выражением

$$J_p = \int_S \rho^2 dS,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения,  $dS$  – элементарная площадка.

Для рассматриваемого сечения за элемент площади  $dS$  примем площадь бесконечно тонкого кольца. Если это кольцо развернуть, то получим прямоугольник длиной  $2\pi\rho$  и шириной  $d\rho$ . Таким образом площадь элементарного кольца будет равна

$$dS = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Подставляя значение  $dS$  в выражение для полярного момента инерции, получим:

$$J_p = \int_S \rho^2 2\pi\rho d\rho.$$

Определимся с пределами интегрирования. Как видно из рисунка, радиус  $\rho$  рассматриваемого кольцевого сечения изменяется от  $d_0/2$  до  $d/2$ . Следовательно таковы и пределы интегрирования. Тогда в результате интегрирования получаем

$$J_p = \int_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{2} \left[ \left(\frac{d}{2}\right)^4 - \left(\frac{d_0}{2}\right)^4 \right].$$

Проведя дальнейшее преобразование, получим

$$J_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4).$$

Введём коэффициент  $C$ , равный отношению внутреннего диаметра кольцевого сечения к наружному:  $C = d_0/d$ . Теперь можно записать окончательную формулу для вычисления *полярного момента инерции кольцевого сечения*:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - C^4).$$

На практике чаще встречаются валы не кольцевого, а сплошного круглого сечения, для которого  $d_0 = 0$ , и следовательно,  $C = 0$ . Таким образом, *полярный момент инерции круглого сечения* равен

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Учитывая, что *полярный момент сопротивления сечения*  $W_p = J_p/r$ , выведем формулу для его расчёта:

для кольца

$$W_p = \frac{J_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{16d} (d^4 - d_0^4) = \frac{\pi d^3}{16} (1 - C^4),$$

для круга

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для упрощения практических расчётов, с учётом численного значения числа  $\pi$ , имеем

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad \text{и} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

## 2.5. Расчёты на прочность и жёсткость при кручении

### *Расчёты на прочность.*

*Прочностью называется способность материала сопротивляться возникновению малых пластических деформаций и разрушению. Мерой прочности при кручении являются максимальные касательные напряжения.*

Прочность бруса, работающего на кручение, считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном поперечном сечении, не превышают допустимых:

$$\tau_{max} \leq [\tau_K],$$

где  $[\tau_K]$  – допустимое напряжение при кручении.

Незначительное (до 5... 6%) превышение расчётного напряжения над допустимым не опасно.

Допускаемое напряжение  $[\tau_k]$  для пластичных материалов назначают в зависимости от их предела текучести при кручении (при сдвиге)  $\tau_m$ , т.е.

$$[\tau_k] = \tau_m / [n],$$

а для хрупких – в зависимости от предела прочности  $\tau_\sigma$ :

$$[\tau_k] = \tau_\sigma / [n],$$

где  $[n]$  – коэффициент запаса прочности материала.

Учитывая, что по экспериментальным данным предел текучести при кручении связан с пределом текучести при растяжении зависимостью  $\tau_m \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_m$ , принимают для стали  $[\tau_k] \approx (0,55 \dots 0,60) [\sigma_p]$ ; для чугуна  $[\tau_k] \approx (1,0 \dots 1,2) [\sigma_p]$ .

*Указанные интервалы допускаемых напряжений можно принимать лишь в том случае, когда брус не испытывает кроме кручения никаких других видов деформации.*

Практически на кручение обычно рассчитывают валы, которые помимо деформации кручения испытывают также изгиб. Не учитывая при ориентировочном расчёте валов влияния изгиба, делают ошибку, приводящую к уменьшению фактического коэффициента запаса прочности.

Для компенсации этой ошибки и обеспечения прочности вала допускаемое напряжение при кручении принимают пониженным по сравнению с указанными интервалами.

Так, для конструкционной углеродистой стали обычно принимают  $[\tau_k] = 20 \dots 40$  МПа .

Как известно из предыдущего, наибольшие напряжения возникают в точках контура поперечного сечения и вычисляются по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p}.$$

Таким образом, *условие прочности при кручении* выглядит следующим образом:

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k].$$

Эта формула служит для *проверочного расчёта* на прочность. Он основан на том, что по известным диаметру вала и моменту (мощности),



приложенному к нему, определяют наибольшее напряжение, возникающее в самом опасном сечении, и сравнивают его с допускаемым напряжением.

При *проектном расчёте* задаются допускаемым напряжением и, либо по известному диаметру вала определяют максимально допускаемый момент (мощность)

$$M_k \leq W_p \cdot [\tau_k],$$

либо по заданному моменту (мощности) рассчитывают минимальное значение диаметра вала

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau_k]}.$$

Полярный момент сопротивления равен

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

По этой формуле определяется диаметр вала. Из неё следует, что для повышения  $W_p$  в восемь раз, диаметр вала необходимо увеличить не в восемь раз, а всего лишь в два раза.

#### ***Расчёты на жёсткость.***

*Жёсткостью называется способность материала сопротивляться упругим деформациям, которые вызывают перемещения, превышающие допускаемые значения.*

*За меру жёсткости при кручении принимают относительный угол закручивания  $\varphi_0$ , т.е. угол закручивания на единицу длины вала.*

Опыт показывает, что, как правило, расчёт на жёсткость применительно к кручению имеет большее значение, чем расчёт на прочность. Зачастую вал, прочность которого обеспечена, «не проходит» по жёсткости.

Это связано с тем, что в отличие от допускаемого напряжения, зависящего в первую очередь от материала вала, **допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала и его размеров.**

В качестве примера можно указать на ходовые винты токарных станков, при деформации которых шаг их резьбы изменяется. Следовательно, и шаг резьбы, нарезанной на этом станке, получается с некоторой погрешностью.

Задавая определенный допуск на точность изготавливаемой резьбы, ставят требование ограничения угла закручивания ходового винта. Чем выше должна быть точность нарезанной резьбы, тем меньшую деформацию ходового винта можно допустить.

Значения *допускаемых углов закручивания*  $[\varphi_0]$ , встречающихся в различных отраслях машиностроения, весьма разнообразны; наиболее распространены значения  $[\varphi_0] = 0,25...1,0$  град/м. Для валов средних размеров общего назначения можно принимать  $[\varphi_0] = 0,5$  град/м.

Здесь следует заметить, что размерность относительного угла закручивания, полученное из формулы Гука, выражается в рад/мм, а значит необходимо правильно переводить единицы измерения.

*Условие жёсткости вала при кручении* выглядит следующим образом:

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi_0].$$

При *проверочном расчёте* определяют относительный угол закручивания и сравнивают его значением с допускаемым.

При *проектном расчёте* задаются допускаемым относительным углом закручивания и, либо по известному диаметру вала определяют максимально допускаемый момент (мощность)

$$M_k \leq GJ_p \cdot [\varphi_0],$$

либо по заданному моменту (мощности) рассчитывают минимальное значение диаметра вала

$$J_p \geq \frac{M_k}{G \cdot [\varphi_0]}.$$

Полярный момент инерции зависит от диаметра вала в четвёртой степени:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Поэтому для увеличения  $J_p$ , например, в три раза, диаметр вала достаточно увеличить в 1,316 раза ( $1,316^4 = 3$ ).

Приведённых в настоящей главе сведений вполне достаточно для того, чтобы рассчитать на прочность и жёсткость брус, состоящий из одного участка постоянного диаметра и скручиваемый двумя моментами, приложенными на концах бруса.

В других случаях для расчётов необходимо строить эпюры тех или иных характеристик.

## 2.6. Построение эпюр при расчётах на прочность и жёсткость

В главе 2.1 были показаны основные принципы построения эпюр крутящих моментов  $M_k$ . Эпюра строится по «скачкам», соответствующим внешним сосредоточенным моментам. На всех участках эпюра параллельна своей оси.

Рассмотрим теперь случай, когда к брусу приложены сосредоточенный момент  $M_1$  и распределённый по длине момент  $M_2$  (рис. 22).

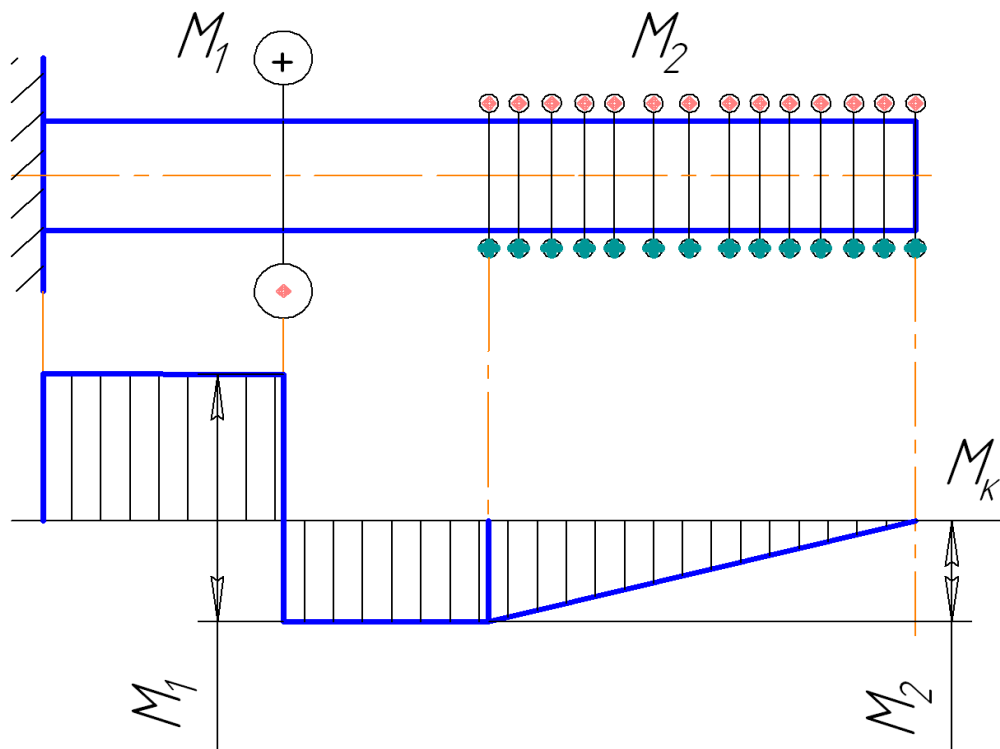


Рис. 22. Построение эпюры крутящего момента при действии на брус сосредоточенного и распределённого скручивающих моментов

Как видно из рисунка, на участке, где действует распределённый момент  $M_2$ , эпюра представляет собой наклонную прямую. Так как крутящий момент на этом участке изменяется по линейному закону, легко определить его в любом сечении.

Важно при составлении расчётной схемы решить вопрос, каким считать тот или иной момент – сосредоточенным или распределённым. Момент необходимо считать распределённым тогда, когда участок его действия сопоставим с длиной бруса.

Рассмотрим теперь стальной брус ( $G = 8 \cdot 10^4$  МПа) круглого поперечного сечения, жёстко заделанный одним концом (рис. 23).

Построим эпюры: крутящих моментов  $M_k$ , касательных напряжений  $\tau_{max}$  и углов поворота сечений  $\varphi$ .

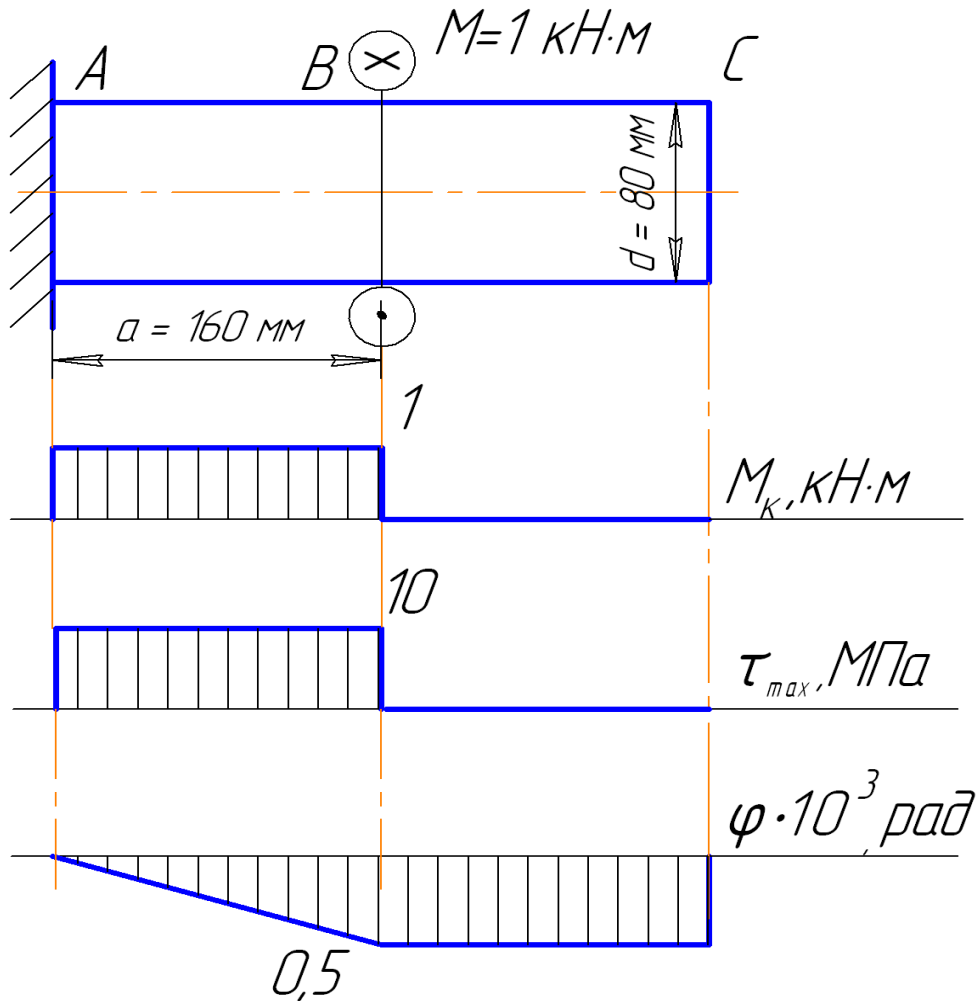


Рис. 23. Иллюстрация отличия понятий «деформация» и «перемещение»

Методом сечений определяем, что на участке  $BC$  крутящий момент равен нулю. На участке  $AB$  крутящий момент во всех сечениях одинаков:

$$M_k = M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Положительный знак эпюры  $M_k$  выбран согласно установленному ранее правилу.

Построение эпюры напряжений осуществляется путём определения  $\tau_{max}$  на каждом участке по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p}.$$

Не надо забывать, что во избежание серьёзных ошибок в расчётах, необходимо в формулах переводить все размерности в  $\text{Н}$ ,  $\text{мм}$  и  $\text{МПа}$ .

Так как диаметр бруса на обоих участках одинаков, полярный момент сопротивления также неизменен:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 80^3}{16} = 10^5 \text{ мм}^3.$$

Естественно, что на участках, где крутящий момент равен нулю (это участок *BC*), напряжения отсутствуют. Отсутствие напряжений свидетельствует о том, что данная часть бруса не деформируется.

На участке *AB* напряжения равны

$$\tau_{max} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{10^5} = 10 \text{ МПа}.$$

Наличие двух сомножителей  $10^3$  – перевод килоньютон в ньютон и метров в миллиметры.

Знак эпюры  $\tau_{max}$  на каждом участке бруса должен быть таким же, как и знак эпюры  $M_k$ .

*Эпюра напряжений строится с целью определения наиболее опасных с точки зрения прочности сечений.* Дело в том, что опасные сечения нельзя определить по эпюре моментов, если брус состоит из участков с разными диаметрами. Участок с большим крутящим моментом может иметь большой диаметр, а значит большой  $W_p$  (он зависит от диаметра по кубической зависимости) и, следовательно, малые напряжения, и, наоборот.

Если диаметр бруса по всей его длине одинаков, строить эпюру напряжений не обязательно (она с точностью повторит эпюру моментов), достаточно просто вычислить эти напряжения.

Знак эпюры напряжений (как и эпюры моментов) не имеет физического смысла, а важен для правильного построения эпюр. Поэтому опасными считаются сечения, где напряжения являются наибольшими по модулю.

Перейдём к построению *эпюры углов закручивания  $\varphi$* . Эта эпюра показывает на какой угол и в каком направлении поворачиваются сечения бруса.

Если брус имеет неподвижное сечение (жёсткую заделку), эпюра строится от него. В нашем случае это сечение *A*.

Определим угол поворота сечения *B* относительно сечения *A*. Обозначим его  $\varphi_{BA}$ . По формуле Гука этот угол поворота равен углу закручивания участка *AB*:

$$\varphi_{BA} = \frac{M_k a}{GJ_p}.$$

Полярный момент инерции одинаков на обоих участках:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 80^4}{32} = 4 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Тогда

$$\varphi_{BA} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 160}{8 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Это значение угла откладываем на эпюре  $\varphi$  под сечением  $B$ . Во избежание нагромождения цифр на эпюре указываем значения углов, уменьшенные в  $10^3$  раз, и помечаем это на оси эпюры коэффициентом  $10^3$ .

Как определить, по какую сторону от оси эпюры откладывать полученное значение. Примем следующее правило знаков для углов поворота сечений.

Углы  $\varphi$  будем считать *положительными, когда сечения поворачиваются против часовой стрелки (если смотреть вдоль оси вала справа налево)*.

Если посмотреть на наш брус справа (со стороны сечения  $C$ ), видно, что все сечения участка  $AB$  поворачиваются по часовой стрелке. Значит углы  $\varphi$  будем считать отрицательными.

Эпюра  $\varphi$  на участках бруса, где  $M_k$  и  $J_p$  неизменны, всегда прямая наклонная линия. Т.е. угол поворота любого сечения на участке  $AB$  прямо пропорционален расстоянию от жёсткой заделки.

Как будет выглядеть эпюра  $\varphi$  на участке  $BC$ . Для ответа на этот вопрос вспомним, что полный угол закручивания бруса (или в нашем случае поворот сечения  $C$  относительно сечения  $A$ ) равен сумме углов закручивания на всех участках бруса. Или

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_{BC}.$$

Значение  $\varphi_{BA}$  мы нашли. Угол закручивания сечения  $C$  относительно сечения  $B$  равен нулю (так как на участке  $BC$  крутящий момент равен нулю), т.е.  $\varphi_{BC} = 0$ . Следовательно,

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Это значит, что сечение  $C$ , как и все сечения участка  $BC$  повернётся относительно сечения  $A$  на такой же угол, что и сечение  $B$ . А значит эпюра углов закручивания на этом участке будет параллельна своей оси.

Таким образом, на участках бруса, не испытывающих деформацию (крутящий момент равен нулю), сечения, тем не менее, поворачиваются, причём не каждое само по себе, а единым целым.

В этом и есть **отличие деформации от перемещения**. *Деформация тела всегда сопровождается перемещением* частиц тела. *Перемещение не обязательно может быть вызвано деформацией*.

Определим относительный угол закручивания:

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} = \frac{\varphi}{a} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{160} = 3,125 \cdot 10^{-6} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 0,18 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

**Рассмотрим следующий пример.**

Имеется вращающийся вал, скручиваемый тремя внешними моментами (рис. 24). Напомним, что алгебраическая сумма всех внешних моментов, приложенных к валу, должна быть равна нулю. Диаметр вала по длине постоянен – такие валы называют гладкими.

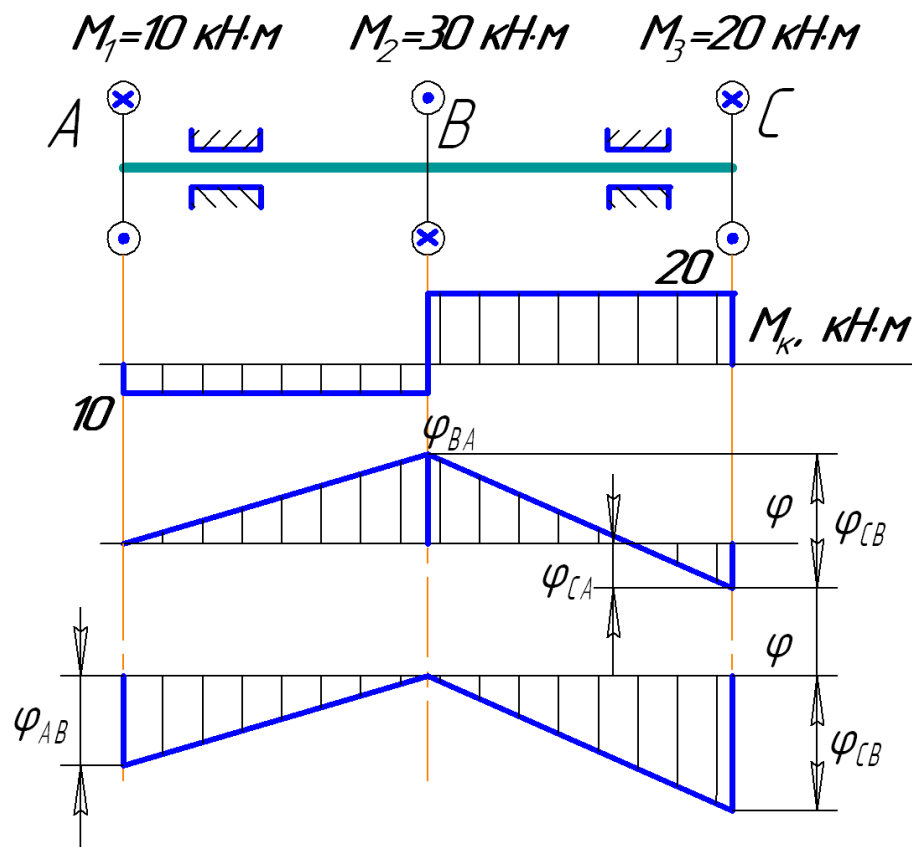


Рис. 24. Построение эпюры  $\varphi$  в случае вращающегося вала

По скачкам, соответствующим внешним моментам, строим эпюру крутящих моментов  $M_k$ .

Так как диаметр неизменен, эпюру напряжений строить необязательно, она бы в точности повторила эпюру моментов. Из эпюры  $M_k$  видно, что с точки зрения прочности более опасным является участок  $BC$ . Для него и рассчитываются напряжения  $\tau_{max}$ .

Перейдём к построению эпюры углов поворота  $\varphi$ . В предыдущем примере мы строили её, начиная от неподвижного сечения (жёсткой заделки). В рассматриваемом примере вал вращается – неподвижных сечений нет.

В таких случаях для построения эпюры угловых перемещений за неподвижное условно принимается любое сечение ( $A$ ,  $B$  или  $C$ ), и эпюра строится относительно этого сечения.

Построим две эпюры  $\varphi$ , приняв за неподвижное разные сечения.

Примем за условно неподвижное сечение  $A$ . Определим по формуле Гука поворот сечения  $B$  относительно  $A$ :

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{kAB} l_{AB}}{GJ_p}.$$

Определим угол поворота сечения  $C$  относительно сечения  $B$ :

$$\varphi_{CB} = -\frac{M_{kBC} l_{BC}}{GJ_p}.$$

Угол поворота сечения  $C$  относительно  $A$  будет равен:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = -\frac{M_{kBC} l_{BC}}{GJ_p} + \frac{M_{kAB} l_{AB}}{GJ_p}.$$

Если за условно неподвижное принять сечение  $B$ , то эпюра угловых перемещений будет выглядеть иначе. Однако, нетрудно заметить, что численные значения углов останутся теми же, просто эпюра как бы сместится в вертикальном направлении, сохранив свою форму.

Естественно, что  $\varphi_{BA} = \varphi_{AB}$ .

**Пример.** Ступенчатый стальной брус круглого поперечного сечения жёстко заделан одним концом и нагружен, как показано на рис. 25.

Построить эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений. Проверить прочность бруса при допуске напряжении  $[\tau_k] = 60$  МПа. Проверить жёсткость бруса при допуске угла закручивания  $[\varphi_0] = 0,9$  град/м.



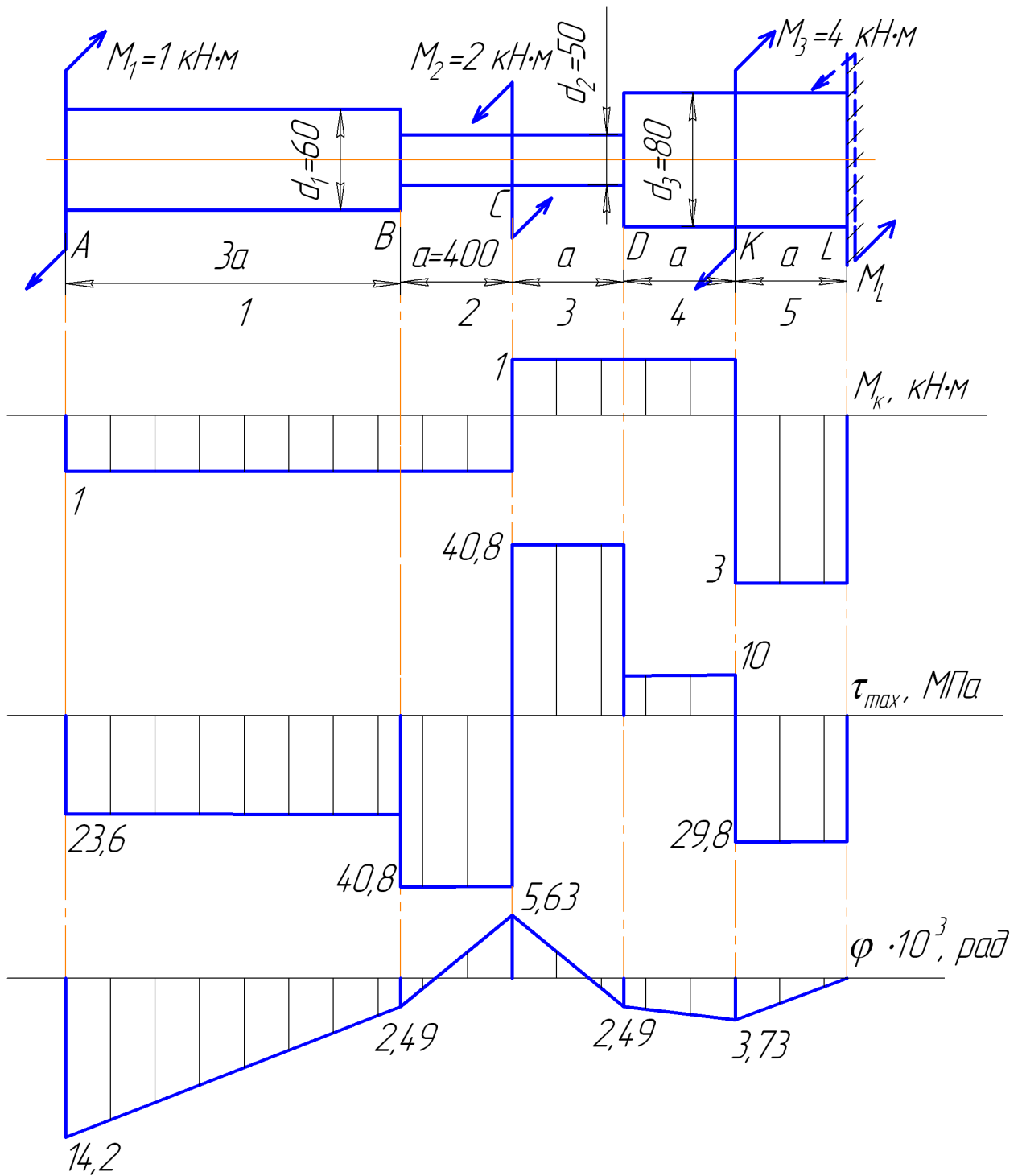


Рис. 25. Построение эпюр при кручении

**Решение.** Разбиваем брус на пять участков. Границы участков обозначаем заглавными латинскими буквами.

Учитывая то, что алгебраическая сумма внешних моментов должна равняться нулю, находим, что в жёсткой заделке действует «недостающий» для равенства реактивный момент

$$M_L = M_1 + M_3 - M_2 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюру крутящих моментов  $M_k$  строим либо с помощью метода сечений, либо «по скачкам».

Для нахождения опасного сечения строим эпюру максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$  по формулам:

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} \quad \text{и} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для каждого участка подставляем свои значения крутящего момента и диаметра:

$$\tau_{max1} = \frac{M_{k1}}{W_{p1}} = \frac{-1 \cdot 10^6 \cdot 16}{3,14 \cdot 60^3} = -23,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{-1 \cdot 10^6 \cdot 16}{3,14 \cdot 50^3} = -40,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max3} = \frac{M_{k3}}{W_{p3}} = \frac{+1 \cdot 10^6 \cdot 16}{3,14 \cdot 50^3} = +40,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max4} = \frac{M_{k4}}{W_{p4}} = \frac{+1 \cdot 10^6 \cdot 16}{3,14 \cdot 80^3} = +10,0 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max5} = \frac{M_{k5}}{W_{p5}} = \frac{-3 \cdot 10^6 \cdot 16}{3,14 \cdot 80^3} = -29,8 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру напряжений. Знаки эпюр моментов и напряжений на каждом участке должны быть одинаковы. С этой целью расчёты велись с учётом знака момента.

Знак касательного напряжения при расчете на прочность никакой роли не играет, и принятое направление ординат эпюры условно.

Из эпюры напряжений видим, что опасными оказались поперечные сечения участков **BC** и **CD** где действуют наибольшие напряжения. Таким образом, опасными оказались вовсе не те сечения, в которых крутящий момент максимален (участок 5).

Как видим, прочность нашего бруса обеспечена, так как выполняется условие прочности:

$$\tau_{max} = 40,8 \text{ МПа} < [\tau_k] = 60 \text{ МПа}.$$

Очевидно, что материал бруса использован нерационально; даже в опасном сечении максимальное напряжение на 32% ниже допустимого.

Следовательно, исходя из такого запаса прочности, диаметры бруса на участках при возможности можно уменьшить, что приведёт к облегчению бруса.

Эпюру углов поворота поперечных сечений строим, начиная от заземлённого (неподвижного) конца ( $\varphi_L = 0$ ).

В пределах каждого из участков бруса эпюра линейна, поэтому достаточно вычислить углы поворота только для граничных сечений участков. Для вычисления применим формулы

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} \quad \text{и} \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Угол поворота сечения  $K$  относительно сечения  $L$  равен углу закручивания участка  $KL$  (участка 5):

$$\varphi_{KL} = \frac{M_{\kappa 5} \cdot a}{GJ_{p5}} = \frac{-3 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 80^4} = -3,73 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Угол поворота сечения  $D$  относительно сечения  $K$  равен углу закручивания участка  $DK$  (участка 4):

$$\varphi_{DK} = \frac{M_{\kappa 4} \cdot a}{GJ_{p4}} = \frac{+1 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 80^4} = +1,24 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения  $D$  относительно сечения  $L$  равен алгебраической сумме углов закручивания участков 5 и 4. Таким образом, ордината эпюры  $\varphi$  под сечением  $D$  равна

$$\varphi_{DL} = \varphi_{KL} + \varphi_{DK} = (-3,73 + 1,24) \cdot 10^{-3} = -2,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Подобным образом достраиваем эпюру перемещений.

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{\kappa 3} \cdot a}{GJ_{p3}} = \frac{+1 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 50^4} = +8,12 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CL} = \varphi_{DL} + \varphi_{CD} = (-2,49 + 8,12) \cdot 10^{-3} = +5,63 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{\kappa 2} \cdot a}{GJ_{p2}} = \frac{-1 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 50^4} = -8,12 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{BL} = \varphi_{CL} + \varphi_{BC} = (+5,63 - 8,12) \cdot 10^{-3} = -2,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{к1} \cdot 3a}{GJ_{p1}} = \frac{-1 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 400 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 60^4} = -11,7 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{AL} = \varphi_{BL} + \varphi_{AB} = (-2,49 - 11,7) \cdot 10^{-3} = -14,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определим относительные углы закручивания на каждом участке бруса по формуле  $\varphi_0 = \varphi / l$ .

$$\varphi_{01} = \frac{\varphi_1}{3a} = \frac{11,7 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 400} = 0,98 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 0,56 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$\varphi_{02} = \frac{\varphi_2}{a} = \frac{8,12 \cdot 10^{-3}}{400} = 2,03 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 1,16 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$\varphi_{03} = \frac{\varphi_3}{a} = \frac{8,12 \cdot 10^{-3}}{400} = 2,03 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 1,16 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$\varphi_{04} = \frac{\varphi_4}{a} = \frac{1,24 \cdot 10^{-3}}{400} = 0,31 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 0,18 \frac{\text{град}}{\text{м}};$$

$$\varphi_{05} = \frac{\varphi_5}{a} = \frac{3,73 \cdot 10^{-3}}{400} = 0,93 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 0,53 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Как видим, относительные углы закручивания бруса на втором и третьем участке превышают допустимое значение.

Таким образом, прочность рассчитанного бруса обеспечена с большим запасом. Жёсткость бруса на участках с диаметром 50 мм не обеспечена. Увеличение диаметра  $d_2$  с 50 до 55 мм снижает относительный угол закручивания на этих участках до **0,8 град/м**, что обеспечивает заданную жёсткость всего бруса.

## 2.7. Энергия деформации при кручении

При кручении, так же как и при других видах деформации бруса, работа внешних сил (скручивающих моментов) расходуется на создание в деформируемом теле определённого запаса энергии (потенциальной энергии деформации).

Выведем формулу для определения этой энергии, рассматривая брус,

жёстко заделанный одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом  $M$ .

Как и ранее, будем считать, что нагружение осуществляется статически в пределах действия закона Гука. Таким образом, зависимость между скручивающим моментом и углом закручивания линейная. График этой зависимости представлен на рис. 26.

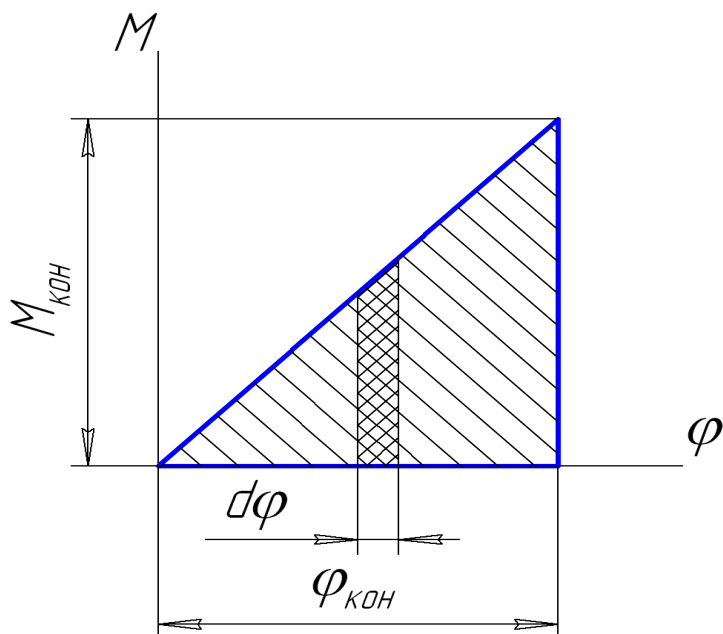


Рис. 26. К определению энергии деформации при кручении

Из курса теоретической механики известно, что работа момента (пары сил) равна произведению момента на угол поворота. При приращении угла поворота на величину  $d\varphi$  соответствующая элементарная работа

$$dW = M d\varphi .$$

Эта работа выражается на графике (рис. 26) площадью густо заштрихованной трапеции, которую из-за малого значения  $d\varphi$  можно рассматривать как прямоугольник.

Вся работа выразится площадью заштрихованного треугольника, т.е.

$$W = 0,5 M_{\text{кон}} \varphi_{\text{кон}} ,$$

где  $M_{\text{кон}}$  и  $\varphi_{\text{кон}}$  — соответственно конечные значения скручивающего момента и угла закручивания.

Таким образом, получено выражение *теоремы Клапейрона* для случая кручения.

Учитывая, что работа  $W$  внешних сил (момента  $M$ ) равна потенциальной энергии деформации  $V$  и в рассматриваемом случае крутящий момент во всех сечениях одинаков:  $M_k = M$ , имеем

$$W = V = 0,5 M_k \varphi .$$

Выразим угол закручивания по формуле Гука и окончательно получим выражение для энергии деформации при кручении бруса.

Если в пределах участка бруса  $M_k = \text{const}$  и  $J_p = \text{const}$ , то

$$V = 0,5 M_k \frac{M_k l}{GJ_p} = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p} .$$

При ступенчатом изменении сечения бруса или крутящего момента:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{M_{k_i}^2 l_i}{2GJ_{p_i}} .$$

В случае, если  $M_k$  и  $J_p$  (или обе эти величины) изменяются по длине отдельных участков непрерывно, следует пользоваться формулой

$$V = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_k^2 dz}{2GJ_p} .$$

## 2.8. Статически неопределимые задачи при кручении

Ранее мы рассчитывали на кручение прямые брусья, жёстко закреплённые одним концом, а также валы, представляющие собой вращающиеся брусья, нагруженные взаимно уравновешенными скручивающими моментами.

Значения крутящих моментов в этих расчётах можно определить с помощью одних лишь *уравнений равновесия (методом сечений)*. Следовательно, такие задачи являются *статически определимыми*.

Если крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях скручиваемых стержней, нельзя определить с помощью только уравнений равновесия, то такие задачи являются *статически неопределимыми*.

Для решения статически неопределимых задач дополнительно к уравнениям равновесия необходимо составлять также *уравнения перемещений*, основанные на рассмотрении характера деформации системы.

Рассмотрим брус, жёстко заделанный обоими концами и нагруженный моментом  $M$  на расстоянии  $a$  от левого конца (рис. 27, а).

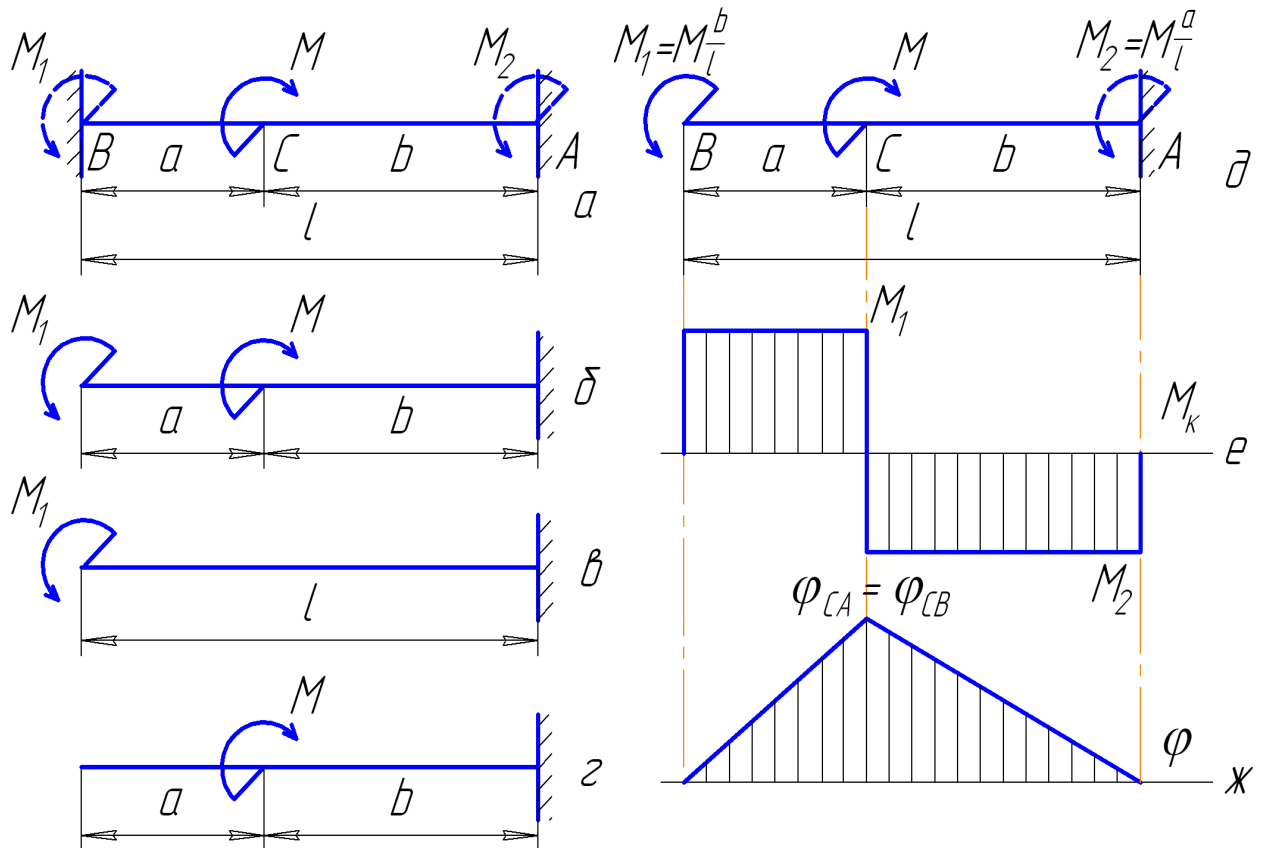


Рис. 27. К решению статически неопределимой задачи на кручение

Для решения данной задачи можно составить лишь одно уравнение равновесия – в виде равенства нулю суммы моментов относительно оси бруса:

$$\sum M = M_1 - M + M_2 = 0,$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – реактивные скручивающие моменты, возникающие в заделках.

Дополнительное уравнение для решения рассматриваемой задачи можно получить следующим образом. Отбросим левое опорное закрепление бруса, но оставим правое (рис. 27, б).

Поворот левого конца полученного таким путём бруса должен быть равен нулю, т.е.  $\varphi_B = 0$ , так как в действительности этот конец жёстко закреплён и не может поворачиваться.

На основании принципа независимости действия сил уравнение перемещений имеет вид

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2} = 0.$$

Здесь  $\varphi_{B1}$  – угол поворота левого конца бруса от действия внешнего

скручивающего момента  $M_1$  (рис. 27, в);  $\varphi_{B2}$  – угол поворота левого конца бруса от действия внешнего  $M$  (рис. 27, г).

Учитывая, что правый конец бруса не поворачивается (т.е.  $\varphi_A = 0$ ), находим

$$\varphi_{B1} = \frac{M_1 l}{GJ_p}; \quad \varphi_{B2} = -\frac{Mb}{GJ_p}.$$

Подставим эти значения в уравнение перемещений:

$$\frac{M_1 l}{GJ_p} - \frac{Mb}{GJ_p} = 0,$$

откуда

$$M_1 = M \frac{b}{l}.$$

Из уравнения равновесия

$$M_2 = M - M_1 = M \frac{a}{l}.$$

После определения моментов  $M_1$  и  $M_2$  эпюру крутящих моментов можно построить обычным способом, т.е. как для статически определимого бруса (рис. 27, д). Эта эпюра представлена на рис. 27, е.

Построим *эпюру углов поворота* бруса. Крайнее правое сечение  $A$  бруса неподвижно, т.е.  $\varphi_A = 0$ . Также неподвижно крайнее правое сечение  $B$ :  $\varphi_B = 0$ .

Угол поворота сечения  $C$  относительно сечения  $A$  равен

$$\varphi_{CA} = \frac{M_1 a}{GJ_p} = \frac{Mba}{GJ_p l},$$

а относительно сечения  $B$

$$\varphi_{CB} = \frac{M_2 b}{GJ_p} = \frac{Mab}{GJ_p l}.$$

Таким образом,  $\varphi_{CA} = \varphi_{CB}$ , что естественно по условию задачи.

Построенная по полученным значениям эпюра углов поворота представлена на рис. 27, ж.

При действии на брус нескольких внешних скручивающих моментов, а также для брусьев, имеющих на отдельных участках разные поперечные сечения, составление дополнительных уравнений производится способом, аналогичным показанному.



## 2.9. Расчет цилиндрических винтовых пружин

**Цилиндрические винтовые пружины** рассматриваются здесь в связи с тем, что, как будет показано ниже, такая пружина представляет собой пространственно изогнутый брус круглого поперечного сечения (пруток или проволоку).

Если принять некоторые допущения, то можно считать, что при деформации пружины в поперечных сечениях проволоки возникают лишь касательные напряжения, что соответствует напряжённому состоянию *чистого сдвига*.

**Винтовые пружины** широко применяют в различных областях машиностроения и приборостроения: в качестве элементов амортизирующих (смягчающих толчки и удары) устройств (например, рессоры некоторых транспортных средств); для возврата движущихся деталей в исходное положение (например, клапанные пружины двигателей); для силоизмерения (в динамометрах); в качестве устройств, аккумулирующих энергию (боевые пружины огнестрельного оружия); элементов регистрирующих и записывающих приборов и т.д.

По форме винтовые пружины делят на цилиндрические, конические и фасонные. Здесь рассмотрим только расчёт цилиндрических винтовых пружин растяжения (рис. 28, а) и сжатия (рис. 28, б), изготовленных из проволоки круглого поперечного сечения.

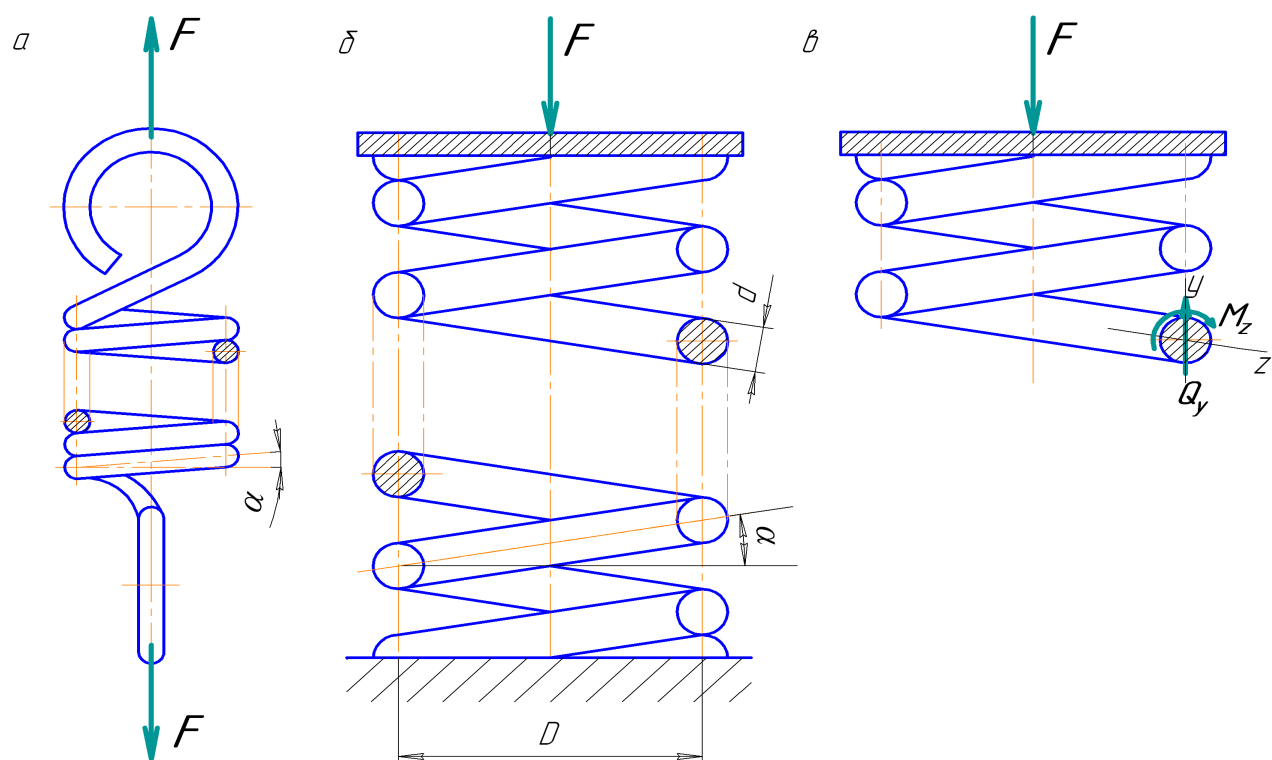


Рис. 28. К расчёту цилиндрических винтовых пружин растяжения и сжатия

Расчёт пружин растяжения и сжатия на прочность и жёсткость одинаков, но для пружин сжатия при  $H/D \geq 2,6$  ( $H$  – высота пружины в свободном состоянии;  $D$  – её *средний диаметр*) возникает опасность потери устойчивости (выпучивания). Такие сравнительно высокие пружины монтируют в гильзах или на оправках, препятствующих выпучиванию пружин.

*Угол наклона  $\alpha$*  витков пружины будем считать небольшим ( $\alpha \leq 15^\circ$ ); только при этом условии излагаемая ниже приближённая теория даёт удовлетворительные результаты. Обычно этот угол составляет  $5...10^\circ$ .

Рассечём виток пружины (рис. 28, б) плоскостью, проходящей через её ось. Учитывая введённое ограничение, можем считать, что это сечение является для витка поперечным, т. е. принимаем  $\alpha = 0$  и рассматриваем пружину как бы состоящей из колец, расположенных в плоскостях, перпендикулярных её продольной оси.

Рассматривая условие равновесия отсечённой части пружины, изображенной отдельно на рис. 28, в, заключаем, что в поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора: *поперечная сила*  $Q_y = F$  и *крутящий момент*  $M_k = M_z = F \cdot 0,5D$ .

Исходя из этого, можно заключить, что в поперечном сечении витка возникают только *касательные напряжения*. Для их определения введем два допущения.

1. *Касательные напряжения, связанные с наличием крутящего момента*, определяются так же, как при кручении прямого бруса круглого поперечного сечения диаметром  $d$ . Эпюра этих напряжений для точек горизонтального диаметра дана на рис. 29, а.

2. *Касательные напряжения, связанные с наличием поперечной силы*, распределены по сечению равномерно. Эпюра этих напряжений дана на рис. 29, б.

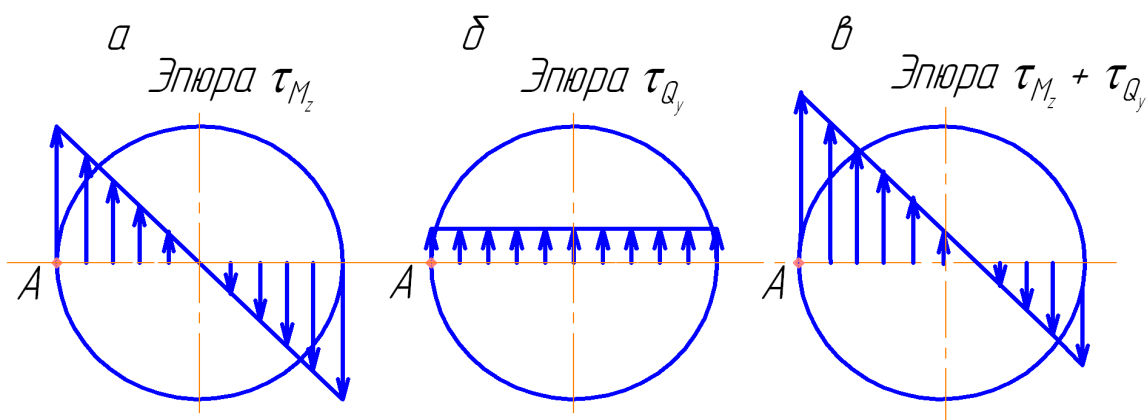


Рис. 29. Эпюры касательных напряжений в поперечном сечении витка пружины

Суммируя касательные напряжения, возникающие в точках горизонтального диаметра сечения витка, получаем *результатирующую эпюру*, показанную на рис. 29, в.

Опасной, очевидно, оказывается точка  $A$ , ближайшая к оси пружины. В этой точке касательное напряжение максимально и равно

$$\tau_A = \tau_{max} = \tau_{Mzmax} + \tau_{Qy} .$$

Максимальное напряжение, связанное с крутящим моментом

$$\tau_{Mzmax} = \frac{M_z}{W_p} ,$$

где  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения витка пружины;  $M_z = F \cdot 0,5D$  – крутящий момент.

Напряжение, связанное с поперечной силой

$$\tau_{Qy} = \frac{Q_y}{S} ,$$

где  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь поперечного сечения витка;  $Q_y = F$  – поперечная сила.

Тогда суммарное максимальное напряжение равно

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) .$$

Отношение среднего диаметра пружины  $D$  к диаметру проволоки  $d$  обозначается буквой  $i$  и называется *индексом пружины*:

$$i = \frac{D}{d} .$$

Промышленностью обычно выпускаются пружины, имеющие индекс  $i = 5 \dots 12$ .

При указанных значениях индекса пружины второе слагаемое в скобках составляет не более 0,1 от первого. Если пренебречь вторым слагаемым, т. е. учитывать лишь напряжения от кручения, пренебрегая напряжениями, соответствующими поперечной силе, получится следующая *приближённая формула для определения максимального напряжения*:

$$\tau_{max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3} .$$

Данная формула даёт значение напряжения, меньшее действительного, т. е. погрешность формулы идёт не в запас прочности. Это связано не только с *пренебрежением влиянием поперечной силы*: более существенная погрешность получается из-за того, что при выводе формулы не учтена *кривизна витков*.

Распределение напряжений от кручения принято таким же, как для прямого бруса круглого сечения, а ось витков пружины представляет собой пространственную кривую – винтовую линию.

Если учитывать *угол наклона витка  $\alpha$* , получается, что в поперечном сечении проволоки возникает четыре внутренних силовых фактора: *продольная сила  $N_z = F \sin \alpha$* ; *поперечная сила  $Q_y = F \cos \alpha$* ; *изгибающий момент  $M_x = F \cdot 0,5D \sin \alpha$* ; *крутящий момент  $M_z = F \cdot 0,5D \cos \alpha$* .

Исследования напряжений в пружинах, выполненные методами теории упругости, позволили уточнить значение  $\tau_{max}$  путём введения в формулу *поправочного коэффициента  $k$* , зависящего от *индекса пружины  $i$*  и *угла  $\alpha$*  подъёма её витков.

С учётом указанного коэффициента *условие прочности цилиндрической винтовой пружины* можно записать в виде

$$\tau_{max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Значения *поправочного коэффициента  $k$*  принимают по следующим данным:

<i><math>i</math></i>	2	5	6	8	10	12
<i><math>k</math></i>	1,37	1,29	1,24	1,17	1,14	1,11

Несколько менее точное, но вполне приемлемое для практических расчётов значение  $k$  получается по формуле

$$k = \frac{4i + 1}{4i - 4}.$$

Пружины изготавливают из высококачественной стали, поэтому допускаемые напряжения, принимаемые при их расчёте, имеют высокие значения:  $[\tau] = 200... 1000 \text{ МПа}$ .

Выведем теперь формулу для определения изменения  $\lambda$  высоты пружины под нагрузкой. Для пружин сжатия эту величину называют *осадкой*. Осадка имеет размерность длины.

*Работа внешней статически приложенной силы* определяется по теореме Клапейрона:

$$W = 0,5F\lambda,$$

где  $F$  и  $\lambda$  – конечные значения растягивающей (сжимающей) пружину силы и перемещения точки её приложения (осадки пружины).

Эта работа равна *внутренней потенциальной энергии деформации* пружины, которая может быть вычислена по выведенной ранее формуле:

$$V = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}.$$

Энергией, связанной с наличием поперечных сил, пренебрегаем.

В выражении для потенциальной энергии под  $l$  понимается полная длина проволоки пружины  $l \approx \pi Dn$ , где  $n$  – число витков.

Учитывая, что  $M_z = F \cdot 0,5D$  и  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , получаем

$$0,5F\lambda = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p} = \frac{32 \cdot (F \cdot 0,5D)^2 \pi Dn}{2G\pi d^4},$$

или окончательно

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}.$$

При расчётах и эксплуатации пружин используется такой их технологический параметр как *коэффициент жёсткости пружины*  $C$ . Он численно равен силе, вызывающей осадку, равную единице длины, и рассчитывается по формуле

$$C = \frac{F}{\lambda} = G \frac{d^4}{8D^3 n}.$$

В этой формуле модуль упругости  $G$  характеризует *жёсткость материала* пружины, а дробь – *жёсткость*, зависящую от *геометрических параметров* пружины.

Если вместо коэффициента жёсткости ввести величину, ему обратную, то получим  $\lambda = \beta F$ , где  $\beta$  – коэффициент податливости пружины, численно равный изменению её высоты, вызываемому силой, равной единице силы:

$$\beta = \frac{8D^3 n}{Gd^4}.$$

**Пример.** Жёсткий брус  $AC$ , шарнирно закреплённый в сечении  $A$  и нагруженный в сечении  $C$  силой  $F$ , поддерживается в сечении  $B$  стальной пружиной (рис. 30, а) со следующими параметрами: средний диаметр  $D = 60$  мм, диаметр проволоки, из которой изготовлена пружина,  $d = 10$  мм, число витков  $n = 15$ . Проверить прочность пружины, если  $[\tau] = 450$  МПа. Определить величину, на которую вытянется пружина.

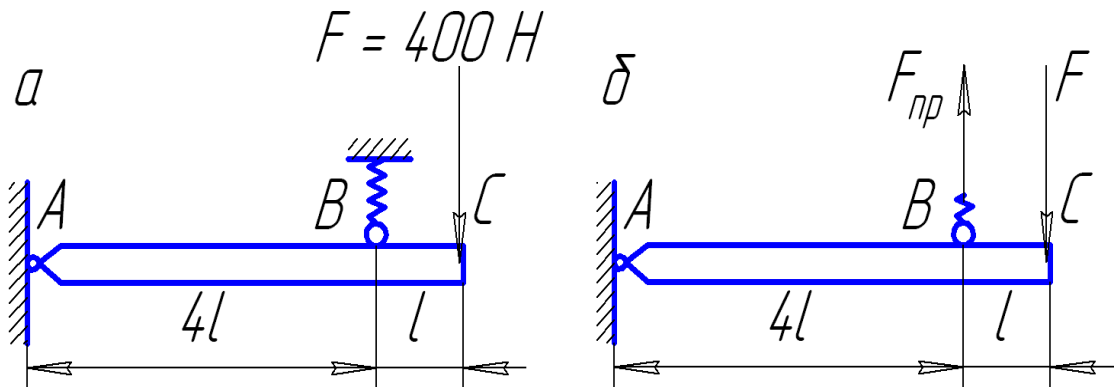


Рис. 30. К примеру расчёта пружины

Для расчёта пружины применим *метод сечений*, проведя секущую плоскость через пружину перпендикулярно её оси. Реакцию, возникающую в пружине в результате её растяжения, обозначим  $F_{пр}$ .

Составим *условие равновесия* для оставленной части. Сумма моментов относительно точки  $A$  равна нулю:

$$\sum M_A = F \cdot 5l - F_{пр} \cdot 4l = 0 .$$

Отсюда

$$F_{пр} = \frac{F \cdot 5l}{4l} = 500 \text{ Н} .$$

Таким образом, осевая сила, растягивающая пружину, равна **500 Н**.

Определим значение *поправочного коэффициента*. *Индекс пружины*

$$i = \frac{D}{d} = \frac{60}{6} = 10 .$$

$$k = \frac{4i + 1}{4(i - 1)} = \frac{4 \cdot 10 + 1}{4(10 - 1)} = 1,14 .$$

Тогда *максимальное касательное напряжение* в пружине

$$\tau_{max} = k \frac{8F_{пр}D}{\pi d^3} = 1,14 \cdot \frac{8 \cdot 500 \cdot 60}{3,14 \cdot 6^3} = 403 \text{ МПа} \leq [\tau] .$$

Прочность пружины обеспечена.

Определим *осадку пружины*:

$$\lambda = \frac{8F_{\text{пр}}D^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 500 \cdot 60^3 \cdot 15}{8 \cdot 10^4 \cdot 6^4} = 125 \text{ мм.}$$

При расчёте цилиндрических пружин наряду со статически определяемыми встречаются также *статически неопределимые задачи*.

Если концы пружины не закреплены и могут свободно перемещаться вдоль оси пружины или если закреплён один её конец, то задача расчёта такой пружины статически определима.

Если же оба конца пружины неподвижно закреплены, то задача её расчёта статически неопределима. Для её решения необходимо составить дополнительное *уравнение перемещений*.

Составление этого уравнения аналогично составлению уравнения, применяемого при решении задач расчёта прямого бруса, закреплённого обоими концами.

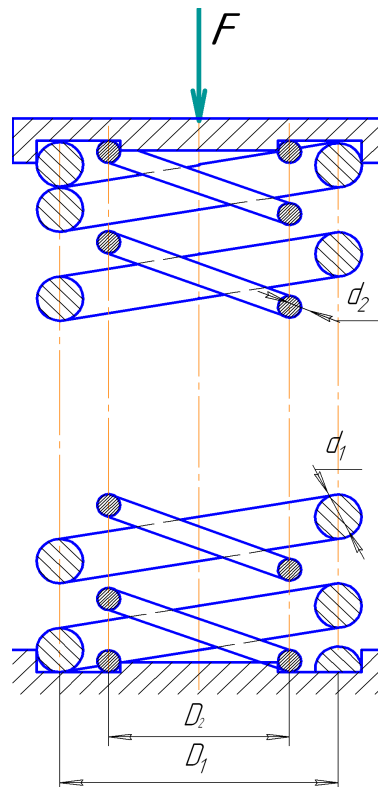


Рис. 31. Статически неопределимая задача расчёта пружины

Примером статически неопределимой задачи расчёта пружин является система, представленная на рис. 31. Эта система называется

**концентрической пружины** и представляет собой две пружины, вставленные одна в другую и работающие совместно.

Из условия равновесия верхней плиты, к которой приложена сила  $F$ , следует, что сумма сил  $F_{\text{пр1}}$  и  $F_{\text{пр2}}$ , сжимающих наружную и внутреннюю пружины, равна силе  $F$ . Это единственное *уравнение равновесия*, которое можно составить для определения двух неизвестных  $F_{\text{пр1}}$  и  $F_{\text{пр2}}$ , т.е. задача один раз статически неопределима.

Для раскрытия этой неопределимости необходимо составить *уравнение перемещений*. В рассматриваемой задаче оно должно выражать равенство осадок внешней и внутренней пружин:  $\lambda_1 = \lambda_2$ , или

$$\frac{8F_{\text{пр1}}D_1^3n_1}{Gd_1^4} = \frac{8F_{\text{пр2}}D_2^3n_2}{Gd_2^4}.$$

Решение этого уравнения перемещений совместно с условием равновесия  $F = F_{\text{пр1}} + F_{\text{пр2}}$  позволяет найти усилия в пружинах, а затем выполнить расчёт их на прочность.

## 2.10. Практические расчёты на сдвиг

При напряжённом состоянии чистого сдвига на практике часто производят расчёты на прочность по касательным напряжениям, действующим не только по площадкам чистого сдвига, но и по любым другим площадкам. Такие расчёты называются *расчётами на сдвиг*.

Для *пластичных* и *хрупко-пластичных* материалов используется понятие *расчёта на срез*. Для *деревянных* и *хрупких* материалов (бетон, чугун, камень и т.п.) применяется термин *расчёт на скалывание*.

Примерами соединений, рассчитываемых на срез, являются заклёпочные, болтовые, шпоночные, штифтовые, сварные и другие соединения.

Детали, служащие для соединения отдельных элементов машин или строительных конструкций, – заклёпки, штифты, болты и т.п., как правило, воспринимают нагрузки, перпендикулярные их продольной оси.

Поперечная нагрузка в указанных деталях возникает, в частности, при растяжении (сжатии) соединяемых элементов. На рис. 32 показаны



соответствующие примеры соединения: штифтом (а), заклёпкой (б), болтом без зазора (в) и шпонкой (г).

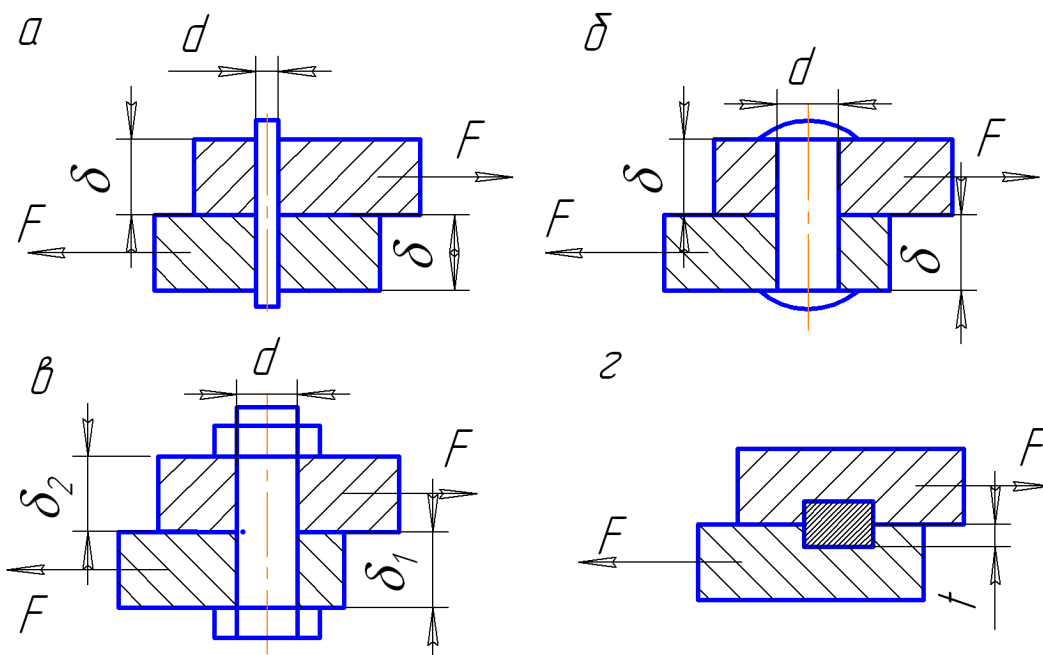


Рис. 32. Примеры соединений, рассчитываемых на срез

Действительные условия работы рассматриваемых деталей сложны и во многом зависят от технологии изготовления отдельных элементов конструкции и её сборки.

Практические расчёты этих деталей носят весьма *условный характер* и базируются на следующих *основных допущениях*.

1. В поперечном сечении возникает только один внутренний силовой фактор – поперечная сила  $Q$ .
2. Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по его площади равномерно.
3. В случае если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами и т. п.), принимается, что все они нагружены одинаково.

Разрушение соединительных элементов происходит в результате их перерезывания по плоскости, совпадающей с поверхностью соприкосновения соединяемых деталей (рис. 33).

Поэтому говорят, что элементы работают *на срез*, а возникающие в их поперечном сечении касательные напряжения называют *напряжениями среза* и обозначают  $\tau_{ср}$ .

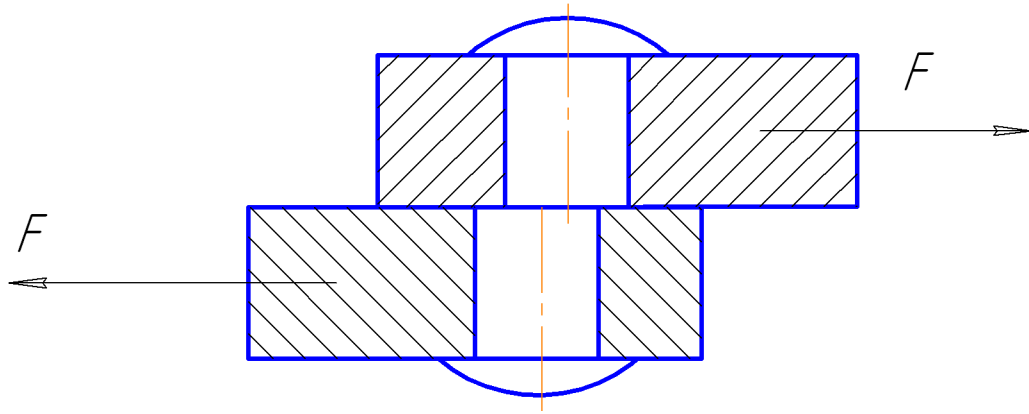


Рис. 33. Разрушение заклёпки при срезе

На основе сформулированных выше допущений получаем следующее **условие прочности на срез**:

$$\tau_{ср} = \frac{Q}{S_{ср}} \leq [\tau_{ср}],$$

где  $\tau_{ср}$  – расчётное напряжение среза, возникающее в поперечном сечении рассчитываемой детали;

$Q$  – поперечная сила, возникающая в поперечном сечении одной соединительной детали; при нескольких одинаковых соединительных деталях  $Q = F/i$  ( $F$  – общая нагрузка соединения,  $i$  – число болтов, заклёпок и т.п.);

$S_{ср}$  – площадь среза одного болта, заклёпки и т.п. (для круглого сечения  $S_{ср} = \pi d^2/4$ ;

$[\tau_{ср}]$  – допускаемое напряжение на срез, зависящее от материала соединительных элементов и условий работы конструкции.

В машиностроении при расчёте штифтов, болтов, шпонок и т. д. принимают  $[\tau_{ср}] = (0,25 \dots 0,35) \sigma_m$ , где  $\sigma_m$  – предел текучести материала соединительной детали. Меньшие значения принимают при невысокой точности определения действующих нагрузок и возможности не строго статического нагружения.

Условие прочности является формулой для **проверочного расчёта** соединения. В зависимости от постановки задачи она может быть преобразована для **определения** минимального количества соединительных деталей; или **допускаемой нагрузки**; или **минимальной площади сечения (проектный расчёт)**. Необходимо учитывать, что одна деталь может срезаться по одной, двум или более плоскостям.

Из условия прочности можно определить необходимое **количество односрезных соединительных деталей**:

$$i \geq \frac{F}{S_{cp}[\tau_{cp}]}$$

При двухсрезном и многосрезном соединении необходимо учитывать общее количество срезов, воспринимающих нагрузку.

Из условия прочности можно определить также **максимальную допускаемую нагрузку** на соединение

$$F_{max} \leq iS_{cp}[\tau_{cp}],$$

или **минимальную допускаемую площадь сечения** одной соединительной детали:

$$S_{cp} \geq \frac{F}{i[\tau_{cp}]}$$

Расчёт на срез обеспечивает прочность соединительных элементов, но не гарантирует надёжности конструкции (узла) в целом.

Если толщина соединяемых элементов недостаточна, то давления, возникающие между стенками их отверстий и соединительными деталями, получаются недопустимо большими. В результате стенки отверстий обминаются, и соединение становится ненадёжным.

В случае если изменение формы отверстия значительно (при больших давлениях), а расстояние от его центра до края элемента невелико, часть элемента может срезаться (выколоться), как схематически показано на рис. 34.

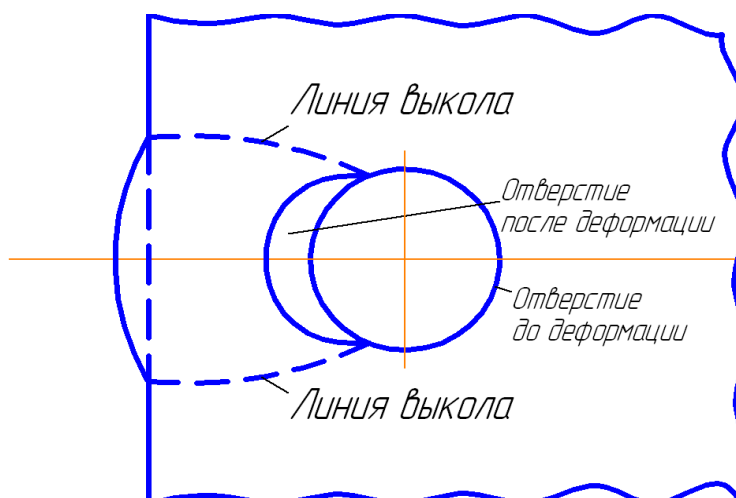


Рис. 34. Скол соединяемой детали при деформации среза

Давления, возникающие между поверхностями отверстий и соединительных деталей, называют **напряжениями смятия** и обозначают их  $\sigma_{см}$ . Эти напряжения могут привести к обмятию контактирующих поверхностей и ослаблению соединения.

Расчёт, обеспечивающий выбор таких размеров деталей, при которых не будет значительных деформаций стенок отверстий, называют **расчётом на смятие**.

*Распределение напряжений смятия* на поверхности контакта деталей очень *неопределённо* и в значительной степени зависит от зазора (в ненагруженном состоянии) между стенками отверстия и болтом (заклёпкой и др.).

*Расчёт на смятие* носит *условный характер* и предполагает, что силы взаимодействия между деталями равномерно распределены по поверхности контакта и во всех точках нормальны к этой поверхности. **Условие прочности на смятие** выглядит следующим образом:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{iS_{см}} \leq [\sigma_{см}],$$

где  $F$  – общая нагрузка на все соединительные детали;  $i$  – количество соединительных деталей;  $S_{см}$  – расчётная площадь смятия;  $[\sigma_{см}]$  – допускаемое напряжение на смятие.

В машиностроении для болтовых, штифтовых и шпоночных соединений принимают следующие **допускаемые напряжения**: для деталей из малоуглеродистых сталей  $[\sigma_{см}] = 100 \div 120 \text{ МПа}$ ; для деталей из среднеуглеродистых сталей  $[\sigma_{см}] = 140 \div 170 \text{ МПа}$ ; для деталей из чугуна  $[\sigma_{см}] = 60 \div 80 \text{ МПа}$ .

Зачастую контактирующие детали изготовлены из различных материалов; в этих случаях при выборе допускаемого напряжения ориентируются на материал той детали, прочность которого меньше.

За **расчётную площадь смятия** при контакте по цилиндрической поверхности (рис. 32, а, б, в) принимают площадь проекции поверхности контакта на диаметральный плоскость, т. е.  $[\sigma_{см}] = d \cdot \delta$ , где  $d$  – диаметр соединительной детали;  $\delta$  – толщина соединяемых деталей. При различной толщине соединяемых деталей в расчётную формулу следует подставлять минимальное напряжение  $\sigma_{см}$ .

При контакте по плоскости (рис. 32, г) за расчётную принимают действительную площадь соприкосновения  $[\sigma_{см}] = t \cdot l$ , где  $t$  – половина высоты шпонки;  $l$  – размер шпонки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

Кроме расчётов на срез и смятие необходима *проверка прочности соединяемых элементов на растяжение по ослабленному сечению*, то есть проходящему через центр отверстия, а также *расчёт на скалывание части элемента от отверстия до края соединяемого элемента*.

## 2.11. Расчёт неразъёмных соединений

**Неразъёмные соединения** деталей машин и строительных конструкций имеют две основные разновидности: **заклёпочные** и **сварные**.

Неразъёмными эти соединения называют потому, что для их разборки необходимо разрушить соединительные элементы – заклёпки или сварные швы.

### Расчёт заклёпочных соединений.

Рассмотрим расчёт заклёпочных соединений для случаев, когда соединяемые элементы работают на растяжение или сжатие.

На рис. 35, а представлено *соединение двух полос внахлестку*, а на рис. 35, б – *соединение двух полос встык с одной накладкой*.

В том и другом случае при разрушении заклёпок срез каждой из них происходит по одному поперечному сечению (отмечено штриховой линией). Поэтому эти соединения называют **односрезными**.

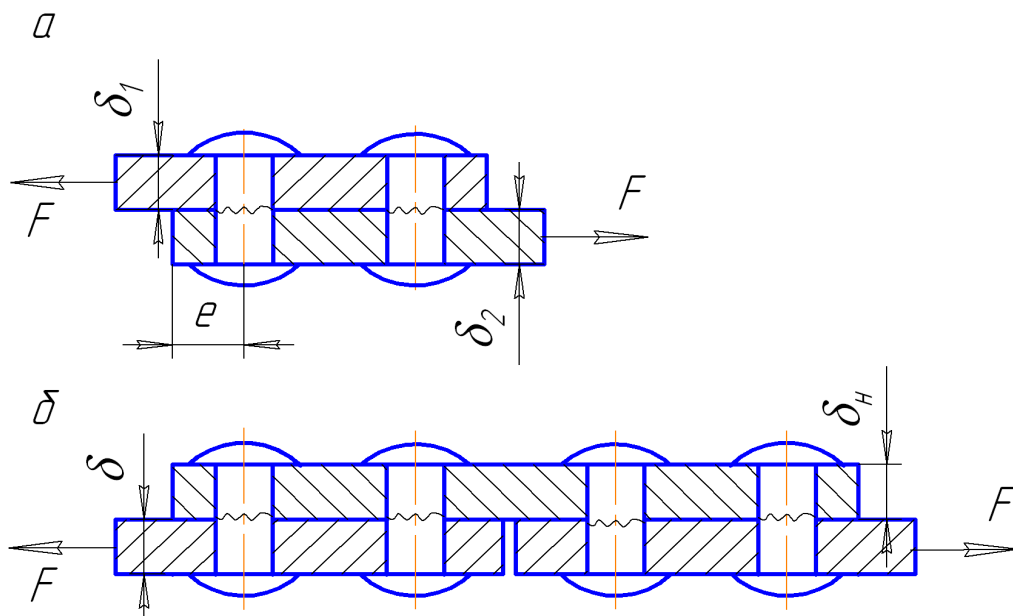


Рис. 35. Односрезные заклёпочные соединения

На рис. 36, а показано *соединение двух полос встык с двумя накладками*. В этом случае срез каждой заклёпки при разрушении происходит по двум поперечным сечениям, и соединение называют **двухсрезным**.

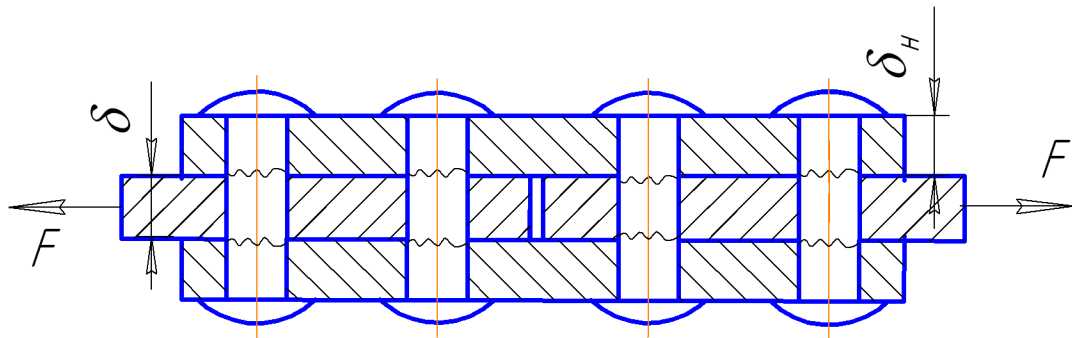


Рис. 36. Двухсрезное заклёпочное соединение

Расчёт заклёпочных соединений ведётся на *срез* и *смятие* на основе допущений, указанных выше. Между склёпываемыми элементами развиваются значительные силы трения, и работа заклёпок на срез начинается лишь после того, как внешние силы станут больше сил трения и начнётся сдвиг склёпанных полос. При расчётах это обстоятельство не учитывают.

Склёпываемые элементы (полосы, уголки и т. п.) рассчитывают на растяжение (сжатие) с учетом ослабления их поперечных сечений отверстиями для заклёпок.

Расстояние  $e$  от центра первой заклёпки до края полосы (рис. 35, а) принимают обычно равным удвоенному диаметру заклёпки. При таком расстоянии прочность края полосы на срез (выкалывание) обеспечена и специальный расчёт не нужен.

Диаметр отверстия в склёпываемых элементах на **0,5...1 мм** больше диаметра непоставленной заклёпки. В расчётные формулы входит диаметр  $d$  отверстия, так как в выполненном соединении заклёпка практически полностью заполняет отверстие.

Различают *проверочные* и *проектные расчёты заклёпочных соединений*.

Зависимости для *проверочных расчётов* имеют следующий вид:

*а) на срез*

$$\tau_{cp} = \frac{F}{ik\pi d^2/4} \leq [\tau_{cp}],$$

где  $i$  – общее число заклёпок, передающих заданную нагрузку  $F$  (в конструкции, представленной на рис. 35, а, – это общее число заклёпок, а в соединениях встык (рис. 35, б и рис. 36) – это число заклёпок по одну сторону стыка;

$k$  – число плоскостей среза одной заклёпки: для конструкции, приведённой на рис. 35,  $k = 1$ , а на рис. 36 –  $k = 2$ ;

**б) на смятие**

$$\sigma_{см} = \frac{F}{id\delta} \leq [\sigma_{см}],$$

где  $\delta$  – толщина соединяемых деталей; при односрезных соединениях (рис. 35) вместо  $\delta$  надо подставлять в формулу значение меньшей из толщин склёпываемых элементов, а при двухсрезных (рис. 36) – значение меньшей из величин  $\delta$  или  $2\delta_n$ .

*При проектном расчёте* заклёпочного соединения диаметром заклёпок задаются, принимая его примерно равным **(1,5...2,5) $\delta$** . При различной толщине склёпываемых элементов под  $\delta$  понимают меньшую из них. Затем определяют **допускаемую силу на одну заклёпку [Q]** :

*а) из условия прочности на срез*

$$[Q_{ср}] = [\tau_{ср}]k \frac{\pi d^2}{4} ;$$

*б) из условия прочности на смятие*

$$[Q_{см}] = [\sigma_{см}]d\delta .$$

По меньшей из допускаемых сил определяют требуемое число заклёпок:

$$i \geq F/Q_{min} .$$

Для заклёпочных соединений стальных конструкций промышленных и гражданских сооружений, а также подъёмных кранов **допускаемые напряжения на срез и смятие** принимают по следующим данным, сведённым в таблицу:

Материал конструкции	Допускаемые напряжения, МПа			
	при продавленных отверстиях		при сверлёных или рас- сверлённых (после продав- ливания) отверстиях	
	$[\tau_{ср}]$	$[\sigma_{см}]$	$[\tau_{ср}]$	$[\sigma_{см}]$
Сталь Ст2 . . . . .	100	240	140	280
Сталь Ст3 . . . . .	100	280	140	320

### Расчёт сварных соединений.

Рассмотрим сварное соединение на примере двух сваренных внахлест пластин, растянутых силами  $F$ . Соединение осуществлено при помощи трёх сварных швов: двух фланговых и одного лобового (рис. 37, а).

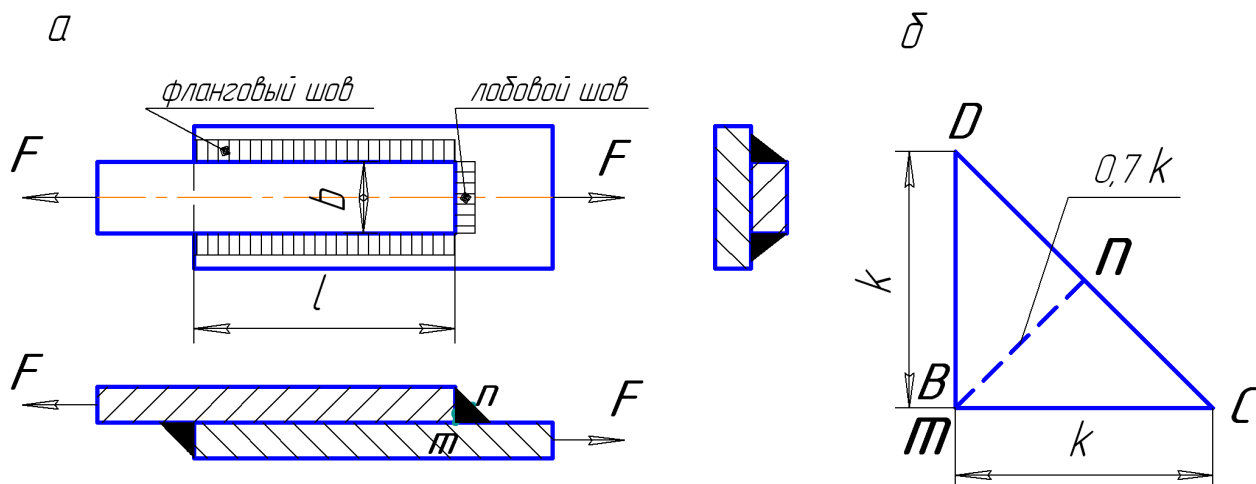


Рис. 37. К расчёту сварных швов на срез

Условие прочности сварного шва на срез имеет следующий вид:

$$\tau_{ср} = \frac{F}{S_{ср.ш.}} \leq [\tau_{ср.ш.}],$$

где  $S_{ср.ш.}$  – площадь наиболее опасного сечения сварного шва;  $[\tau_{ср.ш.}]$  – допускаемое напряжение на срез сварных швов.

Допускаемые напряжения  $[\tau_{ср.ш.}]$  для шва в зависимости от типа сварочных электродов составляют обычно 50...70% допускаемых напряжений на растяжение основного (свариваемого) материала.

При расчёте сварных швов принимают, что опасное сечение шва совпадает с плоскостью, проходящей через биссектрису  $mn$  прямого угла  $DBC$  поперечного сечения шва (рис. 37, б).

Технологическим показателем сварного шва является *катет шва*, обозначаемый  $k$ . Биссектрису  $mn$  принимают равной  $0,7 \cdot k$ .

Тогда площадь опасного сечения для шва длиной  $l_{ш.}$  будет равна  $S_{ср.ш.} = l_{ш.} \cdot 0,7k$ . Касательные напряжения считают равномерно распределёнными по площади опасного сечения.

Для рассматриваемого случая общая длина сварных швов равна сумме двух лобовых и двух фланговых швов:  $l_{ш.} = 2(b + l)$ .



При проектировочном расчёте можно при известных силе  $F$  и катете шва  $k$  определить необходимую *минимальную длину сварных швов*:

$$l_{ш.} \geq \frac{F}{[\tau_{ср.ш.}] \cdot 0,7k}.$$

*Максимальная допустимая нагрузка* на готовое сварное соединение определяется зависимостью

$$F \leq l_{ш.} \cdot 0,7k \cdot [\tau_{ср.ш.}].$$

### 3. Механические испытания на сдвиг и кручение

#### 3.1. Определение модуля сдвига материала пружины

**Цель работы:** изучить поведение круглого стержня при кручении; определить параметры цилиндрической винтовой пружины и модуль сдвига материала пружины.

#### Теоретическое обоснование

Деформации кручения подвергаются многие детали машин и элементы конструкций: вращающиеся валы машин, механизмов, станков, винтовые пружины, резьбовые детали, проволока и т.п.

**Кручение** – вид деформации круглого стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_k$  (Н·м).

При кручении каждое поперечное сечение стержня поворачивается по отношению к любому другому сечению на некоторый угол  $\varphi$  (рад), который называется **абсолютным углом закручивания** участка стержня, заключённого между рассматриваемыми сечениями (рис. 38).

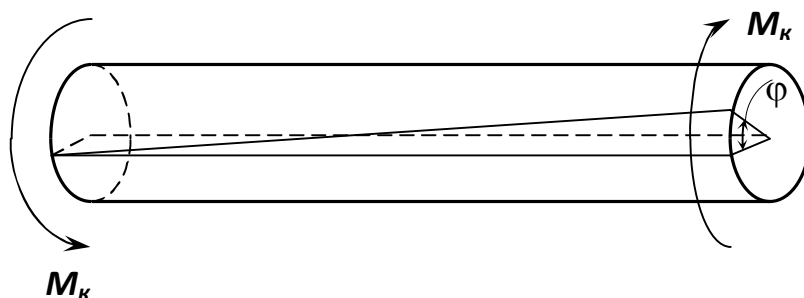


Рис. 38. Схема закручивания участка круглого стержня при кручении

Численное значение угла закручивания участка стержня диаметром  $d$  и длиной  $l$  можно определить по формуле Гука для кручения:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p},$$

где  $G$  (МПа) – модуль сдвига материала стержня (другие названия – модуль упругости 2 рода, модуль Гука), он характеризует жесткость материала;  $J_p$  (м<sup>4</sup>) – полярный момент инерции сечения (геометрическая характеристика поперечного сечения круглого стержня),  $J_p = \pi d^4/32$ .

Поворот сечения при кручении происходит за счёт сдвига частиц материала в плоскости сечения. При этом в каждой точке сечения возникают внутренние единичные силы (касательные напряжения  $\tau$ ), направленные

перпендикулярно радиусу к данной точке и создающие единичные моменты относительно центра тяжести сечения.

**Крутящий момент**  $M_k$  является результирующей или интегральной характеристикой действия касательных напряжений:

$$M_k = \int_S \tau \cdot \rho \cdot dS ,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения;  $\rho$  – расстояние от центра сечения до точки действия напряжения.

Напряжения при кручении распределяются по поперечному сечению неравномерно. Их величина по линейному закону увеличивается от нуля в центре сечения до максимального значения в контуре сечения, то есть на поверхности стержня.

Численное значение максимального касательного напряжения при кручении  $\tau_{max}$  (МПа) определяется по формуле :

$$\tau_{max} = M_k / W_p ,$$

где  $W_p$  ( $m^3$ ) – полярный момент сопротивления сечения,  $W_p = \pi d^3 / 16$  .

Таким образом, стержень круглого сечения, работающий на кручение, является примером тела, во всех точках которого имеет место *напряжённое состояние чистого сдвига*.

Мерой деформации сдвига является *угол сдвига*  $\gamma$  (рад) . Экспериментально доказано, что для большинства материалов в области упругих деформаций существует линейная зависимость между касательными напряжениями и деформациями сдвига:

$$\tau = G \cdot \gamma_{упр} .$$

Эту зависимость называют *законом Гука при сдвиге*: упругие деформации сдвига прямо пропорциональны напряжениям.

Коэффициент пропорциональности  $G$  в законе Гука – *модуль сдвига*. Значения *модулей упругости первого рода*  $E$  и *второго рода*  $G$  определяются силами межатомного взаимодействия и являются физическими константами материала. Между ними существует зависимость:

$$E = 2G(1+\mu) ,$$

где  $\mu$  – *коэффициент Пуассона* (коэффициент поперечной деформации). Он также является физической константой материала и характеризует его способность при растяжении упруго деформироваться в поперечном направлении.

Коэффициент Пуассона равен отношению относительной деформации образца в *поперечном* ( $\epsilon_{\text{поп}}$ ) и *продольном* ( $\epsilon_{\text{прод}}$ ) направлении относительно направления растягивающей силы:

$$\mu = \epsilon_{\text{поп}} / \epsilon_{\text{прод}} .$$

Значения коэффициента Пуассона для всех материалов лежат в интервале  $0 \dots 0,5$ .

Так минимальные коэффициенты  $\mu$  имеют следующие материалы: пробка – 0; фанера – 0,07; бетон – 0,08. Коэффициент Пуассона стальных материалов лежит в пределах  $0,25 \dots 0,33$ . Максимальный  $\mu$  у таких материалов, как свинец – 0,45 и каучук – 0,5 .

Величину модуля сдвига можно определить экспериментально, например, при испытании на кручение тонкостенных трубчатых образцов (в этом случае наблюдаются практически чистые сдвиговые деформации). При испытании таких образцов строят *диаграмму сдвига материала*, похожую на *диаграмму растяжения* этого материала (рис. 39).

На диаграмме сдвига напряжение  $\tau_{\text{упр}}$  соответствует *условному пределу упругости материала при сдвиге*. Тангенс угла  $\alpha$  между прямой  $OA$  и осью  $\gamma$  характеризует модуль сдвига материала  $G$  .

Напряжение  $\tau_m$  соответствует *условному пределу текучести материала при сдвиге*. Для многих материалов *предел текучести при сдвиге* связан с *пределом текучести при растяжении*  $\sigma_m$  соотношением:  $\tau_m = 0,5 \dots 0,6 \sigma_m$  .

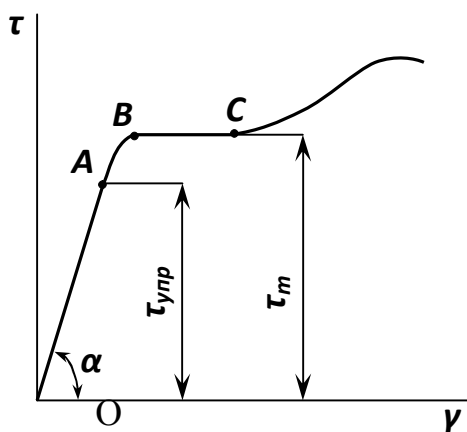


Рис. 39. Типовая диаграмма сдвига малоуглеродистой пластичной стали

Во многих машинах и технических устройствах применяются пружины: витые (цилиндрические, конические, фасонные), плоские спиральные, фигурные, тарельчатые и другие.

Материал пружины должен хорошо сопротивляться пластическим деформациям, то есть иметь *высокие пределы упругости и текучести*. Кроме того, по условиям эксплуатации пружины должны выдерживать большое число циклов нагружения, то есть иметь *высокий предел выносливости*.

К основным пружинным материалам относятся *качественные рессорно-пружинные стали после специальной термической обработки*, иногда применяются *сплавы цветных металлов*.

Чаще применяются *витые пружины*. Полуфабрикатами для их изготовления в основном являются проволока или прутки круглого сечения. Витые пружины изготавливают горячей навивкой отожжённой проволоки с последующей упрочняющей обработкой.

Наиболее широко используются *цилиндрические винтовые пружины*, работающие на растяжение и сжатие. На рис. 40, а показана цилиндрическая винтовая пружина, нагруженная растягивающей силой  $F$ .

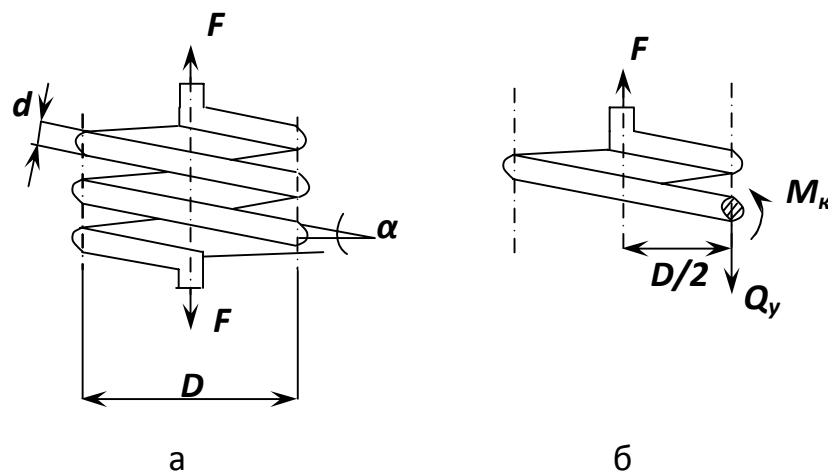


Рис. 40. Цилиндрическая винтовая пружина растяжения: а – геометрические параметры пружины; б – внутренние усилия в поперечных сечениях проволоки пружины

Основными параметрами пружины являются:  $d$  – диаметр поперечного сечения проволоки;  $D$  – средний диаметр пружины;  $\alpha$  – угол подъёма средней винтовой линии витков, обычно  $\alpha < 15^\circ$ ;  $n$  – число рабочих витков пружины. Средний диаметр пружины можно определить по формулам:

$$D = D_в + d \quad \text{или} \quad D = D_н - d ,$$

где  $D_в$  и  $D_н$  – соответственно внутренний и наружный диаметры пружины.

При сжатии или растяжении пружины с малым углом  $\alpha$  в поперечных сечениях витков пружины возникают два внутренних силовых фактора:

крутящий момент  $M_k$ , скручивающий проволоку, и поперечная сила  $Q_y$ , стремящаяся перерезать проволоку (рис. 40, б). Из условия равновесия можно определить численные значения крутящего момента и поперечной силы:

$$M_k = 0,5FD \quad \text{и} \quad Q_y = F .$$

Таким образом, пружина с малым шагом витков работает на кручение и срез.

Касательные напряжения среза  $\tau_{cp}$  считаются равномерно распределёнными по сечению витка пружины (рис. 41, а). Их можно определить по формуле:

$$\tau_{cp} = \frac{F}{S_{cp}} = \frac{4F}{\pi d^2} .$$

где  $S_{cp}$  – площадь поперечного сечения витка пружины.

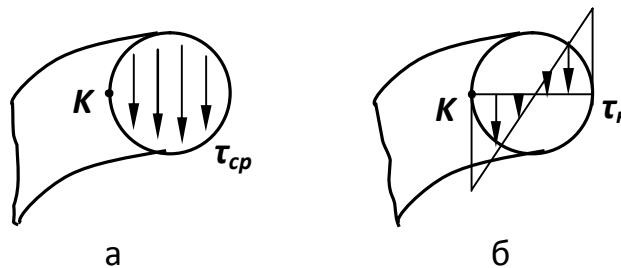


Рис. 41. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению: а – напряжения среза; б – напряжения кручения

Касательные напряжения кручения  $\tau_{кр}$  возрастают по линейному закону от центра к периферии сечения (рис. 41, б). Максимальные напряжения кручения действуют в точках контура сечения. Они равны:

$$\tau_{крmax} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{16 \cdot 0,5FD}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot FD}{\pi d^3} .$$

Наиболее опасной точкой поперечного сечения витка пружины является точка  $K$ , так как в ней совпадают направления действия напряжений среза и кручения, причём напряжения кручения максимальны.

Величину суммарного касательного напряжения, возникающего в точке  $K$  можно рассчитать по формуле:

$$\tau_{max}^K = \tau_{крmax} + \tau_{cp} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} .$$

Второе слагаемое в формуле меньше первого в  $2D/d$  раз, что на практике составляет 10 и более раз. Это означает, что *доля напряжений среза* при работе пружины очень мала (менее 5 %), и ими можно пренебречь.

В случаях, когда отношение  $2D/d < 10$ , напряжения среза необходимо учитывать.

Таким образом, можно допустить, что при растяжении или сжатии цилиндрических витых пружин с малым шагом витков в поперечных сечениях витка возникает *напряжённое состояние чистого сдвига*, так как в них возникают лишь касательные напряжения.

Максимальное напряжение тогда можно рассчитать по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} .$$

*Допускаемые напряжения* для рессорно-пружинных сталей принимают равными  $400 \div 600$  МПа.

Основным технологическим параметром пружины является её *жёсткость*  $C$ . Жёсткость пружины характеризует её способность сопротивляться растяжению или сжатию. Она определяется отношением нагрузки  $F$  к деформации пружины  $\lambda$ :

$$C = F / \lambda ,$$

где  $\lambda$  (мм) – *осадка* пружины, она характеризует абсолютное удлинение или укорочение пружины.

Осадка пружины прямо пропорциональна силе. Величина осадки зависит от силы, диаметра пружины, числа её витков, диаметра витка и от материала пружины:

$$\lambda = \frac{F}{C} = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} ,$$

где  $n$  – число рабочих витков;  $G$  – модуль сдвига материала пружины.

Жёсткость пружины можно определить по формуле:

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3 n} .$$

Для экспериментальных исследований цилиндрических винтовых пружин растяжения и сжатия используют прибор *ДП-6А*. С помощью этих

исследований можно определить модуль сдвига материала, из которого изготовлена пружина:

$$G = \frac{8FD^3 nC}{d^4}.$$

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с устройством и работой прибора ДП-6А.
2. Провести градуировку силоизмерительного механизма прибора. Для этого с нижней траверсы снять нижнюю опору и на неё последовательно устанавливать грузы весом  $F_i = 10, 20, 30, 40$  и  $50 \text{ Н}$ .  
Фиксируя каждый раз отклонение стрелки индикатора на  $m_i$  делений, определить *цену деления шкалы* для каждого груза:  $F_i / m_i$ . Среднее арифметическое этих значений даст усреднённую цену деления шкалы прибора:  $(F/m)_{cp}$ .
3. Определить геометрические параметры пружины: средний диаметр пружины  $D$ , диаметр витка  $d$ , число рабочих витков  $n$  (может быть и не целым; у пружин растяжения работают все витки, у пружин сжатия исключаются витки, соприкасающиеся с опорными плитами).
4. Для испытания пружин растяжения кронштейн прибора переместить и закрепить в верхнем положении. Закрепить за крючки пружину растяжения.  
Вращением маховичка слегка нагрузить пружину для её надежного контакта с крючками (отклонение стрелки при этом должно составить 3...5 делений). В этот момент осадка пружины  $\lambda$  принимается равной нулю, что фиксируется на масштабной линейке.  
Для испытания пружин сжатия кронштейн устанавливается в нижнее положение, пружина устанавливается на ступенчатых опорах.
5. Через определённый интервал (5...10 мм) увеличивать осадку пружины  $\lambda$ , фиксируя по индикатору соответствующие нагрузки  $F$ . Результаты заносить в таблицу.
6. Построить зависимость осадки пружины от нагрузки. Определить жёсткость пружины  $C$ .
7. Определить модуль сдвига  $G$  материала пружины.
8. Составить письменный отчет и сделать выводы по работе.



## Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации называется кручением?
3. Как при кручении распределяются по сечению напряжения?
4. Какое напряжённое состояние называется чистым сдвигом?
5. Какая характеристика является мерой деформации при сдвиге?
6. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
7. Что характеризует коэффициент Пуассона?
8. Почему при изучении деформации кручения рассматривают работу цилиндрических винтовых пружин растяжения и сжатия?
9. Что называется жёсткостью пружины?
10. Что называется осадкой пружины?

### 3.2. Испытания материалов на срез и скалывание

**Цель работы :** изучить поведение и характер разрушения различных материалов при испытаниях на срез и скалывание. Определить прочностные свойства материалов.

#### Теоретическое обоснование

Многие детали и элементы конструкций в процессе эксплуатации испытывают деформации сдвига. Деформация сдвига возникает тогда, когда внешние силы  $F$ , действующие на элемент, расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях на малом расстоянии друг от друга и направлены в противоположные стороны (рис. 42).

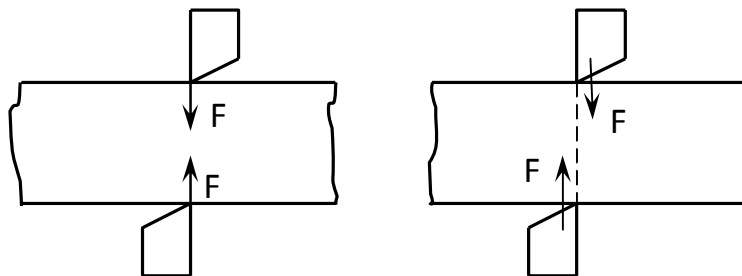


Рис. 42. Схема нагружения элемента конструкции, работающего на сдвиг

*Сдвигом* называется перемещение какого-либо сечения в его плоскости относительно другого, параллельного ему сечения. *Чистым сдвигом* называется такой вид нагружения, когда в сечении возникают лишь *касательные напряжения  $\tau$* .

Явление сдвига наиболее часто встречается в элементах, соединяющих между собой отдельные части конструкций. К таким соединениям относятся: заклёпочные, болтовые, шпоночные, штифтовые соединения, сварные швы, деревянные врубки и др.

На рис. 43, а схематично изображено заклёпочное соединение. Как видно из рисунка 43, б деформацию сдвига в чистом виде осуществить внешними воздействиями затруднительно, так как она почти всегда сопровождается изгибом и другими видами деформаций.

На участках заклёпки, расположенных вблизи плоскостей *A* и *B*, происходит сдвиг одних её частей относительно других в направлении перпендикулярном оси заклёпки. Вместе с этим происходит изгиб и смятие заклёпки. Как правило, подобные соединения рассчитывают не только на сдвиг, но и на смятие с определением напряжений смятия  $\sigma_{см}$ .

При достижении внешними силами критических значений сложное явление *деформаций сдвига, изгиба и смятия* завершается перерезыванием заклёпки – происходит *двойной срез*.

При перерезывании полосы ножницами срез происходит по одной плоскости и сопровождается *деформацией смятия* (рис. 43, в).

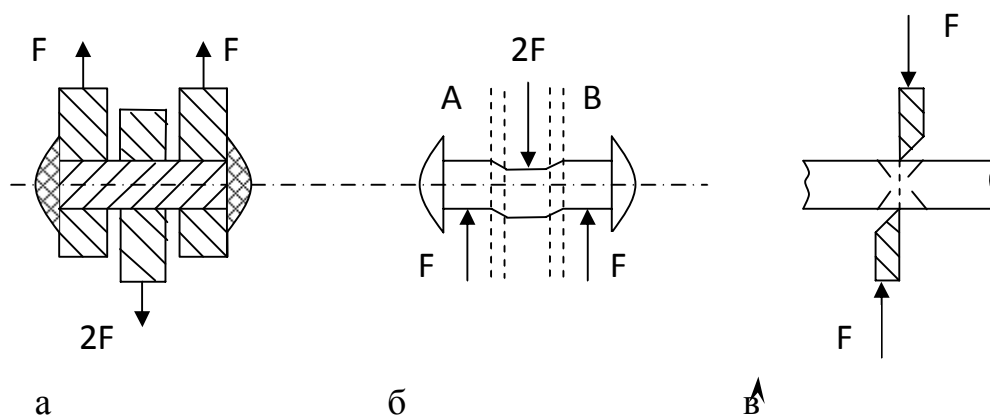


Рис. 43. Схема явления сдвига: а – работа заклёпочного соединения; б – деформация заклёпки; в – срез по одной плоскости

При анализе деформаций сдвига различают понятия *среза* и *скальвания*. Термин «срез» преимущественно применяется при описании сдвига пластичных материалов. Деформация среза приводит к *вязкому разрушению* материала.

Термин «скалывание» применяется для *хрупких* материалов, а также для *волокнистых*, например деревянных материалов при сдвиге вдоль волокон.

Испытания материалов на сдвиг проводятся на универсальных машинах. Испытуемый образец помещается в специальное приспособление, конструкция которого зависит от формы и размеров образца, а также от способа приложения нагрузки и устройства рабочих органов машины.

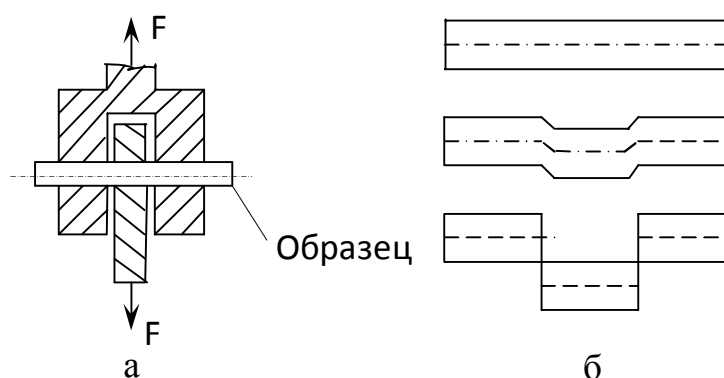


Рис. 44. Схема испытания металлических материалов на двойной срез: а – приспособление для испытания образцов; б – деформация и разрушение образца

Для испытания на срез металлических материалов используют образцы из проволоки диаметром  $d = 3...10$  мм. При испытании на *двойной срез* используют приспособление, схематично изображенное на рис. 44.

При испытаниях на сдвиг определяют максимальную нагрузку  $F_{max}$ , вызвавшую разрушение образца. По результатам испытаний определяют **условный предел прочности материала при срезе  $\tau_{всп}$** .

Принимается допущение, что при сдвиге касательные напряжения равномерно распределяются по сечениям в плоскостях среза. Тогда условный предел прочности материала можно определить по формуле:

$$\tau_{всп} = F_{max} / S_{ср} ,$$

где  $S_{ср}$  – общая площадь сечений, по которым происходит перерезывание образца. Она зависит от количества плоскостей среза.

Для многих металлических материалов между *условным пределом прочности на срез  $\tau_{всп}$*  и *условным пределом прочности на растяжение  $\sigma_{врас}$*  существует следующая зависимость:

$$\tau_{всп} = (0,6...0,8) \cdot \sigma_{врас} .$$

Испытания деревянных материалов на сдвиг проводятся с использованием специальных приспособлений. Различают *испытания на скалывание*, когда нагрузка действует вдоль волокон образца (рис. 45), а также *испытания на срез*, когда нагрузка направлена поперёк волокон (рис. 46).

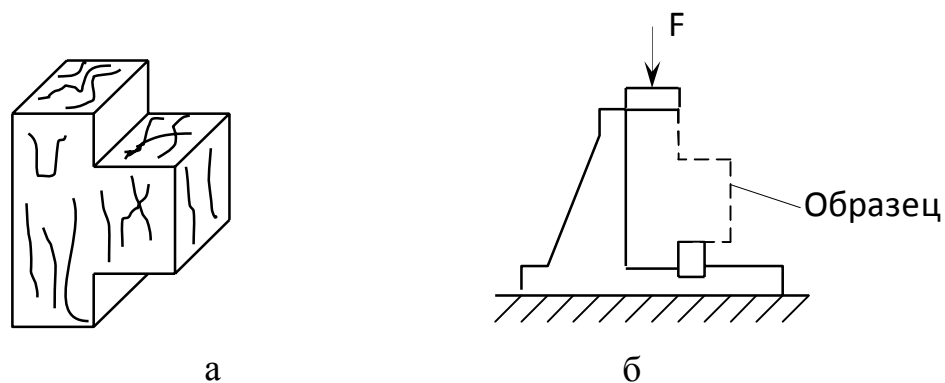


Рис. 45. Испытание деревянных материалов на скалывание: а – образец; б – приспособление для испытания

В процессе испытаний определяется максимальная нагрузка  $F_{max}$ , приводящая к разрушению образцов. По результатам испытаний определяют *условный предел прочности древесины при скалывании*  $\tau_{вск}$ , и *условный предел прочности материала при срезе*  $\tau_{вср}$ :

$$\tau_{вск} = F_{max} / S_{ск} \quad \text{и} \quad \tau_{вср} = F_{max} / S_{ср} ,$$

где  $S_{ск}$  – площадь сечения образца, по которому происходит скалывание,  $S_{ср}$  – площадь сечения образца, по которому происходит срез.

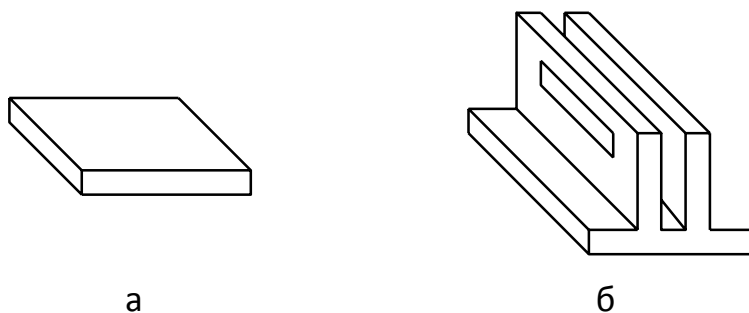


Рис. 46. Испытание образцов деревянных материалов на срез: а – образец; б – приспособление для испытания

## Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с оборудованием, на котором будут проводиться испытания, изучить принцип работы машин, записать их тип и цену деления силоизмерительного механизма.
2. Предварительно ознакомиться со свойствами материалов, из которых изготовлены образцы. Определить исходные размеры испытываемых образцов. Зарисовать эскизы образцов с указанием их размеров.
3. Установить испытываемый образец между опорным и рабочим органом прессового оборудования.
4. Включить машину и установить необходимую скорость перемещения рабочих органов.
5. Записать значение максимальной нагрузки  $F_{max}$ , вызвавшей разрушение образца. Определить условный предел прочности материала при срезе  $\tau_{ср}$  или скалывании  $\tau_{вск}$ .
6. Составить письменный отчёт и сделать выводы по работе.

## Контрольные вопросы для самопроверки

1. В каких деталях машин и элементах конструкций возникает деформация сдвига?
2. В чём отличие между понятиями «срез» и «скалывание»?
3. Как деформируются и разрушаются при сдвиге пластичные и хрупкие материалы?
4. Почему деформация сдвига, как правило, сопровождается смятием?
5. Как определить условный предел прочности материала при сдвиге?

## 4. Контрольные задачи и примеры их решения

Номер варианта представляет собой двузначное число. Первая цифра означает номер строки в таблице данных, вторая – номер схемы нагружения.

### 4.1. Расчёт плоского напряжённого состояния

Стальной кубик (модуль упругости  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,25$ ), находится под действием сил, создающих плоское напряжённое состояние (одно из трёх главных напряжений  $\sigma_z$  равно нулю). Требуется найти:

- 1) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) максимальные касательные напряжения;
- 3) относительные деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;
- 4) относительное изменение объема;
- 5) удельную потенциальную энергию деформации.

Данные взять из таблицы.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется *напряжённым состоянием* в этой точке. Если по одной площадке (на расчётных схемах она лежит в плоскости чертежа) касательные и нормальные напряжения равны нулю, то такое напряжённое состояние называется *плоским*.

Значения напряжений по разным площадкам находятся между собой в определённых зависимостях.

*Главные напряжения* – это максимальные и минимальные нормальные напряжения, а *главные площадки* – те, по которым они действуют.

По главным площадкам *касательные напряжения* равны нулю. Главные площадки взаимно перпендикулярны. Площадки, по которым касательные напряжения экстремальны, называются *площадками сдвига*.

*Относительные деформации, относительное изменение объёма, удельная потенциальная энергия деформации* определяются с помощью *обобщённого закона Гука* на основании известных значений нормальных напряжений, модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Закон Гука действителен лишь при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

Если действие нормального напряжения направлено к элементу, то значение этого напряжения необходимо взять со знаком «минус», а если от элемента – со знаком «плюс».

Согласно *закону о парности касательных напряжений*  $\tau_x = \tau_y$ .

### Расчетные схемы к задаче

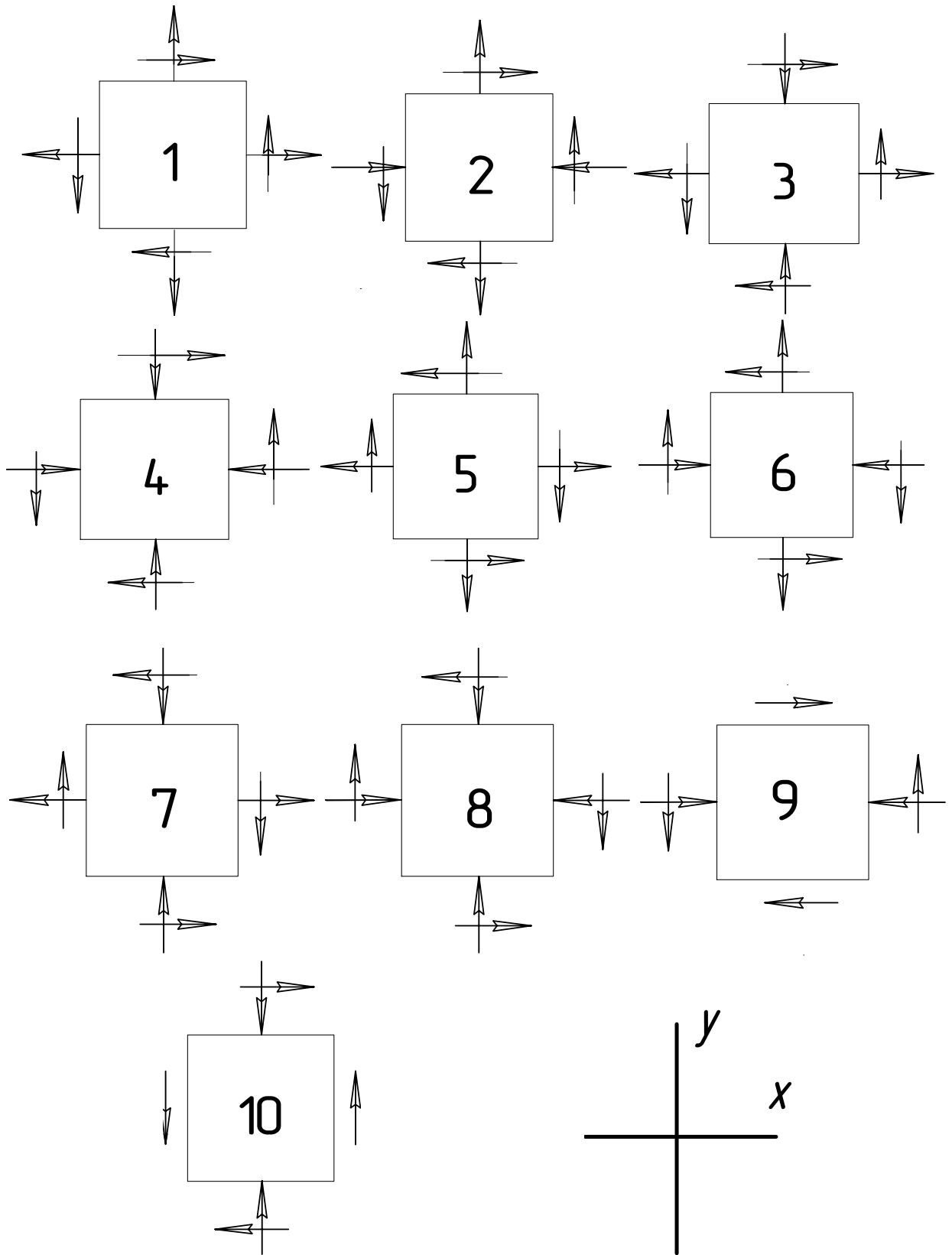


Таблица данных

Номер строки	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$ , МПа	$\tau_x$ , МПа
1	10	80	50
2	20	90	60
3	30	100	70
4	40	10	80
5	50	20	90
6	60	30	100
7	70	40	10
8	80	50	20
9	90	60	30
10	100	70	40

**Пример.** Дано:  $\sigma_x = 30$  МПа,  $\sigma_y = -100$  МПа,  $\tau_x = \tau_y = \tau = 30$  МПа.

Для схемы плоского напряжённого состояния, изображённого на рис. , выполнить пять требований задачи.

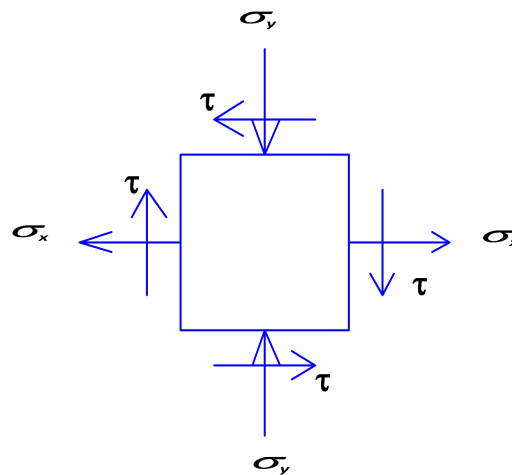


Рис. 47. К расчёту плоского напряжённого состояния

**1. Главные напряжения** определим по формуле:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{30 + (-100)}{2} + \frac{\sqrt{(30 - (-100))^2 + 4 \times 30^2}}{2} = 11,1 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{max} = \frac{30 + (-100)}{2} - \frac{\sqrt{(30 - (-100))^2 + 4 \times 30^2}}{2} = -81,1 \text{ МПа}$$

Определим **направление главных площадок**:



$$\operatorname{tg}(2\psi_0) = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 30}{30 - (-100)} = 0.462;$$

отсюда:  $\psi_0 = 12,4^\circ$ .

2. Определим **максимальные касательные напряжения** по формуле:

Максимальное для данной точки тела касательное напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Между главными напряжениями существует зависимость:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , поэтому в нашем случае:  $\sigma_1 = 11,1 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -81,1 \text{ МПа}$ .

Тогда

$$\tau_{max} = \frac{11,1 - (-81,1)}{2} = 46,1 \text{ МПа}$$

3. **Относительные деформации** определим согласно обобщённому закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] = 1/2 \cdot 10^5 [30 - 0,25 (-100 + 0)] = 27,5 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] = 1/2 \cdot 10^5 [-100 - 0,25 (30 + 0)] = -53,75 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] = 1/2 \cdot 10^5 [0 - 0,25 (30 + (-100) + 0)] = 8,75 \cdot 10^{-5}.$$

4. **Относительное изменение объёма** рассматриваемого элемента составит:

$$\Theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^5} (30 + (-100) + 0) = -17,5 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}$$

5. **Удельная потенциальная энергия деформации** будет равна:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} [11,1^2 + 0^2 + (-81,1)^2 - 2 \cdot 0,25 (11,1 \cdot 0 + 0 \cdot (-81,1) + (-81,1) \cdot 11,1)] = \\ &1790 \cdot 10^{-5} \text{ МПа} = 1790 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{мм/мм}^3 = 1790 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м/мм}^3 = \\ &= 17900 \text{ Дж/мм}^3. \end{aligned}$$

#### 4.2. Расчёт статически неопределимой задачи на кручение

К стальному брусу приложены три известных внешних скручивающих момента:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Требуется:

1) установить, при каком значении неизвестного момента  $X$  угол поворота правого концевое сечения вала равен нулю;

2) для установленного значения  $X$  построить эпюру крутящих моментов  $M_k$  (кН·м);

3) при заданном значении допускаемого касательного напряжения определить диаметр бруса из расчёта на прочность и округлить его величину до ближайшей, соответственно равной: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;

4) построить эпюру углов закручивания  $\varphi$  (рад);

5) найти наибольший относительный угол закручивания  $\varphi_o$  (рад/м).

Данные взять из таблицы.

Кручение – вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный силовой фактор – крутящий момент  $M_k$ . По методу сечений крутящий момент, возникающий в произвольном поперечном сечении бруса, численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к оставленной части. График, показывающий закон изменения крутящих моментов по длине бруса, называется эпюрой крутящих моментов.

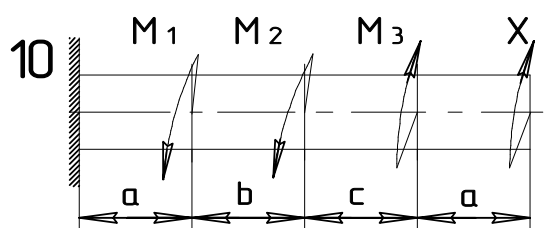
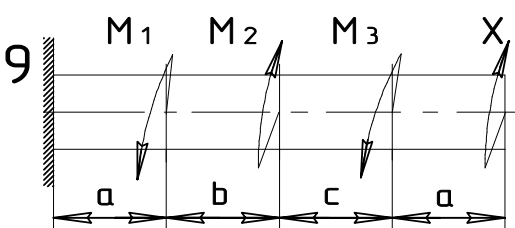
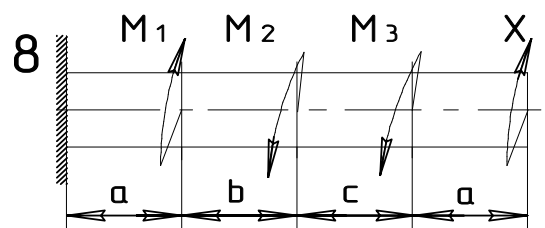
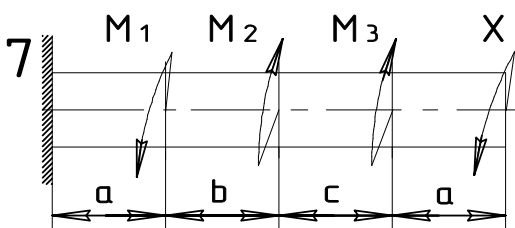
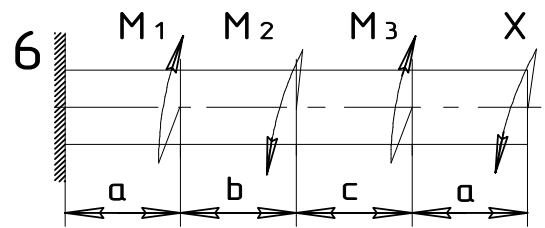
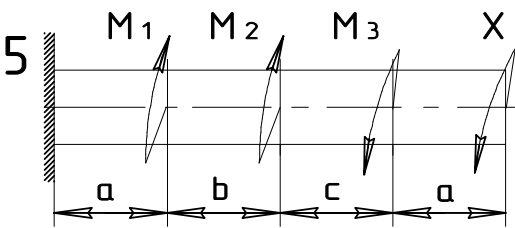
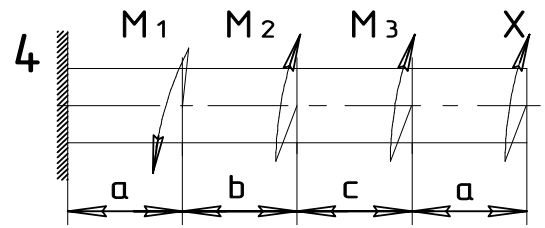
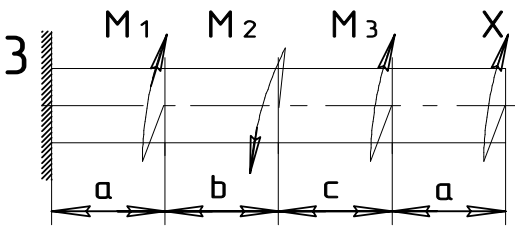
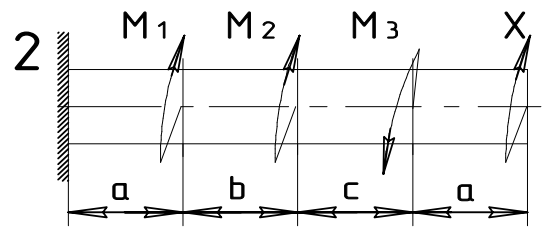
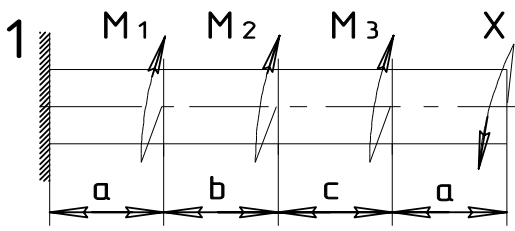
При кручении бруса в его поперечных сечениях возникают только касательные напряжения. Наибольшего значения касательные напряжения достигают в точках контура поперечного сечения. Геометрической характеристикой прочности бруса круглого поперечного сечения при кручении является полярный момент сопротивления.

За меру жёсткости при кручении принимают относительный угол закручивания  $\varphi_o$  (угол закручивания  $\varphi$  на единицу длины бруса).

Таблица данных

Номер строки	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$M_1, кН·м$	$M_2, кН·м$	$M_3, кН·м$	$[\tau], МПа$
1	1,1	1,8	1,5	1,1	1,8	1,5	35
2	1,2	1,9	1,6	1,2	1,9	1,6	40
3	1,3	2,0	1,7	1,3	2,0	1,7	45
4	1,4	1,1	1,8	1,4	1,1	1,8	50
5	1,5	1,2	1,9	1,5	1,2	1,9	55
6	1,6	1,3	2,0	0,6	1,3	2,0	60
7	1,7	1,4	1,1	0,7	1,4	1,1	65
8	1,8	1,5	1,2	0,8	1,5	1,2	70
9	1,9	1,6	1,3	0,9	1,6	1,3	75
10	2,0	1,7	1,4	1,0	1,7	1,4	80

### Расчетные схемы к задаче



**Пример.** Дано:  $M_1 = 0,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $M_2 = 1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $M_3 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $a = 1,6 \text{ м}$ ,  $b = 1,3 \text{ м}$ ,  $c = 2,0 \text{ м}$ ,  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ .

Для бруса, изображённого на рис. 48, выполнить пять требований задачи.

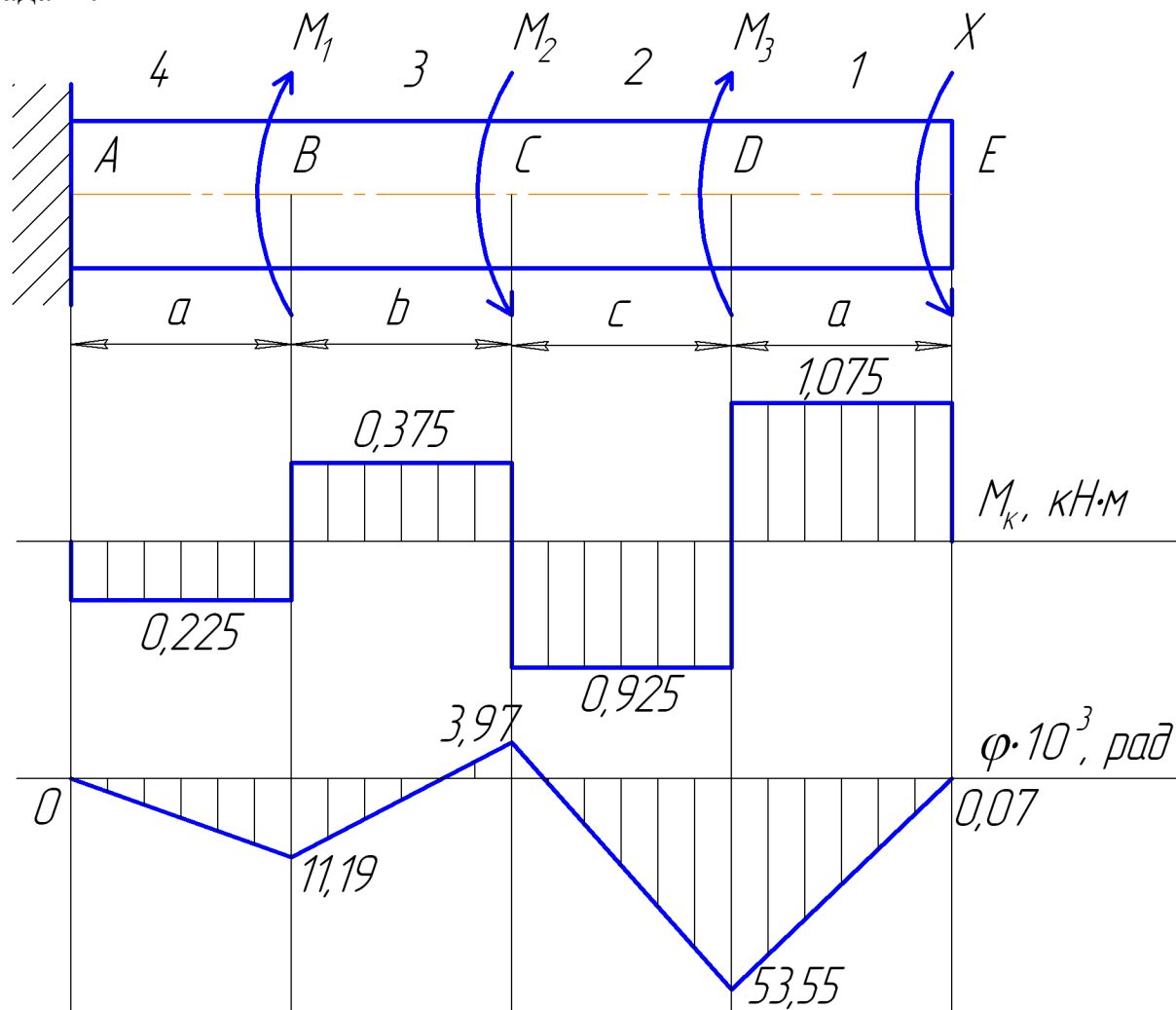


Рис. 48. К расчёту статически неопределимого бруса на кручение

В данной задаче внешняя нагрузка представлена в виде сосредоточенных скручивающих моментов, действующих в плоскостях, перпендикулярных к продольной оси бруса. В результате такого способа нагружения в каждом поперечном сечении бруса возникает единственный силовой фактор – крутящий момент  $M_k$ .

Разобьём брус на четыре участка. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние моменты. Эти сечения обозначим заглавными буквами латинского алфавита.

#### 1. Определение **крутящего момента X**.

Данная задача является статически неопределимой, так как имеется два неизвестных (реактивный момент в жёсткой заделке и момент  $X$ ). Для

решения задачи необходимо составить дополнительное уравнение перемещений.

Из условия задачи поворот сечения  $E$  относительно сечения  $A$  равен нулю:  $\varphi_{EA} = 0$ . Применяя принцип суперпозиции, запишем:

$$\varphi_{EA} = \varphi_{EA}^{M1} + \varphi_{EA}^{M2} + \varphi_{EA}^{M3} + \varphi_{EA}^X = 0.$$

Слагаемые в этом уравнении представляют собой углы поворота сечения  $E$  относительно сечения  $A$  от действия внешних моментов в отдельности.

Перепишем это уравнение, применив формулу Гука:

$$\frac{M_1 \cdot a}{GI_p} - \frac{M_2 \cdot (a + b)}{GI_p} + \frac{M_3 \cdot (a + b + c)}{GI_p} - \frac{X \cdot (a + b + c + a)}{GI_p} = 0.$$

Учитывая то, что брус постоянного поперечного сечения, и знаменатели в слагаемых равны, алгебраическая сумма числителей равна нулю:

$$M_1 \cdot a - M_2 \cdot (a + b) + M_3 \cdot (a + b + c) - X \cdot (a + b + c + a) = 0.$$

Момент  $X$  будет равен

$$\begin{aligned} X &= \frac{M_1 \cdot a - M_2 \cdot (a + b) + M_3 \cdot (a + b + c)}{(a + b + c + a)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 1,6 - 1,3 \cdot (1,6 + 1,3) + 2,0 \cdot (1,6 + 1,3 + 2,0)}{(1,6 + 1,3 + 2,0 + 1,6)} = \\ &= + 1,075 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Положительное значение момента  $X$  свидетельствует о том, что его направление, указанное на исходной схеме нагружения, верно. В противном случае направление действия момента необходимо изменить на противоположное.

## 2. Построение *эпюры крутящих моментов*.

Эпюру крутящих моментов строим с помощью метода сечения или «по скачкам».

**Участок 1.**  $M_{к1} = X = + 1,075 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

**Участок 2.**  $M_{к2} = X - M_3 = + 1,075 - 2,0 = - 0,925 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

**Участок 3.**  $M_{к3} = M_{к2} + M_2 = -0,925 + 1,3 = +0,375 \text{ кН}\cdot\text{м} .$

**Участок 4.**  $M_{к4} = M_{к3} - M_1 = +0,375 - 0,6 = -0,225 \text{ кН}\cdot\text{м} .$

Откладываем полученные значения на эпюре крутящих моментов. Построенная эпюра позволяет найти опасный участок, на котором возникает максимальный по модулю крутящий момент. Таковым является *участок 1*, в сечениях которого момент равен:

$$M_k^{max} = +1,075 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

3. Определение *диаметра бруса*.

Запишем условие прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{M_k^{max}}{W_p} \leq [\tau] .$$

Учитывая, что для круглого сечения полярный момент сопротивления  $W_p = \pi d^3 / 16$ , выразим диаметр бруса из условия прочности:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_k^{max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,075 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 60}} = 45,1 \text{ мм} .$$

Согласно стандартному ряду диаметров принимаем  $d = 45 \text{ мм} .$

Определим полярный момент инерции сечения:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 45^4}{32} = 4,02 \cdot 10^5 \text{ мм}^4 .$$

4. Построение *эпюры углов закручивания*.

Эпюра показывает численные значения углов поворота поперечных сечений бруса относительно неподвижного сечения *A* .

Строим эпюру от жёсткой заделки. По условию задачи сечение *A* не поворачивается.

Угол поворота сечения *B* относительно неподвижного сечения *A* равен углу закручивания *участка 4* бруса длиной *a* :

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{K4} \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{-0,225 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,02 \cdot 10^5} = -11,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Откладываем это значение на эпюре.

Угол поворота сечения *C* относительно сечения *B* равен углу закручивания *участка 3* бруса длиной *b* :

$$\varphi_{CB} = \frac{M_{K3} \cdot b}{G \cdot I_p} = \frac{+0,375 \cdot 10^6 \cdot 1,3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,02 \cdot 10^5} = +15,16 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения *C* относительно неподвижного сечения *A* :

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} = -11,19 \cdot 10^{-3} + 15,16 \cdot 10^{-3} = +3,97 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Откладываем это значение на эпюре.

Угол поворота сечения *D* относительно сечения *C* равен углу закручивания *участка 2* бруса длиной *c* :

$$\varphi_{DC} = \frac{M_{K2} \cdot c}{G \cdot I_p} = \frac{-0,925 \cdot 10^6 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,02 \cdot 10^5} = -57,52 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения *D* относительно неподвижного сечения *A* :

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_{DC} = +3,97 \cdot 10^{-3} - 57,52 \cdot 10^{-3} = -53,55 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Откладываем это значение на эпюре.

Угол поворота сечения *E* относительно сечения *D* равен углу закручивания *участка 1* бруса длиной *a* :

$$\varphi_{ED} = \frac{M_{K1} \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{+1,075 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,02 \cdot 10^5} = +53,48 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения *E* относительно неподвижного сечения *A* :

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_{ED} = -53,55 \cdot 10^{-3} + 53,48 \cdot 10^{-3} = -0,07 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

По условию задачи сечение  $E$  неподвижно относительно сечения  $A$ , т.е. эпюра  $\varphi$  под сечением  $E$  должна прийти в ноль. Небольшое отклонение конечного значения угла поворота от нуля связано с округлением диаметра бруса и ошибкой расчётов не является.

#### 5. Определение *максимального относительного угла закручивания*.

Так как брус имеет постоянное поперечное сечение, максимальный относительный угол закручивания будет на участке, где действует максимальный по модулю крутящий момент. Таковым является участок 1. Тогда

$$\varphi_o^{max} = \frac{M_{к1}}{G \cdot I_p} = \frac{1,075 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,02 \cdot 10^5} = 33,43 \cdot 10^{-3} \text{ рад/мм} = 1,92 \text{ град/м.}$$

### 4.3. Расчёт цилиндрических винтовых пружин

Жёсткий брус прикреплен к шарнирно-неподвижной опоре и к двум пружинам ( $G = 8 \cdot 10^4$  МПа) с одинаковым средним диаметром витков  $D$  и с одинаковым диаметром круглой проволоки  $d$ . Пружина 1 имеет  $m$  витков, пружина 2 имеет  $n$  витков. Требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в обеих пружинах;
- 2) найти осадки обеих пружин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ;
- 3) установить, при каком отношении витков  $m/n$  усилия в обеих пружинах равны между собой;
- 4) найти усилия, напряжения и осадки пружин при найденном отношении  $m/n$  и заданной величине  $m$  (или  $n$ ).

Данные взять из таблицы.

Винтовые пружины широко применяются в различных областях машиностроения и приборостроения. По форме винтовые пружины делят на цилиндрические, конические и фасонные. Цилиндрические винтовые пружины растяжения и сжатия изготавливают из проволоки круглого поперечного сечения.

В поперечном сечении витка пружины возникают только касательные напряжения. Максимальные напряжения возникают в точках контура поперечного сечения. Отношение среднего диаметра пружины  $D$  к диаметру проволоки  $d$  называют индексом пружины  $i$ . Осадка пружины  $\lambda$  – изменение её высоты под нагрузкой. Усилие  $P$ , при котором осадка пружины равна единице, называется жёсткостью пружины  $C$ . Величина обратная жёсткости называется коэффициентом податливости пружины  $\beta$ . Чем больше число витков пружины, тем меньше её жёсткость.



## Расчётные схемы к задаче

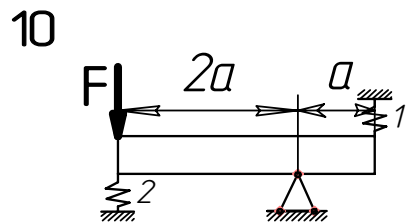
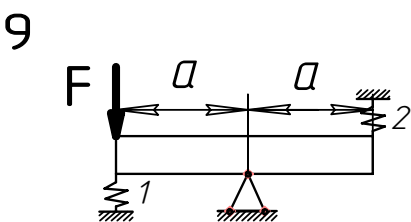
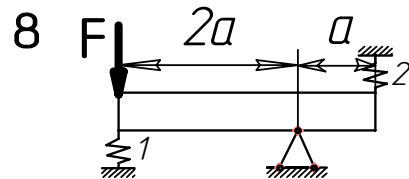
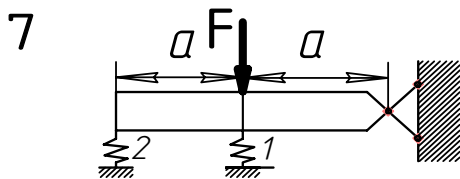
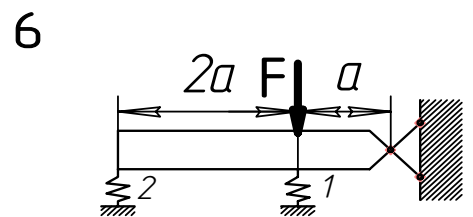
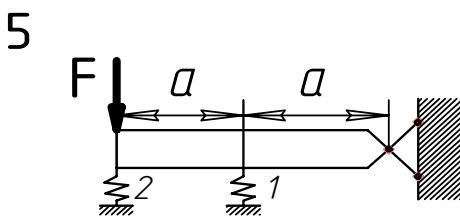
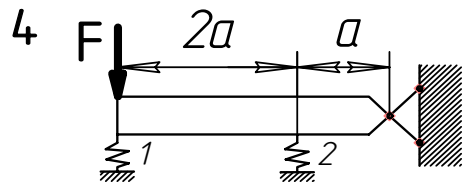
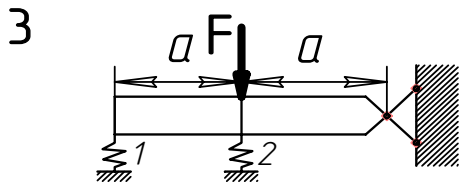
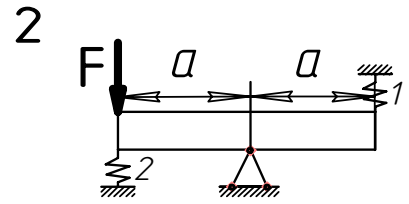
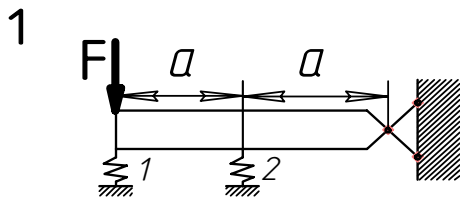


Таблица данных

Номер строки	$D, \text{ мм}$	$d, \text{ мм}$	$m$	$n$	$F, \text{ Н}$
1	110	9	7	15	30
2	120	10	8	6	40
3	130	11	9	7	50
4	140	12	10	8	60
5	150	13	11	9	70
6	60	14	12	10	80
7	70	15	13	11	90
8	80	16	14	12	100
9	90	17	15	13	110
10	100	8	6	14	120

**Пример .** Дано:  $D = 90 \text{ мм}$ ,  $d = 17 \text{ мм}$ ,  $m = 15$ ,  $n = 13$ ,  $F = 110 \text{ Н}$ .

Для системы, изображённой на рис. 49, а, выполнить четыре требования задачи.

1. Определение *усилий и напряжений* в пружинах.

Под действием силы  $F$  в пружинах возникают внутренние усилия  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 49, б), величина которых неизвестна. Таким образом, задача является статически неопределимой, и кроме уравнения равновесия необходимо составить уравнение перемещений.

Составим уравнение моментов сил относительно точки  $A$  :

$$\Sigma M_A = 0, \quad P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a - F \cdot 2a = 0.$$

Для составления уравнения перемещений изобразим положение бруса, которое он займёт в результате деформации пружин (рис. 49, в). Из рисунка видно, что  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ .

Запишем формулы для определения осадок пружин:

$$\lambda_1 = \frac{8P_1 \cdot D^3 \cdot m}{G \cdot d^4}, \quad \lambda_2 = \frac{8P_2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}.$$

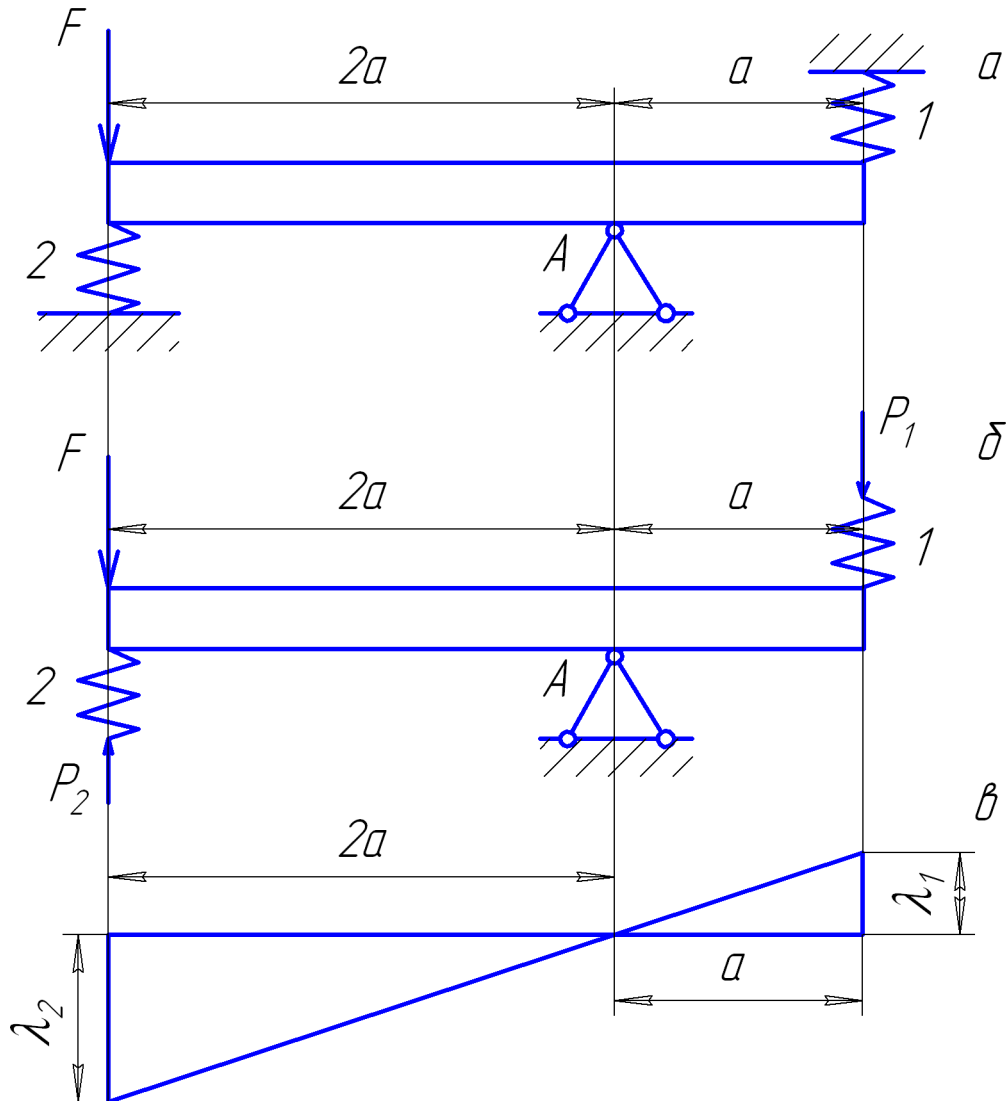


Рис. 49. К расчёту цилиндрических винтовых пружин

Подставим эти выражения в уравнение перемещений и проведём сокращения:

$$\frac{8P_2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{2 \cdot 8P_1 \cdot D^3 \cdot m}{G \cdot d^4},$$

или  $P_2 \cdot n = 2P_1 \cdot m$ , откуда

$$P_2 = \frac{2P_1 \cdot m}{n} = \frac{2P_1 \cdot 15}{13} = 2,31P_1.$$

Подставив величину  $P_2$  в уравнение равновесия, получим:

$$P_1 \cdot a + 2,31P_1 \cdot 2a - F \cdot 2a = 0.$$

Отсюда  $P_1 = 39,15 \text{ Н}$ ,  $P_2 = 2,31 \cdot 39,15 = 90,44 \text{ Н}$ .

Найдём поправочный коэффициент, зависящий от индекса пружины  $i$ :

$$k = \frac{4i + 1}{4i - 4} = \frac{4 \cdot 5,3 + 1}{4 \cdot 5,3 - 4} = 1,29,$$

где

$$i = \frac{D}{d} = \frac{90}{17} = 5,3.$$

Определим максимальные напряжения в пружинах:

$$\tau_1^{max} = \frac{8k \cdot P_1 \cdot D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,29 \cdot 39,15 \cdot 90}{3,14 \cdot 17^3} = 2,36 \text{ МПа},$$

$$\tau_2^{max} = \frac{8k \cdot P_2 \cdot D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,29 \cdot 90,44 \cdot 90}{3,14 \cdot 17^3} = 5,45 \text{ МПа}.$$

## 2. Определение осадок пружин.

Для пружины 1:

$$\lambda_1 = \frac{8P_1 \cdot D^3 \cdot m}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 39,15 \cdot 90^3 \cdot 15}{8 \cdot 10^4 \cdot 17^4} = 0,51 \text{ мм},$$

$$\lambda_2 = \frac{8P_2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 90,44 \cdot 90^3 \cdot 13}{8 \cdot 10^4 \cdot 17^4} = 1,02 \text{ мм}.$$

## 3. Определение оптимального отношения числа витков $m/n$ .

По условию задачи оптимальным отношением числа витков пружин является такое, при котором усилия в пружинах одинаковы ( $P_1 = P_2$ ).

Из ранее установленного соотношения между осадками пружин  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ , и полагая  $P_1 = P_2$ , определим соотношение витков:

$$\frac{8P_2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{2 \cdot 8P_1 \cdot D^3 \cdot m}{G \cdot d^4},$$

откуда  $n = 2m = 2 \cdot 15 = 30$ .

Принимаем  $m = 15$ ,  $n = 30$ .

4. Определение усилий, напряжений и осадок пружин при *новом отношении числа витков*.

Из уравнения равновесия определяем усилие в пружинах  $P = P_1 = P_2$ :

$$P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a - F \cdot 2a = 0.$$

$$3P = 2F, \quad P = \frac{2F}{3} = \frac{2 \cdot 110}{3} = 73,33 \text{ Н}.$$

Максимальные напряжения в обеих пружинах будут равны:

$$\tau^{max} = \frac{8k \cdot P \cdot D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 1,29 \cdot 73,33 \cdot 90}{3,14 \cdot 17^3} = 4,41 \text{ МПа}.$$

Осадка пружины 1:

$$\lambda_1 = \frac{8P \cdot D^3 \cdot m}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 73,33 \cdot 90^3 \cdot 15}{8 \cdot 10^4 \cdot 17^4} = 0,96 \text{ мм}.$$

Осадка пружины 2:

$$\lambda_2 = \frac{8P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 73,33 \cdot 90^3 \cdot 30}{8 \cdot 10^4 \cdot 17^4} = 1,92 \text{ мм}.$$

## Контрольные вопросы для самоконтроля

### *Основные понятия*

1. В чём состоят задачи расчётов на прочность, жёсткость, устойчивость?
2. Что называется бруском, оболочкой, пластиной, массивным телом?
3. Что называется осью бруса?
4. По каким признакам и как классифицируются нагрузки?
5. Что представляет собой интенсивность распределённой нагрузки?
6. В каких единицах выражаются сосредоточенные силы и моменты, а также интенсивности распределённых силовых нагрузок?
7. Что представляют собой внутренние силы?
8. В чём сущность метода сечений?
9. Что называется касательным и нормальным напряжением? В каких единицах они выражаются?
10. Какова зависимость между полным, нормальным и касательным напряжениями в точке данного сечения?
11. В чём состоит принцип независимости действия сил?
12. В чём заключается гипотеза плоских сечений?

### *Теория напряжённого состояния*

1. Какое напряжённое состояние называется пространственным (трёхосным), плоским (двухосным) и линейным (одноосным)?
2. Каково правило знаков для нормальных и касательных напряжений?
3. Докажите закон парности касательных напряжений?
4. Что представляют собой главные напряжения и главные площадки? Как расположены главные площадки друг относительно друга?
5. Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
6. Выведите формулы для определения главных напряжений и углов наклона главных площадок.
7. Как определить главную площадку, по которой действует максимальное главное напряжение в общем случае плоского напряжённого состояния?
8. Чему равны экстремальные значения касательных напряжений в случае плоского состояния?
9. Что представляют собой площадки сдвига и как они наклонены к главным площадкам?
10. Чему равна сумма нормальных напряжений на любых трех взаимно перпендикулярных площадках?
11. Чему равны максимальные и минимальные касательные напряжения (при заданных главных напряжениях) и по каким площадкам они действуют?
12. Выведите формулы, выражающие обобщённый закон Гука. Почему эти формулы действительны и для случая, когда заданные нормальные напряжения не являются главными?

## *Растяжение и сжатие*

1. Какие случаи деформации бруса называются центральным растяжением?
2. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса?
3. Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится?
4. Какой вид имеют эпюры продольных сил для бруса, нагруженного несколькими осевыми сосредоточенными силами и равномерно распределённой осевой нагрузкой?
5. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого бруса и чему они равны?
6. Как используется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) для выяснения закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) бруса?
7. Как строится график (эпюра), показывающий изменение (по длине бруса) нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса?
8. Как вычисляются нормальные и касательные напряжения в наклонных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого бруса? Сделайте вывод соответствующих формул.
9. В каких сечениях растянутого бруса возникают наибольшие нормальные и в каких наибольшие касательные напряжения?
10. Что называется полной (абсолютной) продольной деформацией? Что представляет собой относительная продольная деформация? Каковы размерности абсолютной и относительной продольных деформаций?
11. Что называется модулем упругости  $E$ ? Как влияет величина  $E$  на деформацию бруса?
12. Что называется жёсткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии)?
13. Как формулируется закон Гука? Напишите формулы абсолютной и относительной продольных деформаций бруса.
14. Что называется абсолютной и относительной поперечными деформациями бруса?
15. Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении и сжатии?
16. Что называется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона) и какие он имеет значения?
17. В каких координатах строится диаграмма растяжения?
18. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением)? Что представляет собой площадка текучести?
19. Какие деформации называются упругими и какие остаточными или пластическими?
20. Какое явление называется наклёпом?

21. Что называется условным пределом текучести? Для каких материалов определяется эта механическая характеристика?
22. Чем отличается диаграмма растяжения пластичной стали от диаграммы растяжения хрупкой стали?
23. Чем отличаются диаграммы сжатия пластичной и хрупкой сталей от диаграмм растяжения?
24. Чем отличается диаграмма сжатия чугуна от диаграммы растяжения?
25. Что называется остаточным относительным удлинением образца и остаточным относительным сужением образца? Какое свойство материала они характеризуют?
26. Какие материалы называются анизотропными?
27. Как определяются продольные перемещения точек бруса при продольной силе и размерах поперечного сечения, непрерывно изменяющихся по длине оси бруса, а также при ступенчато переменном сечении и продольных силах, постоянных в пределах отдельных участков?
28. Что представляет собой эпюра продольных перемещений?
29. Какое действие нагрузки называется статическим?
30. Как найти работу растягивающей силы по диаграмме растяжения?
31. Сделайте вывод формулы работы растягивающей силы при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности.
32. При каком условии и почему потенциальная энергия деформации бруса принимается равной работе внешних сил?
33. Что называется удельной потенциальной энергией деформации, каковы её выражение и размерность? Выведите соответствующую формулу.
34. Как определяется потенциальная энергия деформации при брусом со ступенчатым изменением размеров поперечных сечений и при одновременном действии на брус нескольких осевых сил?
35. Как определяется потенциальная энергия деформации при продольных нагрузках, распределенных по длине оси бруса, или при непрерывном изменении размеров поперечных сечений бруса?
36. Выведите формулы продольных сил, нормальных напряжений, продольных деформаций и потенциальной энергии деформации от собственного веса вертикального бруса постоянного сечения.
37. Как объяснить наличие множителя  $\frac{1}{2}$  в формуле удлинения вертикального бруса постоянного сечения от собственного веса?
38. Что называется допускаемым напряжением? Как оно выбирается для пластичных и хрупких материалов?
39. Что называется коэффициентом запаса прочности и от каких основных факторов зависит его величина?
40. Какие три характерных вида задач встречаются при расчете прочности конструкций? Напишите условия прочности на растяжение для каждого вида.
41. Какие системы называются статически неопределимыми?
42. Что представляют собой дополнительные уравнения?
43. Что называется степенью статической неопределимости системы?



## *Сдвиг и кручение*

1. Какое напряжённое состояние называется чистым сдвигом?
2. Какая характеристика является мерой деформации при сдвиге?
3. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
4. Что характеризует коэффициент Пуассона?
5. В каких деталях машин и элементах конструкций возникает деформация сдвига?
6. В чём отличие между понятиями «срез» и «скалывание»?
7. Как деформируются и разрушаются при сдвиге пластичные и хрупкие материалы?
8. Почему деформация сдвига, как правило, сопровождается смятием?
9. Как определить условный предел прочности материала при сдвиге?
10. При каком виде нагружении прямой брус испытывает деформацию кручения?
11. Как вычисляется скручивающий момент, передаваемый валом, по заданной мощности и числу оборотов в минуту?
12. Какое правило знаков принято для крутящих моментов?
13. Что представляют собой эпюры крутящих моментов и как они строятся?
14. Что называется полным и относительным углом закручивания бруса? Как они обозначаются и какую имеют размерность?
15. Перечислите предпосылки теории кручения прямого бруса круглого поперечного сечения.
16. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса и как они направлены?
17. Как при кручении распределяются по сечению напряжения?
18. Выведите формулу для определения напряжений в поперечном сечении скручиваемого круглого бруса.
19. Какое напряжённое состояние возникает в каждой точке круглого бруса при кручении?
20. Выведите формулы для определения относительного и полного угла закручивания круглого бруса.
21. Что называется жёсткостью сечения при кручении?
22. Напишите выражение полярных моментов инерции круглого сплошного и кольцевого сечения.
23. Что называется полярным моментом сопротивления, в каких единицах он выражается и чему равен (для круга и кольца)?
24. Равен ли полярный момент сопротивления кольцевого сечения разности полярных моментов сопротивления наружного и внутреннего кругов?
25. Чем объясняется тот факт, что брус кольцевого сечения при кручении экономичнее бруса сплошного сечения?
26. В каких площадках, проходящих через данную точку бруса круглого сечения, при кручении возникают экстремальные касательные напряжения и чему они равны?

27. В каких площадках, проходящих через данную точку стержня круглого сечения, при кручении возникают экстремальные нормальные напряжения и чему они равны?
28. Чему равны наибольшие экстремальные касательные напряжения и наибольшие главные напряжения в скручиваемом бруске круглого сечения? В каких точках они возникают?
29. Как разрушаются при кручении деревянные и чугунные бруска? Как объяснить характер разрушения для каждого из этих материалов?
30. Чему равна потенциальная энергия деформации кручения бруска круглого сечения? Выведите соответствующую формулу.
31. Как производится расчет скручиваемого бруска на прочность?
32. Как выбираются допускаемые напряжения при расчете на кручение?
33. Как производится расчет скручиваемого бруска на жесткость?
34. Почему при изучении деформации кручения рассматривают работу цилиндрических винтовых пружин растяжения и сжатия?
35. Что называется жесткостью пружины?
36. Что называется осадкой пружины?
37. Как вычисляются напряжения в цилиндрической винтовой пружине? На каких допущениях основана формула для вычисления напряжений?
38. Как определяются деформации цилиндрической винтовой пружины? Выведите соответствующую формулу.

## Библиографический список

1. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учебник для техн. вузов/ А.В.Дарков, Г.С.Шпиро. – Изд. 5-е; перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов/ В.И.Феодосьев. – Изд. 10-е; перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 591 с.
3. Степин, П.А. Сопротивление материалов: учебник для немашиностроительных спец. вузов/ П.А.Степин. – Изд. 8-е – М.: Высш. шк., 1988. – 367 с.
4. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учебник для вузов/ А.В.Александров, В.Д.Потапов, Б.П.Державин. – Изд. 2-е; испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
5. Горшков, А. Г. Сопротивление материалов: учебник / А.Г.Горшков [и др.]. – М: Физматлит, 2002. – 544с.
6. Ахметзянов, М.Х. Сопротивление материалов: учебник/ М.Х.Ахметзянов [и др.]. – М.: Высш. шк., 2007. – 336 с.
7. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для техн. вузов / Миролубов И.Н. [и др.]. – Изд. 5-е; перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985 – 399 с.
8. Козловский, А.Э. Расчёт элементов конструкций на растяжение и сжатие: учеб. пособие / А.Э.Козловский; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2015. – 84 с.

Учебное издание

**Козловский Александр Эдуардович**

**РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
НА СДВИГ И КРУЧЕНИЕ**

Учебное пособие

Редактор О.А. Соловьёва

Подписано в печать 00.00.2016. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.  
Усл. печ. л. 0,00. Тираж 75 экз. Заказ 0000

ФГБОУ ВПО Ивановский государственный  
химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании  
кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВПО «ИГХТУ»  
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7