Г.А. Зуева, Г.Н. Кокурина

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Иваново
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Г.А. Зуева, Г.Н. Кокурина

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Иваново 2017

УДК 519.6

Зуева, Г.А. Методы оптимизации: учеб. пособие / Г.А. Зуева, Г.Н. Кокурина; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. Иваново, 2017. –104 с.

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным методам одномерной и многомерной оптимизации. Материал излагается последовательно в соответствии со сложившейся логикой курса «Методы оптимизации». В каждом разделе кратко изложены основные теоретические сведения, приведены алгоритмы, блок-схемы расчетов по излагаемым методам, даны числовые примеры поиска оптимальных значений функций, в том числе и с применением различных пакетов прикладных программ. Пособие включает большое количество заданий для самостоятельного решения и выполнения лабораторных работ.

Рекомендуется студентам всех форм обучения, изучающим методы оптимизации.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты

доктор экономических наук, профессор М.Б. Ермолаев

(ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»)

доктор технических наук, профессор В.П. Жуков

(ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет»)

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация – это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. В частности, важнейшей задачей применения расчетных методов при компьютерном моделировании химико-технологических процессов является определение оптимальных, то есть наилучших, условий их функционирования.

Всевозможные устройства, процессы и ситуации, применительно к которым предстоит решать задачу оптимизации, объединяют общим названием - **объектом оптимизации.**

При решении задачи оптимизации требуется выполнить три условия:

- выявить ресурсы оптимизации – независимые переменные оптимизации $x_1, x_2, ..., x_n$;
- выбрать критерий оптимальности функционирования процесса – целевую функцию, которую можно записать в виде

$$R = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1}$$

  При этом независимые переменные оптимизации должны оказывать на величину целевой функции, по возможности, наибольшее влияние;
- реализовать метод оптимизации, обеспечивающий определение оптимального значения целевой функции путем целенаправленного значения независимых переменных оптимизации.

Существует два типа задач оптимизации – безусловные и условные.

Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума[1] действительной функции $R = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов на некотором множестве n - мерного пространства.

---

[1] Отметим, что задача отыскания максимума функции R эквивалентна задаче отыскания минимума функции $-R$. Это позволяет без труда переносить результаты, полученные для задачи минимизации, на задачи максимизации, и наоборот. В дальнейшем, как правило, будет рассматриваться задача минимизации.

Условные задачи оптимизации, или задачи с ограничениями, при формулировке которых на значения аргументов налагаются ограничения в виде равенств:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k \tag{2}$$

или неравенств

$$\psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \quad j = 1, ..., p. \tag{3}$$

Решение задач оптимизации, в которых критерий оптимальности является линейной функцией независимых переменных с линейными ограничениями на них, составляет предмет **линейного программирования**.

При $n = 1$ целевая функция R является функцией одной переменной. В этом случае говорят об **одномерной оптимизации.**

1. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Будем рассматривать задачу минимизации функции одной переменной, т.е.

$$f(x) \to \min, \; x \in D(f). \tag{4}$$

Задача заключается в поиске минимального значения $f_{\min}$ функции $f(x)$ в области ее определения $D(f)$ и точки $x^* \in D(f)$, в которой $f(x)$ принимает это значение, $f_{\min} = \min\limits_{x \in D(f)} f(x) = f(x^*)$.

Методами математического анализа точное решение этой задачи не может быть найдено для большинства практических задач по следующим причинам:

- целевая функция $f(x)$ может не иметь непрерывных производных до второго порядка включительно;
- возможны случаи, когда о целевой функции известно лишь то, что ее значение может быть вычислено с нужной точностью, а сама функция задана неявно.

Подавляющее большинство численных методов оптимизации относится к классу итерационных, то есть порождающих последовательность точек в соответствии с предписанным набором правил, включающим критерий окончания.

1.1. Метод сканирования (метод равномерного поиска)

Метод сканирования в качестве критерия движения к минимуму использует сравнительную оценку величины целевой функции, вычисленной в соответствующих точках.

Интервал поиска $[a,b]$ разбивается на n равных участков, длина каждого из которых равна шагу поиска h (рис. 1).

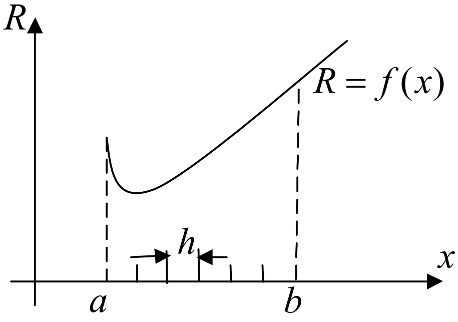


Рис. 1

Далее последовательно определяются значения функции $f(x)$ во всех точках разбиения аргумента и в точках a и b, и запоминается наименьшее значение. Таким образом, минимум может быть найден с точностью до шага поиска h.

Достоинства метода: простота, возможность нахождения глобального минимума.

Недостаток метода: большой объем вычислений, которые необходимо выполнить при его реализации.

Алгоритм

Шаг 1**.** Задать n - количество вычислений функции. Вычислить шаг $h = \dfrac{b-a}{n+1}$.

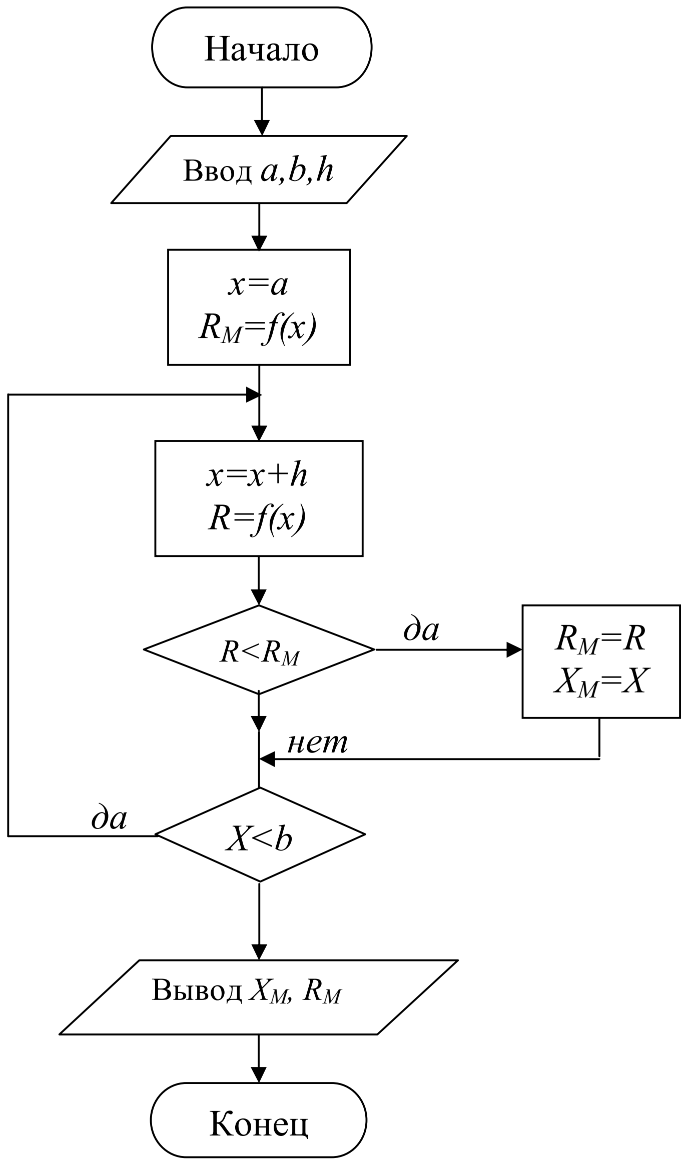
Шаг 2. Вычислить точки $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0,1,2,\ \ldots,n+1$, равноотстоящие друг от друга.

Шаг 3. Вычислить значения функции в n найденных точках: $f(x_i)$, i=0, 1,…,n.

Шаг 4. Среди точек x_i, i=0,1,…,$n+1$, найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_k) = \min\limits_{1 \le i \le n} f(x_i)$.

Шаг 5. Точка минимума x^* принадлежит интервалу: $x^* \in [x_{k-1,k+1}]$, на котором в качестве приближенного решения может быть выбрана точка $x^* \cong x_k$.

Блок-схема алгоритма поиска целевой функции методом сканирования:



Погрешность

Погрешность нахождения точки минимума методом сканирования не превосходит $h = \dfrac{b-a}{n+1}$.

<u>Пример 1.</u> Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на интервале[0,10].

□ Воспользуемся алгоритмом метода сканирования.

1. Зададим $n = 9$ так, чтобы отрезок [0,10] содержал n+1=10 равных подынтервалов, $h = \dfrac{10-0}{10} = 1$.

2. Определим точки вычисления функции $x_i = a + i\,h = 0 + i\dfrac{10-0}{10} = i$,

i=0, 1, …, 10.

3. Вычислим значения функции в одиннадцати точках: $f(0) = 0$, $f(1) = -10$, $f(2) = -16$, $f(3) = -18$, $f(4) = -16$, $f(5) = -10$, $f(6) = 0$, $f(7) = 14$, $f(8) = 32$, $f(9) = 54$, $f(10) = 80$.

4. В точке $x_3 = 3$ функция принимает наименьшее значение: $f(x_3) = -18$.

5. Искомая точка минимума после девяти вычислений принадлежит интервалу: $x^* \in [2,4]$, в котором выбирается точка $x^* \cong x_3 = 3$.

4. Погрешность нахождения точки минимума не превосходит h=1.

<u>1.2. Метод локализации</u>

Алгоритм:

Шаг 1. Интервал поиска минимума $[a,b]$ разбить на четыре равные части (подынтервалы) точками x_1, x_2 и x_3 (рис. 2).

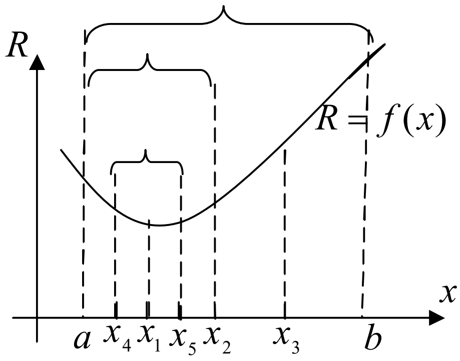


Рис. 2

Шаг 2. Вычислить значения целевой функции $R = f(x)$ во всех точках разбиения и в точках $x = a$, $x = b$.

Шаг 3. Полученные значения $f(x)$ сравнить между собой, и из них выбрать наименьшее.

Шаг 4. Локализовать минимум, причем новый интервал поиска равен двум старым подынтервалам с наименьшим значением $f(x)$ на их общей границе (на рис. 2 это соответствует интервалу $[a,\ x_2]$).

Шаг 5. Делить интервал, в котором локализован минимум, опять на четыре равных подынтервала (на рис. 2 точками x_4, x_5) и снова вычислить значения критерия оптимальности в точках деления, сравнить их между собой, найти наименьшее, локализовать минимум в меньшем интервале (на рис. 2 в интервале $[x_4, x_5]$) и так до тех пор, пока минимум не будет локализован в интервале, размер которого соответствует заданной точности поиска.

Замечание.

Интервал поиска разбивается именно на четыре подынтервала с целью уменьшения объема вычислений: при этом каждый последующий подынтервал делится пополам, и вычислять значение функции нужно только в двух новых точках, так как ее значения на концах нового интервала и в его середине известны из предыдущих расчетов.

Погрешность

Длина интервала неопределенности после S вычислений значений целевой функции определяется выражением

$$l = 2^{-\frac{s-3}{2}}(b-a), \tag{5}$$

абсолютная ошибка в нахождении минимума составляет

$$\Delta = \frac{l}{2} = 2^{-\frac{s-1}{2}}(b-a) \tag{6}$$

<u>Пример 2</u>

Найти минимум целевой функции $R = f(x) = 10x^4 - \dfrac{8x^3}{4-x} - 19x$ в области $0 \le x \le 2$, локализовав его на отрезке длиной не более $0{,}3$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода локализации.

1. Разбиваем интервал поиска $0 \le x \le 2$ на четыре равные части и вычисляем значения функции $f(x)$ на концах интервала и в точках разбиения:

$a = 0$ $\qquad f(a) = 0$

$x_1 = 0{,}5$ $\qquad f(x_1) = -9{,}16$

$x_2 = 1{,}0$ $\qquad f(x_2) = -11{,}67$

$x_3 = 1{,}5$ $\qquad f(x_3) = 11{,}32$

$x_4 = 2$ $\qquad f(x_4) = 90{,}0$

Минимальное значение целевой функции есть $f(x_2) = f(1{,}0) - 11{,}7$. Интервал поиска уменьшаем, ограничивая точками $x_1 = 0{,}5$, $x_3 = 1{,}5$, т.е. локализуем экстремум в области $0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

2. Новый интервал поиска $0{,}5 \le x \le 1{,}5$ разбиваем на четыре равные части и вычисляем значения целевой функции в точках разбиения и на концах интервала. Значения функции

$f(0{,}5) = -9{,}16$; $f(1{,}0) = -11{,}67$; $f(1{,}5) = 11{,}32$

вычислены ранее на предыдущем этапе, поэтому вычисляем лишь

$f(0{,}75) = -12{,}12$ и $f(1{,}25) = -5{,}02$.

Выбираем минимальное значение $f(x)$:

$f(0{,}75) = -12{,}12$,

и интервал поиска вновь уменьшаем, т.е. локализуем экстремум в области $0{,}5 \le x \le 1$.

3. Новый интервал поиска $0{,}5 \le x \le 1$ разбиваем на четыре равные части.

Значения $f(0{,}5) = -9{,}16$; $f(0{,}75) = -12{,}12$; $f(1{,}0) = -11{,}67$ вычислены на втором этапе, поэтому вычисляем только

$f(0{,}625) = -10{,}93$; $f(0{,}875) = -12{,}48$.

Из всех значений функции выбираем минимальное $f(0{,}875) = -12{,}48$ и локализуем экстремум в области $0{,}75 \le x \le 1$.

Расчет окончен, т.к. экстремум локализован в области $\Delta x = 0{,}25 < 0{,}3$ с точностью $\Delta = 0{,}125$.

Таким образом, $x_{\min} = 0{,}875 \pm 0{,}125$; $f(0{,}875) = -12{,}48$.

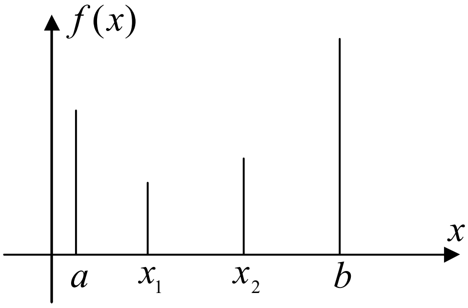
1.3. Метод золотого сечения

При построении процесса оптимизации стараются сократить объем вычислений и время поиска. Этого достигают обычно путем сокращения количества вычислений значений целевой функции $f(x)$. Одним из наиболее эффективных методов, в которых при ограниченном количестве вычислений $f(x)$ достигается наилучшая точность, является метод золотого сечения.

Если известно, что функция $f(x)$ унимодальная[2] на отрезке $[a,b]$, то положение точки минимума можно уточнить, вычислив $f(x)$ в двух внутренних точках отрезка. При этом возможны две ситуации:

1) $f(x_1) < f(x_2)$. Минимум реализуется на отрезке $[a, x_2]$.

[2] т. е. имеет только один минимум.



2) $f(x_1) > f(x_2)$. Минимум реализуется на отрезке $[x_1, b]$.

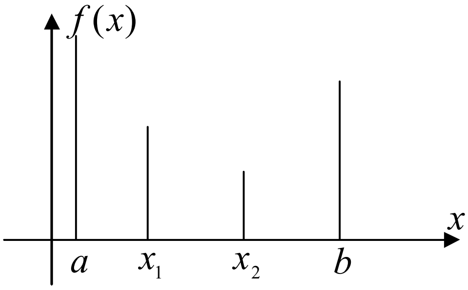
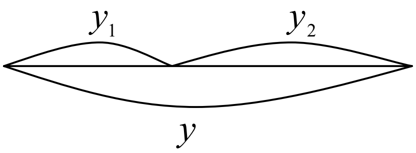


Рис. 3

В методе золотого сечения каждая из точек x_1 и x_2 делит исходный интервал на две части так, что отношение целого к большей части равно отношению большей части к меньшей, т.е. равно так называемому «золотому отношению». Это соответствует следующему простому геометрическому представлению:



Здесь

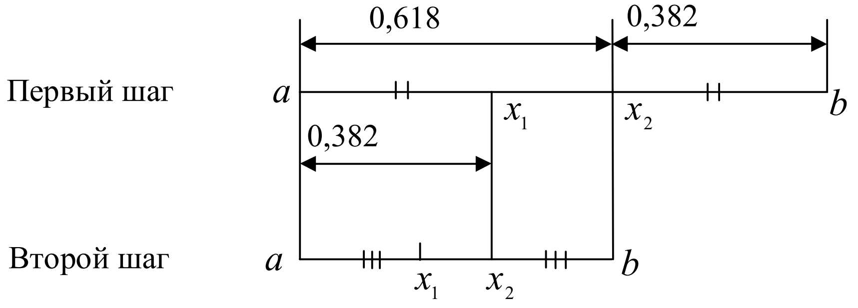
$$\frac{y}{y_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ или } \frac{y}{y - y_1} = \frac{y - y_1}{y_1}. \tag{7}$$

Обозначив $\frac{y_1}{y} = z$, получаем $\frac{1}{1-z} = \frac{1-z}{z}$, $(1\text{-}z)^2=z$, $z^2\text{-}3z+1=0$

откуда $z = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$. Итак, длины отрезков $[a, x_1]$ и $[x_2, b]$ одинаковы и составляют 0,382 от длины $[a, b]$. По значениям $f(x_1)$ и $f(x_2)$ определяется новый интервал $[a, x_2]$ или $[x_1, b]$, в котором локализован минимум. Найденный интервал снова делится двумя точками в том же отношении, причем одна из новых точек деления совпадает с уже использованной на предыдущем шаге.

Взаимное расположение точек первых трех вычислений можно показать следующим образом:

1) $f(x_1) < f(x_2)$



2) $f(x_1) \geq f(x_2)$

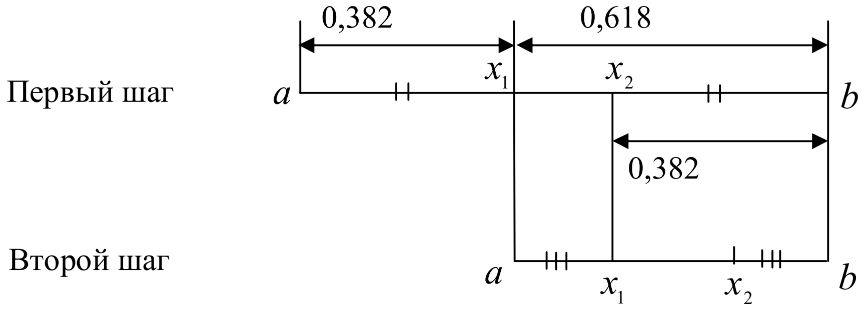


Рис. 4

Таким образом, длина интервала неопределенности на каждом шаге сжимается с коэффициентом $0{,}618$. На первом шаге необходимы два вычисления функции, на каждом последующем – одно.

Длина интервала неопределенности после S вычислений значений $f(x)$ составляет
$$l = 0{,}618^{S-1} \cdot (b-a). \tag{8}$$

Алгоритм

Шаг 1. Вычислить значение функции $f(x_1)$, где $x_1 = a + 0{,}382(b-a)$.

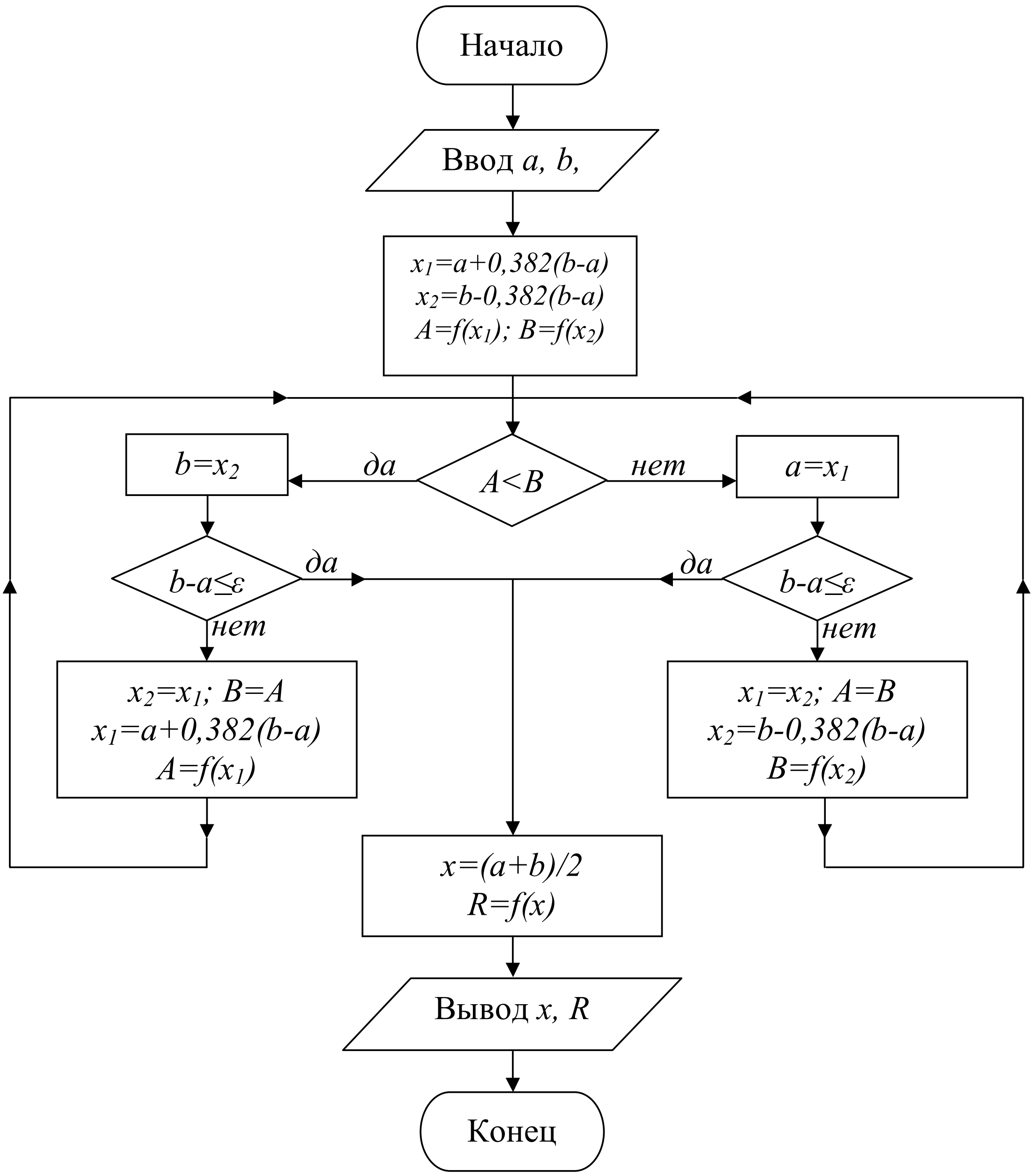
Шаг 2. Вычислить значение функции $f(x_2)$, где $x_2 = b - 0{,}382(b-a)$.

Шаг 3. Определить новый интервал (a, x_2) или (x_1, b), в котором локализован минимум.

Шаг 4. Внутри полученного интервала находится новая точка (x_1 в случае 1) или (x_2 в случае 2), отстоящая от его конца на расстоянии, составляющем 0,382 от его длины. В этой точке рассчитать значение $f(x)$. Затем вычисления повторяются, начиная с пункта 3, до тех пор, пока величина интервала неопределенности станет меньшей или равной ε, где ε - заданное сколь угодно малое положительное число.

Блок-схема алгоритма поиска минимума функции *f*(*x*)

методом золотого сечения



Сходимость

Для метода золотого сечения характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(n) = (0{,}618)^{n-1}$, где n – количество вычислений функции.

Пример 3

Используя метод золотого сечения, минимизировать функцию $f(x) = x^2 + 2x$ на интервале $[-3, 5]$. Длина конечного интервала неопределенности не должна превосходить $0{,}2$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода золотого сечения.

Первый шаг. $a = -3,\ b = 5, b - a = 8$

$x_1 = -3 + 0{,}382 \cdot 8 = 0{,}056$

$x_2 = 5 - 0{,}382 \cdot 8 = 1{,}944$

$f(x_1) = 0{,}056^2 + 2 \cdot 0{,}056 = 0{,}115$

$f(x_2) = 1{,}944^2 + 2 \cdot 1{,}944 = 7{,}667$

$f(x_1) < f(x_2)$. Новый отрезок $[-3; 1{,}944]$.

Второй шаг. $a = -3,\ b = 1{,}944, b - a = 4{,}944$.

$x_1 = -3 + 0{,}382 \cdot 4{,}944 = -1{,}112$;

$x_2 = 0{,}056$;

$f(x_1) = (-1{,}112)^2 + 2 \cdot (-1{,}112) = -0{,}987$;

$f(x_2) = 0{,}115$;

$f(x_1) < f(x_2)$. Новый отрезок $[-3; 0{,}056]$.

Дальнейшие вычисления оформим в виде таблицы. Значения функции $f(x)$, вычисленные на каждом шаге, помечены звездочкой.

Таблица 1

Номер шага	a	b	$b-a$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	-3,000	5,000	8,000	0,056	1,944	0,115*	7,667*
2	-3,000	1,944	4,944	-1,112	0,056	-0,987*	0,115
3	-3,000	0,056	3,056	-1,832	-1,112	-0,308*	-0,987
4	-1,832	0,056	1,888	-1,112	-0,664	-0,987	-0,887*
5	-1,832	-0,664	1,168	-1,384	-1,112	-0,853*	-0,987
6	-1,384	-0,664	0,720	-1,112	-0,936	-0,987	-0,996*
7	-1,384	-0,936	0,448	-1,208	-1,112	-0,957*	-0,987
8	-1,208	-0,936	0,272	-1,112	-1,032	-0,987	-0,999*
9	-1,112	-0,936	0,176				

После восьми шагов, содержащих девять вычислений функции, интервал неопределенности равен $[-1{,}112; -0{,}936]$, его длина $0{,}176 < 0{,}2$. В качестве точки минимума может быть взята середина этого интервала $x = -1{,}024$; при этом $f(-1{,}024) = -0{,}999$. Заметим, что точкой точного минимума является
$x = -1{,}0$, $f(-1{,}0) = -1$.

1.4. Метод Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношением

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad F_0 = F_1 = 1 \tag{9}$$

и имеет вид для $i = 0,1,...,12$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Подобно методу золотого сечения процедура поиска с использованием чисел Фибоначчи требует два вычисления функции на первом шаге, а на каждом последующем – только по одному. Однако в отличие от метода золотого сечения, в этой процедуре общее число S вычислений функции должно быть выбрано заранее. Кроме того, сокращение интервала неопределенности не остается постоянным, а меняется от шага к шагу: на k-м шаге длина интервала неопределенности сжимается с коэффициентом $\frac{F_{S-K}}{F_{S-K+1}}$.

Первые два вычисления проводятся в точках $x_1 = a + \frac{F_{S-2}}{F_S}(b-a)$ и $x_2 = a + \frac{F_{S-1}}{F_S}(b-a)$, расположенных симметрично относительно середины отрезка $[a,b]$. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то новым отрезком локализации минимума является $[a,x_2]$, в случае $f(x_1) \geq f(x_2)$ - $[x_1,b]$. Каждая следующая точка выбирается симметрично относительно середины полученного отрезка к лежащей внутри этого отрезка точке уже проведенного вычисления (x_1 или x_2). При этом любая внутренняя точка делит отрезок локализации в отношении двух последовательных чисел Фибоначчи.

Взаимное расположение точек первых трех вычислений в случае $f(x_1) < f(x_2)$ показано на рис. 5.

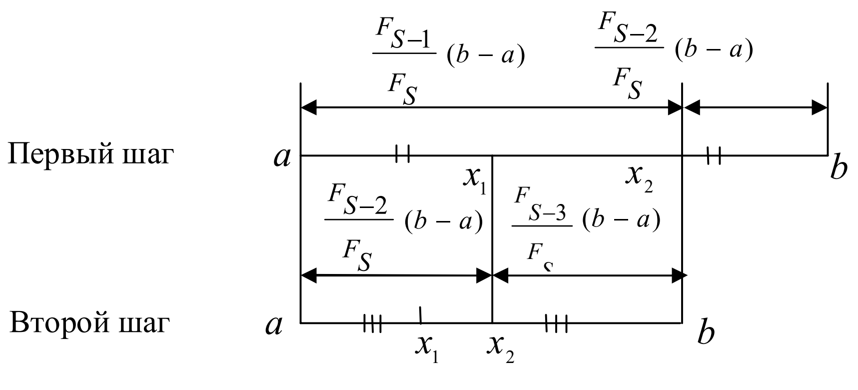


Рис. 5

После $(S-1)$ - го шага точка проведенного вычисления оказывается в середине отрезка локализации. Точка последнего, S-го шага выбирается на расстоянии δ от середины этого отрезка, где δ - заранее фиксированное малое положительное число (константа различимости).

После S вычислений функции длина отрезка локализации составляет (с точностью до δ)

$$l = \frac{1}{F_S}(b-a). \tag{10}$$

Сравнение (10) и (8) показывает, что при одном и том же S метод Фибоначчи дает меньший интервал неопределенности, чем метод золотого сечения, т.е. является более эффективным. Однако для достаточно больших S значение $\frac{1}{F_S}$ стремится к $0{,}618^{S-1}$, так что эти методы становятся почти идентичными.

В том случае, когда при использовании метода Фибоначчи задан конечный интервал неопределенности ε, число S можно определить из условия

$$F_{S-1} < \frac{b-a}{\varepsilon} < F_S. \tag{11}$$

Алгоритм

Шаг 1. По заданной точности рассчитать вспомогательное число

$$N = \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Шаг 2. Для полученного значения N найти такое число Фибоначчи F_S, для которого выполняется неравенство

$$F_{S-1} < N < F_S.$$

Шаг 3. По формуле (10) определить длину конечного интервала неопределенности l.

Шаг 4. Вычислить значения $x_1 = a + l \cdot F_{S-2}$, $x_2 = b - l \cdot F_{S-2}$.

Шаг 5. В зависимости от соотношения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ выбрать новый интервал локализации минимума.

Шаг 6. Внутри полученного интервала найти новую точку (x_1 или x_2), симметричную к уже имеющейся точке и отстоящую от конца интервала на величину $l \cdot F_{S-1-K}$, где k - номер шага. В этой точке рассчитать значение $f(x)$. Затем вычисления повторить, начиная с пункта 5, до тех пор, пока k не станет равным $S-1$. Тогда перейти к пункту 7.

Шаг 7. Положить $x_2 = x_1 + \delta$, найти $f(x_2)$. Если $f(x_2) > f(x_1)$, то минимум реализуется на интервале $[a, x_1)$, в противном случае – на интервале $(x_1, b]$.

На стр. 19 приведена блок-схема алгоритма поиска минимума функции $f(x)$
с использованием чисел Фибоначчи.

<u>Пример 4</u>

С помощью метода Фибоначчи найти минимум функции $f(x) = x^2 + 2x$ на интервале $(-3, 5)$. Длина конечного интервала неопределенности не должна превосходить $0,2$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода Фибоначчи.

Примем $\delta = 0,01$.

Найдем необходимое число вычислений функции

$$N = \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{8}{0,2} = 40, \; F_8 < 40 < F_9.$$

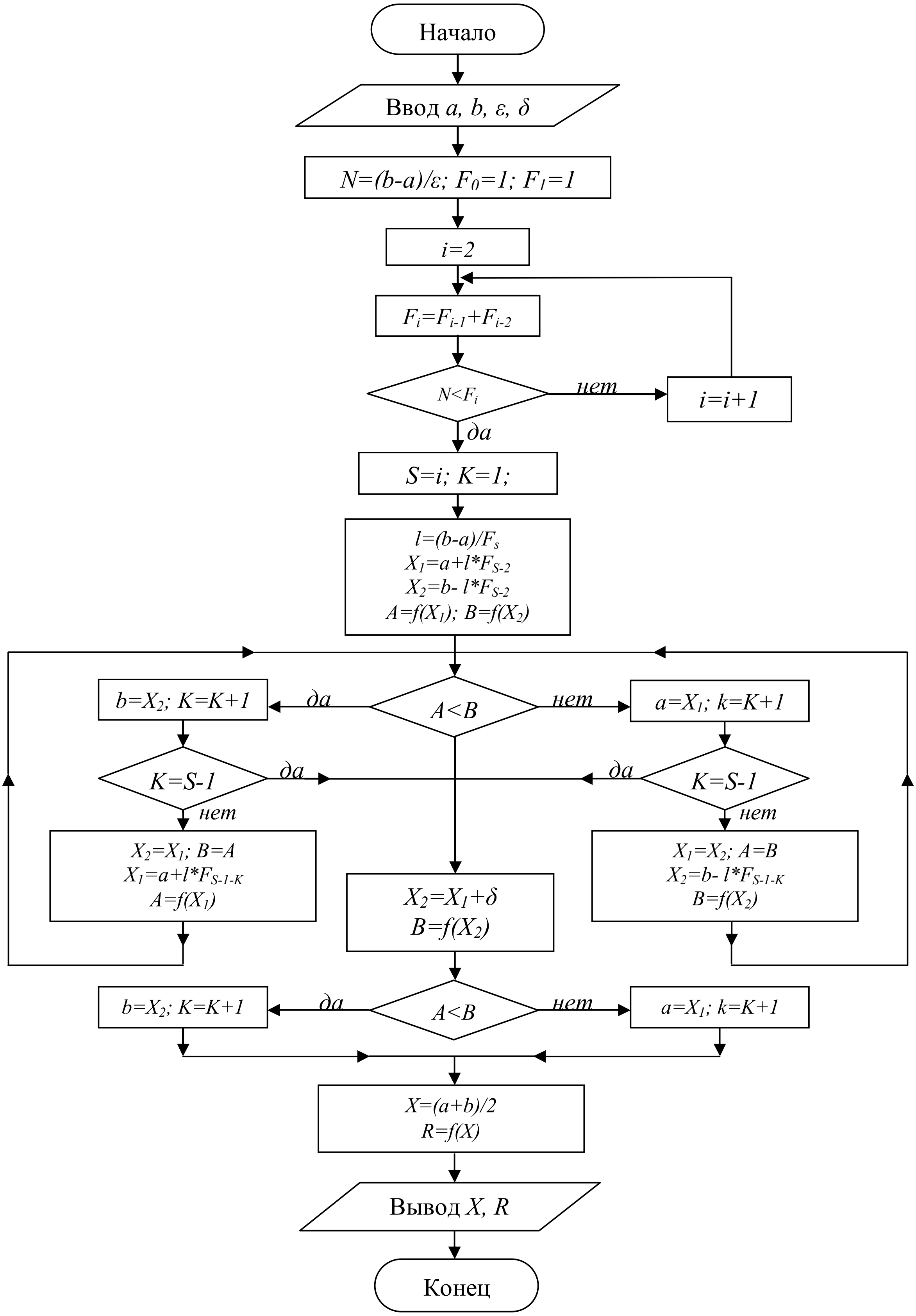
Итак, $S = 9$.

$$l = \frac{b-a}{F_9} = \frac{5-(-3)}{55} = 0,1455.$$

<u>Первый шаг</u>. $a = -3$; $b = 5$.

$x_1 = a + l \cdot F_7 = 0,0555$; $f(x_1) = 0,1141$;

Блок-схема алгоритма поиска минимума функции *f(x)* с использованием чисел Фибоначчи



$x_2 = b - l \cdot F_7 = 1{,}9445$; $f(x_2) = 7{,}6701$;

$f(x_2) > f(x_1)$. Новый отрезок $[-3;\, 1{,}9445]$.

Второй шаг. $a = -3$; $b = 1{,}9445$.

$x_1 = a + l \cdot F_6 = -1{,}1085$; $f(x_1) = -0{,}9882$;

$x_2 = 0{,}0555$; $f(x_2) = 0{,}1141$;

$f(x_2) > f(x_1)$. Новый отрезок $[-3;\, 0{,}0555]$.

Дальнейшие расчеты приведены в табл. 2. Значения $f(x)$, вычисленные на каждом шаге, помечены звездочкой.

Поскольку для $k = 9$ $f(x_1) < f(x_2)$, конечный интервал неопределенности равен $(-1{,}1085; -0{,}9630)$, длина его составляет $0{,}1455$. В качестве приближенного значения точки минимума выберем середину этого отрезка $-1{,}0358$; $f(-1{,}0358) = -0{,}9987$. Напомним, что при использовании метода золотого сечения при $S = 9$ длина интервала неопределенности была равна $0{,}176$.

Таблица 2

k	a	b	$b-a$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	-3,000	5,000	8,000	0,0555	1,944	0,1141*	7,6701*
2	-3,000	1,9445	4,9445	-1,1085	0,0555	-0,9882*	0,1141
3	-3,000	0,0555	3,0555	-1,8360	-1,1085	-0,3011*	-0,9882
4	-1,8360	0,0555	1,8915	-1,1085	-0,6720	-0,9882	-0,8924*
5	-1,8360	-0,6720	1,1640	-1,3995	-1,1085	-0,8404*	-0,9882
6	-1,3995	-0,6720	0,7275	-1,1085	-1,9630	-0,9882	-0,9986*
7	-1,1085	-0,6720	0,4365	-0,9630	-0,8175	-0,9986	-0,9667*
8	-1,1085	-0,8175	0,2910	-0,9630	-0,9630	-0,9986	-0,9986
9	-1,1085	-0,9630	0,1455	-0,9630	-0,9530	-0,9986	-0,9978*

1.5. Задания

Найти положение точки экстремума и экстремальное значение функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$. Длина конечного интервала неопределенности не должна превышать $0{,}01$.

Таблица 3

Номер Варианта	Вид функции $f(x)$	a	b	Экстремум
1	2	3	4	5
1	$e^x - 2x + \frac{1}{3}(x^3 + 1)$	0	1	min
2	$3x^4 - 16x^3 - 24x^2 - 60x + 25$	4,8	5,8	min
3	$\frac{x^4}{4} - x^3 + 10$	2,3	3,3	min
4	$\frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$	0,2	1,2	max
5	$\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$	1,7	2,7	min
6	$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 2e^{-x}$	0	1	max
7	$2x - x^2 - x\ln x$	0,1	1,1	max
8	$x - \ln x + 5$	0,3	1,3	min
9	$\frac{x^4}{x^3 - 1}$	1,1	2,1	min
10	$\frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$	$-1{,}4$	$-0{,}4$	min
11	$e^{-x} + e^{2x} + 3$	-1	0	min
12	$1{,}2\ln x - \frac{3}{\pi}\sin \pi x$	6	7	min
13	$\frac{2x^3}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + 3$	0	1	min
14	$x^2 e^{-x} - 1$	1,4	2,4	max

Продолжение табл.3

1	2	3	4	5
15	$\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$	4,6	5,6	min
16	$e^{-x}+1{,}2\sqrt{x^3}$	0	1	min
17	$\ln x\cdot(x-2)-x+1$	2	3	min
18	$x(\ln 3x-1)+\dfrac{1}{3}\cos 3x$	0,5	1,5	min
19	$\dfrac{1}{3}(1{,}4x^3-\sin 3x)-2$	0	1	min
20	$3x^4-8x^3+6x^2+5$	– 0,4	0,6	min
21	$\dfrac{4x}{x^2+4}$	1,6	2,6	max
22	$\sin 2x-x+3$	0	1	max
23	$3x^5-5x^3$	0,5	1,5	min
24	$\dfrac{12\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2+8}$	– 2,4	– 1,4	min
25	$x+arcctg 2x$	0	1	min
26	$\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}-\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi x}{2}$	0	1	min
27	$\dfrac{x^3}{3}+2(e^{-x}-x^2+2x)$	1	2	max
28	$x(\ln x-1)-\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x$	0,5	1,5	min
29	$\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{x^3}{3}-2x-4$	0	1	min
30	$x^4-14x^3+60x^2-70x$	0	1	min
31	$-e^{-x}+4\cos\dfrac{x}{2}+1$	0	1	max

Окончание табл.3

1	2	3	4	5
32	$\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2\sin x$	1	2	min
33	$0{,}125 \cdot (\sin 2x - 2x) - e^{-x}$	0,5	1,5	max
34	$x^4 + 4x^2 - 32x + 5$	1	2	min
35	$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}$	0	1	min
36	$2x^2 + 3e^{-x} + 1$	0	1	min
37	$3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x - 1$	$-1{,}4$	$-0{,}4$	min
38	$\frac{3}{\pi}\sin \pi x + \frac{x^2}{2} - x$	0	1	max
39	$\frac{e^{1,2x}}{1{,}2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{2}x$	0	1	min
40	$1 + 2x^2 - 0{,}25x^4$	$-2{,}8$	$-1{,}8$	max
41	$\ln x - \frac{3}{\pi}\sin \pi x$	1	2	max
42	$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - e^x$	0	1	max
43	$0{,}4x^3 - \frac{1}{\pi}\sin \pi x$	0	1	min
44	$x^4 + 2x^2 - 128x + 87$	2,5	3,5	min
45	$x\ln x - x + \frac{1}{\pi}\cos \pi x$	0,5	1,5	min
46	$x + \cos 2x - 3$	0	1	max
47	$4x - tgx + 1$	0,2	1,2	max
48	$e^{-x} + \frac{1}{3}(4\sqrt{x^3} - 1)$	0	1	min
49	$\frac{1}{3}(x^3 + 2) + 0{,}2\cos 5x$	0,2	1,2	min
50	$2\ln x - \sin \pi x$	1	2	max

2. МНОГОМЕРНЫЙ ПОИСК. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

2.1. Постановка задачи

Напомним, что общая задача нелинейного программирования без ограничений сводится к следующей: минимизировать функцию $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ на всем евклидовом пространстве R^n, другими словами, требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ многих переменных, т.е. найти такую точку $x^* \in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R^n} f(x)$. Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in R^n$.

Методы решения задач безусловной минимизации можно разделить на две группы: безградиентные и градиентные.

Эти методы носят итерационный характер, т.е. процесс поиска минимума целевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с заданной точностью ε заключаются в построении конечной последовательности точек. При этом соседние точки последовательности связаны соотношением

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \lambda_k p_i^k,\ i = 1,2,...,n \tag{12}$$

или

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k + \lambda_k \overline{p}_k . \tag{13}$$

Здесь индекс «i» определяет номер составляющей вектора $\overline{x}$, индекс «k» - номер шага поиска, вектор $\overline{p}$ характеризует направление поиска, скаляр λ - величину шага.

Таким образом, выполнение одной (k-й) итерации (или шага) заключается в выборе направления и определении точки $\overline{x}_{k+1}$ на данном направлении, где $\overline{x}_{k+1} = \left\{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_i^{k+1}, ..., x_n^{k+1}\right\}$.

2.2. Выбор длины шага

Пусть известна точка $A_k(x_1^k, x_2^k, ..., x_i^k, ..., x_n^k)$. Необходимо найти координаты точки A_{k+1}, т.е. $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_i^{k+1}, ..., x_n^{k+1}$. Для этого сделаем шаг в направлении $\overline{p}_k$ и определим его величину. Основная задача при выборе λ_k - обеспечить выполнение неравенства $f(A_{k+1}) < f(A_k)$.

При выборе шага обычно используют способ удвоения или методы одномерной минимизации, описанные выше.

Способ удвоения состоит в следующем:
Выбирают $\lambda_k = \lambda_{k-1}$.Если при этом $f(A_{k+1}) < f(A_k)$, то либо переходят к следующей итерации, либо выбирают $\lambda_k = 2\lambda_{k-1}$. Если значение функции меньше предыдущего, то процесс удвоения можно продолжить до тех пор, пока убывание не прекратится.
Если при $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ значение функции увеличивается, т.е. $f(A_{k+1}) > f(A_k)$, то выбирают $\lambda_k = \frac{1}{2}\lambda_{k-1}$. Уменьшение значения функции позволяет вести дальнейший поиск. Увеличение $f(A_{k+1})$ требует нового изменения λ: $\lambda_k = \frac{1}{4}\lambda_{k-1}$ и т.д.
Выбор длины шага λ_k методами одномерной минимизации основан на поиске минимума функции $\varphi(\lambda) = f(\overline{x_k} + \lambda\,\overline{p_k})$.

Часто для этой цели используется **метод квадратичной интерполяции**, алгоритм которого можно представить следующими этапами.

Алгоритм

Шаг 1. В заданной точке A_k принять $\lambda = 0$. Выбрать длину шага такой, чтобы $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$. В качестве третьей точки взять значение $\frac{\lambda}{2}$.

Шаг 2. Вычислить три значения $\varphi(\lambda)$: $\varphi(0)=\varphi_0$; $\varphi\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)=\varphi_1$; $\varphi(\lambda)=\varphi_2$.

Шаг 3. Найти коэффициенты a, b, c параболы $y=a\lambda^2+b\lambda+c$, проходящей через три выбранные узла интерполяции, из уравнений:

$$\begin{cases} c=\varphi(0), \\ a\dfrac{\lambda^2}{4}+b\dfrac{\lambda}{2}+c=\varphi\left(\dfrac{\lambda}{2}\right), \\ a\lambda^2+b\lambda+c=\varphi(\lambda), \end{cases}$$

т.е.

$$a=\frac{2}{\lambda^2}(\varphi_0-2\varphi_1+\varphi_2),$$

$$b=\frac{1}{\lambda}(4\varphi_1-3\varphi_0-\varphi_2).$$

Шаг 4. Функция $\varphi(\lambda)$ будет иметь минимум в точке $\lambda^*=-\dfrac{b}{2a}$, если $a>0$.

Вычислить положение экстремума $\lambda^*=\lambda\cdot\left(\dfrac{\varphi_1-0{,}75\varphi_0-0{,}25\varphi_2}{2\varphi_1-\varphi_0-\varphi_2}\right)$.

Шаг 5. Проверить выполнение условия $\left|\lambda^*-\lambda\right|\le\varepsilon$. Если оно не выполняется, то $\lambda=\lambda^*$, и вычисления повторить с пункта 1. При выполнении этого условия продолжить поиск с шагом $\lambda_k=\lambda^*$.

Кроме метода квадратичной интерполяции, для выбора шага можно использовать метод золотого сечения, кубической интерполяции, сканирования и т.д.

Величину шага λ можно выбирать также из условия минимума функции $f(\overline{x}+\lambda\overline{p})$, т.е. из условия $\dfrac{df(\overline{x}+\lambda\overline{p})}{d\lambda}=0$. При этом

$$\lambda_k = \frac{1}{L} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot p_i \right)_{A_k}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_i^2 \right)_{A_k}}, \tag{14}$$

где L - некоторая константа или определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

для точки A_k.

Условие (14) связано с величиной косинуса угла α_k между направлением вектора градиента $\nabla f\left(\bar{x}_k\right)$ и направлением движения $\bar{p}_k$ из этой же точки:

$$\cos\alpha_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot p_i \right)_{A_k}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{A_k}} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i)^2_{A_k}}}. \tag{15}$$

2.3. Выбор направления поиска

Методы безусловной минимизации различаются выбором направления поиска, но всегда направление выбирают таким, чтобы значение целевой функции уменьшалось, то есть, чтобы выполнялось условие $f(A_{k+1}) < f(A_k)$.

2.3.1. Безградиентные методы. Метод покоординатного спуска

Существует специальная группа методов – безградиентные методы, которые используют в процессе поиска информацию, получаемую не при анализе производных, а от сравнительной оценки критерия оптимальности в результате выполнения очередного шага.

Безградиентные методы, кроме того, по характеру наиболее пригодны для оптимизации действующих промышленных и лабораторных установок в условиях отсутствия математического описания объекта оптимизации. Неизбежные погрешности при измерениях величин, характеризующих значение целевой функции для действующего объекта, могут привести к существенным ошибкам в определении направления движения к оптимуму с помощью градиентных методов, поскольку при расчетах производной как разности значений критерия оптимальности ошибка может достигать сотен процентов даже при небольшой относительной погрешности вычислений значения критерия оптимальности. В таких случаях целесообразнее выполнить несколько измерений критерия оптимальности в одной и той же точке (чтобы найти наиболее вероятное его значение), чем провести столько же замеров в различных точках, необходимых для расчета производных.

Основные безградиентные методы, применяемые при решении задач оптимизации:

1) метод покоординатного спуска (Гаусса-Зейделя);

2) метод Розенброка;

3) метод случайного поиска;

4) метод параллельных касательных.

Нами будет рассмотрен *метод покоординатного спуска.* Идея этого метода заключается в последовательном поиске оптимума целевой функции поочередно по каждой переменной.

Наиболее простым способом определения направления спуска является выбор в качестве $\overline{p}_k$ одного из координатных векторов $\pm\overline{e}_1, \pm\overline{e}_2, ..., \pm\overline{e}_n$. Это позволяет поочередно изменять все независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ так, чтобы на каждой из них достигалось наименьшее значение целевой функции. Очередность варьирования независимых переменных при этом устанавливается произвольно и не меняется в процессе поиска. В результате многомерный поиск заменяется последовательностью одномерных поисков с любой стратегией минимизации функции одной переменной (см. методы, описанные выше).

Данный метод эффективен в случае единственного минимума функции. Для уменьшения числа вычислений величину шага λ меняют при каждом переходе от поиска минимума по одной переменной к поиску минимума по другой переменной.

Алгоритм

Шаг 1. Задать исходную точку поиска $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Шаг 2. Определить направление поиска: если варьируется переменная x_1, то $\overline{p}_1 = \{1,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0\}$.

Шаг 3. Делать первый шаг в направлении $\overline{p}_1$: $x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1^0 e_1$. Значение λ_1^0 выбрать способом удвоения или минимизацией функции $f\left(x_1^1, x_2^0 + \lambda_2 e_2, x_0^3, ..., x_n^0\right)$ по λ_1. Если аналитическое выражение целевой функции достаточно простое, для выбора λ_1^0 можно использовать условие $\dfrac{df}{d\lambda_1} = 0$.

Шаг 4. После определения положения минимума по координате x_1 делать шаг в направлении $\overline{p}_2 = \{0,1,0,...,0\}$: $x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2^0 e_2$. Значение λ_2^0 находить, минимизируя функцию $f(x_1^1, x_2^0 + \lambda_2 e_2, x_3^0, ..., x_n^0)$ по λ_2, и так далее.

Шаг 5. Критерий остановки процесса приближенного нахождения минимума может быть основан на различных способах:

$$\max_i \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \le \varepsilon$$

или

$$\max_i \left| f\left(x_i^{k+1}\right) - f\left(x_i^k\right) \right| \le \varepsilon . \qquad (16)$$

Пример 5

Пусть целевая функция имеет вид

$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$

Требуется найти ее минимум с точностью $\varepsilon = 0{,}02$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода покоординатного спуска.

1. Примем в качестве исходной точку $A_0(2{,}1)$. Значение целевой функции в этой точке $f(A_0) = 7$.
2. Направление поиска выберем параллельно координатной оси $\mathrm{OX}_1 : \overline{p_1} = \{1, 0\}$.
3. Изменим переменную x_1. Значение λ_1^0 найдем из условия $\dfrac{df}{d\lambda_1} = 0$:

$$f(x_1 + \lambda_1 e_1, x_2) = 2(x_1 + \lambda_1 e_1)^2 + x_2^2 - (x_1 + \lambda_1 e_1) \cdot x_2,$$

$$\frac{df}{d\lambda_1} = 4(x_1 + \lambda_1 e_1) \cdot e_1 - x_2 e_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0{,}25x_2 - x_1,$$

$$\lambda_1^0 = 0{,}25x_2^0 - x_1^0 = 0{,}25 \cdot 1 - 2 = -1{,}75.$$

Тогда $x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1^0 e_1 = 2 + (-1{,}75) \cdot 1 = 0{,}25$.

Итак, нашли точку $A_1(0{,}25;1)$, в которой значение целевой функции $f(A_1) = 0{,}875$.

4. Изменим переменную x_2. Значение λ_2^0 найдем из условия $\dfrac{df}{d\lambda_2} = 0$:

$$f(x_1, x_2 + \lambda_2 e_2) = 2x_1^2 + (x_2 + \lambda_2 e_2)^2 - x_1(x_2 + \lambda_2 e_2),$$

$$\frac{df}{d\lambda_2} = 2(x_2 + \lambda_2 e_2) \cdot e_2 - x_1 e_2 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0{,}5x_1 - x_2,$$

$$\lambda_2^0 = 0{,}5x_1^1 - x_2^0 = 0{,}5 \cdot 0{,}25 - 1 = -0{,}875,$$

$$x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2^0 \cdot e_2 = 1 + (-0{,}875) = 0{,}125.$$

Нашли точку $A_2(0{,}25;0{,}125)$, $f(A_2) = 0{,}109$.

5. От точки A_2 вновь изменим направление поиска и сведем дальнейшие вычисления в табл. 4.

Таблица 4

Номер итерации k	$\bar{p}_k$	λ	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	Условие окончания
0			2	1	7	
1	1,0	-1,75	0,25	1	0,875	1,75
2	0,1	-0,875	0,25	0,125	0,1094	0,875
3	1,0	-0,2188	0,0313	0,125	0,0137	0,2188
4	0,1	-0,1094	0,0313	0,0156	0,0017	0,011
5	1,0	-0,0273	0,0039	0,0156	0,0002	0,0273
6	0,1	-0,0137	0,0039	0,0020	0	0,0137

После шестой итерации выполняется условие окончания поиска:
$\max_i \left| x_i^6 - x_i^5 \right| = \left| x_2^6 - x_2^5 \right| = 0{,}0137 < \varepsilon$.

Ответ: минимум целевой функции находится в точке $(0{,}0039; 0{,}0020)$, $f(A_{\min}) = 0{,}00003$.

Отметим, что точный минимум целевой функции находится в точке $(0{,}0)$, $f(0{,}0) = 0$.

Рассмотрим еще один пример применения метода покоординатного спуска с использованием для выбора величины шага способа удвоения.

<u>Пример 6</u>

Пусть требуется минимизировать функцию $f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$, начиная из точки $A_0(8,9)$; $f(A_0) = 45$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода покоординатного спуска.

1. Изменим переменную $x_1 : x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1^0 \cdot e_1$.

Найдем λ_1^0, применяя способ удвоения.

Выберем произвольное значение $\lambda_1^0 = -0{,}5$.

Тогда $x_1^1 = 8 + (-0{,}5) \cdot 1 = 7{,}5$; $f(7{,}5;9) = 34 < f(8;9)$.

Удвоим шаг: $\lambda_1^0 = -1$.

При этом $x_1^1 = 8 + (-1) \cdot 1 = 7$; $f(7;9) = 25 < f(7{,}5;9)$.

Еще раз удвоим шаг: $\lambda_1^0 = -2$.

Тогда $x_1^1 = 8 + (-2) \cdot 1 = 6$; $f(6;9) = 13 < f(7;9)$.

Уменьшение целевой функции позволяет еще удвоить шаг: $\lambda_1^0 = -4$.

При этом $x_1^1 = 8 + (-4) \cdot 1 = 4$; $f(4;9) = 13$.

Функция не уменьшилась. Следовательно, наилучшее значение $\lambda_1^0 = -2$. Точка A_1, найденная с этим значением λ_1^0, имеет координаты $x_1^1 = 6$; $x_2^0 = 9$; $f(A_1) = 13$.

2. Еще раз изменим переменную $x_1 : x_1^2 = x_1^1 + \lambda_1^1 \cdot e_1$.

Примем $\lambda_1^1 = \lambda_1^0 = -2$. Тогда $x_1^2 = 6 + (-2) \cdot 1 = 4$; $f(4;9) = 13$.

Функция не уменьшилась. Уменьшим шаг вдвое: $\lambda_1^1 = -1$.

При этом $x_1^2 = 6 + (-1) \cdot 1 = 5$; $f(5;9) = f(A_2) = 9 < f(A_1)$.

3. Сделаем шаг по переменной $x_2 : x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2^0 \cdot e_2$.

Примем $\lambda_2^0 = \lambda_1^1 = -1$. Тогда $x_2^1 = 9 + (-1) \cdot 1 = 8$; $f(5;8) = f(A_3) = 4 < f(A_2)$.

4. Еще раз изменим переменную $x_2 : x_2^2 = x_2^1 + \lambda_2^1 \cdot e_2$.

Примем $\lambda_2^1 = \lambda_2^0 = -1$. Тогда $x_2^2 = 8 + (-1) \cdot 1 = 7$; $f(5;7) = f(A_4) = 1 < f(A_3)$.

5. Еще раз изменим переменную x_2 с тем же значением λ:

Тогда $x_2^3 = 7 + (-1) \cdot 1 = 6$; $f(5;6) = f(A_5) = 0 < f(A_4)$.

6. Следующий шаг по x_2 с тем же параметром λ приводит к возрастанию функции: $x_2^4 = 6 + (-1) \cdot 1 = 5$; $f(5;5) = 1$.

Следовательно, точка $A_5(5;6)$ является точкой минимума целевой функции.

На рис. 6 показана траектория поиска.

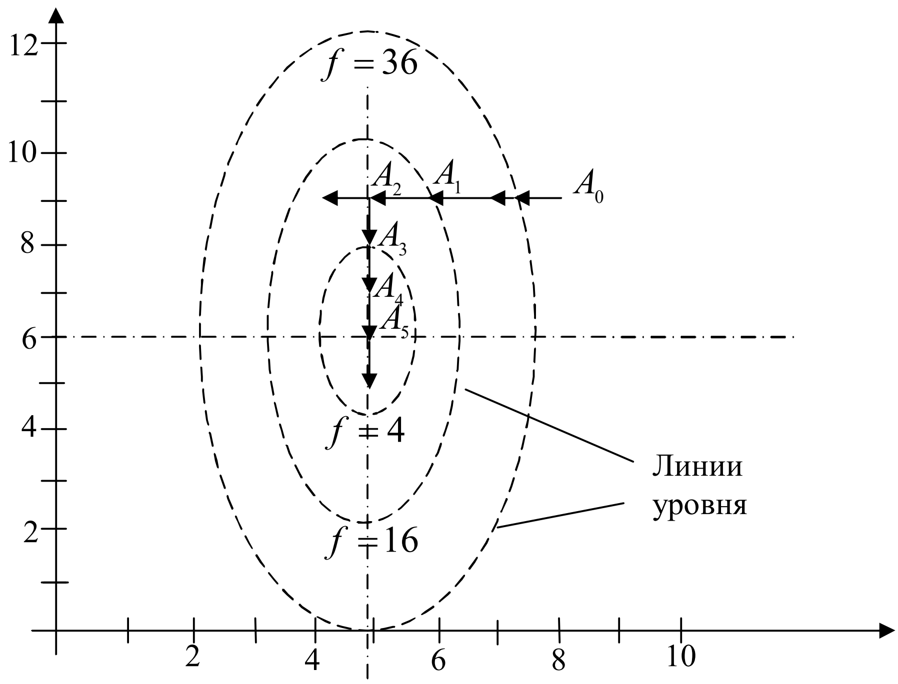


Рис. 6

2.3.2. Градиентные методы

Градиентные методы связаны с поиском по направлению градиента или антиградиента экстремума оптимизируемой функции.

Градиент функции $f(\bar{x})$ обозначается $\nabla f(\bar{x})$ и определяется как вектор-столбец из первых частных производных этой функции:

$$\nabla f\left(\bar{x}\right) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}. \qquad (17)$$

В каждой точке градиент ортогонален линии уровня $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = const$, проходящей через эту точку, и направлен в сторону наискорейшего возрастания функции.

Вектор-антиградиент $-\nabla f(\bar{x})$ так же ортогонален линии уровня, проходящей через данную точку, и направлен в сторону наискорейшего убывания функции. Таким образом, вектор, указывающий направление поиска при минимизации функции $f(\bar{x})$, есть $\overline{p_k} = -\nabla f(\bar{x})$.

Процедура вычисления производных целевой функции весьма трудоемка. На практике их часто приходится вычислять приближенно, пользуясь разностными соотношениями. Например, для функции двух переменных разностные формулы имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}, \qquad (18,а)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2}, \qquad (18,б)$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2$ - некоторые малые приращения аргументов.

Величины Δx_i выбираются так, чтобы ошибка аппроксимации производной функции не превышала разумного уровня.

В общем случае при отыскании минимума целевой функции схема перехода из точки $A_k(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ в точку $A_{k+1}(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ определяется не просто антиградиентом, а произведением антиградиента на симметричную, положительно определенную матрицу H_k. Алгоритм метода при этом имеет вид:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \lambda_k \cdot H_k \cdot \nabla f(\bar{x}_k), \quad k = 0,\ 1, \ldots\ . \qquad (19)$$

Числа λ_k выбираются согласно п. 2.2. В частности, можно для определения λ на $(k+1)$-м шаге использовать косинус угла α_k между последовательными векторами переходов в процессе спуска от точки A_{k-1} к точке A_k:

$$\cos\alpha_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_k} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_{k-1}}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_k}^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_{k-1}}^2}}. \qquad (20)$$

Тогда

$$\lambda_k = \begin{cases} 2\lambda_k, & \text{если} \quad \alpha_k < \alpha_{\min}; \\ \lambda_k, & \text{если} \quad \alpha_{\min} \le \alpha_k \le \alpha_{\max}; \\ \frac{1}{3}\lambda_k, & \text{если} \quad \alpha_k > \alpha_{\max}. \end{cases} \qquad (21)$$

В качестве $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ можно принять, например, углы в 30^0 и 90^0, соответственно.

Модификации градиентных методов

В зависимости от выбора матриц H_k градиентные методы делятся на метод наискорейшего спуска, метод изменения масштабов, метод сопряженных направлений, метод Ньютона, метод Давидона-Флетчера-Пауэлла и другие. Рассмотрим две модификации – метод наискорейшего спуска и метод сопряженных направлений.

<u>2.3.2.1. Метод наискорейшего спуска</u>

При $H_k = E$, т.е когда H является единичной матрицей, формула (19) запишется как:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \lambda_k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_k}, \qquad i = 0, 1, \dots n \qquad (22)$$

или

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \lambda_k \cdot \nabla f(\bar{x}_k). \qquad (23)$$

Здесь индекс *i* характеризует номер соответствующего вектора $\bar{x}$, индекс *k* определяет номер итерации поиска, λ_k определяется из условий минимума функции $\varphi(\lambda) = f(\bar{x}_k + \lambda \bar{p}_k)$ (см. п. 2.2) или по формуле (21).

Алгоритм

Шаг 1. Задать исходную точку $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Оценить величину начального шага λ_0.

Определить направление поиска путем вычисления частных производных в точке A_0

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0}, \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{A_0}.$$

Шаг 2. Сделать переход от точки A_0 к точке A_1 по формуле (22)

$$x_i^1 = x_i^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_k}, \qquad i = 0, 1, \ldots n.$$

Шаг 3. Вновь определить направление спуска, вычисляя частные производные в полученной точке

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1}, \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{A_1}.$$

Шаг 4. Сделать переход к точке A_2

$$x_i^2 = x_i^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

и так далее.

При этом параметр λ можно рассматривать как константу, а можно оценить или способом удвоения, или методом одномерной минимизации функции $f\left(\bar{x} - \lambda \cdot \nabla f(\bar{x})\right)$.

Шаг 5. Поиск закончить, если

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_k}^2 \le \varepsilon \tag{24}$$

или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{k+1} - x_i^k\right)^2} \le \varepsilon, \tag{25}$$

где ε – малая положительная величина.

Пример 7

Требуется минимизировать функцию $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_2^2$, начиная с точки $A_0(2,3)$, с точностью $\varepsilon = 0{,}1$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода наискорейшего спуска.

1. Определяем направление поиска, вычисляя производные в данной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 32x_2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0} = 2 \cdot x_1^0 = 2 \cdot 2 = 4; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0} = 32 \cdot x_2^0 = 32 \cdot 3 = 96.$$

2. Выбираем λ_0 из условия $f(A_1) < f(A_0)$.

Пусть $\lambda_0 = 0{,}1$, тогда точка A_1 имеет координаты

$$x_1^1 = x_1^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0} = 2 - 0{,}1 \cdot 4 = 1{,}6;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0} = 3 - 0{,}1 \cdot 96 = -6{,}6.$$

При этом $f(A_1) = f(1{,}6; -6{,}6) = 699{,}52 > f(A_0) = 148$.

Следовательно, λ_0 необходимо уменьшить.

Примем $\lambda_0 = 0{,}05$, тогда

$x_1^1 = 2 - 0{,}05 \cdot 4 = 1{,}8$; $\qquad x_2^1 = 3 - 0{,}05 \cdot 96 = -1{,}8$.

При этом $f(A_1) = f(1{,}8; -1{,}8) = 55{,}08 < f(A_0)$.

3. Сделаем переход в точку A_2, корректируя λ по формулам (19), (20):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1} = 2 \cdot x_1^1 = 2 \cdot 1{,}8 = 3{,}6\,;\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1} = 32 \cdot x_2^1 = 32 \cdot (-1{,}8) = -57{,}6\,;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1}^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0}^2}} =$$

$$= \frac{3{,}6 \cdot 4 + (-57{,}6) \cdot 96}{\sqrt{3{,}6^2 + (-57{,}6)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 96^2}} = -0{,}995.$$

Поскольку $\alpha_1 = \arccos(-0{,}995) = 162{,}777° > 90°$, в соответствии с (21) примем $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{3} = 0{,}016$. Тогда

$$x_1^2 = x_1^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1} = 1{,}8 - 0{,}016 \cdot 3{,}6 = 1{,}742\,;$$

$$x_2^2 = x_2^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1} = -1{,}8 + 0{,}016 \cdot 57{,}6 = -0{,}878\,;$$

$A_2(1{,}742;-0{,}878)$; $f(A_2) = f(1{,}742; -0{,}878) = 15{,}369 < f(A_1)$.

4. Вновь определяем направление поиска, вычисляя производные в точке A_2, скорректируем λ, и все дальнейшие итерации сведем в табл. 5.

На шестнадцатой итерации выполняется условие окончания поиска

$$\sqrt{\left(x_1^{16} - x_1^{15}\right)^2 + \left(x_2^{16} - x_2^{15}\right)^2} = 0{,}05 < \varepsilon\,.$$

Таким образом, минимум целевой функции находится в точке $A_{16}(0{,}048;0{,}000)$, $f(A_{16}) = 0{,}002$. Графическая иллюстрация данного примера приведена на рис.7.

Строим линии уровня целевой функции. Задавая некоторые постоянные значения функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_2^2$, получаем каноническое уравнение эллипса:

при $f(x_1, x_2) = 16$ $\quad \frac{x_1^2}{4^2} + \frac{x_2^2}{1^2} = 1$;

при $f(x_1, x_2) = 4$ $\quad \frac{x_1^2}{2^2} + \frac{x_2^2}{(0{,}5)^2} = 1$ и т.д.

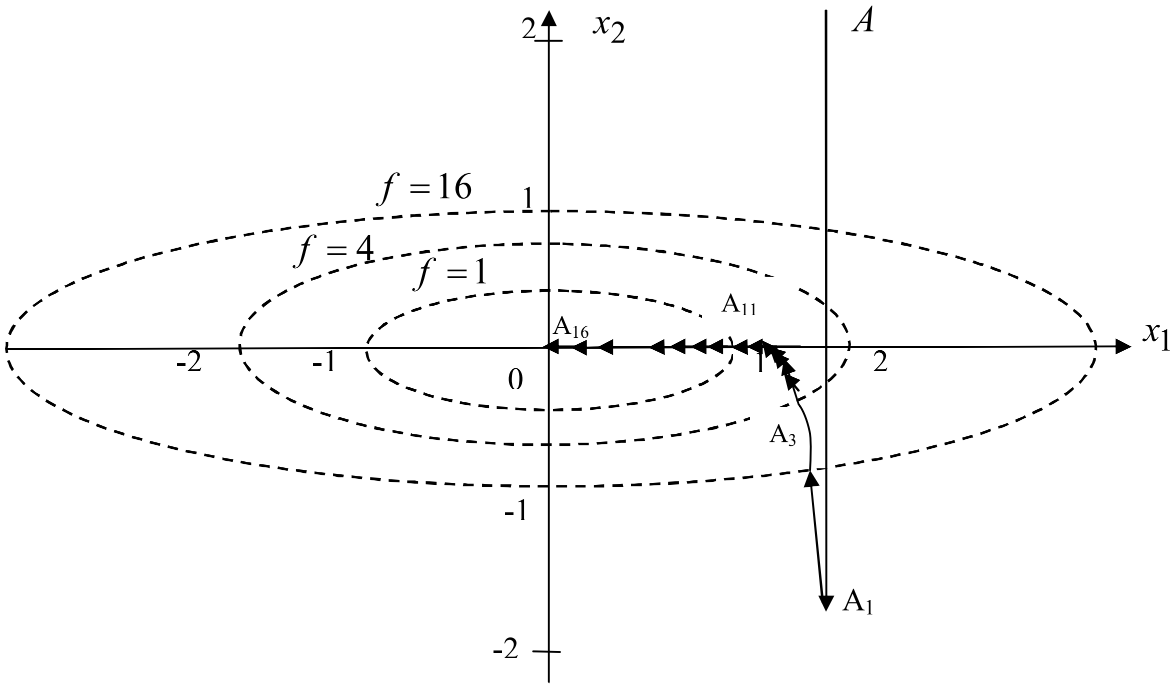


Рис.7

Таблица 5

K	x_1	x_2	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	λ	$f(A_k)$
1	2	3	4	5	6	7
0	2	3	4	96	0,050	148
1	1,800	-1,800	3,600	-57,600	0,016	55,080
2	1,742	-0,878	3,484	-28,096	0,016	15,080
3	1,686	-0,428	3,372	-13,696	0,016	5,774
4	1,632	-0,209	3,264	-6,688	0,016	3,362
5	1,580	-0,050	3,160	-3,372	0,016	2,662
6	1,529	-0,024	3,058	-1,600	0,016	2,378
7	1,480	-0,024	2,960	-0,768	0,016	2,199
8	1,433	-0,012	2,866	-0,384	0,016	2,055
9	1,387	-0,006	2,774	-0,192	0,032	1,925
10	1,298	0	2,596	0	0,064	1,685
11	1,130	0	2,260	0	0,128	1,277
12	0,841	0	1,682	0	0,256	0,708
13	0,411	0	0,822	0	0,256	0,169
14	0,201	0	0,402	0	0,256	0,040
15	0,098	0	0,196	0	0,256	0,010
16	0,048	0	0,096	0	0,256	0,002

2.3.2.2. Метод сопряженных направлений

В методе сопряженных направлений строится последовательность направлений поиска $\bar{p}_k$, являющихся линейными комбинациями градиента и предыдущих направлений.

Алгоритм метода выражается следующими расчетными формулами:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - \lambda^k \cdot \bar{p}^k, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{26}$$

$$\bar{p}_0 = \nabla f(\bar{x}_0), \quad \bar{p}_k = \nabla f(\bar{x}_k) + \beta_k \cdot \bar{p}_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Здесь β_k – весовые коэффициенты, одним из способов определения служит формула

$$\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{A_k}}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{A_{k-1}}}. \tag{28}$$

Ниже приводятся этапы этого алгоритма.

Алгоритм

Шаг 1. В исходной точке $A_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ вычислить градиент как начальное направление поиска, т.е.

$$\bar{p}_0 = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0}, \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{A_0} \right\}.$$

Шаг 2. По формуле (26) найти точку A_1 с координатами $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$, минимизируя функцию $f(\bar{x})$ по λ с помощью методов одномерного поиска.

Шаг 3. Вычислить в точке A_1 значение функции $f(A_1)$ и значение градиента $\nabla f(A_1)$.

Шаг 4. Определить новое направление поиска из соотношения

$$p_i^{k+1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_{k+1}} + p_i^k \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{A_{k+1}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{A_k}}$$

и так далее.

Шаг 5. Поиск закончить при выполнении условия

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i^k)^2} \le \varepsilon. \qquad (29)$$

Алгоритм метода может предусматривать обновление через m итераций, тогда точка A_{m+1} становится исходной, и поиск вновь начинается с направления антиградиента функции.

Пример 8

Требуется минимизировать функцию $f(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4$, начиная с точки $A_0(4, 4)$. Принять ε = 0,5, $f(A_0)=28$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода сопряженных направлений.

1. Вычисляем частные производные целевой функции в исходной точке, тем самым задавая начальное направление поиска:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1; \quad p_1^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0} = 2 \cdot x_1^0 = 2 \cdot x_1^0 = 2 \cdot 4 = 8;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2; \quad p_2^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{A_0} = 2 \cdot x_2^0 = 2 \cdot 4 = 8.$$

2. Длину шага λ определяем по формуле (14)

$$\lambda_0 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot p_1\right)_{A_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot p_2\right)_{A_0}}{\left[(p_1^0)^2 + (p_2^0)^2\right]_{A_0} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{8\cdot 8 + 8\cdot 8}{(8^2+8^2)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{128}{128\cdot 4} = 0{,}25\,.$$

Находим координаты точки A_1:

$$x_1^1 = x_1^0 - \lambda_0 p_1^0 = 4 - 0{,}25\cdot 8 = 2\,;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \lambda_0 p_2^0 = 4 - 0{,}25\cdot 8 = 2\,.$$

$A_1(2;2)$, $f(A_1)=4$.

3.Вычисляем значения $f(A_1)$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{A_1}$:

$$f(A_1) = f(x_1^1, x_2^1) = 2^2 + 2^2 - 4 = 4\,;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1} = 2\cdot x_1^1 = 2\cdot 2 = 4; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1} = 2\cdot x_2^1 = 2\cdot 2 = 4\,.$$

4. Определяем новое направление поиска

$$p_1^1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1} + p_1^0 \cdot \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1}^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_0}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_0}^2} = 4 + 8\cdot\frac{4^2+4^2}{8^2+8^2} = 6\,;$$

$$p_2^1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_1} + p_2^0 \cdot \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2_{A_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2_{A_1}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2_{A_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2_{A_0}} = 4 + 8 \cdot \frac{4^2 + 4^2}{8^2 + 8^2} = 6.$$

5. Оцениваем длину шага

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot p_1\right)_{A_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot p_2\right)_{A_1}}{\left[(p_1^1)^2 + (p_2^1)^2\right]_{A_1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{vmatrix}_{A_1}} = \frac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{(6^2 + 6^2) \cdot 4} = 0{,}17.$$

Точка A_2 имеет координаты

$$x_1^2 = x_1^1 - \lambda \cdot_1 p_1^1 = 2 - 0{,}17 \cdot 6 = 1;$$

$$x_2^2 = x_2^1 - \lambda_1 \cdot p_2^1 = 4 - 0{,}17 \cdot 6 = 1.$$

$A_2(1{,}1), f(A_2) = -2$

и так далее. На рис. 8 изображена траектория поиска:

$$\sqrt{(p_1^5)^2 + (p_2^5)^2} = \sqrt{0{,}33^2 + 0{,}33^2} = 0{,}47 < 0{,}5.$$

Таким образом, минимум целевой функции находится в точке $A_6(0{,}06; 0{,}06)$; $f(A_6) = -3{,}99$.

Таблица 6

Номер итерации	x_2	x_1	p_1	p_2	λ	$f(\bar{x})$
1	2	3	4	5	6	7
0	4	4	8	8	0,25	28
1	2,00	2,00	6,00	6,00	0,17	4,00
2	1,00	1,00	3,50	3,50	0,14	-2,00
3	0,50	0,50	1,88	1,88	0,13	-3,50
4	0,25	0,25	0,97	0,97	0,13	-3,83
5	0,13	0,13	0,33	0,33	0,20	-3,97
6	0,06	0,06				-3,99

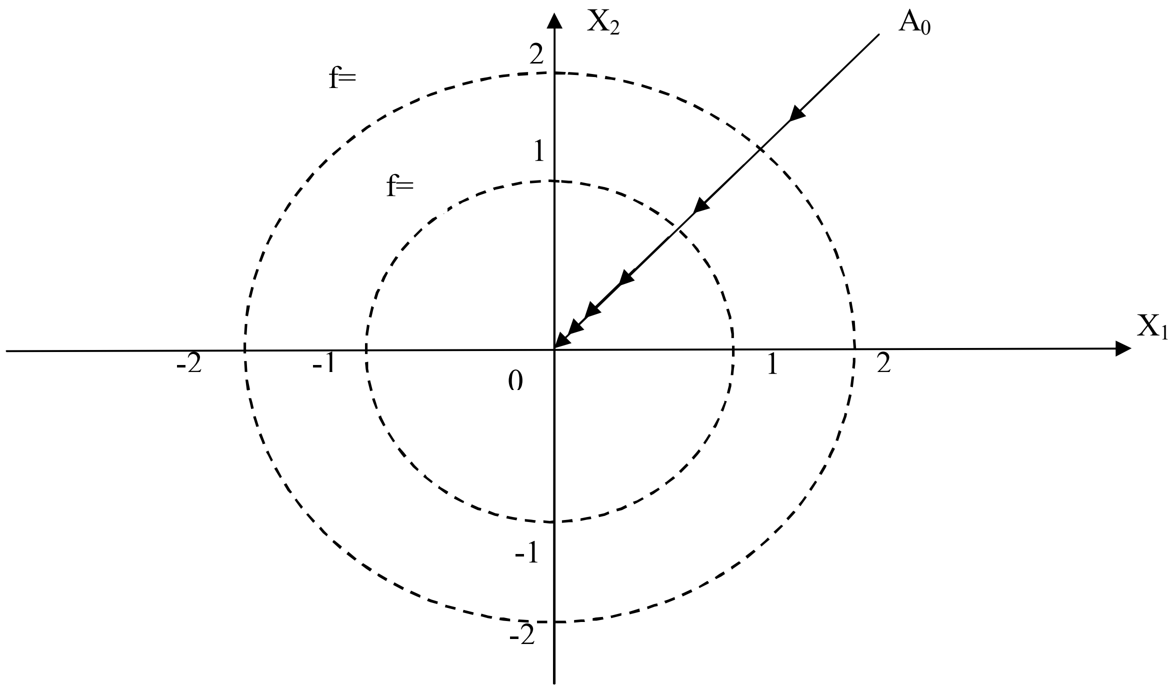


Рис.8

2.4. Задание: Найти минимум (максимум) функции $f(\bar{x})$ с точностью ε = 0,01.

Таблица 7

номер варианта	Вид функции $f(\bar{x})$	Координаты исходной точки			Экстремумы
		x_1^0	x_2^0	x_3^0	
1	2	3	4	5	6
1	$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4\cdot\sqrt{x_1 \cdot x_2} - 2x_2 + 8$	1	4	-	min
2	$4 - 2\cdot(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2 - 3\cdot(x_3 + 1)^4$	1	-3	0	max
3	$(x_1^2 + x_2)^2 + (x_1 + x_2^2 - 18)^2 + 4$	1	-2	-	min
4	$(x_1^2 + x_2 - 7)^2 + (x_1 + x_2^2 - 11)^2 + 3$	5	1	-	min
5	$x_1^2 \cdot x_2 + x_2^3 + 6x_1 \cdot x_2 + 1$	0	-1	-	max
6	$2\cdot(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1{,}5)^2 + 3\cdot(x_3 - 1)^2$	-1	3	4	min
7	$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$	-2	1	-	min
8	$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + 4$	-3	5	-	min
9	$2x_1^3 - x_1 \cdot x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2 + 2$	-1	3	-	min
10	$x_1^2 + x_2^3 - 2x_1 - 3x_2 + 2$	0	3	-	min
11	$6x_1 \cdot x_2 - 8x_1^3 - x_2^3 - 3$	1	2	-	max
12	$x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 \cdot x_2$	3	6	-	min
13	$2\cdot(x_1 + x_2 - x_1^2) + 4x_1 \cdot x_2 - 10x_2^2 - 5$	-1	1	-	max
14	$3x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2 - 8x_1 + 8$	3	3	-	min

Продолжение табл.7

1	2	3	4	5	6
15	$2-3\cdot(5-x_1)^2-0{,}5\cdot(x_2-3)^2-2\cdot(x_3-1)^2$	2	1	3	min
16	$\frac{1}{2}x_1\cdot x_2+(47-x_1-x_2)\cdot\left(\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}\right)$	18	22	-	max
17	$6x_1-x_2-x_1^2+x_1\cdot\sqrt{x_2}$	6	1	-	max
18	$x_1^3+x_1\cdot x_2^2+6x_1\cdot x_2$	1	-1	-	max
19	$(x_1^2+x_2)\cdot e^{0,5\cdot x_2}$	1	-1	-	min
20	$x_1^3+x_2^2-3x_1-2x_2+4$	0	2	-	min
21	$(x_1-1)^2+2x_2^2+3$	-1	2	-	min
22	$7-3\cdot(x_1+4)^2-2\cdot(x_2-3)^2$	-2	2	-	min
23	$2x_1+3x_2-x_1^2-x_2^3-2$	3	4	-	max
24	$(x_1-2{,}5)^4+(x_2-0{,}7)^2+3\cdot(x_3-0{,}2)^2-2{,}5$	-1	-3	2	max
25	$(x_1+x_2^2)\cdot\sqrt{e^{x_1}}$	2	-2	-	min
26	$x_1^2+x_2^2-0{,}5x_1-1{,}6x_2+2$	1	1	-	min
27	$x_1^4+x_2^4-2x_1^2\cdot x_2^2-4x_1+3$	0	2	-	min
28	$3{,}2-(x_1-1)^2-(x_2-3)^2-4\cdot(x_3+5)^2$	4	-1	2	min
29	$1-2x_1-2x_2-4x_1\cdot x_2+10x_1^2+2x_2^2$	1	1	-	max
30	$(x_1^2+x_2-8)^2+(x_1+x_2^2-18)^2+3$	3	3	-	min

Окончание табл.7

1	2	3	4	5	6
31	$x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	2	2	-	min
32	$(x_1 - 2{,}4)^2 + x_2^2 - 3$	1	-2	-	min
33	$x_1^3 + 8x_2^3 - 6x_1 \cdot x_2 + 1$	2	1	-	min
34	$4 - (x_1^2 + x_2 - 18)^2 - (x_1 + x_2^2)^2$	-2	1	-	min
35	$x_1 \cdot \sqrt{x_2} - x_1^2 - x_2 + 6x_1 + 3$	0	5	-	max
36	$(x_1^2 + x_2) \cdot \sqrt{e^{x_2}}$	-1	-1	-	max
37	$(x_1 + 0{,}5)^2 + 2 \cdot (x_2 + 3{,}6)^2 + (x_3 - 1)^4 + 1$	2	-5	3	min
38	$x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot (x_1 + 2x_2) + 7{,}35$	0	3	-	min
39	$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 9x_2$	2	2	-	min
40	$6 - (x_1^2 + x_2 - 11)^2 - (x_1 + x_2^2 - 7)^2$	1	1	-	min
41	$x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2$	0	3	-	max
42	$(x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 + 5{,}5$	0	2	-	min
43	$4 - 4 \cdot (x_1 - 0{,}9)^2 - 1{,}5 \cdot (x_2 + 1{,}6)^4 - 0{,}8 \cdot (x_3 - 3{,}5)^2$	-1	-2	2	min
44	$e^{\frac{x_1}{2}} \cdot (x_1 + x_2^2)$	1	-3	-	max
45	$x_1^3 + x_1 \cdot x_2^2 + 6x_1 \cdot x_2 - 2$	-1	-1	-	min
46	$x_2 \cdot \sqrt{x_1} - x_2^2 - x_1 + 6x_2$	3	5	-	max
47	$4x_1^2 + x_2^2 - 12 \cdot (x_1 + x_2) + 46$	0	5	-	max
48	$(x_1 - 4)^2 + 5 \cdot (x_2 + 3)^2 + 7 \cdot (x_3 + 0{,}5)^2 + 10$	0	1	-2	min
49	$2x_1^2 + 3 \cdot (x_2 - 1{,}5)^2 + 1$	-1	2	-	min
50	$(x_1 - 2{,}5)^2 + (x_2 + 4)^2 + 8$	1	-1	-	min

3. МНОГОМЕРНЫЙ ПОИСК. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

3.1. Метод сканирования

Как и в случае одной переменной метод сканирования для случая многих переменных заключается в последовательном просмотре значений целевой функции в ряде точек, принадлежащих области изменения независимых переменных, и нахождении среди них такой, в которой целевая функция имеет минимальное значение. Точность метода определяется частотой расположения выбранных точек на данной области изменения переменных. Алгоритм метода сканирования для функции многих переменных заключается в следующем.

Алгоритм:

Шаг 1. Исследовать функцию цели вдоль одного выбранного направления (вдоль одной из координатных осей) с шагом h_1. В каждой точке вычислить и запомнить значение целевой функции.

Шаг 2. После того, как весь диапазон изменения выбранной переменной исследован и для него найдено минимальное значение целевой функции, изменить значение другой переменной на величину шага h_2, и опять исследовать диапазон вдоль оси первой переменной, и т.д.

Графическая иллюстрация поиска минимума для случая двух переменных дана на рис.9.

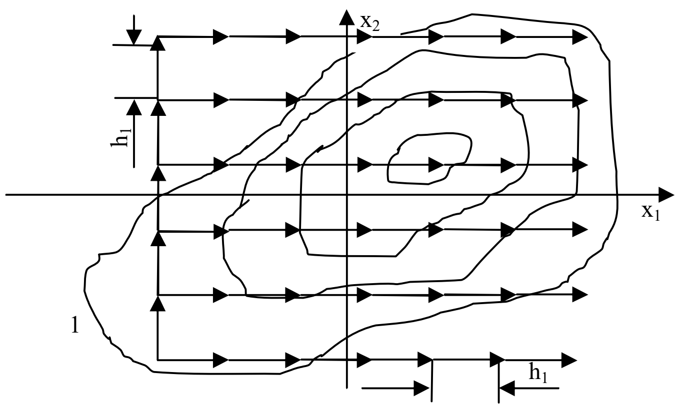


Рис. 9. (1 – линии постоянного значения целевой функции)

Для произвольного числа переменных шаг по каждой следующей переменной производится после того, как завершен цикл по предыдущей.

Если имеются ограничения на независимые переменные, то точки, которые не удовлетворяют уравнениям (или неравенствам) ограничений, исключаются из рассмотрения.

Если точность поиска по каждой из переменных равна ε, то количество вычислений целевой функции, необходимых для поиска минимума, составит:

$$S = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n, \tag{30}$$

где n – число переменных.

Недостаток метода: велико число вычислений, которое резко возрастает (в показательной степени) в зависимости от размерности решаемой задачи.

Преимущества метода: простота алгоритма, возможность определения глобального минимума.

Методы сканирования, в основном, используются для грубого анализа областей расположения минимумов.

3.2. Метод штрафных функций

Основная идея метода штрафных функций состоит в преобразовании задачи минимизации функции с соответствующими ограничениями, наложенными на аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в задачу поиска минимума функции без ограничений.

Преимущество, которое получаем в результате такого перехода к новой функции, достигается за счет применения более простых алгоритмов.

Методы штрафных функций можно разделить на два класса: параметрические и непараметрические. Параметрические методы характеризуются наличием одного или нескольких параметров, входящих в структуру штрафной функции в качестве весовых коэффициентов.

Например, требуется найти минимум функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при ограничениях

$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Введем функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Здесь $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – штрафная функция.

Штрафные функции конструируются, исходя из условий:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, \textit{при} \quad \textit{выполнении} \quad \textit{ограничений}, \\ > 0, \textit{при} \quad \textit{невыполнении} \quad \textit{ограничений}, \end{cases}$$

причем при невыполнении ограничений справедливо $P\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \infty$.

Штрафную функцию можно выбирать в виде

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r \sum_{i=1}^{m} \left(1/q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \tag{31}$$

или в виде

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r \sum_{i=1}^{m} q_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{32}$$

где r – некоторый положительный параметр.

Примеры выбора вида штрафных функций:

Пусть дана функция $f(x_1, x_2) = x_1 + (x_2 + 1)^2$ при ограничениях $x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 0$.

Выбираем штраф как:

$$P(x_1, x_2) = r \cdot \left(1/(x_1 - 2) + 1/x_2\right).$$

В результате минимизируем функцию

$$F(x_1, x_2, r) = x_1 + (x_2 + 1)^2 + r \cdot \left(1/(x_1 - 2) + 1/x_2\right).$$

Другой пример. Требуется минимизировать функцию:

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничении $x_1 + x_2 - 4 = 0$.

Прибавим к целевой функции $f(x_1, x_2)$ значение $r g^2(x_1, x_2)$, тогда получим функцию без ограничений

$$F(x_1, x_2, r) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + r \cdot (x_1 + x_2 - 4)^2.$$

Таким образом, методы штрафных функций определяются как выбором вида штрафа, так и выбором параметра *r*.

Рассмотрим на конкретном примере один из параметрических методов, а именно, метод внутренней точки.

Пример 9

Пусть требуется минимизировать функцию $f(x) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 9x$ при ограничениях $q_i(\bar{x}): \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,2$.

Исходная точка поиска $A_0(1; 0{,}5)$.

□ Воспользуемся алгоритмом метода штрафных функций (метода внутренней точки).

1. Строим функцию без ограничений, используя штраф

$$P(\bar{x}, r) = f(\bar{x}) + r \cdot \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{q_i(\bar{x})},$$

$$P(x_1, x_2, r) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 9x_2 + r\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

2. Пусть $r_0 = 1$. Найдем минимум функции $P(x_1, x_2, r_0)$ любым методом безусловной оптимизации, например, градиентным:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)_{A_0} = \left(2x_1 + 6 - \frac{1}{x_1^2}\right)_{A_0} = 2 \cdot 1 + 6 - 1 = 7;$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)_{A_0} = \left(2x_2 + 9 - \frac{1}{x_2^2}\right)_{A_0} = 2 \cdot 0{,}5 + 9 - \frac{1}{0{,}25} = 6;$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}} = 0{,}05;$$

$$x_1^1 = x_1^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)_{A_0} = 1 - 0{,}05 \cdot 7 = 0{,}55;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)_{A_0} = 0{,}5 - 0{,}05 \cdot 6 = 0{,}2; \qquad A_1(0{,}55;\, 0{,}2).$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)_{A_1} = 3{,}7; \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)_{A_1} = -15{,}6; \quad \lambda = 0{,}018;$$

$$x_1^2 = x_1^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)_{A_1} = 0{,}483;$$

$$x_2^2 = x_2^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)_{A_1} = 0{,}48; \qquad A_2(0{,}483;\, 0{,}48)$$

И так далее. $A_{опт}(0{,}38;\, 0{,}325)$; $P_{опт}(r_0) = 11{,}16$

3. Уменьшаем r:

$$r_1 = \frac{r_0}{c}, \qquad c > 1. \qquad\qquad \text{Пусть } c = 10.$$

Минимизируем $P(x_1, x_2, r)$ тем же градиентным методом, теперь за исходную точку принимаем $A_0(0{,}38;\, 0{,}325)$.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)_{A_0} = \left(2x_1 + 6 - \frac{0{,}1}{x_1^2}\right)_{A_0} = 6{,}07; \qquad \lambda_0 = 0{,}25;$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)_{A_0} = \left(2x_2 + 9 - \frac{0{,}1}{x_2^2}\right)_{A_0} = 8{,}7;$$

$$x_1^1 = x_1^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)_{A_0} = 0{,}38 - 0{,}02 \cdot 6{,}07 = 0{,}26;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \lambda_0 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)_{A_0} = 0{,}325 - 0{,}02 \cdot 8{,}7 = 0{,}15 \text{ и т.д.}$$

$$A_{\text{опт}}(r_1) = (0{,}127;\, 0{,}106), \quad P_{\text{опт}}(r_1) = 3{,}47.$$

4. Вновь уменьшаем r: $r_2 = \dfrac{r_1}{c}$ и т.д.

Чем ближе к минимуму при $r \to 0$, тем меньше градиент функции $P(\bar{x}, r)$. Поиск заканчивается, если $r_k \le \varepsilon$, где ε – малая положительная величина. Графическая иллюстрация примера показана на рис.10

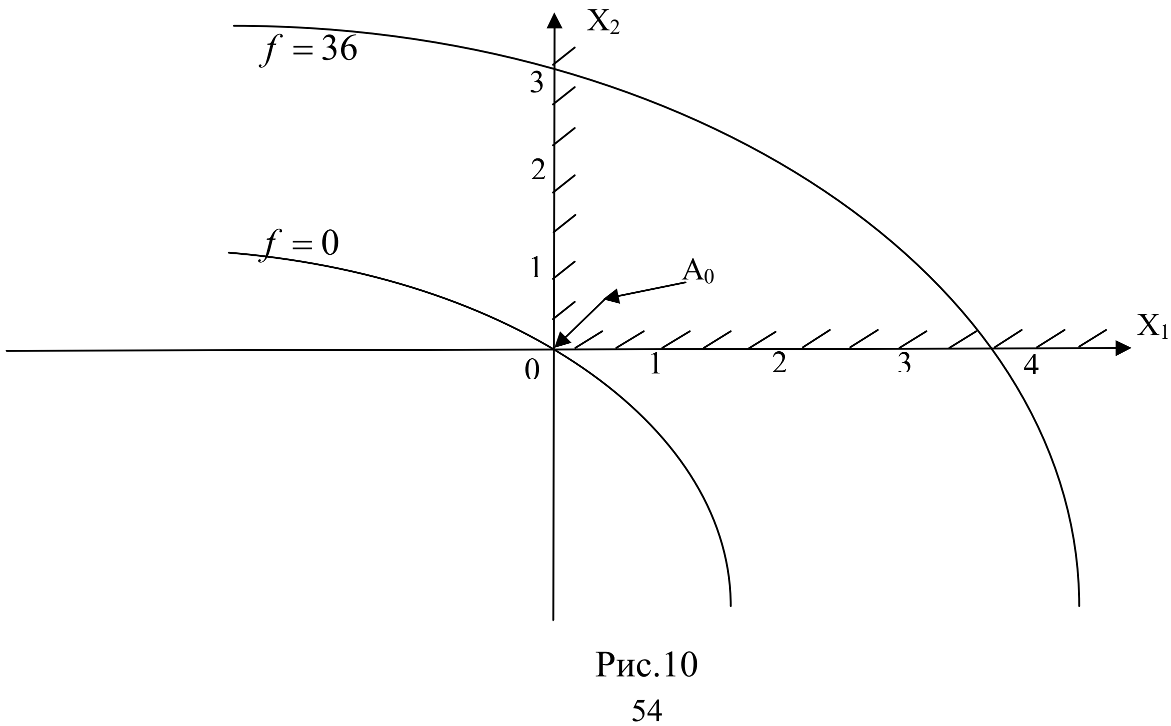


Рис.10

Линии уровня функции $f(\bar{x}) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 9x_2$ есть концентрические окружности с центром в точке с координатами:

$$x_1 = -3,\ x_2 = -\frac{9}{2}.$$

$$(x_1+3)^2 + \left(x_2 + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{117}{4},\quad \text{если } f = 0,$$

$$(x_1+3)^2 + \left(x_2 + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{121}{4},\quad \text{если } f = 1$$ и так далее.

<u>3.3. Задания</u>

Минимизировать функцию $f(\bar{x})$ при заданных ограничениях, с точностью ε.

Таблица 8

Номер варианта	Вид функции $f(\bar{x})$	Вид ограничений	Координаты исходной точки	ε
1	2	3	4	5
1	$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$	$x_2 - x_1^2 \ge 0$ $x_1 + x_2 - 2 \le 0$	$x_1^0 = 2$ $x_2^0 = 2$	0,01
2	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2 - 9x_2 + 4{,}25 = 0$	$x_1^0 = 0{,}8$ $x_2^0 = 6$	0,05
3	$x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 - 4x_2$	$x_2 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	$x_1^0 = 2$ $x_2^0 = 3$	0,01
4	$4x_1 - x_2^2 - 12$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$ $10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 \ge 34$	$x_1^0 = 2$ $x_2^0 = 4$	0,05
5	$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + 15x_2$	$(x_1+x_2)^2 = 4\cdot(x_1 - x_2)$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 1$	0,01

Продолжение табл.8

1	2	3	4	5
6	$x_2 \cdot \sin x_2 - 4x_1$	$x_2 \cdot \sin x_2 - x_1^3 - x_1 = 0$ $x_1 > 0, \quad x_1 < 4,$ $x_2 > 0, \quad x_2 < 4$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 0{,}5$	0,025
7	$\frac{2}{x_1 + 0{,}5} + \frac{1}{x_2 + 0{,}2}$	$4x_1 + 7x_2 \le 10$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 0{,}8$	0,01
8	$\frac{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 + 1)^2}{2}$	$-x_1 - x_2 - x_3 + 3 \ge 0$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$ $x_3 \ge 0$	$x_1^0 = 0$ $x_2^0 = 3{,}5$ $x_3^0 = 1{,}5$	0,01
9	$x_1^2 + x_2^2$	$2x_1 + x_2 - 1 \le 0$ $x_2 \ge 0$	$x_1^0 = -2$ $x_2^0 = 1$	0,05
10	$5x_1^2 - 3x_2^2$	$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 1$	0,01
11	$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$	$2x_1 + x_2 = 6$ $x_1 - x_2 - 8 < 0$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 1$	0,05
12	$x_1 + x_2^2 - 5$	$25 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$ $x_1 > 0, \quad x_2 \ge 0$	$x_1^0 = 2$ $x_2^0 = 4$	0,01
13	$x_1^2 + x_2^2$	$x_2 \ge 0$ $x_1 + x_2 \le 2$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 2$	0,05
14	$x_1^2 - 5x_1 + x_2^2$	$x_1 \le 1{,}5$ $x_2 > 1$	$x_1^0 = -0{,}5$ $x_2^0 = 2$	0,01
15	$x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 1$	$x_1^2 + x_2 \le 0$ $x_1 - 2x_2 \le 8$	$x_1^0 = 0{,}5$ $x_2^0 = -1{,}5$	0,05
16	$e^{x_1} + e^{x_2}$	$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$ $x_1 - x_2 - 1 \ge 0$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	$x_1^0 = 2$ $x_2^0 = 1{,}5$	0,01
17	$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_2$	$x_1^2 - x_2 \le 0$ $x_2 \le 5$	$x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 3$	0,05

Окончание табл.8

1	2	3	4	5
18	$x_1^2+25x_2^2$	$x_1+x_2\le 3$	$x_1^0=2$ $x_2^0=1$	0,01
19	$16x_1^2+x_2^2$	$x_1\le 3$ $x_2>0{,}5$	$x_1^0=-1$ $x_2^0=2$	0,01
20	$x_1^2+6x_1+x_2^2+9$	$x_1\ge 0$ $x_2\ge 1$	$x_1^0=1$ $x_2^0=3$	0,01
21	$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$	$x_1-2x_2+1=0$ $0{,}25x_1^2+x_2^2\le 1$	$x_1^0=2$ $x_2^0=2$	0,01
22	$100\cdot(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$	$x_2\ge 0$	$x_1^0=-1$ $x_2^0=1$	0,05
23	$1000-x_1^2-2x_2^2-x_1x_2$	$x_1^2+x_2^2-25=0$ $4x_1+7x_2-28=0$	$x_1^0=-1$ $x_2^0=2$	0,01
24	$(x_1-3)^2+(x_2-3)^2$	$x_1+x_2-4=0$	$x_1^0=0$ $x_2^0=0$	0,05
25	$x_1^2+x_2^2$	$x_2\ge 0$ $x_1+x_2\le 2$	$x_1^0=1$ $x_2^0=2$	0,05

4. МНОГОМЕРНЫЙ ПОИСК. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейные модели – это такие модели, в которых математические зависимости линейны относительно всех переменных величин, включенных в модель (т.е. содержат данные переменные в степени не выше первой).

Методом решения таких задач, как уже говорилось, является линейное программирование. Слово «программирование» отражает здесь конечную цель исследования – определение оптимального плана или оптимальной программы, по которой из множества возможных вариантов исследуемого процесса выбирают по какому-либо признаку наилучший, оптимальный вариант.

Примером такой задачи является задача оптимального распределения сырья между различными производствами при максимальной стоимости продукции.

Пусть из двух видов сырья изготавливается продукция двух видов.

Обозначим:

x_1, x_2 - число единиц продукции вида 1 и 2, соответственно;

c_1, c_2 - цена единицы продукции вида 1 и 2, соответственно.

Тогда общая стоимость всей продукции будет

$R = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

В результате производства желательно, чтобы общая стоимость продукции была максимальной. *R – целевая функция* в данной задаче.

Обозначим:

b_1, b_2 - количество сырья 1-го и 2-го видов, имеющееся в наличии,

a_{ij} - число единиц *i*-го вида сырья, необходимое для производства единицы *j*-го вида продукции.

Учитывая, что расход данного ресурса не может превышать общего его количества, запишем ограничительные условия по ресурсам:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2. \qquad (33)$$

Относительно переменных x_1, x_2 можно еще сказать, что они неотрицательны

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \text{ и } x_i \ne \infty. \qquad (34)$$

Среди множества решений системы неравенств (33) и (34) требуется найти такое решение (x_1, x_2), для которого функция *R* достигает наибольшего значения.

В таком же виде формулируются так называемые транспортные задачи (задачи оптимальной организации доставки товаров, сырья или продукции из различных складов к нескольким пунктам назначения при минимуме затрат на перевозку) и ряд других.

4.1. Математическая формулировка задачи линейного программирования

Найти совокупность значений *n* переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих системе ограничений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{l_n}x_n = b_l, \\ a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \dots + a_{l+1,n}x_n \le b_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{array}\right\} \tag{35}$$

и условиям неотрицательности

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ \dots\dots \\ x_t \ge 0. \end{array}\right\}, \tag{36}$$

где $t \le n$,

для которых линейная целевая функция *R*

$$R = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{37}$$

достигает экстремума (максимума или минимума).

Выражения (35), (36), (37) образуют линейную математическую модель общей задачи линейного программирования.

Любая совокупность значений $x_1, x_2, \dots, x_n$,удовлетворяющих системе (35), называется *возможным решением* (возможным планом) задачи.

Если совокупность $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяет еще условиям (36), то она называется *допустимым решением* или *допустимым планом задачи*.

Допустимое решение, для которого целевая функция (37) достигает максимума (или минимума), называется *оптимальным решением* (*оптимальным* *планом*) задачи.

Ограничительные условия (35) могут состоять только из уравнений ($l = m$), только из неравенств ($l = 0$) или из уравнений и неравенств ($0 < l < m$). В первых двух случаях они называются односторонними, в третьем случае – смешанными условиями.

4.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Задача

Найти x_1, x_2, удовлетворяющие системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 \le b_r \end{array}\right\}, \tag{38}$$

условиям не отрицательности

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \tag{39}$$

для которых функция

$$R = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{40}$$

достигает максимума.

Решение

Построим в системе прямоугольных координат x_1Ox_2 область допустимых решений задачи. Для этого, заменяя каждое из неравенств (38) равенством, строим соответствующую ему граничную прямую:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$ (рис. 11)

Эта прямая делит плоскость x_1Ox_2 на две полуплоскости. Для координат

x_1, x_2 любой точки А одной полуплоскости выполняется неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, а для координат x_1, x_2 любой точки В другой полуплоскости противоположное неравенство

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$.

Координаты любой точки граничной прямой удовлетворяют уравнению

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

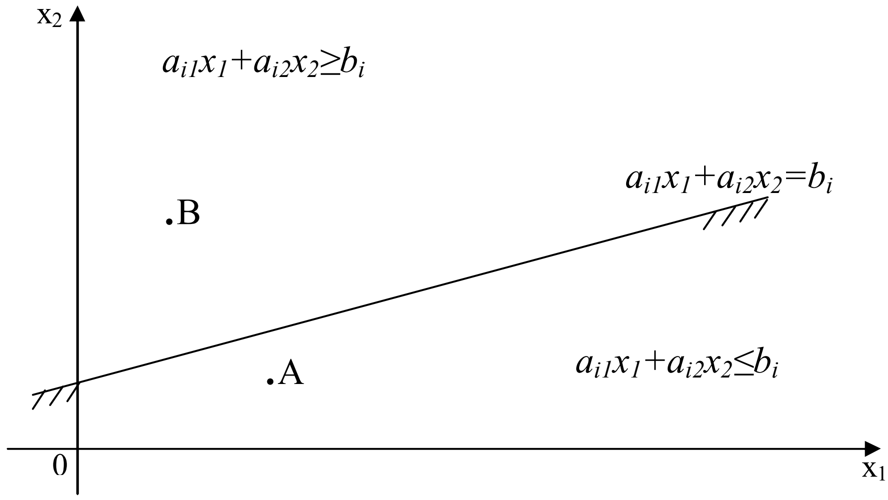


Рис. 11

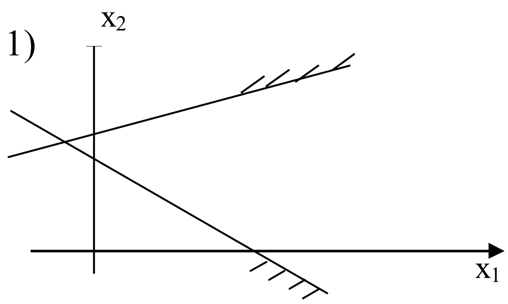
Для определения, по какую сторону от граничной прямой располагается полуплоскость, соответствующая заданному неравенству, достаточно «испытать» одну какую-либо точку (проще всего точку O(0; 0)). Если при подстановке ее координат в левую часть неравенства оно удовлетворяется, то полуплоскость обращена в сторону к испытуемой точке, если же неравенство не удовлетворяется, то соответствующая полуплоскость обращена в противоположную сторону. Направление полуплоскости показывается на чертеже (рис.11) штриховкой.

Неравенствам $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ также соответствуют полуплоскости, расположенные справа от оси ординат и над осью абсцисс.

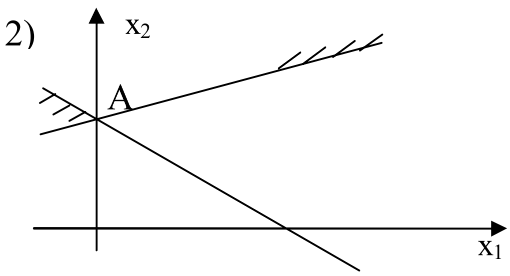
На рисунке строим граничные прямые и полуплоскости, соответствующие всем неравенствам.

Общая часть (пересечение) всех этих полуплоскостей будет представлять собой область допустимых решений данной задачи.

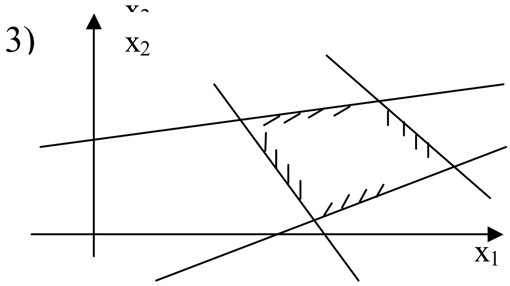
При построении области допустимых решений в зависимости от конкретного вида системы ограничений (неравенств) на переменные может встретиться один из четырех случаев (рис. 12).



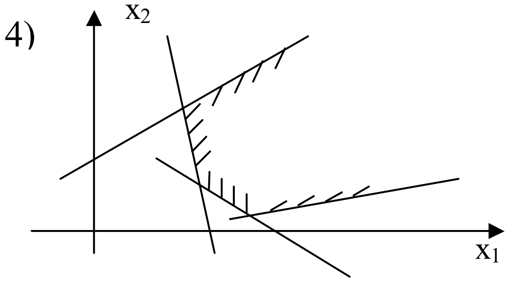
Область допустимых решений пустая, что соответствует несовместности системы неравенств; решения нет.



Область допустимых решений изображается точкой А, что соответствует единственному решению системы.



Область допустимых решений ограниченная, изображается в виде выпуклого многоугольника. Допустимые решения есть.



Область допустимых решений неограниченная, в виде выпуклой многоугольной области. Допустимые решения есть.

Рис.12

Графическое изображение целевой функции $R = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фиксированном значении R определяет прямую, а при изменении R - семейство параллельных прямых с параметром R.

Вектор $\vec{c} = \{c_1, c_2\}$, перпендикулярный ко всем этим прямым, показывает направление возрастания R.

Для всех точек, лежащих на одной из прямых, функция R принимает одно определенное значение, поэтому указанные прямые называются *линиями уровня* для функции R (рис.13).

Задача отыскания оптимального решения системы неравенств (37), для которого целевая функция R (39) достигает максимума, геометрически сводится к определению в области допустимых решений точки, через которую пройдет линия уровня, соответствующая наибольшему значению параметра R.

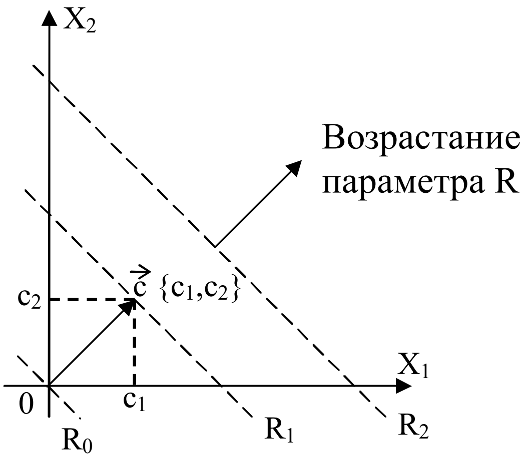


Рис. 13

Если область допустимых решений есть выпуклый многоугольник, то экстремум функции R достигается, по крайней мере, в одной из вершин этого многоугольника.

Если экстремальное значение R достигается в двух вершинах, то же экстремальное значение достигается в любой точке на отрезке, соединяющем эти вершины. В этом случае говорят, что задача имеет альтернативный оптимум.

В случае неограниченной области экстремум функции R либо не существует, либо достигается в одной из вершин области, либо имеет альтернативный оптимум.

Пример 10

Найти x_1, x_2, удовлетворяющие системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{array}\right\}, \qquad (41)$$

условиям неотрицательности

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$

для которых функция

$R = 2x_1 + 3x_2$

достигает максимума.

□

1. Заменим каждое из неравенств равенством и построим граничные прямые (рис.14)

$x_1 - 5x_2 = 5,$
$x_1 - x_2 = -4,$
$x_1 + x_2 = 8.$

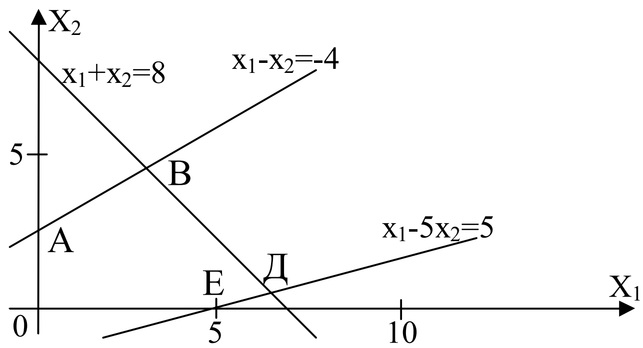


Рис.14

2. Определим полуплоскости, соответствующие данным неравенствам (41) путем «испытания» точки (0; 0). Покажем направление полуплоскости штриховкой (рис. 15). С учетом неотрицательности x_1, x_2 получим область допустимых решений данной задачи в виде выпуклого многоугольника *ОАВДЕ*.

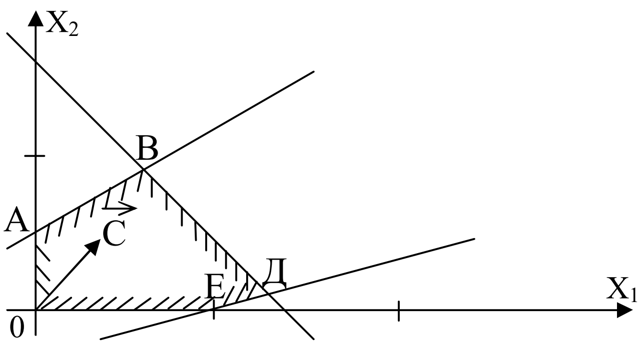


Рис. 15

3. В области допустимых решении находим оптимальное решение, строя вектор $\vec{c} = \{2, 3\}$,который показывает направление возрастания *R* (рис.15).

Оптимальное решение соответствует точке В, координаты которой можно определить либо графически, либо путем совместного решения двух уравнений, соответствующих граничным прямым АВ и ВД, т.е.

$x_1 - x_2 = -4,$

$x_1 + x_2 = 8.$

Таким образом, $x_1 = 2, x_2 = 6, R_{\max} = 22.$

<u>4.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования</u>

Симплексный метод реализует идею последовательного улучшения решения. Это универсальный метод, который может быть применен при решении любой задачи линейного программирования.

Задача

Найти решение системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \;\; + \ldots + a_{1n}x_n \; = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \;\; + \ldots + a_{2n}x_n \; = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \; = b_m \end{array}\right\}, \tag{42}$$

удовлетворяющее условиям неотрицательности

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_n \geq 0 \tag{43}$$

и максимизирующее линейную функцию

$$R = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{44}$$

Полагая, что ранг r матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных, выразим r неизвестных системы (42) через остальные

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = a'_{1,\,r+1}x_{r+1} + a'_{1,\,r+2}x_{r+2} + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1,\\ x_2 = a'_{2,\,r+1}x_{r+1} + a'_{2,\,r+2}x_{r+2} + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r = a'_{r,\,r+1}x_{r+1} + a'_{r,\,r+2}x_{r+2} + \ldots + a'_{rn}x_n + b'_r.\end{array}\right\} \qquad (45)$$

В системе (45) число линейно независимых уравнений равно r.

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ назовем *базисными*, остальные неизвестные назовем *свободными*.

Так как свободным неизвестным можно придавать любые неотрицательные значения $(x_{r+1} \geq 0,\ \ x_{r+2} \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0)$, то свободные члены $b'_1, b'_2, \ldots, b'_r$ должны быть неотрицательными $(b'_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r)$. В противном случае (т.е. если $b'_i < 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$) и $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$ получим $x_1 < 0, x_2 < 0, \ldots, x_r < 0$, что недопустимо по условию задачи.

Положим все свободные равными нулю: $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0$.

Получим:

$$\begin{array}{l}x_1 = b'_1,\\ x_2 = b'_2,\\ \ldots\ldots\ldots\\ x_r = b'_r.\end{array}$$

Полученное решение системы является допустимым, т.к.удовлетворяет условиям (42) и (43), и называется *базисным решением*. При этом вектор $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ называется *базисным вектором*.

Подставим в оптимизируемую линейную функцию (44) найденные базисные неизвестные, выраженные через свободные неизвестные. Для первого базисного решения все свободные неизвестные $x_{r+i} = 0$, поэтому получим $R = c'_0$.

Далее переходим к другому базисному решению. При этом значение оптимизируемой линейной функции R должно увеличиваться (если ищем максимум R) или уменьшаться (если ищем минимум R).

Переход осуществляется следующим образом: одна из базисных переменных заменяется другой, которая ранее была свободной, и т.д. Этот процесс повторяется до тех пор, пока R не достигнет экстремального значения.

Рассмотрим принцип нахождения решения задачи линейного программирования на примерах.

<u>Пример 11</u>

Найти решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 7 \\ x_3 - \ \ x_4 - 3x_5 &= 2 \\ x_1 + \ \ x_4 + \ \ x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

удовлетворяющее условиям неотрицательности

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, \quad x_5 \ge 0 \tag{47}$$

и минимизирующее целевую функцию

$$R = 3 - x_4 + x_5. \tag{48}$$

Выразим базисные переменные x_1, x_2, x_3 через свободные x_4 и x_5:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_4 - x_5 \\ x_2 &= 7 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= 2 + x_4 + 3x_5 \end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Приняв свободные переменные x_4 и x_5 равными нулю, получим первое базисное решение, т.е. выполним первую итерацию симплексных преобразований:

$$x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0. \tag{50}$$

При этом $R = 3$.

Выполним вторую итерацию, которая приведет к уменьшению R. Анализ уравнения (48), которое определяет R, показывает, что целевая функция R может быть уменьшена за счет уменьшения x_5 и увеличения x_4. Однако уменьшить x_5 нельзя, т.к. на первой итерации $x_5 = 0$, а условие неотрицательности не позволяет сделать $x_5 < 0$.

Значит, путь уменьшения R состоит в увеличении x_4.

Увеличение x_4 должно идти до тех пор, пока одна из переменных x_i, которая зависит от x_4, не станет равной нулю и, следовательно, дальнейшее увеличение x_4 приведет к отрицательному x_i, что недопустимо.

Из системы (48) следует, что x_4 не может превышать значения 2, т.к. при $x_4 > 2$ x_1 становится меньше нуля (первое уравнение системы (49)), что недопустимо по условию задачи.

Принимаем $x_4 = 2$, при этом $x_1 = 0$. Подставим эти значения в систему уравнений (48), получим новое базисное решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 2, x_5 = 0, \tag{51}$$

при этом $R = 1$.

Выразим новые базисные переменные x_2, x_3, x_4 через свободные x_1 и x_5:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 3 + 2x_1 - x_5 \\ x_3 &= 4 - x_1 + 2x_5 \\ x_4 &= 2 - x_1 - x_5 \end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

Подставим полученное выражение для x_4 в выражение для целевой функции (48), получим

$$R = 1 + x_1 + 2x_5.$$

Поскольку требуется получить минимум функции R, а уже на второй итерации x_1 и x_5 равны нулю, то, учитывая, что x_1 и x_5 не могут быть отрицательными, а любое увеличение x_1 и x_5 не приведет к уменьшению R, делаем вывод: задача решена, и искомое решение есть результат второй итерации (51).

Пример 12

Найти значения x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5,$ которые удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 300 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 160 \end{aligned}\right\}, \tag{53}$$

условиям неотрицательности

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{54}$$

и обеспечивают наименьшее значение целевой функции

$$P = -10x_1 - 12x_2. \tag{55}$$

Примем переменные x_3, x_4, x_5 в качестве базисных и выразим их через свободные переменные x_1 и x_2 из уравнения (52). Получим

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 300 - 4x_1 - 5x_2 \\ x_4 &= 100 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 &= 160 - 2x_1 - 3x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{56}$$

Первое базисное решение примет вид

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 300, x_4 = 100, x_5 = 160. \tag{57}$$

При этом $R = 0$.

Из уравнения (55) видно, что целевая функция может быть уменьшена путем увеличения x_1 и x_2. Увеличим сначала x_1. Из системы (56) следует, что x_1 можно увеличить до значения $x_1 = 50$, поскольку при большем его значении переменная x_4 станет отрицательной.

Полагая $x_1 = 50, \quad x_2 = 0$, из (55) получаем второе базисное решение

$$x_1 = 50, x_2 = 0, x_3 = 100, x_4 = 0, x_5 = 60. \tag{58}$$

При этом $R = -500$.

Примем ненулевые переменные в (58) x_1, x_3, x_5 в качестве базисных, а нулевые переменные x_2 и x_4 в качестве свободных. Из системы (52) найдем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 50 - 0{,}5x_2 - 0{,}5x_4 \\ x_3 &= 100 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_5 &= 60 - 2x_2 + x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{59}$$

Выражение для целевой функции (54) запишем через свободные параметры, заменив x_1 с помощью (58). Получим

$$R = -500 - 7x_2 + 5x_4. \tag{60}$$

Отсюда следует, что значение целевой функции можно изменить за счет увеличения x_2, поскольку коэффициент при этой переменной в (59) отрицательный.

Максимальное значение x_2 определяется соотношениями (58) и составляет $x_2 = 30$. Из (58) при $x_2 = 30, x_4 = 0$ получаем третье базисное решение

$$x_1 = 35, x_2 = 30, x_3 = 10, x_4 = 0, x_5 = 0. \tag{61}$$

Для проведения следующего шага симплексных преобразований ненулевые переменные в (60), т.е. x_1, x_2, x_3, нужно принять в качестве базисных, а нулевые переменные x_4 и x_5 - в качестве свободных. В этом случае целевую функцию можно записать в виде

$$R = -710 + 1{,}5x_2 + 3{,}5x_5. \tag{62}$$

Поскольку коэффициенты при x_4 и x_5 положительные, то при увеличении этих параметров целевая функция возрастает. Следовательно, решение (61) является оптимальным.

4.4. Задания

Найти экстремум целевой функции $R(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ при заданных ограничениях двумя методами: а) графическим; б) симплекс-методом. Сравнить результаты.

Таблица 9

Номер варианта	Экстремум	a	b	c	Ограничения
1	2	3	4	5	6
1	Max	2,5	4,3	8,5	$x_1 + x_2 \ge 5$; $x_1 \le 10$; $x_1 \le 2x_2$; $3x_2 \le 2 + 3x_1$; $x_2 \le 7$
2	Max	2,8	3,6	0,8	$x_1 + x_2 \ge 5$; $x_1 \le 10$; $x_1 \le 2x_2$; $4x_2 \ge 2x_1 - 9$; $x_2 \le 7$
3	Min	6,4	3,0	-5,4	$3x_2 \ge 9 - 4x_1$; $x_2 \le 5$; $3x_2 \ge x_1$; $x_1 \ge 1$; $x_1 - 3 \le 0{,}5x_2$
4	Max	9,8	0,3	1,6	$3x_1 \le 1 - 2x_2$ $x_1 \ge x_2 - 10$; $x_1 \ge 0{,}5$; $x_2 \ge 2$; $x_2 \ge 5 - 3x_1$
5	Max	2,0	2,5	3,6	$x_1 + x_2 \le 12$; $x_2 \le 6$; $x_2 \le 3x_1 - 6$; $5x_1 + 3x_2 \ge 20$; $x_1 - 5x_2 \le 3$
6	Min	9,2	4,8	15,1	$x_1 \le 15$; $x_2 \le 10$; $4x_1 \le 8x_2 + 15$; $x_2 \ge 7 - 0{,}5x_1$; $3x_1 - 5 \ge 2x_2$
7	Min	3,2	1,1	0,4	$x_1 \le 8$; $x_2 \ge 7$; $x_1 \le 30 - 2x_2$; $x_2 \le 1 + 2x_1$; $3x_2 - 9 \ge 2x_1$

Продолжение табл.9

8	Min	2,5	0,6	5,4	$x_1 \le 14;\quad x_2 \le 9;\quad x_1 \le 6 - x_2;$ $8x_2 - 4x_1 \ge 3;\quad x_2 \le 2x_1 + 1$
9	Min	5,5	0,7	-3,5	$x_1 \ge 4 - x_2;\quad x_1 + x_2 - 9 \le 0;$ $x_1 \le 3x_2;\quad x_1 \ge 1;\quad x_2 \le 6$
10	Max	7,5	1,2	6,2	$x_1 + x_2 \ge 5;\quad x_2 \le 2x_1 + 3;$ $x_1 \le 15 - x_2;\quad x_1 \le 2x_2;\quad x_1 \le 8$
11	Min	1,4	2,9	4,4	$5x_1 - 3x_2 - 6 \ge 0;\quad 0{,}5x_1 - x_2 + 2 \le 0;$ $x_1 \le 9{,}5;\quad x_2 \ge 7;\quad x_2 \le 12$
12	Max	4,7	0,7	5,3	$2x_1 + x_2 - 6 \ge 0;\quad x_2 - 1{,}5x_1 \ge 0;$ $x_2 - 5x_1 \le 0;\quad x_2 - 7{,}5 \le 0;\quad x_2 \le 11 - x_1$
13	Min	2,6	3,2	1,3	$x_2 \ge 2;\quad x_2 - 10 \le 0;\quad 9x_1 - x_2 \ge 0;$ $5 - 3x_1 - x_2 \le 0;\quad x_2 \ge 2x_1 - 3$
14	Min	1,8	4,2	1,5	$x_1 \ge 1;\quad x_2 \le 5;\quad x_1 - 10x_2 \le 0;$ $16 - x_1 - 2x_2 \ge 0;\quad 3x_2 \ge 9 - 4x_1$
15	Max	1,4	2,0	6,2	$x_2 - 1{,}5 \ge 0;\quad 9x_1 - 2x_2 \le 0;$ $x_1 + x_2 \le 12;\quad x_1 \ge 3x_2 - 15;\quad 1 + 5x_1 \ge 2x_2$
16	Max	2,1	4,5	2,3	$x_1 - 6x_2 \le 0;\quad x_1 + 2x_2 - 4 \le 0;$ $3x_1 + 1 \ge x_2;\quad 7 - x_2 \ge 0;\quad 2x_1 + x_2 \le 14$
17	Min	7,5	2,0	6,2	$x_1 \ge 4 - x_2;\quad 6x_1 - 10x_2 \le 0;$ $2x_1 \ge x_2 - 1{,}5;\quad x_2 - 5 \le 0;\quad 24 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0$
18	Min	1,3	4,2	-1,5	$x_1 - x_2 + 6 \ge 0;\quad x_1 \le 9;\quad x_2 \le 10;$ $6x_1 \le 10x_2;\quad x_1 + x_2 \ge 8$
19	Min	6,1	5,7	0,3	$x_1 \le 2 + 3x_2;\quad x_2 \ge 2;\quad x_2 \le 6;$ $x_2 \le 15 - x_1;\quad x_2 - 4x_1 + 17 \ge 0$

Продолжение табл.9

1	2	3	4	5	6
20	max	2,5	2,0	3,0	$x_1 - 5x_2 \le 3;\quad 3x_1 + 5x_2 \ge 20;$ $x_1 \le 3x_2 - 6;\quad x_1 \le 6;\quad x_1 + x_2 - 12 \le 0$
21	max	1,2	7,5	6,0	$x_2 \le 8;\quad x_2 \le 2x_1;\quad x_2 \le 15 - x_1;$ $x_1 \le 2x_2 + 3;\quad x_1 + x_2 - 5 \ge 0$
22	min	1,1	3,2	0,7	$3x_1 - 9 \ge 2x_2;\quad x_1 \le 1 + 2x_2;$ $x_2 \le 30 - 2x_1;\quad x_1 \ge 7;\quad x_2 \le 8$
23	min	0,6	2,5	5,5	$x_1 \le 2x_2 + 1;\quad 8x_1 - 4x_2 \ge 3;\quad x_1 \le 9;$ $x_2 \le 6 - x_1;\quad x_2 \le 14$
24	min	8,7	1,6	-4,5	$x_1 \le 9;\quad x_2 \le 8;\quad x_1 + x_2 \ge 6;$ $2x_2 \ge x_1;\quad -3x_1 + 3x_2 \le 2$
25	max	0,7	4,7	5,1	$x_1 \le 11 - x_2;\quad x_1 - 7{,}5 \le 0;\quad x_1 - 5x_2 \le 0;$ $x_1 - 1{,}5x_2 \ge 0;\quad x_1 + 2x_2 - 6 \ge 0$
26	max	2,1	5,5	1,4	$2x_1 \ge 10 - 3x_2;\quad 3x_1 - 5x_2 \le 3;$ $10x_1 + 6x_2 \le 85;\quad x_1 \ge 1;\quad x_2 \le 7$
27	max	3,0	0,9	1,8	$x_1 + 2x_2 \ge 6;\quad x \ge 1{,}5x_2;\quad x_1 \le 8;$ $x_1 + x_2 - 11 \le 0;\quad x_1 \le 5x_2$
28	min	4,5	6,7	0,6	$2x_1 + x_2 \ge 10;\quad 4x_2 \ge 2x_1 - 9;$ $x_1 \le 12;\quad x_2 \ge 2;\quad x_2 \le 9$
29	max	0,8	5,4	3,1	$4x_1 + 3x_2 \ge 9;\quad x_2 \ge 2x_1 - 6;$ $x_1 \le 3x_2;\quad x_1 \ge 0{,}5;\quad x_2 \le 6$
30	min	1,9	2,6	-1,2	$x_1 \ge 0;\quad x_2 \ge 3;\quad x_2 \le 10 + x_1;$ $3x_1 + x_2 \ge 5;\quad 2x_2 \ge 3x_1 - 1$

Продолжение табл. 9

1	2	3	4	5	6
31	Min	4,1	5,2	9,3	$3x_1 - x_2 \ge 6;\quad 5x_1 \ge 20 - 3x_2;$ $x_1 \le 3 + 5x_2;\quad x_2 \le 12 - x_1;\quad x_2 \le 5$
32	Min	5,4	1,5	5,7	$0{,}5x_1 + x_2 - 7 \ge 0;\quad x_1 \le 12\quad x_2 \le 9;$ $2x_2 \le 3x_1 - 5;\quad 8x_2 \ge 4x_1 - 15$
33	Max	3,8	2,9	1,3	$x_1 \le 8;\quad x_2 \ge 3;\quad x_1 + x_2 \le 15;$ $x_1 \le 2x_2;\quad 3 + 2x_1 \ge x_2$
34	Max	1,4	5,8	4,2	$x_1 + 2x_2 - 30 \le 0;\quad x_2 - 2x_1 \le 1;$ $3x_2 \ge 2x_1 + 9;\quad x_1 \le 9;\quad x_2 \ge 6$
35	Min	4,6	1,1	6,5	$x_1 \le 8;\quad x_2 \le 10;\quad x_2 - x_1 \le 1;$ $3 + 4x_1 - 8x_2 \le 0;\quad x_2 \ge 6 - x_1$
36	Max	2,3	5,4	1,4	$2x_1 + x_2 \ge 4;\quad x_1 \ge 1;\quad x_2 \le 8;$ $x_1 + x_2 \le 10;\quad 3x_2 \ge x_1$
37	Min	6,5	1,7	0,9	$3x_2 \le 5x_1 - 6;\quad x_1 \le 10\quad x_2 \le 13;$ $x_2 \ge 6;\quad x_2 \ge 0{,}5x_1 + 2$
38	Max	0,9	3,0	1,6	$x_2 \le 5x_1;\quad x_2 \le 8;$ $x_1 - x_2 - 11 \le 0;\quad 2x_1 + x_2 \ge 6$
39	Max	2,6	5,4	11,3	$3x_1 + x_2 \ge 5;\quad 2x_1 - x_2 \le 3;$ $x_2 - 9x_1 \le 0;\quad x_2 \ge 2;\quad x_2 \le 10$
40	Min	6,4	2,5	0,9	$4x_1 + 3x_2 \ge 9;\quad x_1 + 2x_2 \le 16;$ $x_2 \ge 0{,}1x_1;\quad x_1 \ge 0{,}5;\quad x_2 \le 6$
41	Max	3,4	1,9	5,3	$2x_2 - 5x_1 \le 1;\quad 3x_2 \le x_1 + 15;$ $x_1 + x_2 \le 12;\quad 2x_2 \ge 9x_1;\quad x_2 \ge 1$

Окончание табл. 9

1	2	3	4	5	6
42	Max	1,8	3,2	1,5	$x_2-3x_1\le 1;\quad x_2\le 7;\quad x_2+2x_1\le 14;$ $6x_2\ge x_1;\quad 4-x_1-2x_2\le 0$
43	Min	1,9	5,3	2,4	$x_2\le 5{,}5;\quad 2x_1+3x_2\le 24;\quad 10x_2\ge 6x_2;$ $x_1+x_2\ge 4;\quad x_2\le 2x_1+1{,}5$
44	Min	2,6	8,4	1,3	$x_1\le 10;\quad 10x_2-6x_1\ge 0;\quad x_2\ge 8-x_1;$ $x_2\le 9;\quad x_1\le x_2-6$
45	Min	6,4	1,9	5,8	$4x_1-x_2\le 17;\quad x_1+x_2\le 15;\quad x_2\le 7$ $x_2\ge 2;\quad x_1-3x_2\le 2$
46	Min	5,2	4,1	9,3	$x_1\le 5;\quad x_1\le 12-x_1\quad x_2\le 3+5x_1;$ $5x_2\ge 20-3x_1;\quad 3x_2-x_1\ge 6$
47	Max	2,9	3,8	1,3	$3+2x_2\ge x_1;\quad x_2\le 2x_1;\quad x_1\le 15-x_2;$ $x_1\ge 3;\quad x_2\le 8$
48	Max	5,8	1,4	3,8	$x_1\ge 6;\quad x_2\le 9\quad 3x_1\ge 2x_2+9;$ $x_1+2x_2\le 1;\quad 2x_1+x_2-30\le 0$
49	Min	1,1	4,6	6,4	$3-8x_1+4x_2\le 0;\quad x_1\ge 6-x_2;$ $x_1-2x_2\le 1;\quad x_1\le 10;\quad x_2\le 8$
50	Min	1,5	4,6	2,3	$2x_1+3x_2\ge 10;\quad x_1\ge 2;\quad x_2\le 5;$ $5x_2\ge 3x_1-3;\quad 10x_1\le 85-6x_2$

4.5. Решение задач линейного программирования при помощи пакетов прикладных программ

Как уже отмечалось выше, наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования. Эти методы позволяют описать, с достаточной точностью, широкий круг задач производственной, экономической деятельности таких, как производственное планирование; составление оптимальных смесей и сплавов; оптимальный распил и раскрой материала; организация рациональных перевозок груза (транспортная задача); организация рациональных закупок комплектующих предприятий; распределение работников фирм по должностям (задача о назначении); распределение ресурсов; планирование капиталовложений; замена производственного оборудования и многие другие.

В задачах линейного программирования критерий эффективности и функции в системе ограничений являются линейными. Использование методов математического программирования в производственной и коммерческой деятельности связано со сбором необходимой информации; затем постановкой задачи и построением математической модели задачи линейного программирования. Решение такой задачи возможно симплекс-методом, но такой способ решения достаточно трудоемок. Чаще дальнейшее решение реализуется при помощи ПК. Так как многие методы математического программирования уже реализованы на компьютере в виде стандартных программ, то доступ к получению решения обычно прост, автоматизирован и не составляет особых трудностей. Рассмотрим подробнее применение табличного процессора и прикладного пакета MATHCAD при решении текстовых задач линейного программирования.

Общая постановка задачи линейного программирования имеет вид (35)-(37). Рассмотрим построение математической модели на примерах конкретных производственных и экономических задач.

4.5.1. Задача об оптимальном распределении работников по должностям (задача о назначениях)

Пример 13. В отделе технического контроля (ОТК) некоторого предприятия работают контролеры первого и второго разрядов. Норма выработки ОТК за восьмичасовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер первого разряда (К1) проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролеры второго разряда (К2) проверяют 15 изделий в час, его точность – 95%. Зарплата К1 – 4 доллара в час, К2 – 3 доллара в час. При каждой ошибке контролера предприятие несет убыток в размере двух долларов. Предприятие может использовать 8 контролеров К1 и 10 контролеров К2. Руководство хочет оптимизировать состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Разработка модели: Пусть x_1 и x_2 – количество контролеров К1 и К2 соответственно. Число контролеров каждого разряда ограничено т.е. $x_1 \le 8$, $x_2 \le 10$.

Ежедневно необходимо проверять не менее 1800 изделий, поэтому должно выполняться неравенство: $8 \cdot 25x_1 + 8 \cdot 15x_2 = 200x_1 + 120 \cdot x_2 \ge 1800$ или $5x_1 + 3x_2 \ge 45$.

При составлении целевой функции надо учитывать расходы предприятия на зарплату контролеров и убытки, вызванные их ошибками. Расходы на первого контролера в час: $4 + 2 \cdot 25 \cdot 0{,}02 = 5$ \$; расходы на второго в час: $3 + 2 \cdot 15 \cdot 0{,}05 = 4{,}5$ \$.

Составим минимизируемую целевую функцию, выражающую ежедневные расходы на контролеров: $f(x_1, x_2) = 8 \cdot (5x_1 + 4{,}5x_2) = 40x_1 + 36 \cdot x_2$.

Тогда математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = 8 \cdot (5x_1 + 4{,}5x_2) = 40x_1 + 36 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 45, \\ x_1 \le 8, \\ x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Так как в задаче всего 2 неизвестных, то ее можно решить при помощи графического метода (п.4.2), однако воспользовавшись готовым пакетом прикладных математических программ это можно сделать еще быстрее.

Алгоритм решения в MathCAD:

1. Записывается целевая функция.
2. <u>Замечание</u>. Нумерация независимых переменных ведется с 0: x_0, x_1, x_2 и так далее.

3. Вводятся начальные приближения значений переменных.

4. Пишется начало процедуры решения - зарезервированное слово *Given*.

5. Под *Given* вводятся ограничения, условие неотрицательности.

6. Вставляется функция *maximize (minimize)*.

7. Щелчком правой кнопки мыши по функции *maximize (minimize)* вызывается контекстно-зависимое меню, с помощью которого можно выбрать метод оптимизации.

8. Выводится искомое x и =. оптимальное решение выводится на экран.

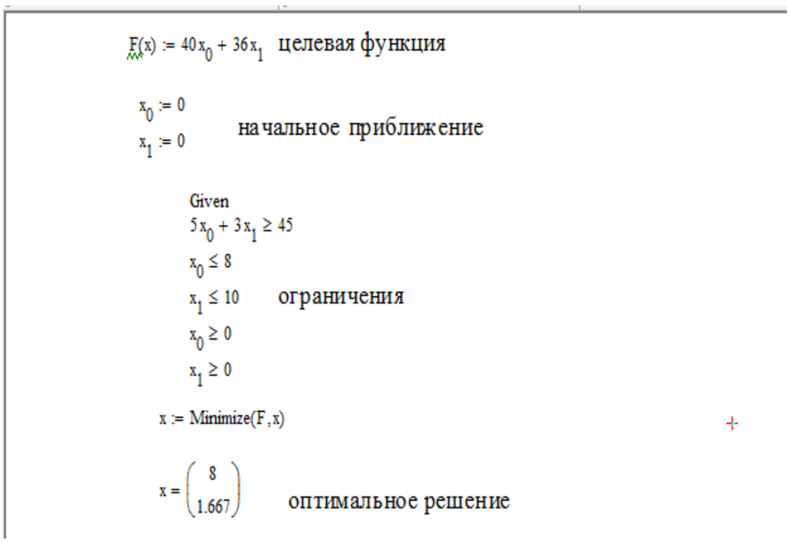


Рис. 16

Ответ. Предприятию для оптимизации расходов на контроль надо иметь 8 контролеров первого разряда и 2 контролера второго разряда.

Одним из самых распространенных табличных процессоров является Excel. Для решения подобных задач он имеет встроенную функцию «Поиск решения», которая чаще всего не подключена в исходной таблице. Чтобы ее подключить, надо во вкладке «Файл», «Параметры Excel» поставить флажок и функция «Поиск решения» будет доступна во вкладке «Данные».

Чтобы выполнить решение при помощи электронной таблицы надо провести подготовительную работу на рабочем листе таблицы. Выбрать ячейки, в которые вы поместите переменные (для нашего примера это соответственно ячейки B2, B3), целевую функцию (ячейка C5) и ограничения (ячейки левой части ограничений B8-B12; правой части ограничений C8-C12). После первоначальной подготовки рабочий лист имеет вид: Рис 17.

	A	B	C	D	E
1	Переменные:				
2	x1=				
3	x2=				
4	Целевая функция:				
5	40x1+36x2→min				
6					
7	Ограничения:				
8	5x1+3x2≥45	0	45		
9	x1≤8	0	8		
10	x2≤10	0	10		
11	x1≥0	0	0		
12	x2≥0	0	0		
13					

Рис. 17

Далее вызываем «Поиск решения» во вкладке «Данные», в появившемся диалоговом окне установить ссылку на целевую ячейку, ячейки с переменными, ограничения и выполнить команду «Поиск решения».

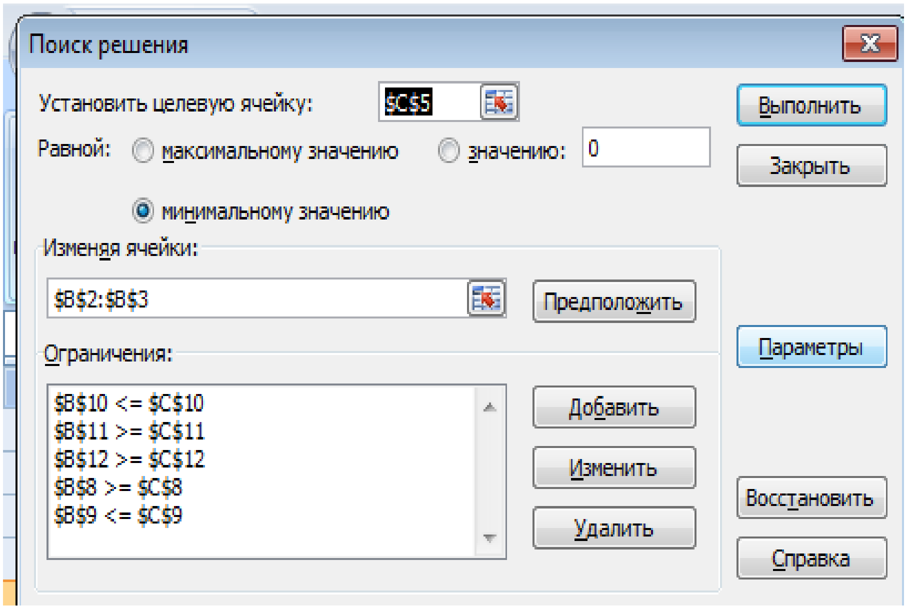
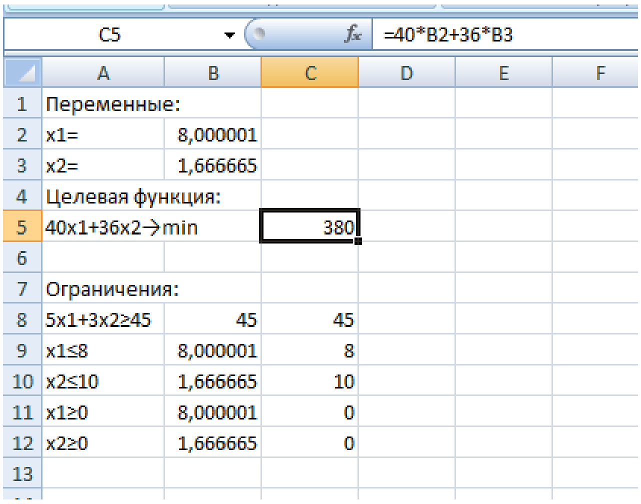


Рис. 18

В итоге электронная таблица выдает следующий результат:



C5 | =40*B2+36*B3

	A	B	C	D	E	F
1	Переменные:					
2	x1=	8,000001				
3	x2=	1,666665				
4	Целевая функция:					
5	40x1+36x2→min		380			
6						
7	Ограничения:					
8	5x1+3x2≥45	45	45			
9	x1≤8	8,000001	8			
10	x2≤10	1,666665	10			
11	x1≥0	8,000001	0			
12	x2≥0	1,666665	0			
13						

Рис. 19

Как видим, результаты, полученные с помощью двух разных прикладных программам, совпадают. Ответ тот же: для оптимальной работы ОТК необходимо иметь восемь контролеров первого разряда и двух контролеров второго разряда.

4.5.2. Задача оптимального годового производственного планирования

Пример 14 Завод имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: трудовых, сырьевых и оборудования. Используются ресурсы трех видов: рабочая сила, сырье и оборудование, которые имеются в количестве соответственно 80 человеко-дней, 480 кг сырья и 130 станков. Завод может выпускать изделия четырех видов: электропечь, электрокамин, колонка и электроутюг. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного изделия каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в таблице ниже.

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором его общий доход от реализации продукции будет максимальным.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия, ед.				Наличие ресурсов, ед.
	Электро печь	электрока-мин	колонка	электро-утюг	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	1	4	5	8	130
Доход(тыс.руб.)	3	4	3	1	

Решение

Математическая модель задачи:

Пусть x_1 – объем выпуска электропечей, шт.; x_2 – объем выпуска электрокаминов, шт.; x_3 – объем выпуска колонок, шт.; x_4 – объем выпуска электроутюгов, шт.

Целевая функция:

$F(x) = 3x_1+4x_2+3x_3+x_4 \rightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80, \\ 5x_2 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 \le 130, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

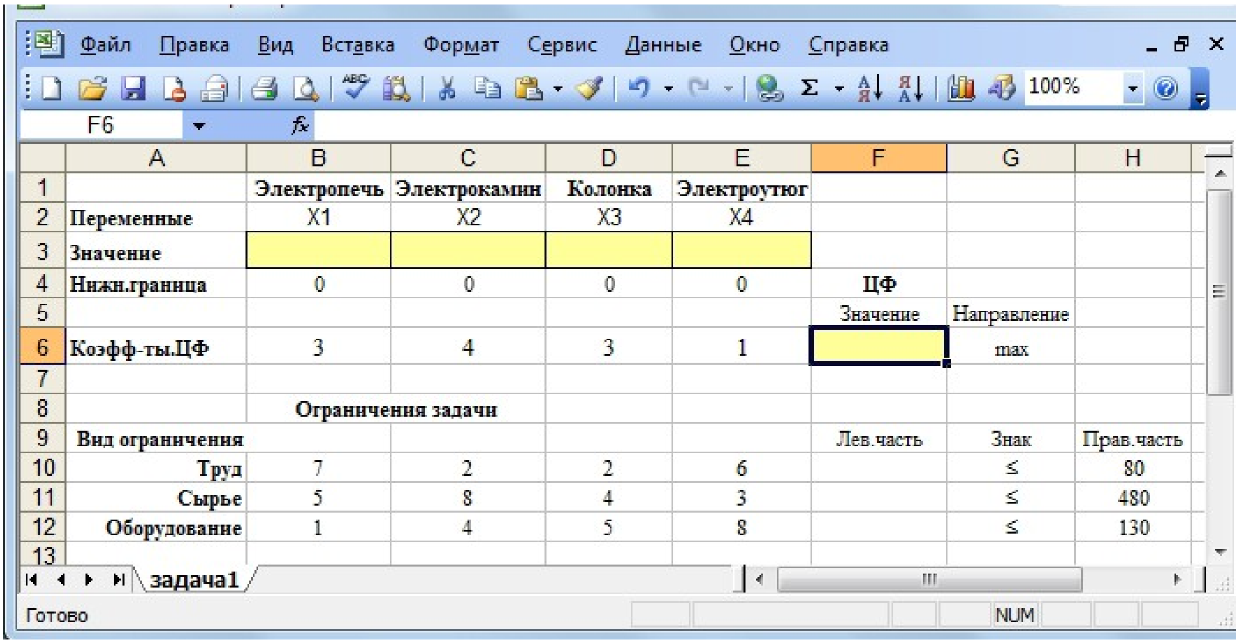
Требуется найти такой план выпуска продукции $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, удовлетворяющий указанной системе ограничений, при котором целевая функция принимает наибольшее значение.

А) Решение в Excel:

1. Ввод исходных данных

1.1. Создание экранной формы и ввод в нее условий задачи

Экранная форма для ввода условий задачи вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис. 20.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Электропечь	Электрокамин	Колонка	Электроутюг			
2	Переменные	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.граница	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направление	
6	Коэфф-ты.ЦФ	3	4	3	1		max	
7								
8		Ограничения задачи						
9	Вид ограничения					Лев.часть	Знак	Прав.часть
10	Труд	7	2	2	6		≤	80
11	Сырье	5	8	4	3		≤	480
12	Оборудование	1	4	5	8		≤	130
13								

Рис. 20. Экранная форма примера 14

1.2. Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму:

а) зависимость для целевой функции (ЦФ): в ячейку F6, в которой будет отображаться значение ЦФ, для этого необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано: $3x_1+4x_2+3x_3+x_4$. Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel, эту формулу для расчета целевой функции можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (B6, C6, D6, E6). То есть необходимо в ячейку F6 ввести следующее выражение и нажать клавишу «Enter»: СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), где символ «**$**» перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится; символ «:» означает, что в формуле будут использованы все ячейки, рас положенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись B6:E6 указывает на ячейки B6, C6, D6 и E6). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис. 21).

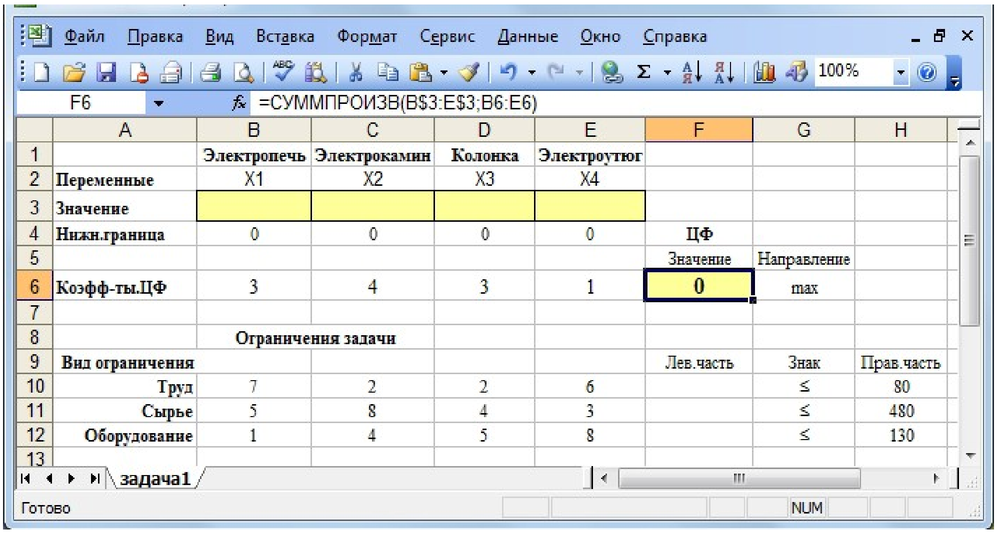


Рис.21 . Экранная форма задачи после ввода всех необходимых формул

б) зависимости для левых частей ограничений.

Левые части ограничений задачи представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B10, C10, D10, E10 – 1-е ограничение; B11, C11, D11, E11 – 2-е ограничение и B12, C12, D12, E12 – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл. 10.

Таблица 10

Левая часть ограничения	Формула Excel
$7x_1\ 2x_2\ 2x_3\ 6x_4\ 80$ или B10 B3 C10 C3 D10 D3 E10 E3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)
$5x_1\ \ 8x_2\ \ 4x_3\ \ 3x_4\ \ 480$ или B11 B3 C11 C3 D11 D3 E11 E3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)
$x_1\ \ 4x_2\ \ 5x_3\ \ 8x_4\ \ 130$ или B12 B3 C12 C3 D12 D3 E12 E3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)

Рис.22. Формулы, описывающие ограничения модели

На экране в полях F10, F11 и F12 появится 0 (нулевое значение).

Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул произведите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши при указании на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 23 и рис. 24).

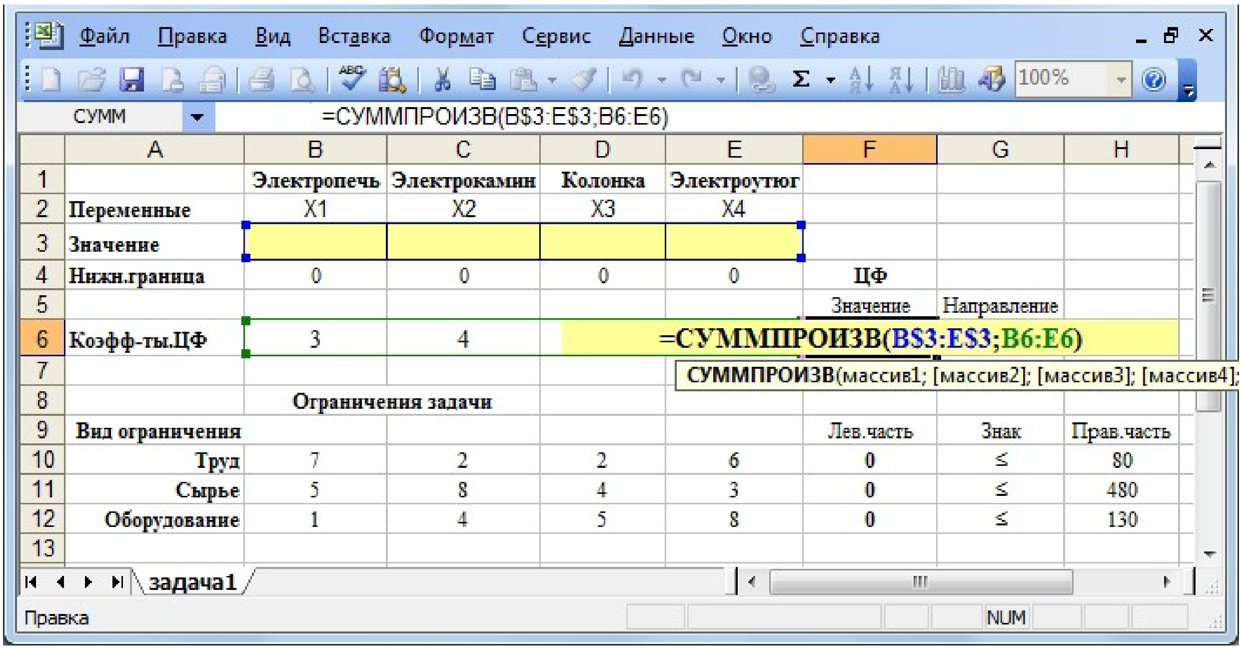


Рис. 23. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку F6

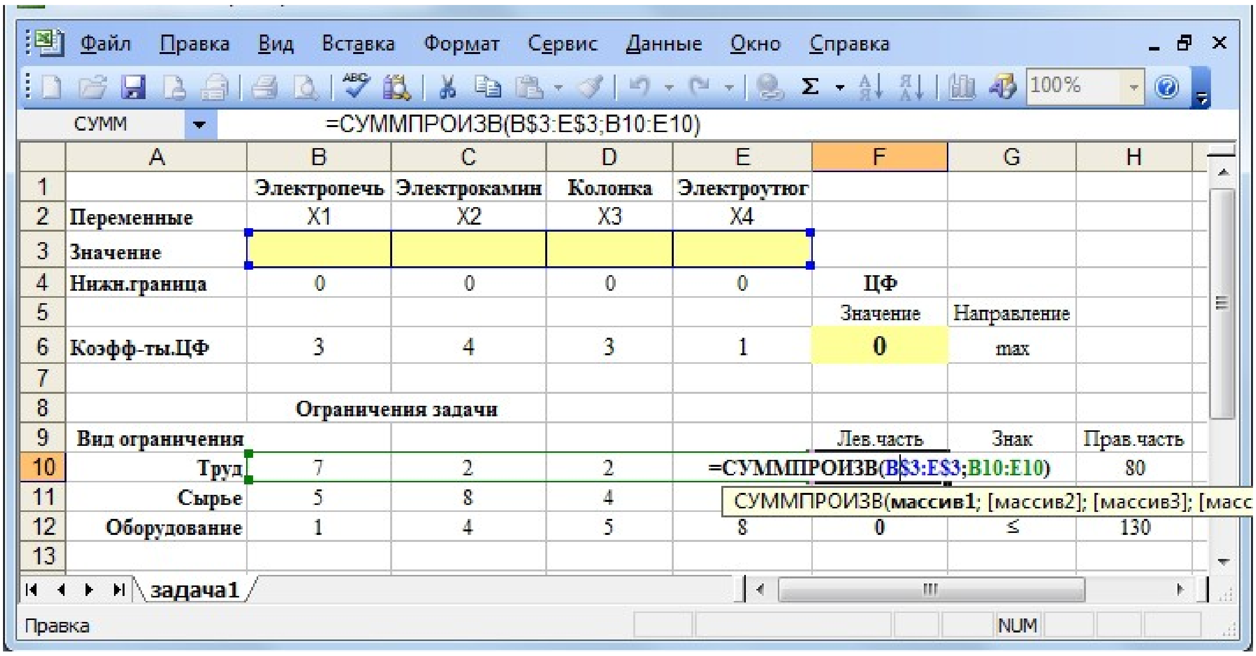


Рис.24. Проверка правильности введения формулы в ячейку F10 для левой части ограничения

1.3. Задание целевой функции

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из меню «Сервис» (рис. 25):

1) поставьте курсор в поле «Установить целевую ячейку»;

2) введите адрес целевой ячейки $F$6 или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши с указанием на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

3) введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «максимальному значению».

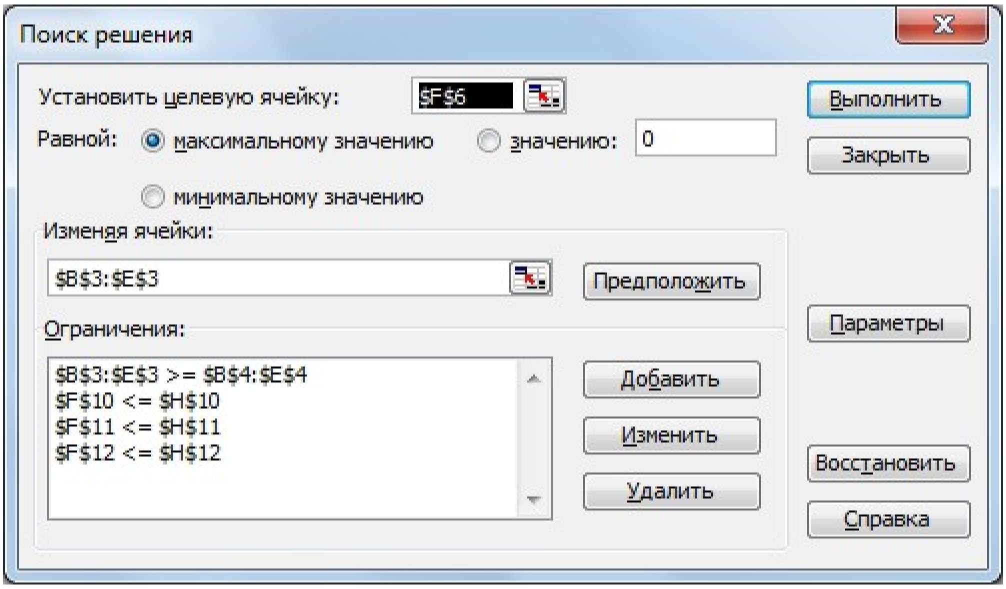


Рис. 25. Окно «Поиск решения»

1.4. Ввод ограничений и граничных условий:

а) Задание ячеек переменных.

В окно «Поиск решения» в поле «Изменяя ячейки» впишите адреса $B$3:$E$3. Необходимые адреса можно вносить в поле «Изменяя ячейки» и автоматически, путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

б) Задание граничных условий для допустимых значений переменных.

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю.

1) Нажмите кнопку «Добавить», после чего появится окно «Добавление ограничения» (рис.26).

В поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных $B$3:$E$3. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

2) В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите знак.

3) В поле «Ограничение» введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть $B$4:$E$4. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

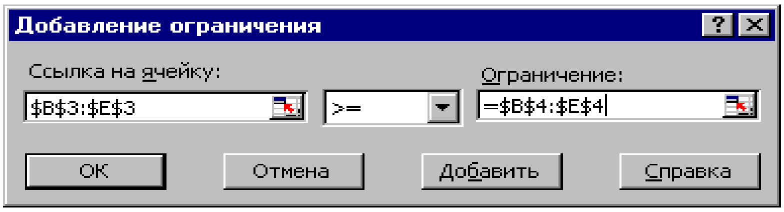


Рис.26 Добавление условия неотрицательности переменных

в) Задание знаков ограничений ≥, ≤, =.

1) Нажмите кнопку «Добавить» в окне «Добавление ограничения».

2) В поле «Ссылка на ячейку» введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например $F$10. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.

3) В соответствии с условием задачи выбрать в поле знака необходимый знак, например, =.

4) В поле «Ограничение» введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например, $H$10.

5) Аналогично введите ограничения: $F$11>=$H$11, $F$12<=$H$12.

6) Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки OK.

Окно «Поиск решения» после ввода всех необходимых данных задачи представлено на рис.25.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки «Изменить» или «Удалить» (см. рис.26).

2. Решение задачи

2.1. <u>Установка параметров решения задачи</u>

Задача запускается на решение в окне «Поиск решения». Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку «Параметры» и заполнить некоторые поля окна «Параметры поиска решения» (рис. 27).

2.2. <u>Запуск задачи на решение</u>

Запуск задачи на решение производится из окна «Поиск решения» путем нажатия кнопки «Выполнить».

После запуска на решение задачи ЛП (линейного программирования) на экране появляется окно «Результаты поиска решения» с одним из сообщений, представленных на рис. 28, 2 9 и 30.

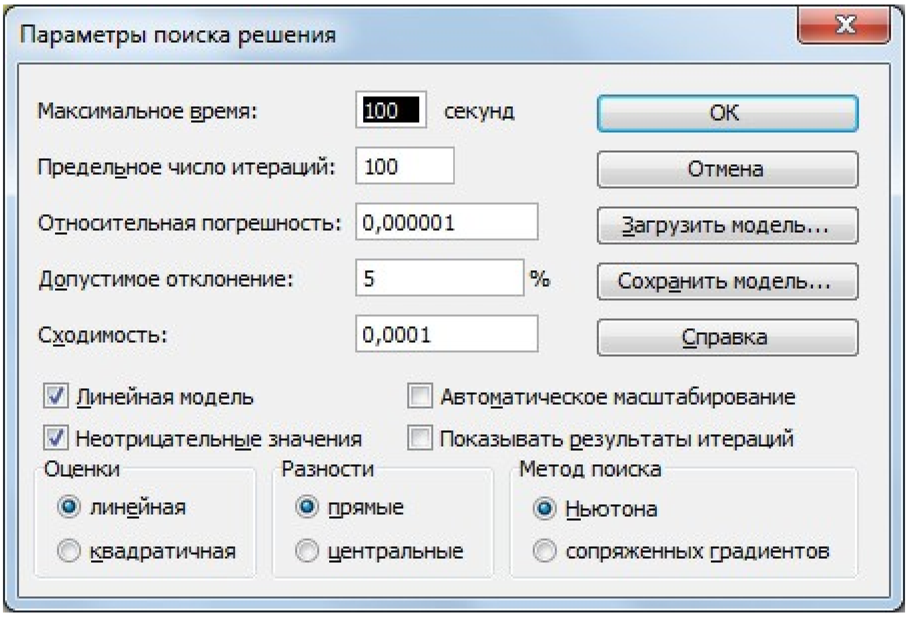


Рис. 28. Параметры поиска решения, подходящие для большинства ЗЛП (задач линейного программирования)

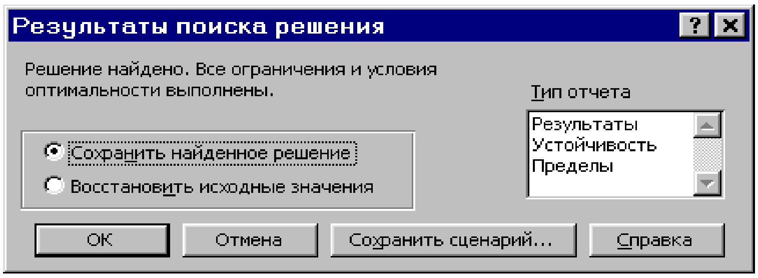


Рис. 29. Сообщение об успешном решении задачи

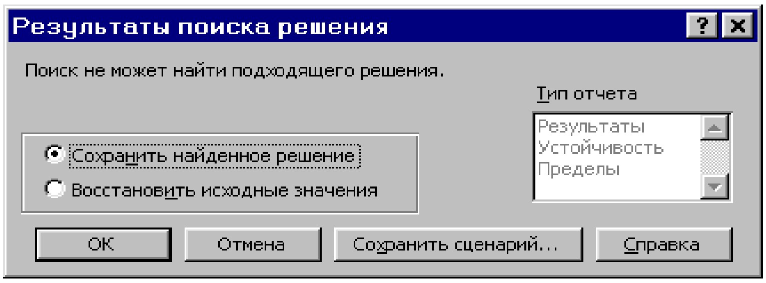


Рис. 30. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

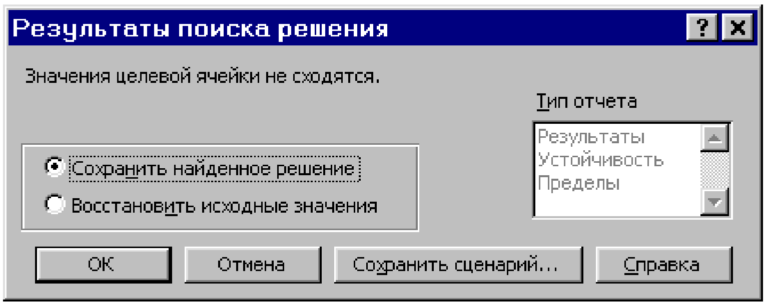
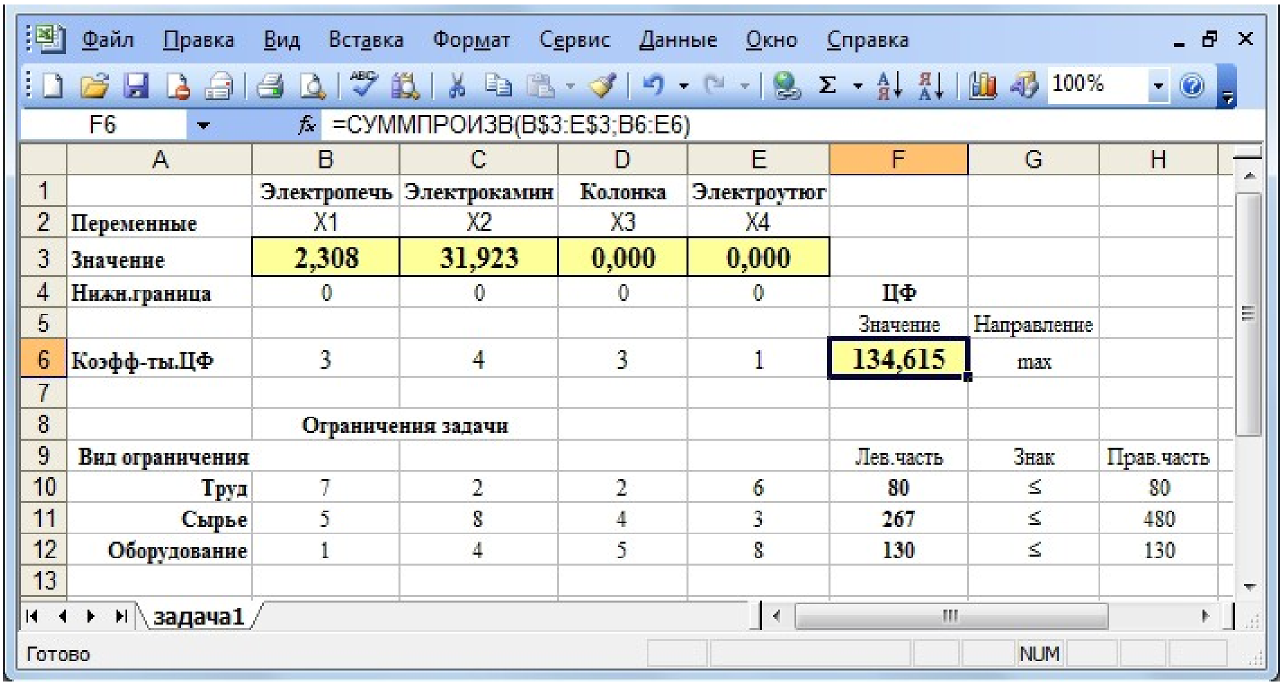


Рис. 31. Сообщение при неограниченности целевой функции в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис. 30 и 31, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены ошибки, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

В окне «Результаты поиска решения» представлены названия трех типов отчетов: «Результаты», «Устойчивость», «Пределы». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, целевой функции и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку «OK». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис.32).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Электропечь	Электрокамин	Колонка	Электроутюг			
2	Переменные	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	2,308	31,923	0,000	0,000			
4	Нижн.граница	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направление	
6	Коэфф-ты.ЦФ	3	4	3	1	134,615	max	
7								
8		Ограничения задачи						
9	Вид ограничения					Лев.часть	Знак	Прав.часть
10	Труд	7	2	2	6	80	≤	80
11	Сырье	5	8	4	3	267	≤	480
12	Оборудование	1	4	5	8	130	≤	130
13								

Рис. 32. Экранная форма представления решения в примере 14

Ответ: для того чтобы получить наибольший общий доход от реализации всей продукции в размере 134,615 тыс.руб., необходимо выпускать 2,308 шт. электропечей и 31,923 шт. электрокаминов, колонки и электроутюги не выпускать.

С целью проведения анализа полученного оптимального решения на устойчивость в окне «Результаты поиска решения» были выбраны отчеты «Результаты», «Устойчивость», «Пределы» (рис. 33-35).

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$6	Коэфф-ты.ЦФ Значение	134,6153846	134,6153846

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	Значение X1	2,307692308	2,307692308
$C$3	Значение X2	31,92307692	31,92307692
$D$3	Значение X3	0	0
$E$3	Значение X4	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$12	Оборудование Лев.часть	130	$F$12<=$H$12	связанное	0
$F$10	Труд Лев.часть	80	$F$10<=$H$10	связанное	0
$F$11	Сырье Лев.часть	267	$F$11<=$H$11	не связан.	213,0769231
$B$3	Значение X1	2,307692308	$B$3>=$B$4	не связан.	2,307692308
$C$3	Значение X2	31,92307692	$C$3>=$C$4	не связан.	31,92307692
$D$3	Значение X3	0	$D$3>=$D$4	связанное	0
$E$3	Значение X4	0	$E$3>=$E$4	связанное	0

Рис. 33. Отчет по результатам для примера 14

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости

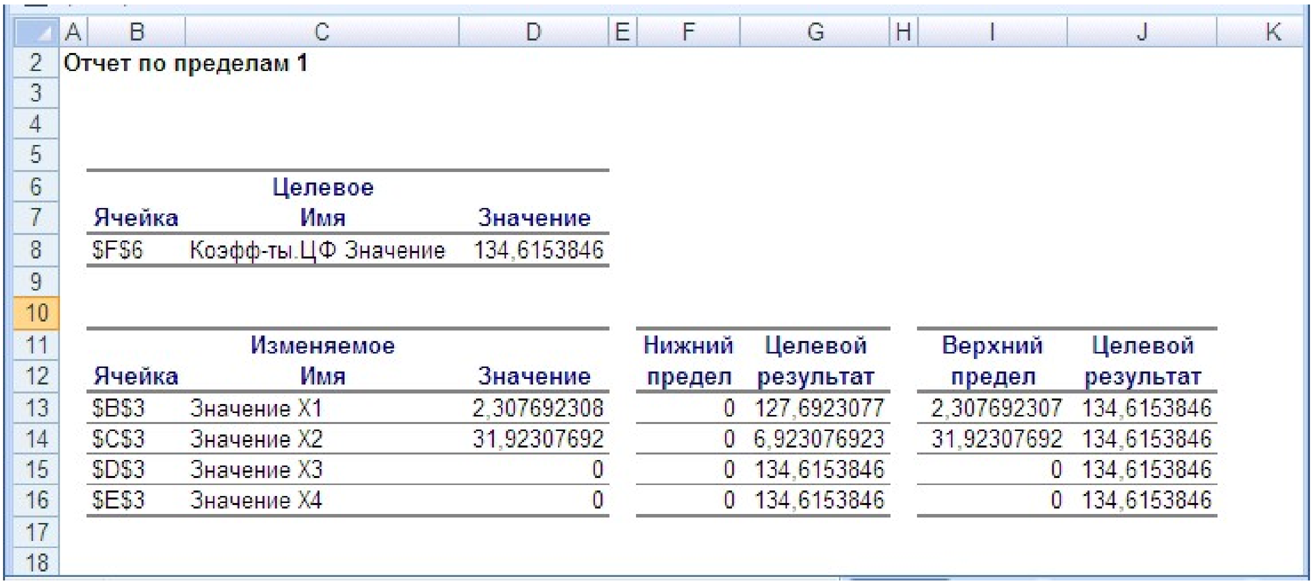
Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значение X1	2,307692308	0	3	11	2
$C$3	Значение X2	31,92307692	0	4	8	1,454545454
$D$3	Значение X3	0	-1,846153846	3	1,846153846	1E+30
$E$3	Значение X4	0	-7,615384615	1	7,615384615	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$12	Оборудование Лев.часть	130	1	130	30	118,5714286
$F$10	Труд Лев.часть	80	0	80	461,6666667	15
$F$11	Сырье Лев.часть	267	0	480	1E+30	213,0769231

Рис. 34. Отчет по устойчивости для примера 14



Отчет по пределам 1

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$F$6	Коэфф-ты.ЦФ Значение	134,6153846

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$3	Значение X1	2,307692308	0	127,6923077	2,307692307	134,6153846
$C$3	Значение X2	31,92307692	0	6,923076923	31,92307692	134,6153846
$D$3	Значение X3	0	0	134,6153846	0	134,6153846
$E$3	Значение X4	0	0	134,6153846	0	134,6153846

Рис. 35. Отчет по пределам для примера 14

Б) Рассмотрим решение модели оптимального годового планирования в MathCAD.

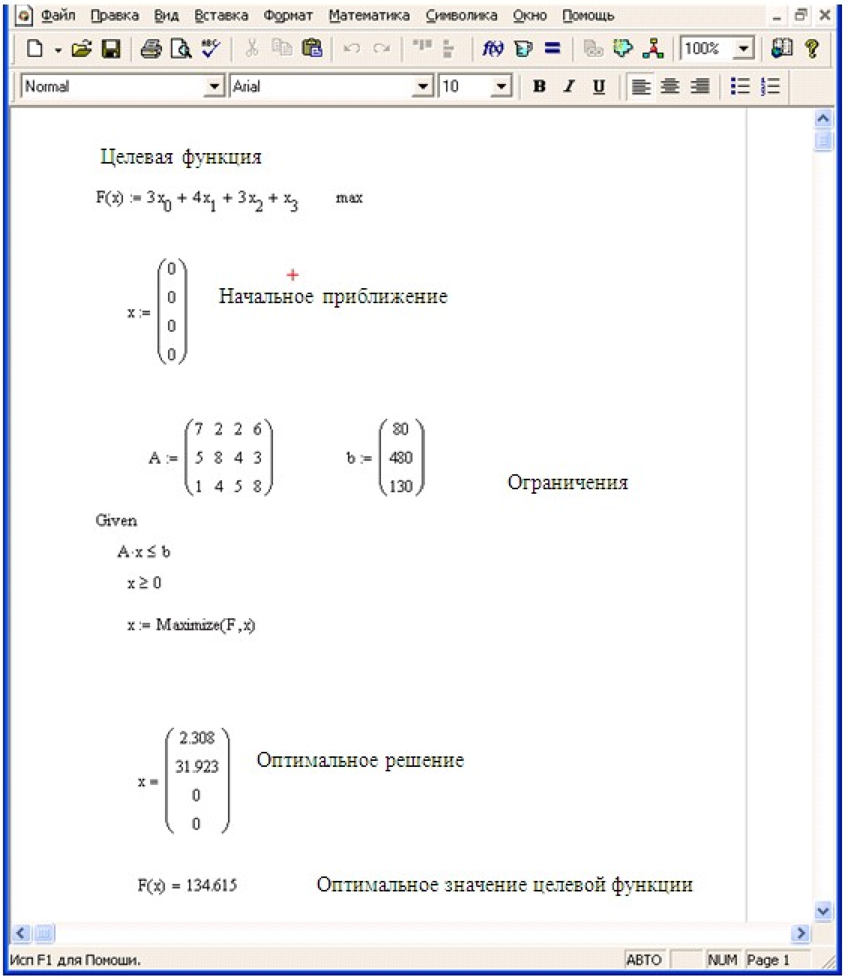


Рис. 36

Как видно, результаты, полученные при помощи Excel и MathCAD, совпадают.

Замечание: Получить прибыль 134 тысячи 615 рублей возможно, а вот выпустить не целое число каминов и электропечей не получится, поэтому целесообразно к условиям задачи добавить требование целочисленности решений. Для этого в решении используется применение функции "floor(x)", фиксирующей в задаче изначально заданные значения переменных.

Решим пример 14 в MathCAD с условием целочисленности переменных.

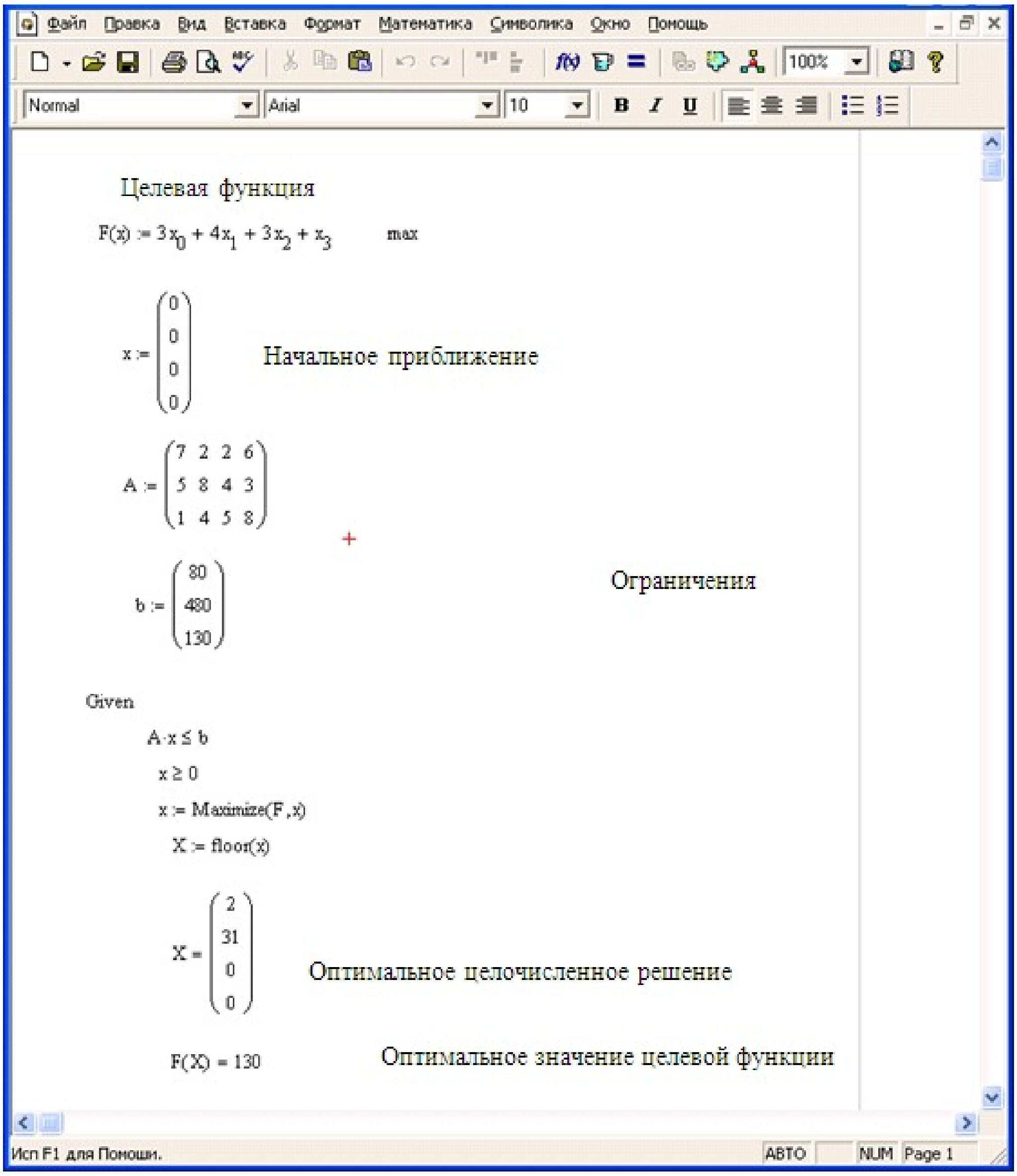


Рис. 37

<u>Ответ:</u> для того чтобы получить наибольший общий доход от реализации всей продукции в размере 130 тыс.руб., необходимо выпускать 2 шт. электропечей и 30 шт. электрокаминов, колонки и электроутюги не выпускать.

4.5.3. Решение моделей на составление оптимальных смесей, сплавов и рациона

Пример 15

Металлургическому заводу требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с долей зольных примесей не более 3,25 %. Завод закупает 3 вида угля сорта А, В, С с известным содержанием примесей. В какой пропорции нужно смешивать исходные составляющие А, В, С, чтобы смесь удовлетворяла ограничениям, указанным в таблице, и имела минимальную цену?

Таблица 11

Содержание примесей и цена (к задаче примера 15)

Сорт угля	Содержание, %		Цена за 1 т, руб.
	фосфора	золы	
А	0,06	2	30
В	0,04	4	30
С	0,02	3	45

Математическая модель задачи:

Пусть x_1-количество угля сорта А; x_2-количество угля сорта В; x_3-количество угля сорта С.

Целевая функция (ЦФ) должна отражать минимальную цену готовой смеси, цена указана в последнем столбце таблицы. Тогда ЦФ принимает вид:

$F(x_1, x_2, x_3)=30x_1+30x_2+45x_3 \rightarrow \min$

Ограничения: по содержанию фосфора (второй столбец):

$0,06x_1+0,04x_2+0,02x_3 \leq 0,03$.

По содержанию зольных примесей(третий столбец):

$2x_1+4x_2+3x_3 \leq 3,25$.

Условие неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Итак, математическая постановка задачи имеет вид:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 30x_1 + 30x_2 + 45x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 0{,}06x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 \le 0{,}03; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 3{,}25; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим решение этой задачи, как в предыдущих примерах, в Excel и MathCAD.

А) Решение в ЭТ Excel:

Как и в примере 14 сначала подготавливается рабочая область: вводятся названия переменных, описание ЦФ и ограничений; затем за переменными закрепляются ячейки B2, B3, B4, за ЦФ ячейка C6. Вводятся ограничения в ячейках B9-B14- левые части ограничений, в ячейки C9-C14 – правые части.(подробно см. пример 14). Вызывается «Поиск решения» во вкладке «Данные» и заполняется, указывая соответствующие ячейки (см. рис .38)

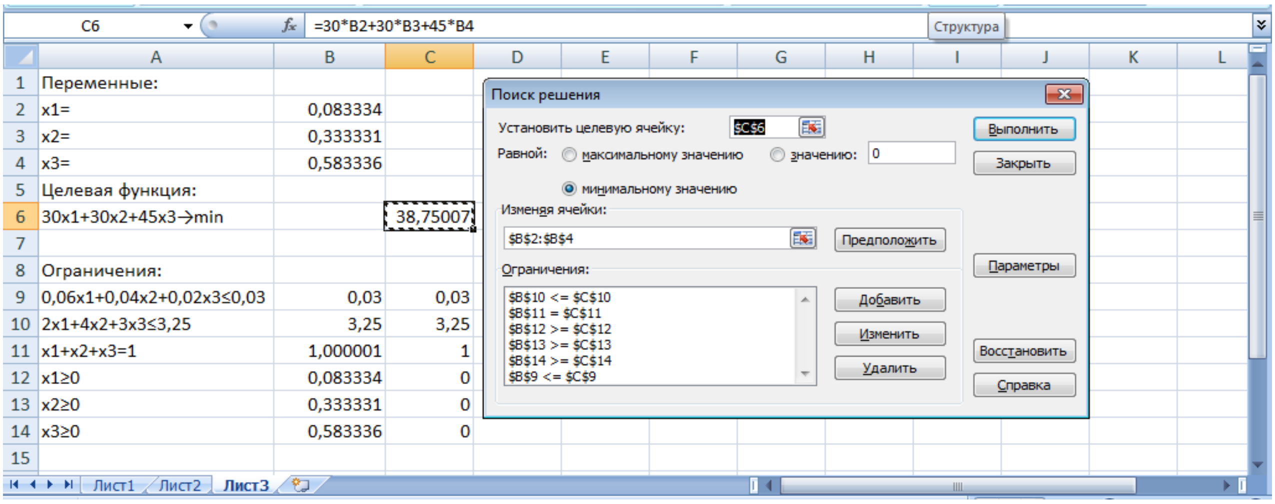


Рис. 38 (задача из примера 15)

Ответ. Для составления 1 т оптимальной смеси нужно смешивать 0,083 т угля марки А, 0,333 т угля марки В и 0,58 т. угля марки С. При этом расходы за 1 тонну составят 38,75 рублей.

Б) Решим поставленную задачу в системе MathCAD:

$F(x) := 30 \cdot x_0 + 30 \cdot x_1 + 45 x_2$ целевая функция

$x_0 := 0 \quad x_1 := 0 \quad x_2 := 0$ начальное приближение

Given

$0.06 \cdot x_0 + 0.04 \cdot x_1 + 0.02 \cdot x_2 \le 0.03$

$2 \cdot x_0 + 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 3.25$

$x_0 + x_1 + x_2 = 1$ ограничения

$x_0 \ge 0$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

$x := \mathrm{Minimize}(F, x)$

$x = \begin{pmatrix} 0.083 \\ 0.333 \\ 0.583 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 38.75$ оптимальное решение

Рис. 39. Решение задачи на смеси в системе MathCAD

Ответ получился тот же.

4.5.4. Модели оптимального раскроя (распила) материала

Пример 16

На предприятие поступают прутки стального проката длиной 6 м. В соответствии с заявками потребителей, требуется получить следующие заготовки трех видов: 1 вид – длиной 250 см (150 000 шт.); 2 вид – длиной 190 см (140000 шт.); 3 вид – длиной 100 см (480000 шт). Требуется: а) определить все рациональные способы распила прутков и указать величину отходов для каждого способа (составить таблицу); б) сформировать в числовом виде модель для определения оптимального плана распила прутков по критерию минимизации отходов с учетом заданных потребностей в отдельных видах заготовок.

Решение:

1._Определим все варианты распила прутков._ Полученные данные сведем в таблицу.

Номер варианта	Количество заготовок			Отходы (остатки), м
	1 вид	2 вид	3 вид	
1	2	0	1	0
2	1	1	1	0,6
3	1	0	3	0,5
4	0	3	0	0,3
5	0	2	2	0,2
6	0	1	4	0,1
7	0	0	6	0

2. *Переменные модели*

x_j – количество прутков, которые будут распилены по варианту j (j=1,…,7), шт.

3. *Мы должны минимизировать отходы.*

Целевая функция $F(x)=0,6x_2+0,5x_3+0,3x_4+0,2x_5+0,1x_6 \rightarrow min$

4. *Ограничения*

Число прутков, распиливаемых каждым способом, ограничиваются следующими двумя группами условий:

- способ распилки прутков;
- неотрицательное количество прутков.

Первая группа ограничений имеет вид:

$2x_1 +x_2+x_3=150000,$

$x_2 + 3x_4 +2x_5 +x_6=140000,$

$x_1 + x_2+3x_3+2x_5 +4x_6+6x_7=480000.$

Вторая группа ограничений задается:

$x_j, \geq 0, j=1,\ldots,7.$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$F(x)=0,6x_2+0,5x_3+0,3x_4+0,2x_5+0,1x_6 \rightarrow min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150000, \\ x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 140000, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 + 4x_6 + 6x_7 = 480000, \\ x_j \geq 0, j = 1,\ldots,7. \end{cases}$$

Итак, требуется найти такой способ распила прутков $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, удовлетворяющей указанной системе ограничений, при котором целевая функция принимала бы минимальное значение.

Решение задачи из примера 16 в Excel приведено на рис. 40:

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Переменные	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
3	значения переменных	74998	4	0	29386	12959	25920	45900
4	Целевая функция F(x)=	14002						
5	Ограничения:							
6	2x1+x2+x3=150000	150000	150000					
7	x2+3x4+2x5+x6=140000	140000	140000					
8	x1+x2+3x3+2x5+4x6+6x7=480000	480000	480000					
9	x1≥0	74998	0					
10	x2≥0	4	0					
11	x3≥0	0	0					
12	x4≥0	29386	0					
13	x5≥0	12959	0					
14	x6≥0	25920	0					
15	x7≥0	45900	0					

Рис. 40

Решение примера в MathCAD представлено на рис. 41.

$I(x) := 0 \cdot x_0 + 0.6 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 + 0.2 \cdot x_4 + 0.1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$ целевая функция

$x_0 := 0 \quad x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0 \quad x_4 := 0 \quad x_5 := 0 \quad x_6 := 0$ начальное приближение

Given

$2 \cdot x_0 + x_1 + x_2 = 150000 \qquad x_0 \geq 0 \quad x_1 \geq 0$

$x_1 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + x_5 = 140000 \qquad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ ограничения

$x_0 + x_1 + 3 \cdot x_2 + 2x_4 + 4x_5 + 6 \cdot x_6 = 480000 \qquad x_6 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$

$x := \mathrm{Minimize}(I, x)$

$$x = \begin{pmatrix} 7.5 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \\ 4.667 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \\ 6.75 \times 10^4 \end{pmatrix} \qquad I(x) = 1.4 \times 10^4$$

оптимальное решение

Рис.41

Как видим, в результате поиска решения минимальные отходы составят 1400 метров прутков. Достигнуть такого результата можно несколькими вариантами, один из них реализован в MathCAD, другой - в Excel.

4.5.5. Модели оптимального планирования перевозок груза однородной продукции (транспортная задача)

Транспортным отделом крупного химического концерна осуществляется перевозка сырья со складов их хранения: С №1, С №2, С №3 на перерабатывающие предприятия №1, №2, №3, №4 и №5. Запасы сырья на складах, заявки потребителей (предприятий) и тарифы перевозок представлены в таблице. Составить оптимальный план перевозки сырья с минимальными транспортными затратами со складов на предприятия при условиях, что все сырье должно быть вывезено и все заказы предприятий удовлетворены.

Склады	Перерабатывающие предприятия					Запасы, ед.
	№1	№2	№3	№4	№5	
С №1	10	11	6	7	8	100
С №2	10	11	8	9	12	150
С №3	12	12	10	12	14	200
Заказы	50	200	60	100	40	

Решение:

1. Построим математическую модель задачи: Переменные модели: x_{ij} – количество сырья, перевозимого со склада i $(i=\overline{1,3})$ на предприятия j ($j=\overline{1,5}$), ед. изм.

Замечание: необходимо проверить балансовое равенство: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Если это равенство выполняется, то транспортная задача является закрытой, в противном случае – открытой.

Модель сводится к закрытой транспортной задаче. Действительно, проверим балансовое равенство для данной задачи. Имеющаяся сумма запасов сырья совпадает с суммой заявок, таким образом, транспортная задача - закрытая.

2. *Целевая функция:* $F(x)=10x_{11}+11x_{12}+6x_{13}+7x_{14}+8x_{15}+10x_{21}+11x_{22}+8x_{23}+9x_{24}+12x_{25}+12x_{31}+12x_{32}+10x_{33}+12x_{34}+14x_{35}$

3. *Ограничения:* Количество сырья, перевозимого со складов на предприятия, удовлетворяет трем группам условий: вывести все сырье со складов; удов-

летворить заявки каждого предприятия; неотрицательности количества сырья.

Первая группа ограничений задается уравнениями:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 150,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 200.$

Вторая группа ограничений задается уравнениями:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60,$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100,$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 40.$

Третья группа ограничений задается неравенством: $x_{ij} \ge 0, \ (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5})$.

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

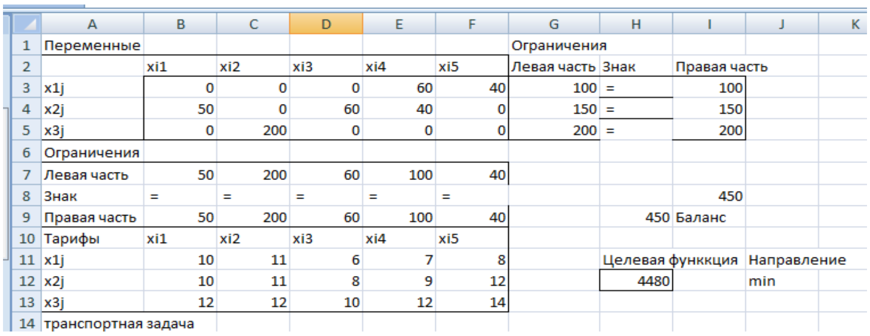
$F(x)=10x_{11}+11x_{12}+6x_{13}+7x_{14}+8x_{15}+10x_{21}+11x_{22}+8x_{23}+9x_{24}+12x_{25}+12x_{31}+12x_{32}+$

$+10x_{33}+12x_{34}+14x_{35} \to min.$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{32} = 200, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 40, \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи в Excel представлено ниже (рис. 42).

Ответ. Оптимальный план перевозок: с первого склада сырье нужно перевезти на четвертое предприятие – 60 ед., на пятое – 40 ед.; со второго склада на первое предприятие 50 ед., на третье - 60 ед., на четвертое – 40 ед.; с третьего склада нужно перевезти только на второе предприятие 200 ед. сырья. Минимальные транспортные затраты, при этом, составят 4480 у.е.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Переменные						Ограничения				
2		xi1	xi2	xi3	xi4	xi5	Левая часть	Знак	Правая часть		
3	x1j	0	0	0	60	40	100	=	100		
4	x2j	50	0	60	40	0	150	=	150		
5	x3j	0	200	0	0	0	200	=	200		
6	Ограничения										
7	Левая часть	50	200	60	100	40					
8	Знак	=	=	=	=	=			450		
9	Правая часть	50	200	60	100	40		450	Баланс		
10	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5					
11	x1j	10	11	6	7	8		Целевая функция	Направление		
12	x2j	10	11	8	9	12		4480	min		
13	x3j	12	12	10	12	14					
14	транспортная задача										

Рис.42. Экранная форма, после получения оптимального решения

Рассмотрим решение этого примера в MathCAD(рис.43):

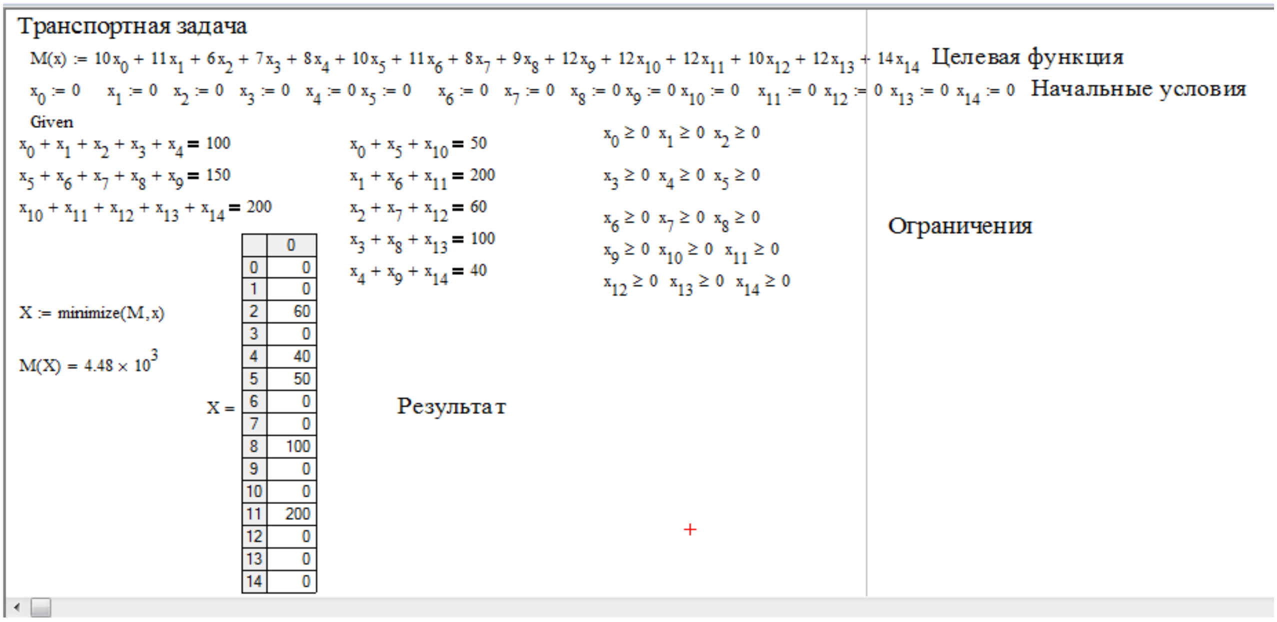


Рис.43

Как видим, ответ получили аналогичный решению в MS Excel.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гартман, Т.Н. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: учеб. пособие для вузов / Т.Н. Гартман, Д.В. Клушин. – М.: Академкнига, 2006. – 416 с.
2. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие /А.В. Пантелеев, Т.А. Летова.–М.: Высш.шк., 2005. – 544 с.
3. Аттетков, А.В. Методы оптимизации: учебник для вузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.

4. Методы оптимизации: учеб. пособие / Г.А. Зуева [и др.]; Иван. гос. хим.-технол.ун-т – Иваново, 2010. – 78 с.
5. Турчак, Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие. / Л.И. Турчак.– М.: Наука, 1987. – 320 с.
6. Лабутин, А.Н. Методы оптимизации химико-технологических процессов: учеб. пособие / А.Н. Лабутин, Л.С. Гордеев; Иван.хим.-технол.ин-т.– Иваново, 1983. – 78 с.
7. Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов: практическое руководство / В.А. Холоднов [и др.].– СПб.: АНО НПО «Профессионал». –2003. – 480 с.
8. Бояринов, А.И. Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. – М.: Химия, 1975. – 576 с.
9. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
10. Ксенофонтова, О.Л. Решение линейных оптимизационных моделей средствами программ Ecxel и MathCad: методические указания. / О.Л. Ксенофонтова, С.В. Кузнецова; Иван. гос. хим.-технол.ун-т – Иваново, 2013. – 64 с.
11. Робертс, С. Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления / С. Робертс. – М.: Мир, 1965. – 480 с.
12. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир,1975. – 535 с.
13. Кафаров, В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии / В.В. Кафаров – М.: Химия, 1985. – 468 с.
14. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. пособ. / Под ред. А.В. Ефремова. – М.: Наука, 1990. – 304 с.
15. Гончаров, В.А. Методы оптимизации: учебное пособие / В.А. Гончаров. − М.: Высшее образование, 2009. – 191 с.
16. Есипов, Б. А. Методы исследования операций: учеб. пособие / Б. А. Есипов. – СПб.: Лань, 2013. – 304 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Зуева Галина Альбертовна

Кокурина Галина Николаевна

Методы оптимизации

Учебное пособие

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 14.06.2017. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ.л 6,05. Тираж 50 экз. Заказ

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании

кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВО «ИГХТУ»

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7