М.А. Лысова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОРГАНИЗАЦИИ ЭНЕРГО- И РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩИХ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие

Иваново

2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

М.А. Лысова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОРГАНИЗАЦИИ ЭНЕРГО- И РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩИХ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие

Иваново 2019

УДК 519.6:519.852

Лысова, М.А. Методы оптимизации и организации энерго- и ресурсосберегающих химико-технологических систем. Оптимизационные модели: учеб. пособие / М.А. Лысова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2019. – 104 с.

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным методам оптимизации и организации энерго- и ресурсосберегающих химико-технологических систем. В нём рассматриваются теоретические модели протекания процессов химической технологии. В каждом параграфе изложены основные теоретические сведения и приведены примеры математических моделей, возникающих при решении задач химической технологии. Включено большое количество заданий для выполнения лабораторных работ.

Рекомендуется студентам технических вузов, обучающимся по направлениям бакалавриата и магистратуры.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты:

кафедра информационных технологий и сервиса Ивановского государственного политехнического университета;
кандидат экономических наук О.Л. Ксенофонтова (ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»)

ВВЕДЕНИЕ

Математическое описание теоретических моделей строится на основе знания механизмов протекания процессов химической технологии. В результате получаются системы алгебраических и дифференциальных уравнений большой размерности для фундаментальных комбинированных моделей и менее сложные системы уравнений – для физико-химических блочно-структурных моделей. Как правило, для моделирования химических производств используются блочно-структурные модели, при описании которых получаются следующие основные типы уравнений: системы линейных алгебраических уравнений, системы нелинейных уравнений, системы обыкновенных дифференциальных уравнений и системы уравнений в частных производных.

Важнейшей задачей применения расчетных методов при моделировании химико-технологических процессов является определение оптимальных условий их функционирования. В результате возникают задачи оптимизации, которые в зависимости от вида критерия оптимальности (целевой функции) и вида ограничений, накладываемых на независимые переменные (ресурсы оптимизации), могут быть линейными и нелинейными.

Пособие содержит численные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методы решения линейных оптимизационных моделей.

§ 1. Решение систем линейных уравнений численными методами

1.1.Теоретическое обоснование методов простой итерации и Зейделя

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

или в матричном виде:

$$AX = B.$$

Для решения системы (1.1) методом простой итерации и методом Зейделя достаточно выполнения условий:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

то есть в каждой строке матрицы A модуль элемента, стоящего на главной диагонали, больше суммы модулей остальных элементов этой строки.

Если это условие не выполняется, то путем элементарных преобразований над строками матрицы A необходимо привести матрицу к такому виду, чтобы условие (1.2) было выполнено. Под элементарными преобразованиями над строками матрицы понимаются следующие действия: 1) умножение строки на ненулевое число; 2) перестановка двух строк; 3) прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число.

Следующим шагом в решении системы линейных уравнений методами простой итерации и Зейделя является приведение системы (1.1) к итерационному виду. При выполнении условия (1.2) это можно осуществить, выразив из каждой строки системы элемент, стоящий на главной диагонали:

$$\begin{cases} x_1 = \qquad\qquad c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n + d_1, \\ x_2 = c_{21}x_1 + \qquad\quad + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n + d_2, \\ \ldots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1} \qquad\quad + d_n, \end{cases} \tag{1.3}$$

или в матричном виде:

$$X = CX + D.$$

В качестве начального приближения можно взять вектор D, то есть $x_1^{(0)} = d_1,\, x_2^{(0)} = d_2, \ldots, x_n^{(0)} = d_n$.

Тогда каждое последующее приближение, согласно *методу простой итерации*, вычисляется по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + \qquad\quad + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} \qquad\quad + d_n, \end{cases} \tag{1.4}$$

то есть, например, для вычисления первого приближения нужно в систему (1.3) подставить значения нулевого приближения.

Метод Зейделя отличается от метода простых итераций тем, что при вычислении $x_2^{(k+1)}$ используется найденное на этой итерации значение $x_1^{(k+1)}$, при вычислении $x_3^{(k+1)}$ используются найденные на этой итерации значения $x_1^{(k+1)}$ и $x_2^{(k+1)}$ и т.д., при вычислении $x_n^{(k+1)}$ используются $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, …, $x_{n-1}^{(k+1)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + \qquad\qquad + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k+1)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \qquad\qquad + d_n, \end{cases} \tag{1.5}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$\max_{1 \le i \le n} \{\Delta_i\} < \varepsilon, \tag{1.6}$$

где $\Delta_i = \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|$, $i = \overline{1,n}$.

1.2. Пример выполнения лабораторной работы «Решение систем линейных уравнений методами простой итерации и Зейделя»

Задание. Дана система трех линейных уравнений с тремя с неизвестными:

$$\begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, \quad (I) \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5, \quad (II) \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5. \quad (III) \end{cases}$$

Требуется:

1. С помощью элементарных преобразований привести систему к итерационному виду.

2. Просчитать два шага вручную:

   2.1) методом простой итерации;

   2.2) методом Зейделя.

3. Найти решение системы с точностью $\varepsilon = 0,001$, используя MS Excel:

   3.1) методом простой итерации;

   3.2) методом Зейделя.

4. Проверить найденное решение, используя MS Excel и Mathcad (или Maxima).

5. Сделать выводы о применяемых методах.

Решение. 1. Преобразуем систему таким образом, чтобы модули элементов главной диагонали были больше суммы модулей остальных элементов в данной строке.

$$\begin{cases} 5,6x_1 - 4,3x_2 + 2,6x_3 = 7,3, & (I + III) \\ 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, & (I) \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5. & (II) \end{cases}$$

Первую строку умножаем на 2:

$$\begin{cases} 11,2x_1 - 8,6x_2 + 5,2x_3 = 14,6, \\ 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5. \end{cases}$$

Складываем первую и третью строки и результат записываем в первую строку:

$$\begin{cases} 12,0x_1 - 7,3x_2 - 1,2x_3 = 8,1, \\ 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5. \end{cases}$$

Теперь запишем систему в итерационном виде. Из первого уравнения выражаем x_1, из второго – x_2 и из третьего – x_3. Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 0,6750 + 0,6083x_2 + 0,100x_3, \\ x_2 = -0,2435 + 0,2783x_1 + 0,3304x_3, \\ x_3 = \ \ 1,0156 + 0,1250x_1 + 0,2031x_2. \end{cases}$$

2.1. Просчитаем два шага вручную методом простой итерации.

В качестве начального приближения выбираем вектор: $\mathrm{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6750 \\ -0,2435 \\ 1,0156 \end{pmatrix}$.

Тогда следующее приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \ 0,6750 + 0,6083x_2^{(0)} + 0,100x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = -0,243 + 0,2783x_1^{(0)} + 0,3304x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \ 1,0156 + 0,1250x_1^{(0)} + 0,2031x_2^{(0)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,675 + 0,6083 \cdot (-0,2435) + 0,1 \cdot 1,0156 = 0,6284, \\ x_2^{(1)} = -0,2435 + 0,2783 \cdot 0,6750 + 0,3304 \cdot 1,0156 = 0,2751, \\ x_3^{(1)} = 1,0156 + 0,125 \cdot 0,6750 + 0,2031 \cdot (-0,2435) = 1,0505. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\left\{ |0,6750 - 0,6284|; |-0,2435 - 0,2751|; |1,0156 - 1,0505| \right\} = 0,5186 > \varepsilon$$

Второе приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,675 + 0,6083 \cdot 0,2751 + 0,1 \cdot 1,0505 = 0,9474, \\ x_2^{(2)} = -0,2435 + 0,2783 \cdot 0,6284 + 0,3304 \cdot 1,0505 = 0,2785, \\ x_3^{(2)} = 1,0156 + 0,125 \cdot 0,6284 + 0,2031 \cdot 0,2751 = 1,1500. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\left\{ |0,6284 - 0,9474|; |0,2751 - 0,2785|; |1,1500 - 1,0505| \right\} = 0,319 > \varepsilon.$$

2.2. Просчитаем два шага вручную методом Зейделя.

В качестве начального приближения выбираем вектор: $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6750 \\ -0,2435 \\ 1,0156 \end{pmatrix}$.

Тогда следующее приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \ 0,6750 + 0,6083x_2^{(0)} + 0,100x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = -0,243 + 0,2783x_1^{(1)} + 0,3304x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \ 1,0156 + 0,1250x_1^{(1)} + 0,2031x_2^{(1)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,675 + 0,6083 \cdot (-0,2435) + 0,1 \cdot 1,0156 = 0,6284, \\ x_2^{(1)} = -0,2435 + 0,2783 \cdot 0,6284 + 0,3304 \cdot 1,0156 = 0,2669, \\ x_3^{(1)} = 1,0156 + 0,125 \cdot 0,6284 + 0,2031 \cdot 0,2699 = 1,1490. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\left\{\left|0,6750-0,6284\right|;\left|-0,2435-0,2669\right|;\left|1,0156-1,1490\right|\right\}=0,5104>\varepsilon$$

Второе приближение:

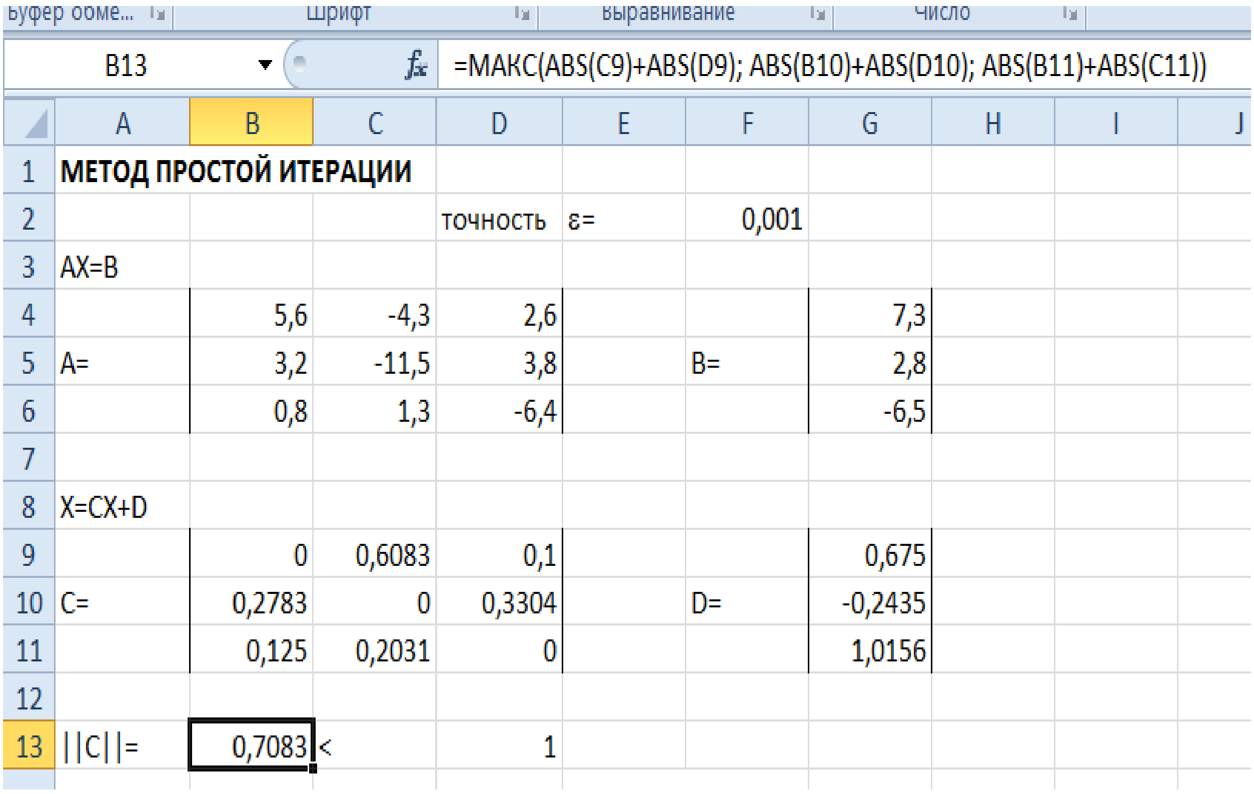
$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0,675+0,6083\cdot 0,2669+0,1\cdot 1,149=0,9523, \\ x_2^{(2)}=-0,2435+0,2783\cdot 0,9523+0,3304\cdot 1,149=0,4017, \\ x_3^{(2)}=1,0156+0,125\cdot 0,9523+0,2031\cdot 0,4017=1,2162. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\left\{\left|0,6284-0,9523\right|;\left|0,2699-0,4017\right|;\left|1,1490-1,2162\right|\right\}=0,3239>\varepsilon$$

3.1. Используя MS Excel, найдем решение системы методом простой итерации.

А. Располагаем на рабочем листе исходные данные (рис. 1.1) и вычисляем норму матрицы С.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ**									
2				точность	ε=	0,001				
3	AX=B									
4		5,6	-4,3	2,6			7,3			
5	A=	3,2	-11,5	3,8		B=	2,8			
6		0,8	1,3	-6,4			-6,5			
7										
8	X=CX+D									
9		0	0,6083	0,1			0,675			
10	C=	0,2783	0	0,3304		D=	-0,2435			
11		0,125	0,2031	0			1,0156			
12										
13	||C||=	0,7083	<	1						

Рис.1.1. Исходные данные для метода простой итерации

Б. Последовательными вычислениями уточняем решение системы линейных уравнений (рис. 1.2). С этой целью формируем таблицу итераций. В качестве начального приближения выбираем столбец D: $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6750 \\ -0,2435 \\ 1,0156 \end{pmatrix}$.

В столбец **C16:C18** вводим формулу для формирования первого приближения по методу итераций согласно выражениям (1.4). Например, для ячейки **C16** вводим выражение **$G$9+$C$9*B17+$D$9*B18**. Аналогично для ячеек **C17** и **C18**. Знак **$** означает, что при копировании формулы ячейка не будет меняться. В ячейку **C19** вводим выражение согласно формуле (1.6), то есть находим максимум между модулями разности начального и первого приближений: **=МАКС(ABS(C16-B16); ABS(C17-B17); ABS(C18-B18))**.

уфер обме... Шрифт Выравнивание Число Стили Ячейки

C16 =$G$9+$C$9*B17+$D$9*B18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ												
2				точность	ε=	0,001							
3	AX=B												
4		5,6	-4,3	2,6			7,3						
5	A=	3,2	-11,5	3,8		B=	2,8						
6		0,8	1,3	-6,4			-6,5						
7													
8	X=CX+D												
9		0	0,6083	0,1			0,675						
10	C=	0,2783	0	0,3304		D=	-0,2435						
11		0,125	0,2031	0			1,0156						
12													
13	||C||=	0,7083	<	1									
14					Таблица итераций								
15	Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16		0,6750	0,6284	0,9503	0,9595	1,0382	1,0504	1,0702	1,0757	1,0810	1,0830	1,0845	1,0851
17	Вектор X	-0,2435	0,2799	0,2785	0,4013	0,4170	0,4475	0,4552	0,4633	0,4662	0,4684	0,4694	0,4700
18		1,0156	1,0505	1,1510	1,1910	1,2170	1,2301	1,2378	1,2418	1,2442	1,2454	1,2461	1,2465
19	Δ		0,5234	0,3219	0,1228	0,0787	0,0305	0,0199	0,0081	0,0053	0,0022	0,0015	0,0007
20													

Рис. 1.2. Уточнение решения методом простой итерации

Проверяем условие $\Delta < \varepsilon$. Если оно не выполняется, то копируем столбцы **C16:C19** в столбцы **D16:D19**, то есть вычисляем второе приближение и опять сравниваем значение ячейки **D19** с заданной точностью ε. Продолжаем вычисления до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. В данном примере, как это видно из рис. 1.2, для достижения заданной точности необходимо 11 итераций. Тогда ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 1{,}085 \\ 0{,}470 \\ 1{,}247 \end{pmatrix} \pm 0{,}001$.

3.2. Используя MS Excel, найдем решение системы методом Зейделя.

А. Располагаем на новом рабочем листе исходные данные.

Б. Последовательными вычислениями уточняем решение системы линейных уравнений методом Зейделя (рис. 1.3). В ячейку **C16** вводим выражение, аналогичное для метода простой итерации. В ячейки **C17** и **C18** вводим выражения согласно формуле (1.5). Например, для ячейки **C17** получаем: **=$G$10+$B$10*C16+$D$10*B18.**

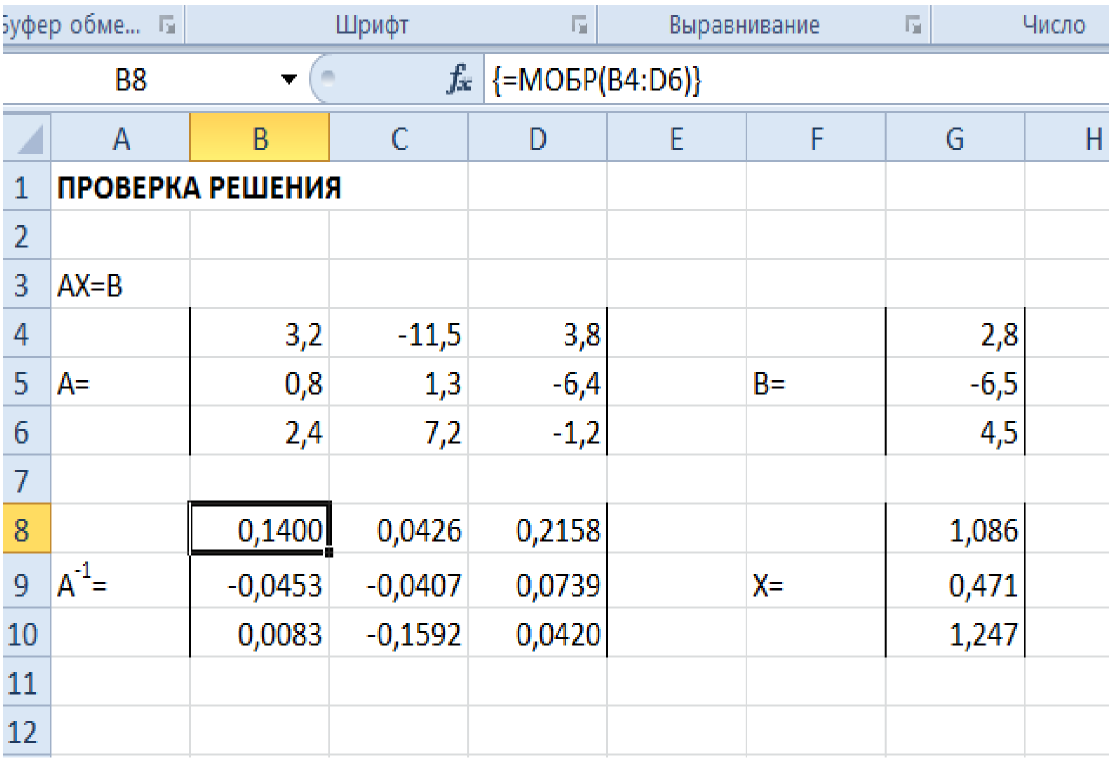
C17 fx =$G$10+$B$10*C16+$D$10*B18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ**										
2				точность	ε=	0,001					
3	AX=B										
4		5,6	-4,3	2,6			7,3				
5	A=	3,2	-11,5	3,8		B=	2,8				
6		0,8	1,3	-6,4			-6,5				
7											
8	X=CX+D										
9		0	0,6083	0,1			0,675				
10	C=	0,2783	0	0,3304		D=	-0,2435				
11		0,125	0,2031	0			1,0156				
12											
13											
14											
15	Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
16	Вектор X	0,6750	0,628439	0,952222	1,040489	1,071091	1,081098	1,084414	1,08551	1,085872	
17		-0,2435	0,266949	0,400926	0,447853	0,463164	0,46824	0,469917	0,470471	0,470655	
18		1,0156	1,148372	1,216056	1,23662	1,243555	1,245837	1,246592	1,246841	1,246924	
19	Δ		0,5104	0,3238	0,0883	0,0306	0,0100	0,0033	0,0011	0,0004	
20											
21											

Рис. 1.3. Уточнение корня методом Зейделя

В ячейку **C19** вводим выражение согласно формуле (1.6). Далее, как и в методе простой итерации, проверяем условие $\Delta < \varepsilon$. Для достижения заданной точности необходимо 8 итераций.

4.1. Проверим найденное решение, используя MS Excel. Вычислим матрицу, обратную матрице А (рис.1.4). Для этого в ячейку **C8** вводим формулу: **=МОБР(B4:D6)**. Затем, выделив область **B8:D10**, необходимо нажать клавишу **F2** и после этого комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Вектор решения X, вычисляем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Для этого в ячейку G8 вводим формулу: **=МУМНОЖ(B8:D10;G4:G6)**. Для получения вектора X необходимо выполнить те же действия, что и для получения обратной матрицы.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ							
2								
3	AX=B							
4		3,2	-11,5	3,8			2,8	
5	A=	0,8	1,3	-6,4		B=	-6,5	
6		2,4	7,2	-1,2			4,5	
7								
8		0,1400	0,0426	0,2158			1,086	
9	A^{-1}=	-0,0453	-0,0407	0,0739		X=	0,471	
10		0,0083	-0,1592	0,0420			1,247	
11								
12								

Рис. 1.4. Проверка решения методом обратной матрицы

Таким образом, получили решение исходной системы.

4.2. Воспользуемся средствами MathCad. Для решения систем линейных и нелинейных уравнения можно воспользоваться блоком ***Given Find*** (рис. 1.5).

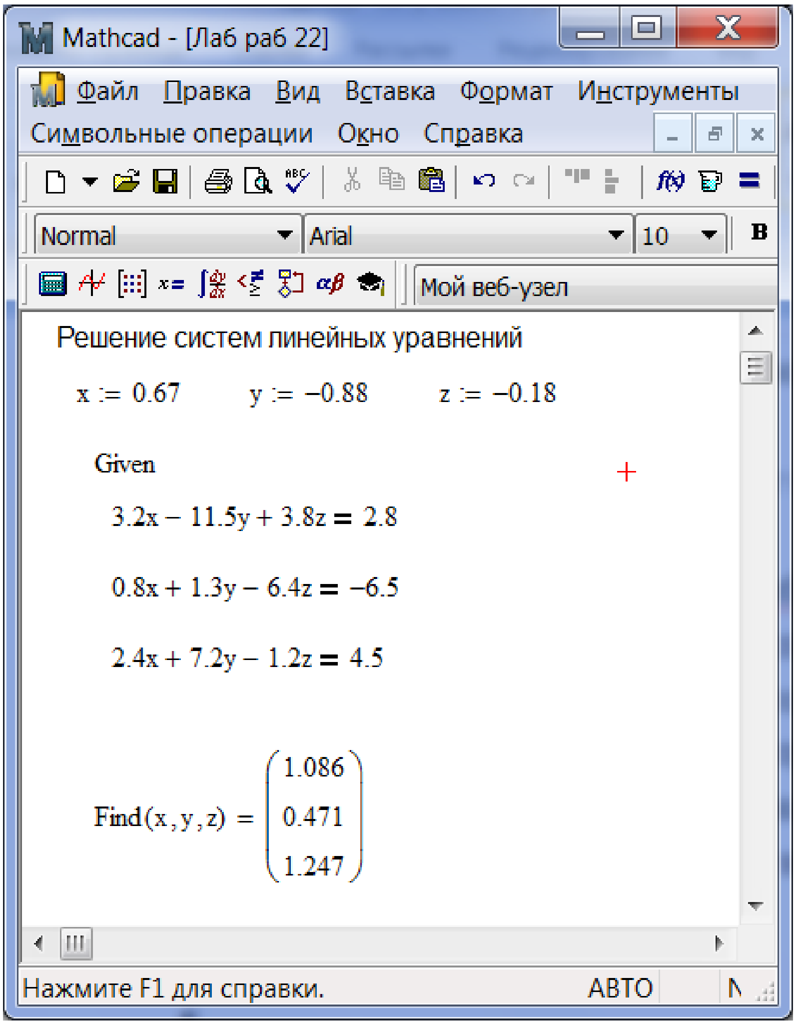


Рис. 1.5. Решение систем линейных уравнений в MathCad

Необходимо только предварительно задать произвольное начальное приближение решения. Кроме того, при записи уравнений системы в блок ***Given…Find*** необходимо сначала набирать **Ctrl+ “=”**, а затем вводить левые и правые части уравнений. Также в этом блоке нельзя пользоваться индексными переменными.

5. Таким образом, систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными привели к итерационному виду, получили её решение двумя итерационными методами (методом простой итерации за 11 итераций и методом Зейделя за 8 итераций) с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, проверили решение методом обратной матрицы и с использованием блока ***Given…Find*** пакета MathCad. Ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 1,085 \\ 0,470 \\ 1,247 \end{pmatrix} \pm 0,001.$$

1.3. Контрольные вопросы к теме

«Решение систем линейных уравнений методами простой итерации и Зейделя»

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?

2. Достаточное условие сходимости методов простой итерации и Зейделя.

3. Сущность метода простой итерации.

4. Сущность метода Зейделя и его отличие от метода простой итерации.

5. Условия окончания итерационного процесса.

1.4. Задания для выполнения лабораторной работы «Решение систем линейных уравнений методами простой итерации и Зейделя»

Задание:

1. Изучить теоретический материал по данной теме.

2. Привести систему к итерационному виду.

3. Просчитать два шага вручную:

   3.1) методом простой итерации;

   3.2) методом Зейделя.

4. Найти решение системы с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, используя MS Excel:

   4.1) методом простой итерации;

   4.2) методом Зейделя.

5. Проверить найденное решение, используя MS Excel и Mathcad (Maxima).

Исходные данные для выполнения заданий представлены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Номер варианта	**Система**	**Номер варианта**	**Система**
1	$\begin{cases} 31x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=2, \\ 1{,}9x_1+31x_2+2{,}1x_3=21, \\ 7{,}5x_1+3{,}8x_2+48x_3=56. \end{cases}$	2	$\begin{cases} 91x_1+5{,}6x_2+7{,}8x_3=9, \\ 3{,}8x_1+51x_2+2{,}8x_3=67, \\ 4{,}1x_1+5{,}7x_2+12x_3=58. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 33x_1+2{,}1x_2+2{,}8x_3=8, \\ 4{,}1x_1+37x_2+4{,}8x_3=57, \\ 2{,}7x_1+1{,}8x_2+11x_3=32. \end{cases}$	4	$\begin{cases} 76x_1+5{,}8x_2+4{,}7x_3=101, \\ 3{,}8x_1+41x_2+2{,}7x_3=97, \\ 2{,}9x_1+2{,}1x_2+38x_3=78. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 32x_1-2{,}5x_2+3{,}7x_3=65, \\ 0{,}5x_1+34x_2+1{,}7x_3=-2{,}4, \\ 1{,}6x_1+2{,}3x_2-15x_3=43. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 54x_1-2{,}3x_2+3{,}4x_3=-35, \\ 4{,}2x_1+17x_2-2{,}3x_3=27, \\ 3{,}4x_1+2{,}4x_2+74x_3=19. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 36x_1+1{,}8x_2-4{,}7x_3=38, \\ 2{,}7x_1-36x_2+1{,}9x_3=4, \\ 1{,}5x_1+4{,}5x_2+33x_3=-16. \end{cases}$	8	$\begin{cases} 56x_1+2{,}7x_2-1{,}7x_3=19, \\ 3{,}4x_1-36x_2-6{,}7x_3=-24, \\ 0{,}8x_1+1{,}3x_2+37x_3=12. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 27x_1+0{,}9x_2-1{,}5x_3=35, \\ 4{,}5x_1-28x_2+6{,}7x_3=26, \\ 5{,}1x_1+3{,}7x_2-14x_3=-14. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 45x_1-3{,}5x_2+7{,}4x_3=25, \\ 3{,}1x_1-6x_2-2{,}3x_3=-15, \\ 0{,}8x_1+7{,}4x_2-5x_3=64. \end{cases}$

§ 2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений численными методами

Пусть требуется решить уравнение вида:

$$f(x)=0. \tag{2.1}$$

Значение переменной x, при которой уравнение (2.1) обращается в верное равенство, называется корнем уравнения.

Процесс численного (приближенного) решения уравнения можно условно разбить на два этапа:

1) отделение (локализация) корня, то есть указание границ отрезка, в котором содержится значение корня;

2) уточнение корня с заданной точностью ε.

2.1. Отделение корней

Отделение корней можно осуществлять двумя способами: графическим и аналитическим. На практике удобно совместить эти два способа, а именно, действовать по алгоритму:

1) построить график функции $y = f(x)$ и визуально оценить отрезок $[a;b]$, где находится точка пересечения графика функции с осью Ox.

2) проверить *достаточное условие существования единственного корня на отрезке* $[a;b]$: если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков (то есть $f(a)\cdot f(b)<0$), а производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $f(x)=0$.

2.2. Метод половинного деления (дихотомии)

1. Пусть $[a_0;b_0]$ – один из отрезков, на котором уравнение (2.1) имеет единственный корень.

2. Найденный отрезок делим пополам точкой $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

3. Вычисляем $f(x_0)$.

4. Определить новый отрезок $[a_1; b_1]$ следующим образом:

если $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$, то выбираем отрезок $[a_1; b_1] = [a_0; x_0]$; (2.2)

если $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0$, то выбираем отрезок $[a_1; b_1] = [x_0; b_0]$. (2.3)

5. Выбранный отрезок опять делим пополам и проверяем, в каком из полученных находится корень уравнения.

6. Корень считается найденным, когда $|b_i - a_i| < \varepsilon$. (2.4)

2.3. Метод хорд

1. Пусть $[a; b]$ – один из отрезков, на котором уравнение (6.1) имеет единственный корень.

2. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a; b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Выбрать

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \text{ если } f'(a) \cdot f''(a) > 0; \\ x_0 &= b, \text{ если } f'(b) \cdot f''(b) < 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

4. Вычислить следующее приближение к корню:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}; \; x_0 = a; \tag{2.6}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}, \; x_0 = b. \tag{2.7}$$

5. Оценить погрешность согласно выражению

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

2.4. Метод касательных (Ньютона)

1. Пусть $[a;b]$ – один из отрезков, на котором уравнение (2.1) имеет единственный корень.

2. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Выбрать:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \text{ если } f(a)\cdot f''(a)>0; \\ x_0 &= b, \text{ если } f(b)\cdot f''(b)>0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

4. Вычислить следующее приближение к корню:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.10}$$

5. Оценить погрешность согласно выражению $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$.

2.5. Комбинированный метод хорд и касательных

Приближение к искомому корню происходит одновременно с двух сторон отрезка, на котором отделен корень уравнения. С одной стороны по методу хорд, а с другой – по методу касательных.

1. Пусть $[a;b]$ – один из отрезков, на котором уравнение (6.1) имеет единственный корень.

2. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Пусть $f(a)\cdot f''(a)>0$, тогда приближение по методу касательных будет происходить слева, а по методу хорд – справа. Итерационные формулы имеют вид:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)},\ a_0 = a;$$
$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)},\ b_0 = b. \tag{2.11}$$

4. Пусть $f(b)\cdot f''(b) > 0$, тогда приближение по методу касательных будет происходить справа, а по методу хорд – слева. Итерационные формулы имеют вид:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)},\ b_0 = b;$$
$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)},\ a_0 = a. \tag{2.12}$$

5. Вычисления прекращаются, когда

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon. \tag{2.13}$$

2.6. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Пусть требуется решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n) = 0, \\ f_2(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n) = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $f_1,\ f_2, \ldots f_n$ – заданные нелинейные функции n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Обозначим $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$, $0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда систему (2.14) можно записать в виде:

$$F(x)=0. \tag{2.15}$$

Предположим, что известно k-е приближение $x^k=\begin{pmatrix} x_1^k, & x_2^k, & \dots & x_n^k \end{pmatrix}$ одного из изолированных корней $x^*=\begin{pmatrix} x_1^*, & x_2^*, & \dots & x_n^* \end{pmatrix}$ уравнения (2.15). Тогда точный корень уравнения (2.15) можно представить в виде:

$$x^*=x^k+\Delta x^k, \tag{2.16}$$

где Δx^k – погрешность корня.

Подставляя выражение (2.16) в формулу (2.15), получаем:

$$F\left(x^k+\Delta x^k\right)=0. \tag{2.17}$$

Предполагая, что функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей x^k, разложим левую часть уравнения (2.17) в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми двумя членами:

$$F\left(x^k+\Delta x^k\right)=F\left(x^k\right)+F'\left(x^k\right)\Delta x^k. \tag{2.18}$$

В формуле (2.18) под производной $F'\left(x^k\right)$ понимается матрица Якоби системы функций $f_1, f_2,\dots f_n$ относительно переменных $x_1, x_2,\dots x_n$, то есть

$$F'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (2.18) может быть записана в виде:

$$F\left(x^k\right)+F'\left(x^k\right)\Delta x^k=0.$$

Если $\det F'\left(x^k\right)\neq 0$, то $\Delta x^k=-\left(F'\left(x^k\right)\right)^{-1}\cdot F\left(x^k\right)$. Отсюда видно, что метод Ньютона решения системы (2.15) состоит в построении итерационной последовательности:

$$x^{k+1}=x^k-\left(F'\left(x^k\right)\right)^{-1}\cdot F\left(x^k\right). \qquad (2.19)$$

В качестве критерия окончания итерационного процесса берут условие:

$$\left\|x^{k+1}-x^k\right\|<\varepsilon. \qquad (2.20)$$

2.7. Пример выполнения лабораторной работы «Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»

Задание 1 . Дано нелинейное уравнение $\arccos x^2-x=0$. Необходимо:

1) отделить корни графически;

2) проверить выполнение достаточных условий существования единственного корня на отрезке;

3) исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$ и убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются;

4) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом половинного деления;

5) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом хорд;

6) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом касательных;

7) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ комбинированным методом;

8) сделать вывод.

Решение. 1. В MathCad построим график кривой $f(x) = \arccos x^2 - x$ (рис. 2.1).

Для этого предварительно необходимо задать функцию, то есть записать $f(x) := \mathrm{acos}(x^2) - x$.

Затем выбираем пункт меню  – двумерный график. Справа от области построения вводим название функции $f(x)$, внизу – наименование независимой переменной – x.

$$f(x) := \mathrm{acos}\left(x^2\right) - x$$

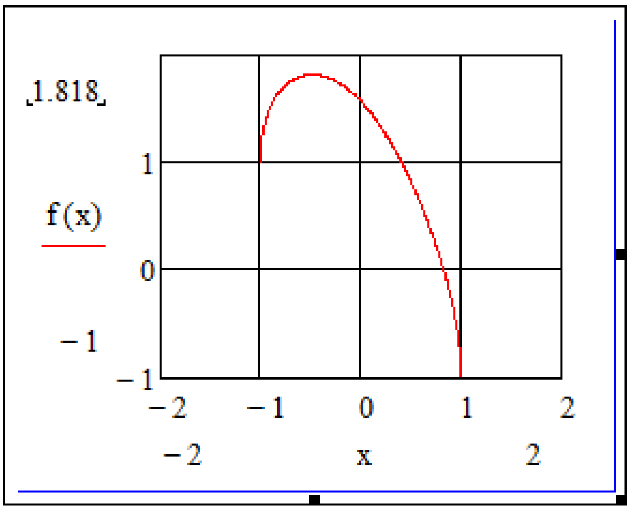


Рис.2.1. Графическое отделение корней в MathCad

По умолчанию линии сетки на графике не формируются. Чтобы их задать, необходимо правой кнопкой мыши щелкнуть по графику, выбрать меню **Формат…**. В появившемся окне (рис. 2.2) на вкладке **Оси X,Y** поставить галочку против меню **Линии сетки**. Кроме того, можно изменить цвет линии сетки (по умолчанию он салатовый).

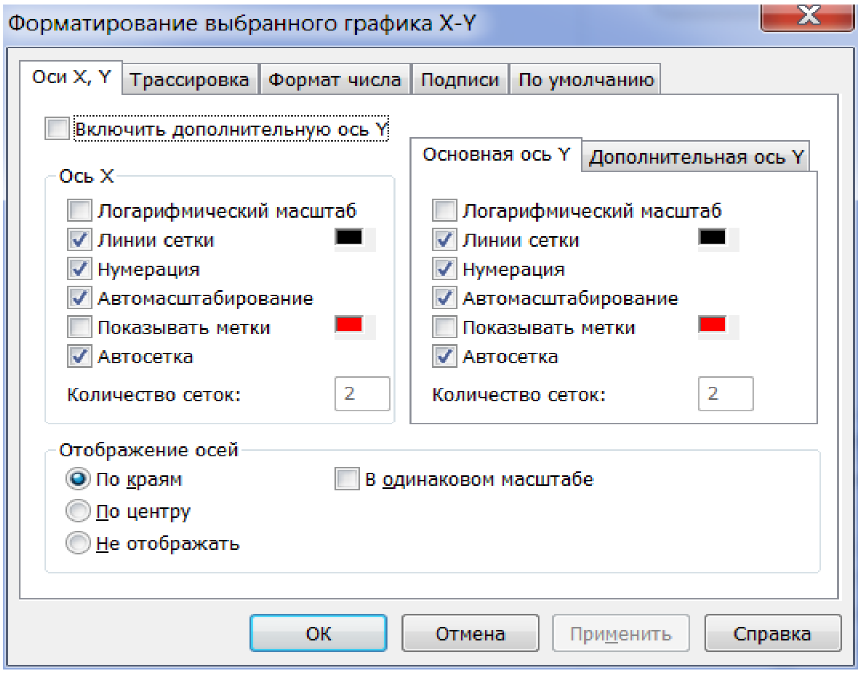


Рис.2.2. Форматирование графика

Если визуально невозможно определить границы отрезка, где график пересекает ось *Ox*, то можно изменить интервал отображения осей. Для этого необходимо выбрать левое (затем и правое) нижнее число и изменить его.

Из рис. 6 видно, что искомый корень находится в отрезке $[0;1]$.

2. Проверим достаточные условия существования единственного корня на отрезке $[0;1]$. Из рис. 2.1 видно, что функция непрерывна, монотонно убывает. Проверим аналитически, что на концах отрезка функция принимает разные знаки. Для этого в MathCad вычислим значения функции в концах отрезка (рис. 2.3).

$$f(0) = 1.571$$

$$f(1) = -1$$

Рис. 2.3. Вычисление значений функции на концах отрезка

3. Исследуем первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[0;1]$. В MathCad вычисляем производные, как показано на рис. 2.4. На панели инструментов **Математические** нажимаем кнопку , вводим название функции и получаем результат. Аналогично вычисляем вторую производную. Затем строим графики производных на исследуемом отрезке, в нашем примере это отрезок $[0;1]$. Обе функции можно изобразить на одном графике, их нужно вводить через запятую.

$$p1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow -\frac{2\cdot x}{\sqrt{1-x^4}} - 1$$

$$p2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow -\frac{4\cdot x^4}{\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$$

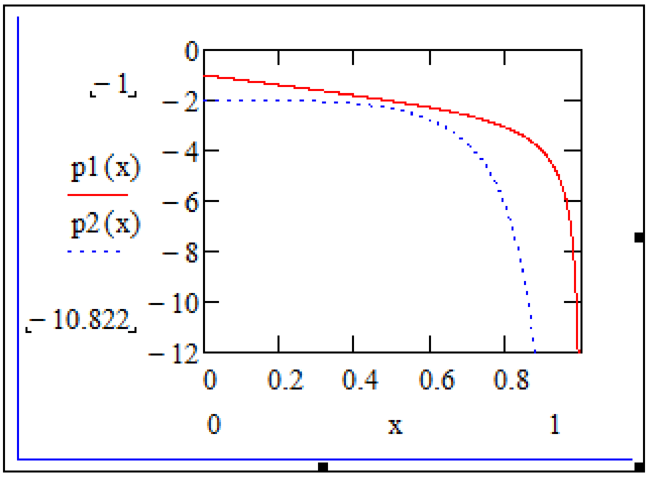


Рис. 2.4. Исследование первой и второй производной в MathCad

Из выражения производных (рис. 2.4) очевидно, что они не определены при $x=1$, поэтому в дальнейшем следует рассматривать отрезок $[0;0,9]$. Из рис. 2.4 видно, что на отрезке $[0;0,9]$ первая и вторая производная сохраняют свой знак (в нашем примере они обе отрицательны) и не обращаются в ноль. Можно также убедиться, что значения функции в концах отрезка $[0;0,9]$ различны.

4. Найдем значение корня с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ методом половинного деления.

В Microsoft Excel в ячейки **B8** и **C8** вводим соответственно начало и конец отрезка. В ячейке **D8** рассчитывается значение середины отрезка. В ячейках **E8:G8** вычисляются значения функции в указанных точках. В нашем примере функция имеет вид $f(x)=\arccos x^2-x$. В ячейку **H8** записываем формулу оценки погрешности (2.4), то есть модуль разности между концами отрезка: **=ABS(C8-B8)**.

D8 | f_x | =(B8+C8)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Метод половинного деления**							
2	**Исходные данные**							
3	*a*	*b*	погрешность					
4	0	0,9	0,00001					
5								
6	**Решение**							
7	*N*	a_i	b_i	x_i	y(a)	*y(b)*	*y(x)*	*Оценка погрешности*
8	0	0,000000	0,900000	0,450000	1,570796	-0,273356	0,916886	0,900000
9	1	0,450000	0,900000	0,675000	0,916886	-0,273356	0,422722	0,450000
10	2	0,675000	0,900000	0,787500	0,422722	-0,273356	0,114354	0,225000
11	3	0,787500	0,900000	0,843750	0,114354	-0,273356	-0,065174	0,112500
12	4	0,787500	0,843750	0,815625	0,114354	-0,065174	0,027351	0,056250
13	5	0,815625	0,843750	0,829688	0,027351	-0,065174	-0,018146	0,028125
14	6	0,815625	0,829688	0,822656	0,027351	-0,018146	0,004783	0,014063
15	7	0,822656	0,829688	0,826172	0,004783	-0,018146	-0,006635	0,007031
16	8	0,822656	0,826172	0,824414	0,004783	-0,006635	-0,000915	0,003516
17	9	0,822656	0,824414	0,823535	0,004783	-0,000915	0,001937	0,001758
18	10	0,823535	0,824414	0,823975	0,001937	-0,000915	0,000512	0,000879
19	11	0,823975	0,824414	0,824194	0,000512	-0,000915	-0,000201	0,000439
20	12	0,823975	0,824194	0,824084	0,000512	-0,000201	0,000155	0,000220
21	13	0,824084	0,824194	0,824139	0,000155	-0,000201	-0,000023	0,000110
22	14	0,824084	0,824139	0,824112	0,000155	-0,000023	0,000066	0,000055
23	15	0,824112	0,824139	0,824126	0,000066	-0,000023	0,000022	0,000027
24	16	0,824126	0,824139	0,824133	0,000022	-0,000023	-0,000001	0,000014
25	17	0,824126	0,824133	0,824129	0,000022	-0,000001	0,000010	0,000007
26	Ответ:	2413±0,00001						

Рис. 2.5. Решение нелинейного уравнения методом половинного деления в Microsoft Excel

В ячейках B9:C9 из отрезков $[a_0; x_0]$ и $[x_0; b_0]$ согласно условиям (2.2) и (2.3) выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Полученный отрезок обозначается $[a_1; b_1]$. С этой целью можно использовать встроенную логическую функцию **ЕСЛИ**. Например, для ячейки **B9** необходимо ввести условия, представленные на рис. 2.6. В ячейку **C9** введите формулу самостоятельно.

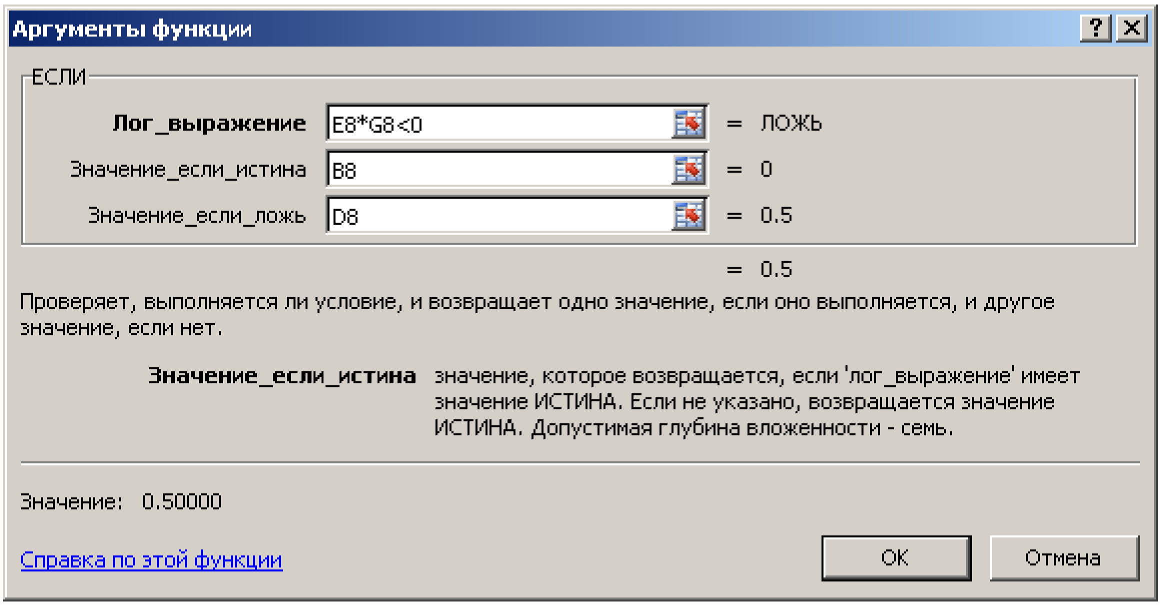


Рис. 2.6. Формулы уточнения корней по методу половинного деления

Вычисления продолжаются до тех пор, пока погрешность не станет меньше заданной (условие (2.4)).

5. Найдем значение корня методом хорд с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Первую и вторую производную исследовали в п.3 решения данной задачи, убедились, что выполняются условия для применения метода хорд на отрезке $[0; 0{,}9]$.

Используя условия (2.5), выбираем начальное приближение. В MathCad находим значения первой и второй производной в левом и правом концах выделенного отрезка (рис. 2.6).

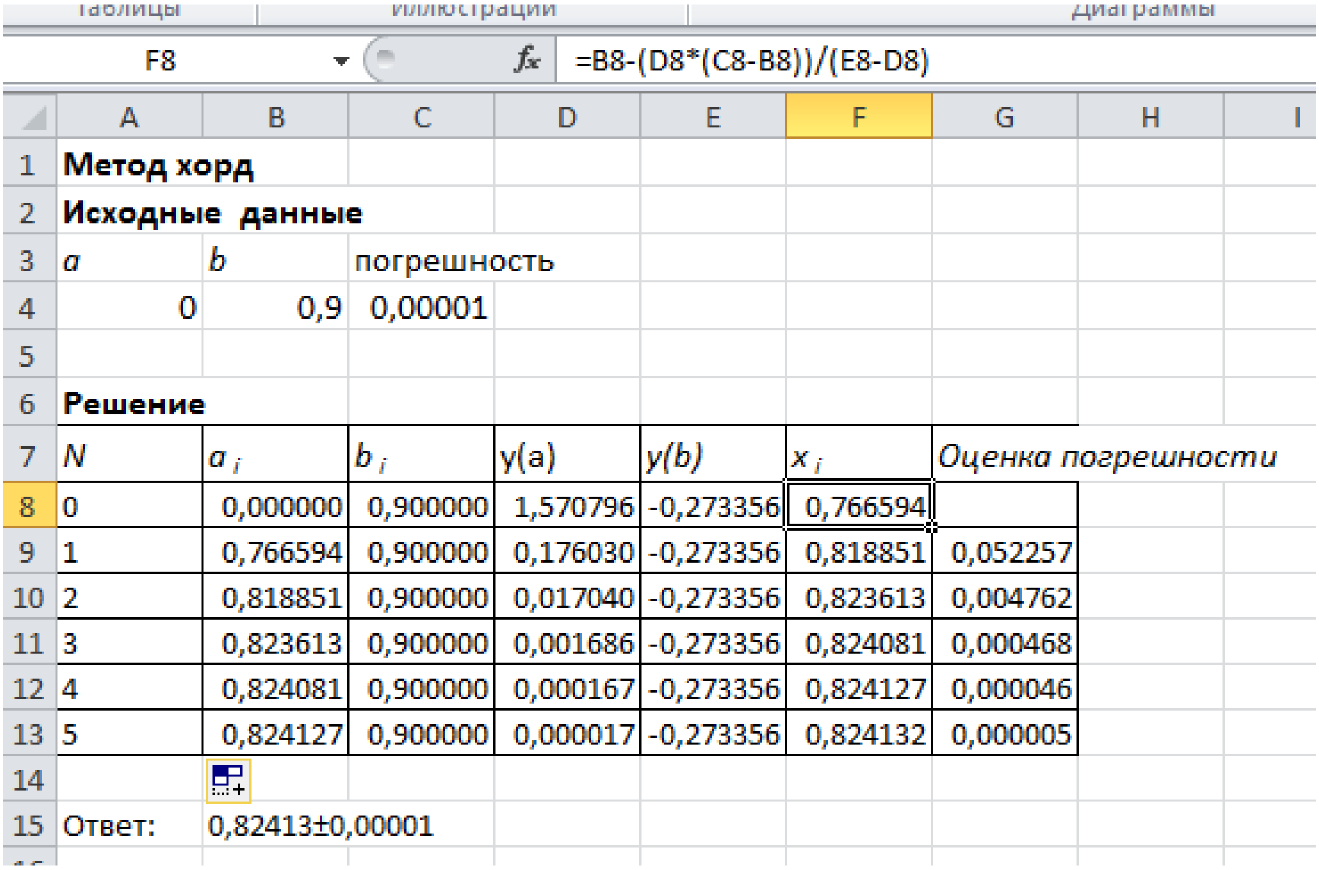
$$p1(0)\cdot p2(0) = 2$$

$$p1(0.9)\cdot p2(0.9) = 66.835$$

Рис. 2.6. Выбор начального приближения в методе хорд

Так как $f'(a)\cdot f''(a) > 0$, то за начальное приближение выбираем левый конец отрезка: $x_0 = 0$ и вычисления производим по формуле (2.4).

В Microsoft Excel в ячейки **B8:E8** вводим соответственно начало, конец отрезка и значения функции в них. В ячейку F8 вводим выражение согласно формуле (2.6) (или (2.7)). Так как мы вычисляем приближение по формуле (2.6), то правый конец отрезка остается неизменным, а левый равен найденному на предыдущем шаге приближению, то есть ячейке **B9** присваиваем значение ячейки **F8**, а ячейке **C9** – значение ячейки **C8**.


F8 =B8-(D8*(C8-B8))/(E8-D8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Метод хорд**						
2	**Исходные данные**						
3	*a*	*b*	погрешность				
4	0	0,9	0,00001				
5							
6	**Решение**						
7	*N*	a_i	b_i	y(a)	*y(b)*	x_i	*Оценка погрешности*
8	0	0,000000	0,900000	1,570796	-0,273356	0,766594	
9	1	0,766594	0,900000	0,176030	-0,273356	0,818851	0,052257
10	2	0,818851	0,900000	0,017040	-0,273356	0,823613	0,004762
11	3	0,823613	0,900000	0,001686	-0,273356	0,824081	0,000468
12	4	0,824081	0,900000	0,000167	-0,273356	0,824127	0,000046
13	5	0,824127	0,900000	0,000017	-0,273356	0,824132	0,000005
14							
15	Ответ:	0,82413±0,00001					

Рис. 2.7. Решение нелинейного уравнения методом хорд в Microsoft Excel

В ячейку **G9** записываем формулу оценки погрешности (2.8). Вычисления продолжаем до тех пор, пока значение в столбце «Оценка погрешности» не станет строго меньше заданной погрешности ε.

6. Найдем значение корня методом касательных с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Первую и вторую производную исследовали в п.3 решения данной задачи, убедились, что выполняются условия для применения метода хорд на отрезке $[0; 0,9]$.

Проверим условия (2.9), используя возможности MathCad:

$$f(0)\cdot p2(0) = -3.142$$

$$f(0.9)\cdot p2(0.9) = 4.489$$

Рис. 2.8. Выбор начального приближения в методе касательных

Согласно рис. 2.8, $x_0 = 0{,}9$. В Microsoft Excel (рис. 2.9) в ячейку **B8** вводим начальное приближение. В ячейки **C8** и **D**8 – соответственно значения функции и производной в точке x_0. В ячейку **B9** вводим выражение для следующего приближения согласно формуле (2.10). Вычисления продолжаем до тех пор, пока погрешность не станет меньше заданной.

B9 f_x =B8-C8/D8

	A	B	C	D	E	F
1	**Метод касательных**					
2	**Исходные данные**					
3	*a*	*b*	погрешность			
4	0	0,9	0,00001			
5						
6	**Решение**					
7	*N*	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	*Погрешность*	
8	0	0,900000	-0,273356	-4,069421		
9	1	0,832827	-0,028506	-3,312252	0,067173	
10	2	0,824221	-0,000287	-3,246372	0,008606	
11	3	0,824132	0,000000	-3,245718	0,000088	
12	4	0,824132	0,000000	-3,245718	0,00000001	
13	Ответ:	0,82413±0,00001				
14						

Рис. 2.9. Решение нелинейного уравнения методом касательных в Microsoft Excel

7. Найдем значение корня комбинированным методом хорд и касательных с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Первую и вторую производную исследовали в п.3 решения данной задачи, убедились, что выполняются условия для применения метода хорд на отрезке $[0; 0,9]$.

В п. 6 решения данной задачи мы показали, что $f(0,9)\cdot f''(0,9)>0$, поэтому согласно условиям, сформулированным в п. 6.1, приближение по методу касательных будет происходить справа, а по методу хорд – слева. С этой целью будем использовать итерационные формулы (2.12).

В ячейки **B8:C8** вводим начало и конец отрезка, в ячейки **D8:E**8 – значения функции в соответствующих точках, в ячейку **F8** – значение производной в правом конце отрезка (напомним, что если бы пришлось использовать итерационные формулы (2.9), то в ячейку **F8** вводили бы значение производной в левом конце отрезка).

В ячейку **B9** вводим выражение для следующего приближения по методу хорд, а в ячейку **C9** – по методу касательных (формулы (2.10)). Оценку погрешности производим по формуле (2.13). Вычисления продолжаем до тех пор, пока значение в столбце «Оценка погрешности» не станет строго меньше заданной погрешности ε.

B9 fx =B8-(D8*(C8-B8))/(E8-D8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Комбинированный метод хорд и касательных**						
2	**Исходные данные**						
3	*a*	*b*	погрешность				
4	0	0,9	0,00001				
5							
6	**Решение**						
7	*N*	*a i*	*b i*	f(a)	*f(b)*	*f ′(b i)*	*Оценка погрешности*
8	0	0,000000	0,900000	1,570796	-0,273356	-4,069421	0,900000
9	1	0,766594	0,832827	0,176030	-0,028506	-3,312252	0,066232
10	2	0,823596	0,824221	0,001739	-0,000287	-3,246372	0,000625
11	3	0,824132	0,824132	0,000000	0,000000	-3,245718	0,00000006
12	Ответ:	0,82413±0,00001					

Рис. 2.10. Решение нелинейного уравнения комбинированным методом хорд и касательных в Microsoft Excel

8. Таким образом, в данной задаче мы графически и аналитически отделили корень уравнения $\arccos x^2 - x = 0$ и решили это уравнения четырьмя способами с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Решение искали на отрезке $[0; 0,9]$.

Предварительно мы исследовали поведение первой и второй производной на указанном отрезке, убедились, что они не меняют знак и не обращаются в ноль на данном отрезке, что позволяет применять для решения данного уравнения метод хорд, метод касательных и комбинированный метод.

Для достижения заданной точности методом половинного деления понадобилось 17 итераций, методом хорд 5 итерации, методом касательных 4 итерации и комбинированным методом 3 итерации.

Ответ: $0,82413 \pm 0,00001$.

Задание 2. Дана система нелинейных уравнений: $\begin{cases} \sin(2x - y) - 1,2x = 0,4; \\ 0,8x^2 + 1,5y^2 = 1. \end{cases}$.

Необходимо:

1) отделить корни графически;

2) осуществить два шага вручную методом Ньютона;

3) решить систему методом Ньютона с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ с использованием MS Excel.

4) сделать вывод.

Решение. 1) Отделим корни графически, используя MathCad (рис. 2.11):

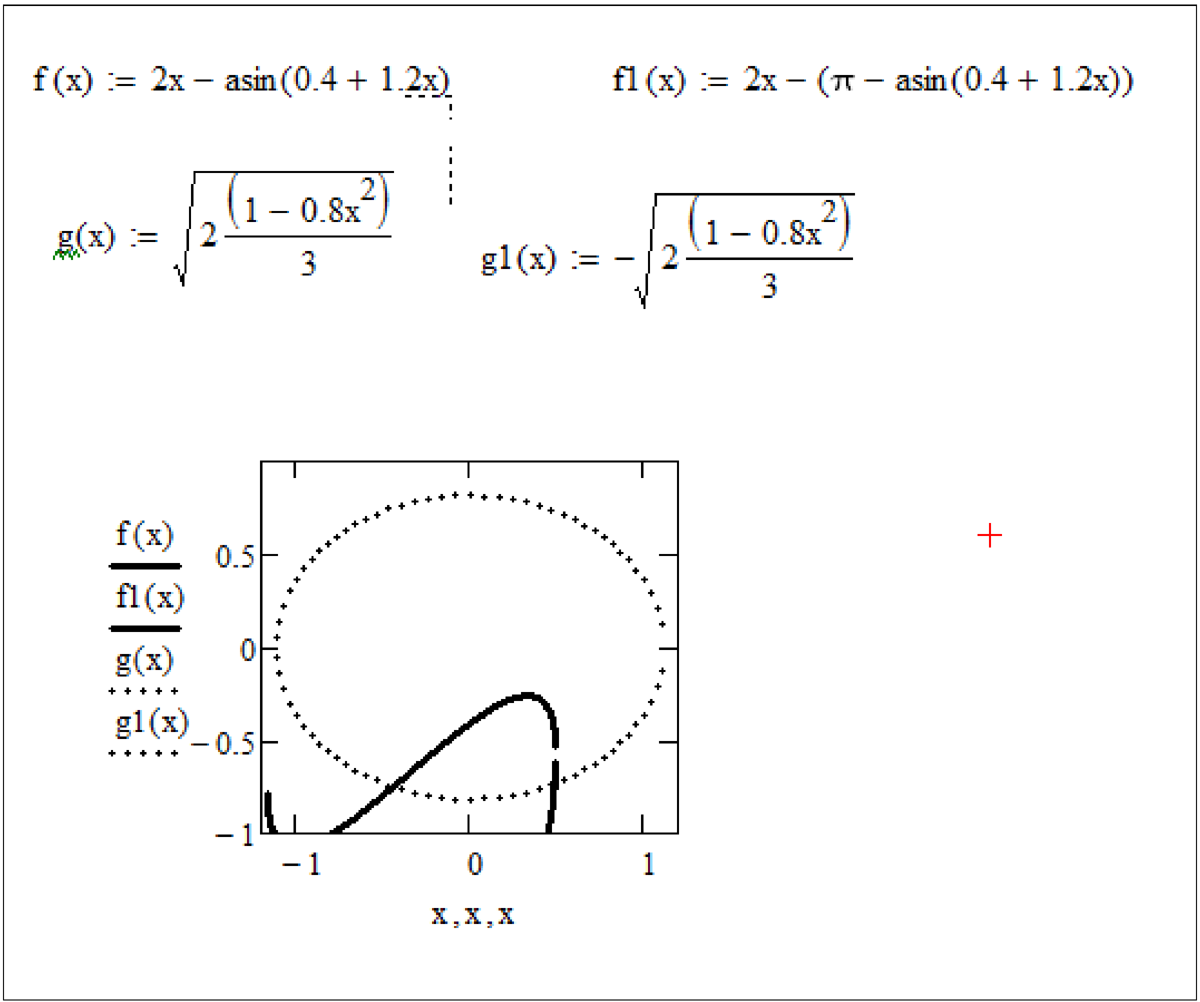


Рис. 2.11. Построение графиков в MathCad

Заметим, так как функции заданы неявно, то для построения графиков необходимо выразить одну из переменных, например, y. Решением первого уравнения системы является совокупность $y=\left[\begin{array}{l}2x-\arcsin(0,4+1,2x);\\ 2x-(\pi-\arcsin(0,4+1,2x)).\end{array}\right.$.

Решением второго уравнения системы также является совокупность $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\left(1-0,8x^2\right)}$. Поэтому в MathCad строим четыре графика. Графики функций $f(x)$ и $f_1(x)$ (сплошная линия на рис. 2.11) задают первое уравнение исходной системы уравнений, а графики функций $g(x)$ и $g_1(x)$ (пунктирная линия на рис. 2.11) задают второе уравнение системы. Сплошная и пунктирная линии пересекаются в двух точках, то есть система имеет два решения. Найдем, например, решение, находящееся в третьей координатной четверти. В качестве начального приближения возьмем точку $x_0 = -0{,}5;\ y_0 = -0{,}7$.

2) Осуществим два шага вручную. Обозначим вектор $F(x;y) = \begin{pmatrix} f(x;y) \\ g(x;y) \end{pmatrix}$,

где

$$\begin{cases} f(x;y) = \sin(2x - y) - 1{,}2x - 0{,}4; \\ g(x;y) = 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 - 1. \end{cases} \tag{2.21}$$

Значение функций в начальной точке $F(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} -0{,}0955 \\ -0{,}0650 \end{pmatrix}$.

Тогда частные производные данных функций:

$$\begin{cases} f'_x = 2\cos(2x - y) - 1{,}2; \\ g'_x = 1{,}6x; \end{cases} \quad \begin{cases} f'_y = -\cos(2x - y); \\ g'_y = 3y. \end{cases}$$

Матрица Якоби (матрица частных производных) имеет вид:

$$F'(x;y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(2x - y) & -\cos(2x - y) \\ 1{,}6x & 3y \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Значение матрицы Якоби в начальной точке

$$F'(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\cdot(-0{,}5) - (-0{,}7)) & -\cos(2\cdot(-0{,}5) - (-0{,}7)) \\ 1{,}6\cdot(-0{,}5) & 3\cdot(-0{,}7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9107 & -0{,}9553 \\ -0{,}8 & -2{,}1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу к матрице Якоби:

.

Следующее приближение вычисляем по формуле (2.19):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \left(F'(x_0;y_0)\right)^{-1} \cdot F(x_0;y_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4396 & -0{,}2 \\ -0{,}1675 & -0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}0955 \\ -0{,}0650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4710 \\ -0{,}7420 \end{pmatrix}.$$

Значение функции в точке $(x_1;\,y_1)$: $F(x_1;y_1)=\begin{pmatrix}-0,0335\\-0,0033\end{pmatrix}$. Значение матрицы Якоби в точке $(x_1;y_1)$: $F'(x_1;y_1)=\begin{pmatrix}1,9601 & -0,9801\\-0,7536 & -2,2260\end{pmatrix}$. Обратная матрица Якоби: $\left(F'(x_1;y_1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0,4363 & -0,1921\\-0,1477 & -0,3842\end{pmatrix}$. Следующее приближение вычисляем по формуле (2.19):

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\left(F'(x_1;y_1)\right)^{-1}\cdot F(x_1;y_1)=$$

$$=\begin{pmatrix}-0,4710\\-0,7420\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,4363 & -0,1921\\-0,1477 & -0,3842\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,0335\\-0,0033\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,4558\\-0,7457\end{pmatrix}.$$

Проверим условие окончания итерационного процесса (2.20). В качестве нормы матрицы возьмем максимум модулей по строкам: $\left\|X^2-X^1\right\|=\max\left(\left|-0,4558-(-0,4710)\right|;\left|-0,7457-(-0,7420)\right|\right)=$

$\max(0,0152;0,0037)=0,0152>\varepsilon$, продолжаем итерационный процесс.

3) Решим систему методом Ньютона с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$ с использованием MS Excel (рис. 2.12).

В ячейки **B4:B5** вводим координаты начальной точки; в ячейки **C4:C5** – значения функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$(выражения (2.21)) в начальной точке, в ячейки **F4:G5** – значение матрицы Якоби (выражения (2.22)) в начальной точке; в ячейках **H4:I5** с помощью функции **МОБР(H4:I5)** находим обратную матрицу к матрице Якоби; в ячейках J4:J5 с помощью функции **МУМНОЖ(H4:I5; D4:D5)** вычисляем произведение обратной матрицы и матрицы Якоби.

На следующем этапе в ячейках **C4:C5** вычисляем следующее приближение по формуле (2.19). В ячейке **K6** определяем условие окончания итерационного процесса по формуле (2.20), а именно вводим выражение МАКС(ABS(B6-B4); ABS(B7-B5)).

Продолжаем вычисления до тех пор, пока не будет выполнено условие (2.20).

D4 f_x =SIN(2*B4-B5)-1,2*B4-0,4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	***Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона***										
2											
3	**Итерация**	**(x; y)**		**(f; g)**		**Матрица Якоби**		**Обратная матрица**		**Произведение матриц**	**Условие окончания**
4		-0,5	x	-0,0955	f(x,y)	1,9107	-0,9553	0,4396	-0,2000	-0,0290	
5	0	-0,7	y	-0,0650	g(x,y)	-0,8000	-2,1000	-0,1675	-0,4000	0,0420	
6		-0,4710	x	-0,0335	f(x,y)	1,9601	-0,9801	0,4363	-0,1921	-0,0152	0,0420
7	1	-0,7420	y	0,0033	g(x,y)	-0,7536	-2,2260	-0,1477	-0,3842	0,0037	
8		-0,4558	x	-0,0182	f(x,y)	1,9726	-0,9863	0,4359	-0,1922	-0,0080	0,0152
9	2	-0,7457	y	0,0002	g(x,y)	-0,7292	-2,2370	-0,1421	-0,3844	0,0025	
10		-0,4478	x	-0,0095	f(x,y)	1,9783	-0,9892	0,4359	-0,1921	-0,0042	0,0080
11	3	-0,7482	y	0,0001	g(x,y)	-0,7165	-2,2445	-0,1391	-0,3842	0,0013	
12		-0,4436	x	-0,0050	f(x,y)	1,9810	-0,9905	0,4360	-0,1921	-0,0022	0,0042
13	4	-0,7495	y	0,0000	g(x,y)	-0,7098	-2,2484	-0,1376	-0,3841	0,0007	
14		-0,4415	x	-0,0026	f(x,y)	1,9824	-0,9912	0,4360	-0,1920	-0,0011	0,0022
15	5	-0,7502	y	0,0000	g(x,y)	-0,7063	-2,2505	-0,1368	-0,3841	0,0004	
16		-0,4403	x	-0,0014	f(x,y)	1,9831	-0,9915	0,4360	-0,1920	-0,0006	0,0011
17	6	-0,7505	y	0,0000	g(x,y)	-0,7045	-2,2515	-0,1364	-0,3841	0,0002	
18		-0,4397	x								0,0006
19	7	-0,7507	y								
20											

Рис.2.12. Решение системы нелинейных уравнений в MSExcel

4) Таким образом, на седьмом шаге итерационного процесса получено приближенное решение системы с заданной точностью:

$$\begin{pmatrix} x* \\ y* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,440 \\ -0,751 \end{pmatrix} \pm 0,001.$$

2.8. Контрольные вопросы к теме «Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»

1. Что означает «отделить корни»?

2. Достаточные условия существования единственного корня на отрезке.

2. Алгоритм метода половинного деления.

3. Алгоритм метода касательных (Ньютона).

4. Алгоритм метода хорд решения нелинейного уравнения.

5. Условие выбора начального приближения в методе касательных.

6. Условие выбора начального приближения в методе хорд.

7. Алгоритм комбинированного метода решения нелинейного уравнения.

8. Условие окончания итерационного процесса.

9. Алгоритм метода Ньютона решения системы нелинейных уравнений.

2.9. Задания для выполнения лабораторной работы «Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»

Задание 1 . Дано нелинейное уравнение (табл. 2.1). Необходимо:

1) отделить корни графически в MathCad;

2) проверить выполнение достаточных условий существования единственного корня на отрезке;

3) исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$ и убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются;

4) найти значение корня с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ методом половинного деления;

5) найти значение корня с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ методом хорд для четных вариантов и методом касательных для нечетных вариантов;

7) найти значение корня с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ комбинированным методом;

8) сделать вывод.

Таблица 2.1

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$x-\sin x-0{,}25=0$	2	$x^3-e^x+1=0$
3	$\sqrt{x}-\cos x=0$	4	$\lg x-\dfrac{7}{2x+6}=0$
5	$tg(0{,}5x+0{,}2)-x^2=0$	6	$3x-\cos x-1=0$
7	$x+\lg x-0{,}5=0$	8	$tgx-\cos x+0{,}1=0$
9	$x\ln(x+1)-0{,}3=0$	10	$0{,}5^x+1-(x-2)^2=0$

Задание 2. Дана система нелинейных уравнений (табл. 2.2). Необходимо:

1) отделить корни графически в MathCad;

2) осуществить два шага вручную методом Ньютона;

3) решить систему методом Ньютона с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$ с использованием MS Excel.

4) сделать вывод.

Таблица 2.2

Вариант	Система	Вариант	Система
1	$\begin{cases}\sin(x+1)-y=1{,}2;\\ 2x+\cos y=2.\end{cases}$	2	$\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}5;\\ x-\cos y=3.\end{cases}$
3	$\begin{cases}\sin x+2y=2;\\ x+\cos(y-1)=0{,}7.\end{cases}$	4	$\begin{cases}\cos x+y=1{,}5;\\ 2x-\sin(y-0{,}5)=1.\end{cases}$
5	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1;\\ x+\cos(y-2)=2.\end{cases}$	6	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=0{,}8;\\ \sin y-2x=1{,}6.\end{cases}$
7	$\begin{cases}\sin(x-1)+y=1{,}3;\\ x-\sin(y+1)=0{,}8.\end{cases}$	8	$\begin{cases}2y-\cos(x+1)=0;\\ x+\sin y=-0{,}4.\end{cases}$
9	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)-y=2;\\ \sin x-2y=1.\end{cases}$	10	$\begin{cases}\sin(x+2)-y=1{,}5;\\ x+\cos(y-2)=0{,}5.\end{cases}$

§3. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем

3.1. Основные определения. Постановка задачи

Уравнение, связывающее одну независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производные до n-го порядка, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)*:

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0. \tag{3.1}$$

Наивысший порядок n производной, входящей в уравнение (3.1), называется *порядком дифференциального уравнения*. В частности, *обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков* соответственно имеют вид:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0; \;\; F\left(x, y, y', y''\right) = 0.$$

Если из общей записи дифференциального уравнения (3.1) удается выразить старшую производную в явном виде, то *уравнения первого и второго порядков* соответственно принимают вид:

$$y' = f\left(x; y\right); \tag{3.2}$$

$$y'' = f\left(x; y; y'\right). \tag{3.3}$$

Общим решением дифференциального уравнения (3.1) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$, где $C_1, C_2, \ldots C_n$ – произвольные постоянные. Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для дифференциального уравнения первого порядка (3.2) общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = \varphi\left(x, C\right). \tag{3.4}$$

Если произвольная постоянная принимает определенное значение $C = C_0$, то получается частное решение $y = \varphi(x, C_0)$.

<u>Теорема Коши:</u> Если правая часть $f(x; y)$ уравнения (3.2) и её частная производная $f'_y(x; y)$ определены и непрерывны в некоторой области G изменения переменных x, y,то для всякой внутренней точки $(x_0; y_0)$ этой области данное уравнение имеет единственное решение, принимающее заданное значение $y = y_0$ при $x = x_0$.

Дадим геометрическую интерпретацию общего решения (3.4) дифференциального уравнения первого порядка (3.2). Это общее решение описывает бесконечное семейство интегральных кривых с параметром C, а частному решению соответствует одна кривая из этого семейства.

<u>Пример 3.1.</u> Дано дифференциальное уравнение $y' = 2x$.

Его общее решение имеет вид $y = x^2 + C$. Если задать начальное условие $y(1) = 1$, то можно найти конкретное значение константы $1 = 1 + C$, $C_0 = 0$ и записать частное решение $y = x^2$.

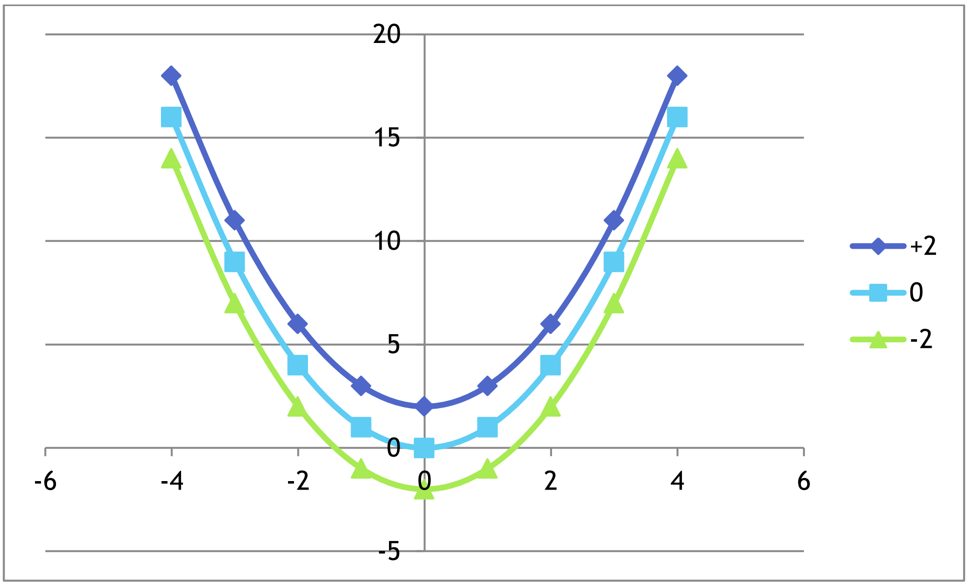


Рис. 3.1. Интегральные кривые

Для дифференциального уравнения второго порядка геометрическая интерпретация более сложная. Через каждую точку в области решения уравнения проходит не одна интегральная кривая. Поэтому для уравнения второго порядка (3.3) нужно задать два дополнительных условия, благодаря которым можно найти значения двух произвольных постоянных.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач:

– *задача Коши*, когда дополнительные условия задаются в одной точке $x = x_0$, которая называется начальной точкой, а данные условия – *начальными условиями*;

– *краевая задача*, когда дополнительные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами отрезка, на котором рассматривается дифференциальное уравнение, при этом сами дополнительные условия называются *граничными* (или *краевыми*) *условиями*.

Для уравнения первого порядка дополнительное условие одно, поэтому в этом случае может быть сформулирована только задача Коши. Для уравнения порядка $n \geq 2$ можно сформулировать как задачу Коши, так и краевую задачу.

Пример 3.2.

1. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 tgt,\ t \geq 0,\ x(0) = 1.$$

2. Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' - \frac{y'}{x+1} = (x+1)^2,\ x \geq 1,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2.$$

3. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' - y' + \frac{y}{x} = x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 1,\ y(1) = 1{,}5.$$

Методы решения дифференциальных уравнений:

1. Графические (например, метод изоклин), используют геометрические построения.

2. Аналитические (например, метод Бернулли решения линейного дифференциального уравнения первого порядка).

3. Приближенные методы используют упрощения самих уравнений путем обоснованного отбрасывания некоторых членов (например, разложение решения в ряд).

4. Численные методы предполагают получение числовой таблицы приближенных значений y_i искомого решения $y(x)$ на некоторой сетке $x_i \in [a,b]$ значений аргумента x.

3.2. Метод Эйлера

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть требуется решить задачу Коши ОДУ первого порядка:

$$y' = f\left(x; y\right), \tag{3.5}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{3.6}$$

то есть необходимо найти решение $y(x)$ уравнения (3.5), чтобы было выполнено начальное условие (3.6).

Пусть вычисления производятся с шагом $h = \dfrac{b - x_0}{n}$, расчетными точками (узлами) служат точки $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,n}$ промежутка $[x_0; b]$ и целью является построение таблицы приближенных значений y_i решения $y = y(x)$ задачи (3.5)-(3.6):

i	0	1	...	n
x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

Рассмотрим уравнение (3.5) в точке $x = x_i$: $y'\left(x_i\right) = f\left(x_i; y_i\right)$.

Заменим производную $y'(x_i)$ её аппроксимацией:

$$y'(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}.$$

Получаем: $\dfrac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}=f(x_i;y_i).$

Отсюда получаем формулу Эйлера:

$$y_{i+1}=y_i+h\,f(x_i;y_i),\ i=0,1,\ldots \tag{3.7}$$

Замечание. Метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Пример 3.3. Решить задачу Коши: $y'=2(x^2+y),\ y(0)=1,$ $0\le x\le 1,\quad h=0{,}1$.

Точное решение $y_{точн}=1{,}5e^{2x}-x^2-x-0{,}5.$ (Точное решение получено аналитическим методом, который изучается в курсе математики). Имеем: $f(x;y)=2(x^2+y).$

Формула Эйлера (3.7) для нашего уравнения принимает вид :

$$y_{i+1}=y_i+2h\left(x_i^2+y_i\right),$$

$$y_0=1,\ x_0=0,\ y_1=y_0+2\cdot 0{,}1\cdot\left(x_0^2+y_0\right)=1+2\cdot 0{,}1\cdot(0+1)=1{,}2.$$

$$y_2=y_1+2\cdot 0{,}1\cdot\left(x_1^2+y_1\right)=1{,}2+2\cdot 0{,}1\cdot\left(0{,}1^2+1{,}2\right)=1{,}442.$$

Остальные вычисления (табл. 3.1) проводим в программе MS Excel.

Таблица 3.1. Решение задачи Коши методом Эйлера

i	x_i	y_i	$f(x_i;y_i)$	$y_{точн}$	$\lvert y_i-y_{точн}\rvert$
0	0	1,0000	2,0000	1,0000	0,0000
1	0,1	1,2000	2,4200	1,2221	0,0221
2	0,2	1,4420	2,9640	1,4977	0,0557
3	0,3	1,7384	3,6568	1,8432	0,1048
4	0,4	2,1041	4,5282	2,2783	0,1742
5	0,5	2,5569	5,6138	2,8274	0,2705
6	0,6	3,1183	6,9566	3,5202	0,4019
7	0,7	3,8139	8,6079	4,3928	0,5789
8	0,8	4,6747	10,6294	5,4895	0,8148
9	0,9	5,7377	13,0953	6,8645	1,1268
10	1	7,0472	16,0944	8,5836	1,5364

Численным решением задачи Коши является таблица значений искомой функции на указанном промежутке или графическое представление искомой функции (рис. 3.2). В дальнейшем, если необходимо, можно построить по заданной таблице интерполяционную или аппроксимирующую функцию. На рис. 3.2. представлены графики численного решения, полученного по методу Эйлера, и точного решения.

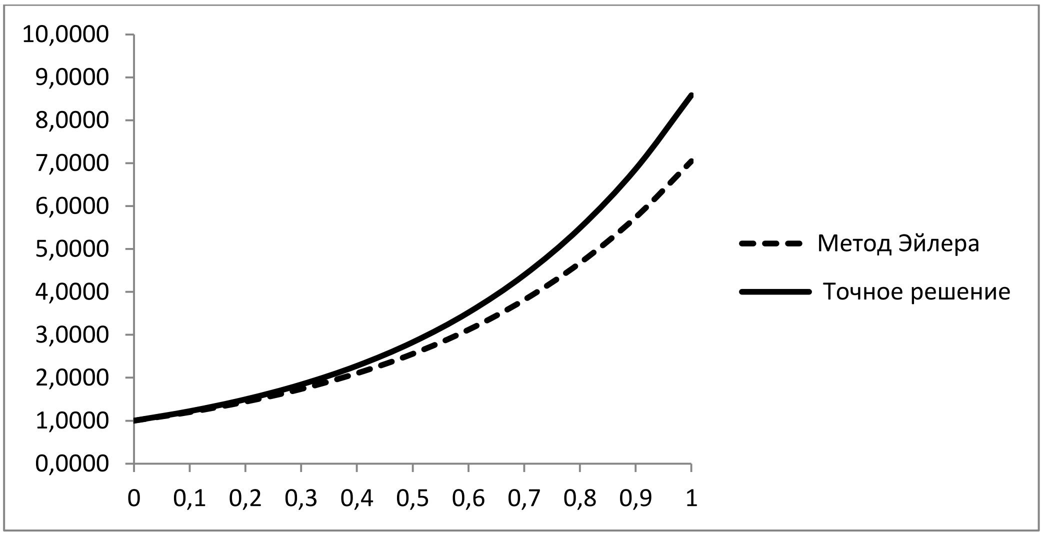


Рис. 3.2. Решение задачи Коши методом Эйлера

Ответ:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0000	1,2000	1,4420	1,7384	2,1041	2,5569	3,1183	3,8139	4,6747	5,7377	7,0472

3.3.Модификации метода Эйлера

Рассмотрим уравнение (3.5) в окрестностях узлов $x = x_i + \frac{h}{2}$, $i = 0,1,\ldots$, являющихся серединами отрезков $\left[x_i; x_{i+1}\right]$. Левую часть уравнения (3.5) заменим аппроксимацией, а в правой заменим значение функции средним арифметическим значений функций $f(x; y)$ в точках $(x_i; y_i)$ и $(x_{i+1}; y_{i+1})$. Получаем

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{1}{2}(f(x_i;y_i)+f(x_{i+1};y_{i+1})), \quad \Rightarrow$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(f(x_i;y_i)+f(x_{i+1};y_{i+1})). \qquad (3.8)$$

Полученная схема является неявной, так как y_{i+1} входит в обе части равенства (3.8). Значение y_{i+1} можно вычислить по формуле метода Эйлера (3.7).

$$\tilde{y}_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i;y_i). \qquad (3.9)$$

Вычисленное значение $\tilde{y}_{i+1}$ подставляем вместо y_{i+1} в правую часть соотношения (3.8) и находим окончательное значение:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\Big(f\left(x_i;y_i\right)+f\left(x_{i+1};\tilde{y}_{i+1}\right)\Big). \qquad (3.10)$$

Формулы (3.9), (3.10) описывают *метод Эйлера с пересчетом (усовершенствованный метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой)*.

Замечание. Метод Эйлера с пересчетом является методом второго порядка точности.

Рассмотрим другую модификацию метода Эйлера. Рассмотрим уравнение (3.5) в окрестностях узлов $x=x_i+\frac{h}{2}$. Левую часть заменим аппроксимацией

$$\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}=f\left(x_i+\frac{h}{2};y_{i+\frac{1}{2}}\right), \quad где$$

$$y_{i+\frac{1}{2}}=y_i+\frac{h}{2}\Big(f\left(x_i;y_i\right)\Big); \qquad (3.11)$$

$$y_{i+1}=y_i+hf\left(x_i+\frac{h}{2};y_{i+\frac{1}{2}}\right). \qquad (3.12)$$

Метод (3.11)-(3.12) называется *усовершенствованным методом Эйлера*. Этот метод также является методом второго порядка точности.

Пример 3.4. Решить задачу Коши $y' = 2(x^2 + y), \quad y(0) = 1$ $0 \le x \le 1,\ h = 1$ методом Эйлера с пересчетом и усовершенствованным методом Эйлера.

Метод Эйлера с пересчетом.

1 шаг. $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ \tilde{y}_1 = y_0 + 2h\left(x_0^2 + y_0\right) = 1 + 2 \cdot 0{,}1\left(0+1\right) = 1{,}2$,

$$f(x_0; y_0) = 2\left(x_0^2 + y_0\right) = 2\left(0+1\right) = 2;$$

$$f(x_1; \tilde{y}_1) = 2(x_1^2 + \tilde{y}_1) = 2\left(0{,}1^2 + 1{,}2\right) = 2{,}42;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0; y_0) + f(x_1; \tilde{y}_1)\right) = 1 + \frac{0{,}1}{2}(2 + 2{,}42) = 1{,}221.$$

2 шаг. $x_1 = 0{,}1,\ y_1 = 1{,}221$,

$$\tilde{y}_2 = y_1 + 2h\left(x_1^2 + y_1\right) = 1{,}221 + 2 \cdot 0{,}1\left(0{,}1^2 + 1{,}221\right) = 1{,}4672,$$

$$f(x_1; y_1) = 2\left(x_1^2 + y_1\right) = 2\left(0{,}1^2 + 1{,}221\right) = 2{,}462;$$

$$f(x_2; \tilde{y}_2) = 2(x_2^2 + \tilde{y}_2) = 2\left(0{,}2^2 + 1{,}4672\right) = 3{,}0144;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1; y_1) + f(x_2; \tilde{y}_2)\right) = 1{,}221 + \frac{0{,}1}{2}(2{,}462 + 3{,}0144) = 1{,}4948.$$

Остальные вычисления приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Решение методом Эйлера с пересчетом

i	x_i	y_i	$f\left(x_i; y_i\right)$	$\tilde{y}_i$	$f\left(x_i; \tilde{y}_i\right)$	$y_{точн}$	Ошибка
0	0,0	1,0000	2,0000	–	–	1,0000	0,0000
1	0,1	1,2210	2,4620	1,2000	2,4200	1,2221	0,0011
2	0,2	1,4948	3,0696	1,4672	3,0144	1,4977	0,0029
3	0,3	1,8375	3,8550	1,8018	3,7836	1,8432	0,0057
4	0,4	2,2685	4,8571	2,2230	4,7660	2,2783	0,0098
5	0,5	2,8118	6,1236	2,7542	6,0085	2,8274	0,0156
6	0,6	3,4964	7,7128	3,4242	7,5683	3,5202	0,0238
7	0,7	4,3578	9,6956	4,2677	9,5154	4,3928	0,0350
8	0,8	5,4393	12,1586	5,3274	11,9347	5,4895	0,0502
9	0,9	6,7938	15,2075	6,6552	14,9304	6,8645	0,0707
10	1,0	8,4856	18,9712	8,3145	18,6291	8,5836	0,0980

Представим полученное решение графически (рис. 3.3) и таблицей значений функции.

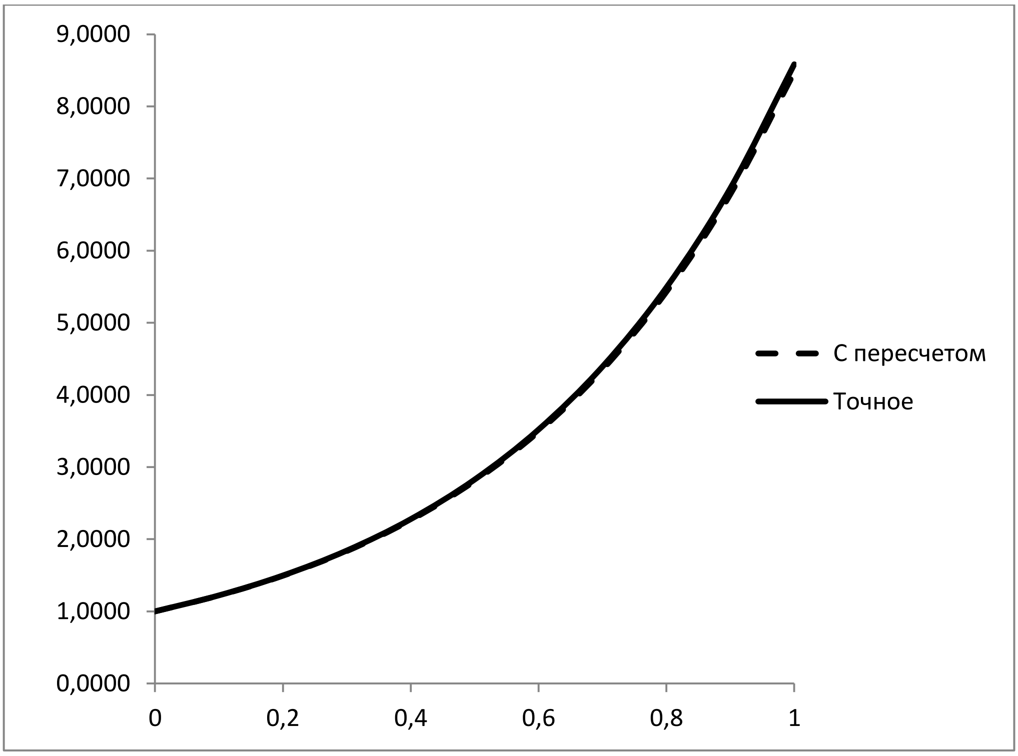


Рис. 3.3. Решение задачи Коши методом Эйлера с пересчетом

Ответ:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0000	1,2210	1,4948	1,8375	2,2685	2,8118	3,4964	4,3578	5,4393	6,7938	8,4856

Усовершенствованный метод Эйлера.

1 шаг. $x_0 = 0,\ y_0 = 1,$

$$y_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0; y_0) = 1 + \frac{0,1}{2} \cdot 2(0^2 + 1) = 1,1,$$

$$f(x_{0+\frac{h}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}) = 2(x^2_{0+\frac{h}{2}} + y_{0+\frac{1}{2}}) = 2\left(0,05^2 + 1,1\right) = 2,205;$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_{0+\frac{h}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}\right) = 1 + 0,1 \cdot 2,205 = 1,2205.$$

2 шаг. $x_1 = 0,1,\ y_1 = 1,2205,$

$$y_{1+\frac{1}{2}} = y_1 + \frac{h}{2} f(x_1; y_1) = 1{,}2205 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 2(0{,}1^2 + 1{,}2205) = 1{,}3436,$$

$$f(x_{1+\frac{h}{2}}; y_{1+\frac{1}{2}}) = 2(x^2_{1+\frac{h}{2}} + y_{1+\frac{1}{2}}) = 2\left(0{,}15^2 + 1{,}3436\right) = 2{,}7321;$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f\left(x_{1+\frac{h}{2}}; y_{1+\frac{1}{2}}\right) = 1{,}2205 + 0{,}1 \cdot 2{,}7321 = 1{,}4937.$$

Остальные вычисления приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3. Решение усовершенствованным методом Эйлера

i	x_i	$x_{i+\frac{h}{2}}$	y_i	$f(x_i; y_i)$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$f\left(x_{i+\frac{h}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right)$	$y_{точн}$	Ошибка
0	0	0,0500	1,0000	2,0000	1,1000	2,2050	1,0000	0,0000
1	0,1	0,1500	1,2205	2,4610	1,3436	2,7321	1,2221	0,0016
2	0,2	0,2500	1,4937	3,0674	1,6471	3,4192	1,4977	0,0040
3	0,3	0,3500	1,8356	3,8513	2,0282	4,3014	1,8432	0,0076
4	0,4	0,4500	2,2658	4,8515	2,5083	5,4217	2,2783	0,0125
5	0,5	0,5500	2,8079	6,1159	3,1137	6,8325	2,8274	0,0195
6	0,6	0,6500	3,4912	7,7024	3,8763	8,5976	3,5202	0,0290
7	0,7	0,7500	4,3509	9,6819	4,8350	10,7950	4,3928	0,0419
8	0,8	0,8500	5,4304	12,1409	6,0375	13,5200	5,4895	0,0591
9	0,9	0,9500	6,7824	15,1849	7,5417	16,8884	6,8645	0,0820
10	1	1,0500	8,4713	18,9426	9,4184	21,0418	8,5836	0,1123

Представим полученное решение графически (рис. 3.4) и таблицей значений функции.

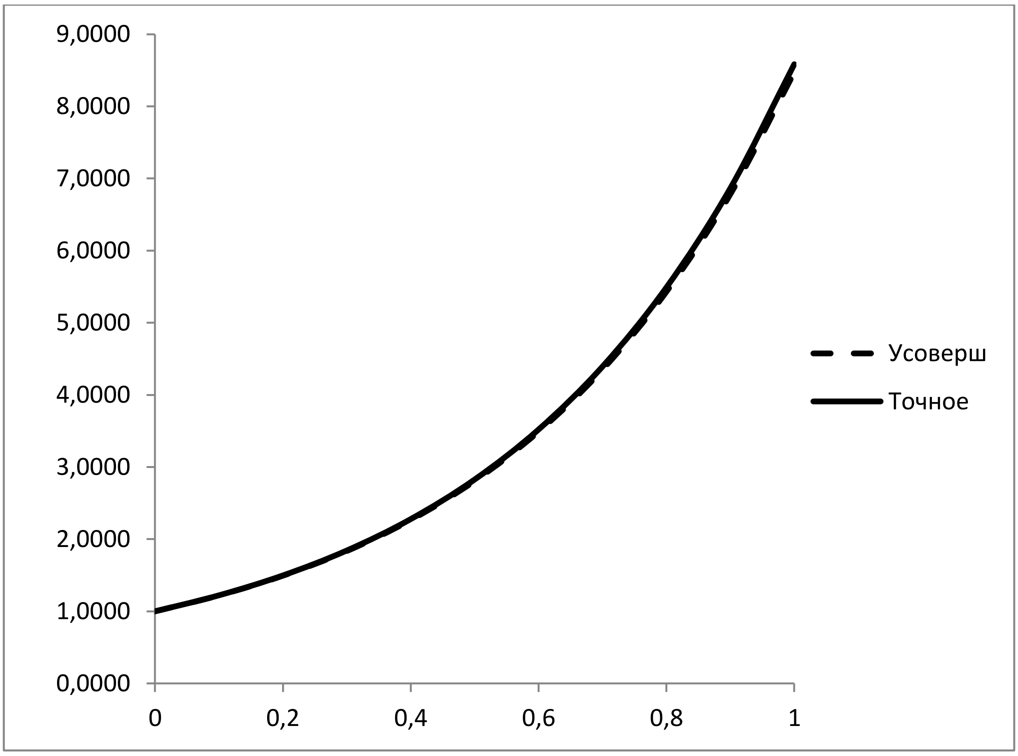


Рис. 3.4. Решение задачи Коши усовершенствованным методом Эйлера

Ответ:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0000	1,2205	1,4937	1,8356	2,2658	2,8079	3,4912	4,3509	5,4304	6,7824	8,4713

3.4. Метод Рунге-Кутта. Правило Рунге для оценки погрешности

Алгоритм метода Рунге-Кутта четвертого порядка

$$
\begin{gathered}
k_1 = h \cdot f\left(x_i; y_i\right); \\
k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1}{2}\right); \\
k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2}{2}\right); \\
k_4 = h \cdot f\left(x_i + h; y_i + k_3\right) \\
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

Замечание. Метод Рунге-Кутта является методом четвертого порядка точности.

<u>Пример 3.5.</u> Решить задачу Коши $y' = 2(x^2 + y),\ y(0) = 1$ $0 \le x \le 1,\ h = 1$ методом Рунге-Кутта.

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1,$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0; y_0) = 0{,}1 \cdot 2\left(0^2 + 1\right) = 0{,}2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}1 \cdot 2\left(0{,}05^2 + \left(1 + \frac{0{,}2}{2}\right)\right) = 0{,}2205;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}1 \cdot 2\left(0{,}05^2 + \left(1 + \frac{0{,}2205}{2}\right)\right) = 0{,}2226;$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_0 + h; y_0 + k_3\right) = 0{,}1 \cdot 2\left(0{,}1^2 + (1 + 0{,}2226)\right) = 0{,}2465;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 1 + \frac{1}{6}\left(0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2205 + 2 \cdot 0{,}2226 + 0{,}2465\right) = 1{,}2221.$$

Остальные вычисления приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4. Метод Рунге-Кутта

i	x_i	y_i	f_i	k_1	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i + \frac{k1}{2}$	k_2	$y_i + \frac{k2}{2}$	k_3	$x_i + h$	$y_i + k3$	k_4	$y^{\text{точ}}$	Ошибка
0	0,0	1,0000	2,0000	0,2000	0,0500	1,1000	0,2205	1,1103	0,2226	0,1	1,2226	0,2465	1,0000	0
1	0,1	1,2221	2,4642	0,2464	0,1500	1,3453	0,2736	1,3589	0,2763	0,2	1,4984	0,3077	1,2221	0,000002
2	0,2	1,4977	3,0755	0,3075	0,2500	1,6515	0,3428	1,6691	0,3463	0,3	1,8441	0,3868	1,4977	0,000006
3	0,3	1,8432	3,8663	0,3866	0,3500	2,0365	0,4318	2,0591	0,4363	0,4	2,2795	0,4879	1,8432	0,00001
4	0,4	2,2783	4,8766	0,4877	0,4500	2,5221	0,5449	2,5508	0,5507	0,5	2,8289	0,6158	2,2783	0,00002
5	0,5	2,8274	6,1159	0,6155	0,5500	3,1351	0,6875	3,1712	0,6947	0,6	3,5221	0,7764	2,8274	0,00003
6	0,6	3,5201	7,7603	0,7760	0,6500	3,9081	0,8661	3,9532	0,8751	0,7	4,3953	0,9771	3,5202	0,00005
7	0,7	4,3927	9,7655	0,9765	0,7500	4,8810	1,0887	4,9371	1,0999	0,8	5,4926	1,2265	4,3928	0,00005
8	0,8	5,4894	12,2589	1,2259	0,8500	6,1024	1,3650	6,1719	1,3789	0,9	6,8683	1,5357	5,4895	0,00010
9	0,9	6,8643	15,3486	1,5349	0,9500	7,6318	1,7069	7,7178	1,7241	1,0	8,5884	1,9177	6,8645	0,00015
10	1,0	8,5834	19,1669	1,9167	1,0500	9,5417	2,1288	9,6478	2,1501	1,1	10,7334	2,3887	8,5836	0,00020

Ответ:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0000	1,2221	1,4977	1,8432	2,2723	2,8079	3,4912	4,3509	5,4304	6,7824	8,4713

Для всех методов, рассмотренных выше, применимо *правило Рунге для оценки погрешности*. Данное правило можно применять, если невозможно или очень трудоемко найти точное решение. Пусть $y(x;h)$ – приближенное значение решения в точке x, полученное с шагом h, и пусть p – порядок точности соответствующего метода. Тогда погрешность $R(h)$ значения $y(x;h)$ можно оценить, используя приближенное значение $y(x;2h)$ решения в точке x, полученное с шагом $2h$:

$$R(h) = \frac{|y(x;h) - y(x;2h)|}{2^p - 1}. \tag{3.14}$$

3.5. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями:

$$\begin{cases} y_1' = f(x; y_1; y_2), \\ y_2' = g(x; y_1; y_2), \end{cases} \tag{3.15}$$

где x – независимая переменная, y_1, y_2 – зависимые функции, которые требуется найти.

Пусть выполнены начальные условия:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0, \\ y_2(x_0) = y_2^0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Все методы решения задачи Коши, рассмотренные выше, без каких-либо изменений можно применить к решению систем.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{3.17}$$

или

$$y'' = f(x; y; y'). \tag{3.18}$$

Пусть выполнены начальные условия

$$y(x_0) = y_0; \; y'(x_0) = y_0'. \tag{3.19}$$

Для численного решения ДУ второго порядка преобразуется в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого вводим новую неизвестную функцию $z = y'$. Слева в каждом уравнении полученной системы необходимо оставить только первые производные, а справа – некоторые функции, зависящие от x, y, z.

Пример 3.6. Решить задачу Коши для ДУ второго порядка $y'' - \ln x \cdot y' = 1,\ y(2) = 3,\ y'(2) = 1$ на отрезке $[2; 3]$ с шагом $h = 0{,}1$ методом Эйлера. Погрешность оценить по правилу Рунге.

Решение. Сведем ДУ второго порядка к системе. Обозначим $y' = z$, тогда $y'' = z'$. Получаем систему: $\begin{cases} y' = z, \\ z' = z \cdot \ln x + 1, \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} y(2) = 3, \\ z(2) = 1. \end{cases}$ Обозначим $f(x; y; z) = z,\ g(x; y; z) = z \cdot \ln x + 1.$

1 шаг. $x_0 = 2,\ y_0 = 3,\ z_0 = 1,\ h = 0{,}1.$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0; z_0), \\ z_1 = z_0 + h \cdot g(x_0; y_0; z_0), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = y_0 + 0{,}1 \cdot z_0, \\ z_1 = z_0 + 0{,}1 \cdot (z_0 \cdot \ln x_0 + 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3 + 0{,}1 \cdot 1, \\ z_1 = 1 + 0{,}1 \cdot (1 \cdot \ln 2 + 1), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 3{,}1, \\ z_1 = 1{,}169. \end{cases}$$

2 шаг. $x_1 = 2{,}1,\ y_1 = 3{,}1,\ z_1 = 1{,}169$.

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1; z_1), \\ z_2 = z_1 + h \cdot g(x_1; y_1; z_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = y_1 + 0{,}1 \cdot z_1, \\ z_2 = z_1 + 0{,}1 \cdot (z_1 \cdot \ln x_1 + 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 3{,}1 + 0{,}1 \cdot 1{,}169, \\ z_2 = 1{,}169 + 0{,}1 \cdot (1{,}169 \cdot \ln 2{,}1 + 1), \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 3{,}217, \\ z_2 = 1{,}355. \end{cases}$$

Остальные вычисления проводим в MS Excel (табл. 3.5).

Таблица 3.5

i	x_i	y_i	z_i	$f(x_i;y_i;z_i)$	$g(x_i;y_i;z_i)$
0	2	3,0000	1,0000	1,0000	1,6931
1	2,1	3,1000	1,1693	1,1693	1,8676
2	2,2	3,1585	1,2627	1,2627	1,9956
3	2,3	3,2216	1,3625	1,3625	2,1348
4	2,4	3,2897	1,4692	1,4692	2,2862
5	2,5	3,3632	1,5835	1,5835	2,4510
6	2,6	3,4424	1,7061	1,7061	2,6302
7	2,7	3,5277	1,8376	1,8376	2,8252
8	2,8	3,6195	1,9788	1,9788	3,0375
9	2,9	3,7185	2,1307	2,1307	3,2686
10	3	3,8250	2,2941	2,2941	3,5204

Для оценки погрешности по правилу Рунге проведем аналогичные вычисления с шагом $2h = 0,2$. Вычисления представим в таблице 3.6.

Таблица 3.6

i	x_i	y_i	z_i	$f(x_i;y_i;z_i)$	$g(x_i;y_i;z_i)$	Погрешность
0	2	3,0000	1,0000	1,0000	1,6931	0,0000
1	2,2	3,2000	1,3386	1,3386	2,0555	0,0759
2	2,4	3,4677	1,7497	1,7497	2,5318	0,2805
3	2,6	3,8177	2,2561	2,2561	3,1557	0,5500
4	2,8	4,2689	2,8872	2,8872	3,9727	0,9084
5	3	4,8463	3,6818	3,6818	5,0448	1,3876

Ответ:

x_i	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
y_i	3,0000	3,1000	3,1585	3,2216	3,2897	3,3632	3,4424	3,5277	3,6195	3,7185	3,8250

3.6. Контрольные вопросы к теме «Решение дифференциальных уравнений и их систем»

1. Что называется дифференциальным уравнением?

2. Что называется порядком дифференциального уравнения?

3. Что является искомым в дифференциальном уравнении?

4. Что такое задача Коши?

5 . Сформулируйте достаточное условие существования и единственности решения задачи Коши.

6. Что такое краевая задача?

7. Сформулируйте методы решения дифференциальных уравнений.

8. В каком виде записывается найденное решение задачи Коши?

9. На чем основана сущность метода Эйлера.

10. Приведите расчетную формулу метода Эйлера.

11. Назовите модификации метода Эйлера и их расчетные формулы.

12. Приведите расчетную формулу метода Рунге-Кутта.

13. В чем заключается правило Рунге для оценки погрешности?

14. Как дифференциальное уравнение второго порядка свести к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка?

3.7. Задания для выполнения лабораторной работы «Решение дифференциальных уравнений и их систем»

Задание 1. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[x_0; x_0+1]$ с шагом $h=0{,}1$ методом:

а) аналитическим (точным);

б) Эйлера;

в) Эйлера с пересчетом;

г) усовершенствованным методом Эйлера;

д) Рунге-Кутта.

Для каждого численного метода осуществить два шага вручную, остальные шаги реализовать в MS Excel или MathCad. Погрешность численных методов оценить, сравнив с точным решением.

Таблица 3.7

Вариант	**Уравнение**	**Вариант**	**Уравнение**
1	$\left(x^2+1\right)y'+4xy=3,$ $y(0)=0$	2	$xy'-2y=2x^4,$ $y(1)=0$
3	$xy'+y=-xe^{-x^2},$ $y(1)=1/(2e)$	4	$xy'+y=\sin x,$ $y(\pi/2)=2/\pi$
5	$\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x,$ $y\left(\sqrt{2}\right)=1$	6	$x^2y'-2xy=3,$ $y(1)=-1$
7	$y'-3x^2y=x^2\left(1+x^3\right)/3,$ $y(0)=0$	8	$y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2},$ $y(0)=2/3$
9	$xy'-y=x^2\cos x,$ $y(\pi/2)=0$	10	$y'\operatorname{tg}x-y=2\sin^2 x\operatorname{tg}x,$ $y(\pi/2)=1$

Задание 2. Решить задачу Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (табл. 3.8) на отрезке $[t_0;t_0+1]$ с шагом $h=0{,}1$ методом:

а) Эйлера;

б) Эйлера с пересчетом;

в) усовершенствованным методом Эйлера;

г) Рунге-Кутта.

Для каждого численного метода осуществить два шага вручную, остальные шаги реализовать в MS Excel или MathCad. Погрешность численных методов оценить методом двойного пересчета (по правилу Рунге).

Таблица 3.8

Вариант	**Система**	**Вариант**	**Система**
1	$\begin{cases} x' = e^t - y, \\ y' = x + e^{-t}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$	2	$\begin{cases} x' = 2y + 4, \\ y' = -2x + 3t - 2e^{-t}, \\ x(0) = 3, y(0) = 2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t, \\ x(0) = y(0) = 2. \end{cases}$	4	$\begin{cases} x' = 4x - 5y + 6t - 3, \\ y' = 4y + 2 - 8t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2t^2 + 5t, \\ y' = -2y + 2t + 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t, \\ x(0) = y(0) = 2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t, \\ y' = x + y + t - 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} x' = y - x + e^t, \\ y' = x - y + e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = -y + 2x, \\ y' = -x + 2y - 5e^t \sin t, \\ x(0) = 2, y(0) = 3. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x' = 4x + y + 36t, \\ y' = -2x + y + 2e^t, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$

§ 4. Методы линейной оптимизации энерго-и ресурсосберегающих химико-технологических систем

4.1. Графический метод решения задачи линейного программирования

Важнейшей задачей применения расчетных методов при компьютерном моделировании химико-технологических систем является определение оптимальных условий их функционирования. Решение этой задачи связано с выбором критерия оптимальности (*целевой функции*), выявлением ресурсов оптимизации (*плана задачи, то есть неизвестных независимых переменных* $x_1, x_2, \ldots x_n$) и реализации метода оптимизации.

В данном параграфе будут рассмотрены методы решения простейших оптимизационных моделей – линейных. *Общей задачей линейного программирования* называется задача, которая состоит в определении максимального (или минимального) значения функции

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{4.1}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots x_l \ge 0,\ l \le n, \end{cases} \tag{4.2}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины, $k \le m$.

В случае двух независимых переменных данная задача легко решается графическим методом. Рассмотрим более подробно на примерах.

<u>Пример 4.1.</u> Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 56, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 40, \\ 6x_1 \qquad \le 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим *область допустимых решений* (множество точек пересечения полуплоскостей, каждая из которых задана соответствующим неравенством). Для этого:

1. Начертим систему координат (x_1 – ось абсцисс, x_2 – ось ординат).

2. Отметим сразу, что область допустимых решений задачи будет находиться в первом квадранте координатной плоскости, что вытекает из последних двух неравенств в системе ограничений.

3. Начертим прямую линию, задаваемую уравнением

$$4x_1 + 7x_2 = 56 \tag{4.3}$$

по двум точкам $(0;8)$ и $(14;0)$. Координаты точек вычисляем из уравнения (4.3), полагая, например, для первой точки $x_1 = 0$, а для второй $x_2 = 0$. В случае, если прямая проходит через начало координат, то координаты точек следует вычислять, полагая x_1 и затем x_2 любому числу, не равному нулю.

4. Так как любая прямая разделяет всю плоскость на две полуплоскости, то каждое неравенство в системе ограничений задает полуплоскость. Определяем, какую из двух полуплоскостей задает первое неравенство в системе ограничений. Для этого подставляем в неравенство любую точку плоскости, например, точку $(0;0)$. Так как эта точка удовлетворяет неравенству, то неравенство задает ту полуплоскость, которой принадлежит эта точка, а именно, нижнюю.

5. Аналогичным способом строим две другие полуплоскости, границами для которых служат соответственно прямые

$$5x_1 + 4x_2 = 40, \tag{4.4}$$

$$6x_1 = 24. \tag{4.5}$$

Тогда область допустимых решений, определяемая как пересечение всех трех полуплоскостей, представлена на рис. 4.1.

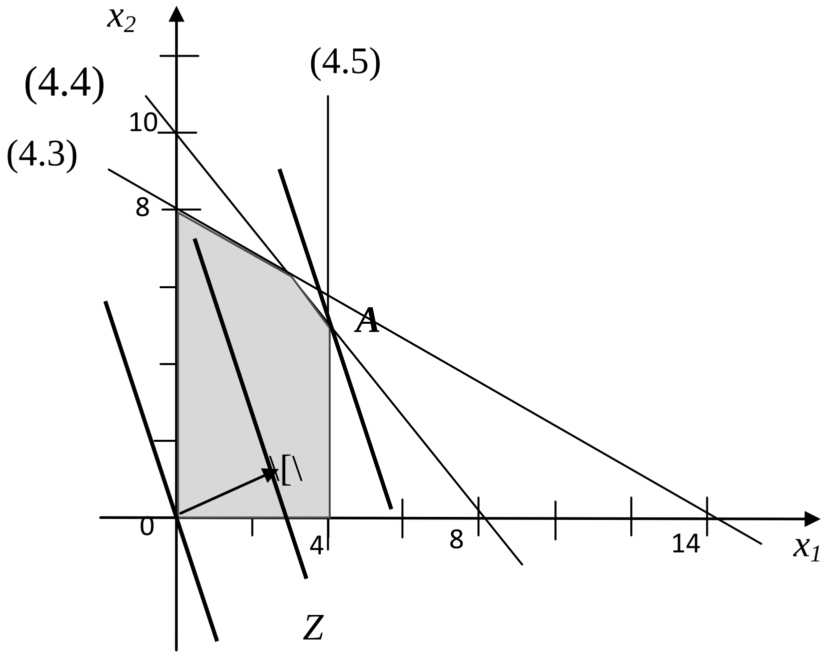


Рис.4.1. Решение задачи линейного программирования графическим методом

6. Начертим вектор-градиент линии уровня целевой функции: $\vec{N} = \overline{grad}(Z) = \left(\dfrac{\partial Z}{\partial x_1}; \dfrac{\partial Z}{\partial x_2} \right)$. Вычислив частные производные по соответствующим переменным, получаем $\vec{N}(3;1)$.

7. Перпендикулярно вектору $\vec{N}$ изобразим линию уровня целевой функции Z.

8. На области допустимых значений целевая функция принимает максимум в точке А, находящейся на пересечении прямых (4.3) и (4.5). Решив систему уравнений: $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 40, \\ 6x_1 \qquad\quad = 24, \end{cases}$ находим координаты точки $A = (4; 5)$.

9. Таким образом, максимальное значение целевой функции равно $Z_{\max} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 17$.

Ответ. Максимальное значение целевой функции $Z_{\max} = 17$ достигается в точке с координатами $A = (4; 5)$

Пример 4.2. Изобразить область допустимых значений, задаваемую системой:

$$\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 \geq 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Как и в примере 4.1., чертим прямые, которые задают границы полуплоскостей:

$$-2x_1 + 8x_2 = 8, \tag{4.6}$$

$$5x_1 + 2x_2 = 10, \tag{4.7}$$

$$x_1 - x_2 = 2. \tag{4.8}$$

Из рис. 4.2 видно, что все три полуплоскости никогда не пересекутся, то есть область, задаваемая данной системой неравенств, – пустая.

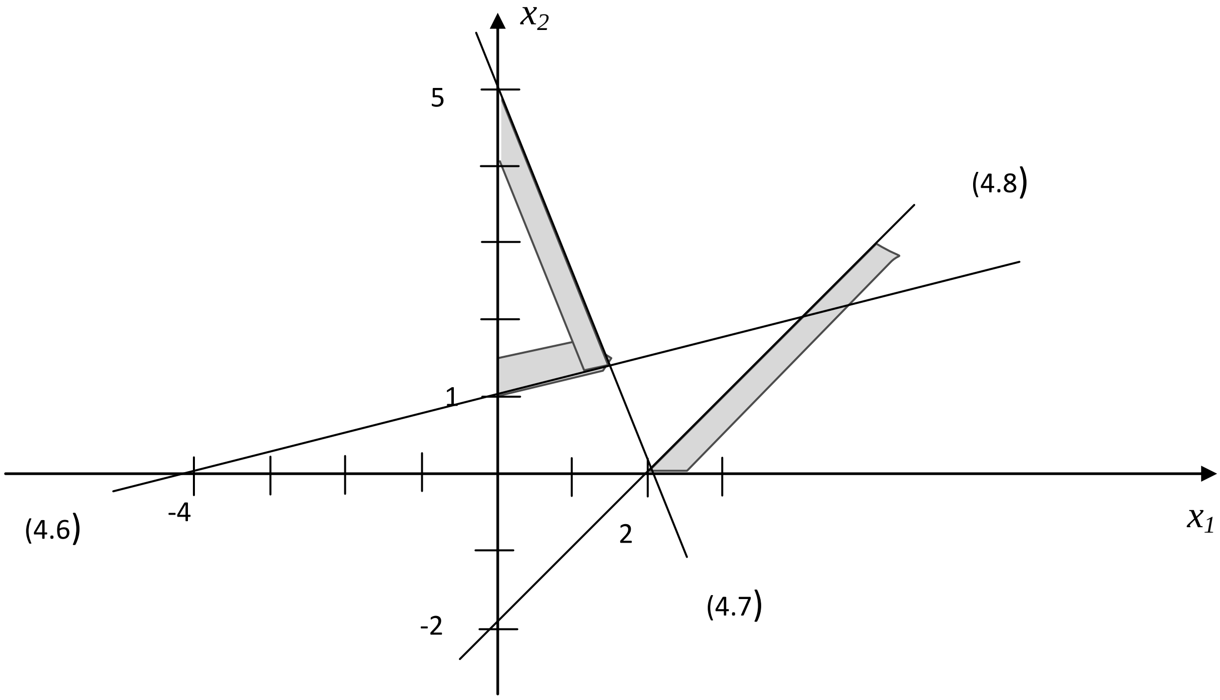


Рис.4.2. Пустая область допустимых решений

Ответ: задача решений не имеет.

Пример 4.3. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Границы полуплоскостей задаются прямыми (рис. 4.3):

$$x_1 + x_2 = 6, \tag{4.9}$$

$$x_1 - x_2 = 3. \tag{4.10}$$

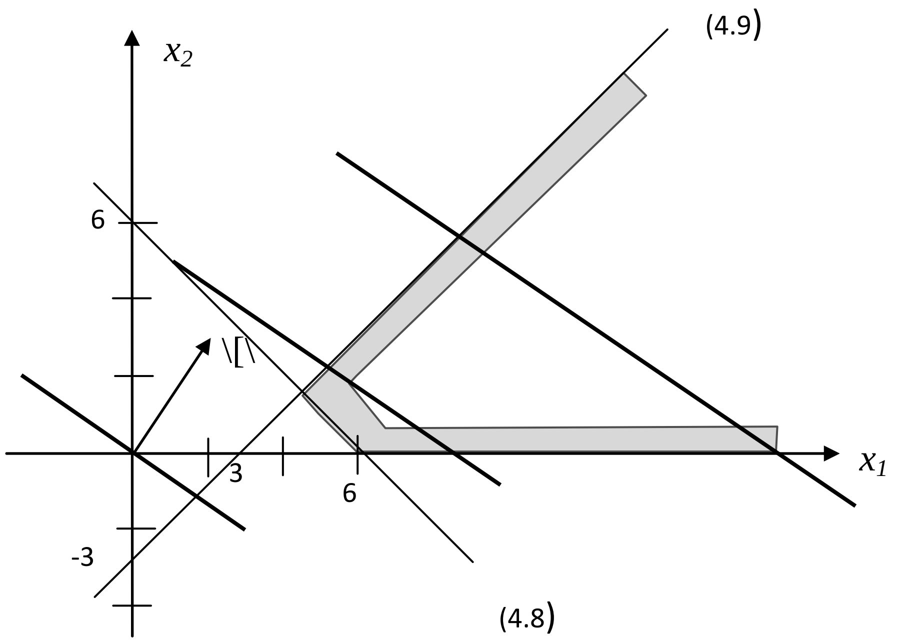


Рис. 4.3. Неограниченная область допустимых решений

Вектор направления возрастания целевой функции имеет координаты $\vec{N}(2;3)$. Очевидно, что целевая функция никогда не достигнет максимума на области допустимых решений.

Ответ. $Z_{\max} = +\infty$.

<u>Пример 4.4.</u> Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Прямые, задающие полуплоскости:

$$5x_1 - 2x_2 = 20, \tag{4.11}$$

$$x_1 + 2x_2 = 10, \tag{4.12}$$

$$-2x_1 + 5x_2 = 30. \tag{4.13}$$

Вектор направления возрастания целевой функции имеет координаты $\vec{N}(1;2)$. Тогда линия уровня целевой функции параллельна прямой (4.12) и принимает на отрезке AB наименьшее значение. Координаты точки $A=(0;5)$. Для вычисления координат точки B необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 20, \\ x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$$

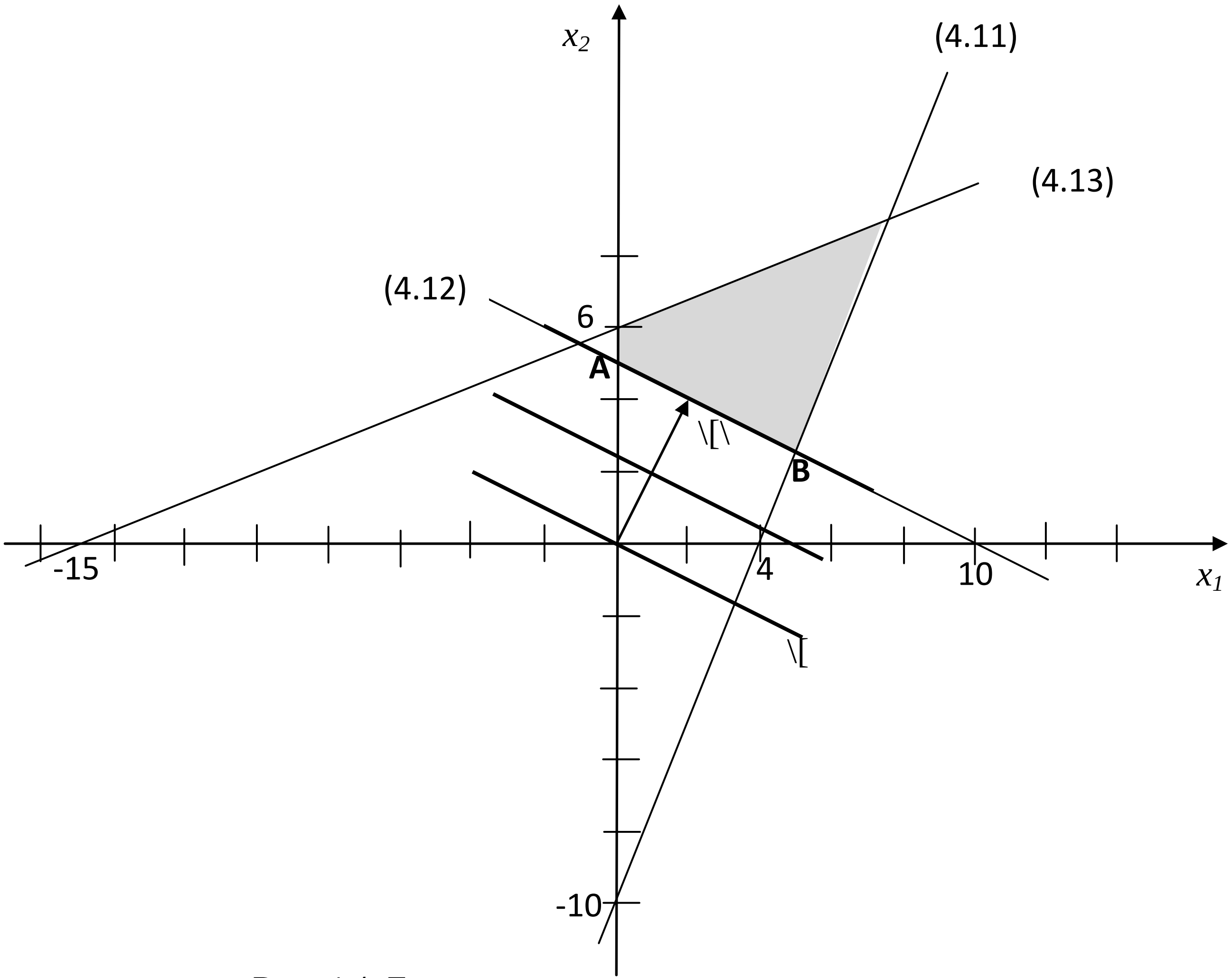


Рис. 4.4. Бесконечное множество точек минимума

Решив эту систему, получаем координаты точки $B=(5;2,5)$. Для нахождения максимального значения целевой функции подставим координаты любой точки отрезка, например, координаты точки B в целевую функцию: $Z_{\min}=1\cdot 5+2\cdot 2,5=10$.

Ответ. Минимальное значение целевой функции, достигаемое на отрезке $x_2=5-\frac{1}{2}x_1$, где $x_1\in[0;5]$, равно $Z_{\min}=10$.

4.2. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом

Общую задачу линейного программирования (ЗЛП) (4.1) – (4.2) более кратко можно представить в виде:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max\,(\min) \tag{4.14}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\ \left(i=1,2,\ldots k\right) & (4.15)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ \left(i=\overline{k+1,m}\right) & (4.16)\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,l},\ l\le n. & (4.17)\end{cases}$$

Стандартной (симметричной) ЗЛП называется задача (4.14) – (4.17) при условии $k=m$ и $l=n$, то есть все ограничения заданы в виде неравенств и на все переменные наложены условия неотрицательности.

Канонической (основной) ЗЛП называется задача (4.14) – (4.17) при $k=0$ и $l=n$, то есть система ограничений состоит из одних уравнений и на все переменные наложены условия неотрицательности.

Все формы ЗЛП эквивалентны, то есть если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то может быть определен оптимальный план любой из задач.

Правила перехода от одной формы записи ЗЛП к другой.

1. Переход от максимизации к минимизации (и наоборот) осуществляется изменением знаков перед всеми коэффициентами в выражении для целевой функции. То есть, если требуется найти минимум $Z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, то можно найти максимум функции $-Z(x)=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n$.

2. Переход к эквивалентной системе неравенств осуществляется изменением знака перед всеми коэффициентами неравенства и сменой знака неравенства. То есть неравенство $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\le b_i$ эквивалентно неравенству $-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ldots-a_{in}x_n\ge -b_i$.

3. Обращение неравенства в равенство осуществляется добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, если неравенство имеет знак "$\le$" и вычитанием неотрицательной переменной, если неравенство имеет знак "$\ge$". Неравенство $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\le b_i$ можно записать в виде $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i,\ x_{n+1}\ge 0$. Неравенство $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\ge b_i$ можно записать в виде $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i,\ x_{n+1}\ge 0$.

4. Обращение равенства в неравенство происходит, если каждое уравнение системы ограничений $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i$ записать в виде системы неравенств $\begin{cases} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\le b_i, \\ -a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\ldots-a_{in}x_n\le -b_i. \end{cases}$

5. Переход от переменных, не имеющих ограничения в знаке, к неотрицательным переменным состоит в том, что переменная x_j полагается разности двух неотрицательных переменных $x_j = x'_j - x''_j$, $x'_j \geq 0$, $x''_j \geq 0$.

Теорема 4.1. Множество планов канонической ЗЛП является выпуклым, если оно не пусто.

Непустое множество планов основной ЗЛП называется *многогранником решений*, а всякая угловая точка многогранника решений – *вершиной*.

Теорема 4.2. Если каноническая ЗЛП имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Допустимым базисным решением канонической ЗЛП (*опорным планом*) называется базисное решение $\bar{x}$ системы (4.15), (4.16), удовлетворяющее условию (4.17).

Теорема 4.3. Каждому опорному плану ЗЛП соответствует вершина многогранника решений, и наоборот, каждой вершине многогранника решений соответствует опорный план.

Выводы.

1. Непустое множество планов канонической ЗЛП образует выпуклый многогранник.

2. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план.

3. В одной из вершин многогранника решений значение целевой функции является оптимальным.

Исходя из свойств ЗЛП, можно заключить, что поиск её решения сводится к последовательному перебору вершин многогранника решений. Для реальных многомерных задач на практике такой перебор не осуществим. Число перебираемых допустимых базисных решений можно сократить, если производить перебор не беспорядочно, а с учетом того, чтобы по значениям целевой функции каждое следующее решение было «не хуже» предыдущего. Идея последовательного улучшения решения легла в основу универсального метода решения ЗЛП – *симплексного метода*.

Симплекс (от латинского simplex – простой) – простейший выпуклый многогранник в n-мерном пространстве с $n+1$ вершиной.

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Данцигом в 1949 г, однако еще в 1939 г идеи метода были разработаны российским ученым Канторовичем. Для реализации симплексного метода необходимо освоить три элемента.

1.Способ определения начального опорного плана.

2. Правило перехода к лучшему опорному плану.

3. Критерий проверки оптимальности найденного решения.

Построение начального опорного плана.

Пусть дана каноническая ЗЛП. Система ограничений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ b_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Говорят, что ограничение ЗЛП имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательной правой части левая часть ограничений содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения-равенства – с коэффициентом, равным нулю. Соответствующие переменные называются *предпочтительными*.

Предпочтительные переменные являются базисными, а все остальные свободными.

Если система ограничений представлена в предпочтительном виде, то начальный опорный план можно найти, если приравнять все свободные переменные к нулю, тогда базисные переменные будут равны правым частям ограничений.

Рассмотрим два случая. Первый случай. Пусть система ограничений имеет вид $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\, b_i \ge 0,\, i=\overline{1,m}$. Приведем систему к каноническому виду, добавлением к левым частям неравенств дополнительных переменных $x_{n+i} \ge 0,\, i=\overline{1,m}$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\, b_i \ge 0,\, i=\overline{1,m}$. Эта система имеет предпочтительный вид. Полагая свободные переменные равными нулю, получаем начальный опорный план: $x^{(0)} = \left(\underbrace{0;\quad 0;\quad \ldots\quad 0;}_{n} \underbrace{b_1;\quad b_2;\quad \ldots\quad b_m}_{m} \right)$. В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+i} = 0,\, i=\overline{1,m}$.

Второй случай. Пусть система ограничений имеет вид: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\, b_i \ge 0,\, i=\overline{1,m}$. Сведем её к канонической вычитанием из левых частей неравенств дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0,\, i=\overline{1,m}$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,\, b_i \ge 0,\, i=\overline{1,m}$. Система ограничений не имеет предпочтительного вида, а базисный план $x^{(0)} = \left(0;\quad 0;\quad \ldots\quad 0;\quad -b_1;\quad -b_2;\quad \ldots\quad -b_m \right)$ не является допустимым. В этом случае для нахождения базисного решения применяют *метод искусственного базиса*. К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные y_i. В целевую функцию переменные y_i вводят с коэффициентом **-М** для задачи на максимум и с коэффициентом **М** для задачи на минимум, где **М** – большое положительное число (миллион, миллиард). Полученная задача называется *М-задачей*. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Пусть исходная ЗЛП имеет вид

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \quad (4.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m} \quad (4.19)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \quad (4.20)$$

Если ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной, то М-задача запишется так:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j -(+)\sum_{i=1}^{m} My_i \to \max(\min) \quad (4.21)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i,\ b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}, \quad (4.22)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ y_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}. \quad (4.23)$$

Задача (4.21) – (4.23) имеет предпочтительный вид. Её начальный опорный план $x^{(0)}=\left(0;\quad 0;\quad \ldots\quad 0;\quad b_1;\quad b_2;\quad \ldots\quad b_m\right)$.

Если некоторые из уравнений (4.16) имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

Теорема 4.4. Если в оптимальном плане $\overline{x}=\left(x_1;\quad x_2;\quad \ldots\quad x_n;\quad y_1;\quad y_2;\quad \ldots\quad y_m\right)$ М-задачи (4.21)-(4.23) все искусственные переменные $y_i=0, i=\overline{1,m}$, то план $x^*=\left(x_1;\quad x_2;\quad \ldots\quad x_m\right)$ является оптимальным планом исходной задачи (4.18) – (4.20).

Теорема 4.5. Если в оптимальном плане М-задачи (4.21) – (4.23) хотя бы одна из искусственных переменных не равна нулю, то исходная задача (4.18)-(4.20) не имеет допустимых планов.

Критерий оптимальности опорного плана. Симплексные таблицы.

Пусть ЗЛП представлена в эквивалентном предпочтительном виде:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \max(\min) \qquad (4.24)$$

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ b_i\ge 0,\ i=\overline{1,m} \qquad (4.25)$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}. \qquad (4.26)$$

Выразим базисные переменные $x_1,\ x_2,\ldots x_m$ из равенств (4.25) через свободные переменные $x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots x_n$ и подставим в целевую функцию.

$$Z(x)=\left(b_1-\sum_{j=m+1}^{n}a_{1j}x_j\right)c_1+\left(b_2-\sum_{j=m+1}^{n}a_{2j}x_j\right)c_2+\ldots$$

$$+\left(b_m-\sum_{j=m+1}^{n}a_{mj}x_j\right)c_m+c_{m+1}x_{m+1}+\ldots+c_n x\ .$$

После группировки подобных членов получим:

$$Z(x)=\left(c_1b_1+c_2b_2+\ldots+c_mb_m\right)-$$

$$-(c_1a_{1,m+1}+c_2a_{2,m+1}+\ldots+c_ma_{m,m+1}-c_{m+1})x_{m+1}-$$

$$-(c_1a_{1,m+2}+c_2a_{2,m+2}+\ldots+c_ma_{m,m+2}-c_{m+2})x_{m+2}-\ldots.$$

$$-(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\ldots+c_ma_{mn}-c_n)x_n.$$

Обозначим: $\Delta_0=c_1b_1+c_2b_2+\ldots+c_mb_m=C_Б A_0$,

$$\Delta_j=(c_1a_{1j}+c_2a_{2j}+\ldots+c_ma_{mj}-c_j)=C_Б A_j-c_j,\ j=\overline{1,n}, \qquad (4.27)$$

где $C_Б=\left(c_1,c_2,\ldots c_m\right)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $A_0=\left(b_1,b_2,\ldots b_m\right)^T$ – вектор-столбец свободных членов;

$A_j=\left(a_{1j},a_{2j},\ldots a_{mj}\right)^T$ – вектор-столбец коэффициентов при переменных

$x_j,\ j=\overline{1,n}.$

Тогда задачу (4.24) – (4.26) записывают в *симплексную таблицу*:

$Б$	$C_Б$	A_0	c_1	c_2	...	c_i	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n
			x_1	x_2	...	x_i	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}
x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+2}$	…	a_{2j}	…	a_{2n}
...	…	…	…	…	…	….	…	…	…	…	…	…	…
x_i	c_i	b_i	0	0	…	1	…	0	$a_{i,m+1}$	…	a_{ij}	…	a_{in}
...	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}
$z_j - c_j$		Δ_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_n

В верхней строке симплексной таблицы указаны коэффициенты при неизвестных из целевой функции. Во второй строке – название переменных. В первом столбце приведены базисные переменные, во втором – коэффициенты при базисных переменных, в третьем – правые части системы ограничений, в четвертом и последующих столбцах – коэффициенты при соответствующих переменных в системе ограничений. Последняя строка симплексной таблицы называется *индексной*, числа Δ_j называют *оценками переменных* и вычисляются по формуле (4.27).

Теорема 4.6. (Критерий оптимальности). Пусть исходная задача решается на максимум (минимум). Если для некоторого опорного плана все оценки Δ_j, $j=\overline{1,n}$ не отрицательны (не положительны), то такой план оптимален.

Переход к не худшему опорному плану.

Рассмотрим ЗЛП на максимум, представленную в виде (4.24) – (4.26). Её начальный опорный план $x^{(0)} = (b_1, b_2, \ldots b_m, 0, 0, \ldots 0)$. Значение целевой функции $Z(x^0) = \Delta_0$. Если в симплексной таблице все $\Delta_j \geq 0$, то согласно теореме 4.6 план оптимальный.

Предположим теперь, что существуют отрицательные оценки Δ_j, то есть план не оптимальный. Пусть наибольшей по модулю отрицательной оценке соответствует номер j_0, то есть $\Delta_{j_0} = \max\left|\Delta_j\right|,\ \Delta_j < 0$. Вектор-столбец A_{j_0} называется *направляющим столбцом*. Переменная x_{j_0} будет новой базисной переменной. За счет неё можно увеличить значения целевой функции, если вычислить отношения $\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$, $i = \overline{1,m}$ и среди них выбрать минимальное.

Отношение $\theta = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}$ называется *наименьшим симплексным отношением*. Строку с номером i_0 называют *направляющей строкой*, а элемент $a_{i_0 j_0}$ – *ключевым элементом*.

Переменную x_{i_0}, соответствующую направляющей строке необходимо вывести из базисных переменных. После выделения направляющего столбца и направляющей строки находят новый опорный план $x^{(1)}$, в котором переменная x_{i_0} будет заменена на x_{j_0}. Причем, $Z\left(x^1\right) \geq Z\left(x^0\right)$.

Процесс нахождения нового опорного плана и коэффициентов при неизвестных реализуется методом Жордана-Гаусса по формулам:

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \cdot a_{ij_0} & при\ i \neq i_0, \\ \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} & при\ i = i_0, \end{cases} \qquad a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \dfrac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} \cdot a_{ij_0} & при\ i \neq i_0, \\ \dfrac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} & при\ i = i_0. \end{cases}$$

Вычисленные значения b_i' и a_{ij}' заносят в новую симплексную таблицу.

Особые случаи симплексного метода.

1. Не единственность оптимального решения (альтернативный оптимум).

Теорема 4.7. Если в индексной строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

2. Признак неограниченности целевой функции

Теорема 4.8. Если в индексной строке симплексной таблицы ЗЛП на максимум (минимум) содержится отрицательная оценка $\Delta_{j_0} < 0$ (положительная оценка $\Delta_{j_0} > 0$), а в столбце переменной x_{j_0} нет ни одного положительного элемента, то на множестве допустимых планов целевая функция не ограничена сверху (снизу).

3. Появление вырожденного базисного решения.

При решении ЗЛП предполагается, что задача имеет базисные решения и каждое такое решение является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные базисные решения, то на одной из итераций одна или несколько переменных базисного решения могут оказаться равными нулю. Следовательно, при переходе от одного базисного решения к другому значение целевой функции останется прежним. Возможно, что функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций. Возможен переход к начальному опорному плану. В этом случае говорят, что происходит зацикливание. Алгоритм вывода из зацикливания достаточно сложен. В простейшем случае следует изменить выбор направляющего столбца или направляющей строки.

Алгоритм симплекс-метода решения ЗЛП на максимум.

1. Приводим систему ограничений к предпочтительному виду, находим начальный опорный план.

2. Составляем симплексную таблицу.

3. Проверяем выполнение критерия оптимальности (теорема 4.6). Если в индексной строке все $\Delta_j \geq 0$, то план оптимальный. В противном случае выбирают наибольшую по модулю отрицательную оценку, которая определяет новую базисную переменную x_{j_0}.

4. Определяем переменную x_{i_0}, которая выйдет из базисных. Для этого составляем оценочные отношения $\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$ по правилам:

a) равно ∞, если b_i и a_{ij_0} имеют разные знаки;

b) равно ∞, если $b_i = 0$ и $a_{ij_0} < 0$;

c) равно ∞, если $a_{ij_0} = 0$;

d) равно 0, если $b_i = 0$ и $a_{ij_0} > 0$;

e) $\left|\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}\right|$, если b_i и a_{ij_0} имеют одинаковые знаки.

Определяем θ – наименьшее симплексное отношение. Если $\theta = \infty$, то целевая функция не ограничена.

5. Используя метод Жордана-Гаусса перейти к следующей симплексной таблице.

6. Повторяем до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или не установлена неразрешимость задачи.

Пример 4.5. Решить ЗЛП симплекс-методом.

$$F = 17x_1 + 32x_2 \to \max \tag{4.28}$$

$$\begin{cases} 16x_1 + 32x_2 \leq 544, \\ 15x_1 + 25x_2 \leq 480, \\ 9x_1 + 3x_2 \leq 445, \end{cases} \tag{4.29}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \tag{4.30}$$

Для решения задачи симплекс–методом приведем задачу (4.28)-(4.30) к *каноническому виду*, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Неравенства (4.29) преобразуются в уравнения путем добавления указанных переменных по одной в каждое неравенство:

$$\begin{cases} 16x_1 + 32x_2 + x_3 = 544, \\ 15x_1 + 25x_2 + x_4 = 480, \\ 9x_1 + 3x_2 + x_5 = 445. \end{cases} \tag{4.31}$$

Переменные x_3, x_4, x_5 также неотрицательны и тривиальная система неравенств (4.30) в итоге принимает вид:

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \tag{4.32}$$

Введем новые переменные в целевую функцию с коэффициентами, равными 0:

$$F = 17x_1 + 32x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5. \tag{4.33}$$

Таким образом, (4.31)-(4.33) – канонический вид задачи.

Решаем задачу (4.31)-(4.33) симплекс-методом. В качестве базисных переменных выбираем переменные x_3, x_4, x_5, каждая из которых входит только в одно уравнение системы (4.31) и поэтому матрица коэффициентов при них будет единичной, и, стало быть, невырожденной. Остальные переменные (x_1 и x_2) будут свободными. Подставив в (4.31) $x_1 = x_2 = 0$, легко получаем значения базисных переменных: x_3= 544; x_4= 480; x_5= 445, которые удовлетворяют ограничениям (4.32). Тем самым найден исходный опорный план, который в векторном виде запишется: $\overline{x}_0$ = (0 ; 0 ; 544 ; 480 ; 445).

Подставив компоненты $\overline{x}_0$ в целевую функцию (4.33), получим её значение для этого плана: $F(\overline{x}_0)$=0. Теперь составим первоначальную симплексную таблицу (табл. 4.1):

Таблица 4.1

Базис	c_j / c_i	План	17	32	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	544	16	32	1	0	0	544/32=17
x_4	0	480	15	25	0	1	0	480/25=$19\frac{1}{5}$
x_5	0	445	9	3	0	0	1	445/3=$148\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$		0	-17	-32	0	0	0	-

Переменная, которая войдет в число базисных – это x_2, так как ей в индексной строке соответствует наименьшее отрицательное число -32. Переменная, “покидающая” число базисных – это x_3, так как ей соответствует минимальное симплексное отношение $\theta_1 = 17$.

Пересчитаем таблицу. Заполнение новой таблицы (табл. 4.2) начинаем с разрешающей (первой) строки – строки x_2. Элементы разрешающей строки прежней таблицы делим на ключевой элемент, который равен 32. Для заполнения второй строки табл. 4.2 умножим каждый элемент первой строки табл. 4.2 на (-25) и прибавим к соответствующему элементу строки 2 табл. 4.1. Для заполнения третьей строки табл. 4.2 умножим каждый элемент первой строки таблицы 2 на (-3) и прибавим к соответствующему элементу строки 3 табл. 4.1. Получаем:

Таблица 4.2

Базис	c_j / c_i	План	17	32	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	32	17	1/2	1	1/32	0	0	$17:\frac{1}{2}=34$
x_4	0	55	5/2	0	-25/32	1	0	$55:\frac{5}{2}=22$
x_5	0	394	15/2	0	-3/32	0	1	$394:\frac{15}{2}=52\frac{8}{15}$
$z_j - c_j$		544	-1	0	1	0	544	

Произошел переход к новым базисным переменным: x_2, x_4, x_5. При этом переменные x_1, x_3 являются свободными, и в новом опорном плане их значения равны нулю. Значения остальных переменных получаем из нового столбца b свободных членов (находятся напротив единиц базисных переменных):
$x_2 = 17$; $x_4 = 55$; $x_5 = 394$.

Запишем опорный план в векторной форме: $\overline{X}_1 = (0; 17; 0; 55; 394)$.
Этому плану соответствует значение целевой функции, равное 544.

Переменная, которая войдет в число базисных – это x_1, так как ей в индексной строке соответствует наименьшее отрицательное число -1. Переменная, “покидающая” число базисных – это x_4, так как ей соответствует минимальное симплексное отношение $\theta_2 = 22$.

Пересчитаем таблицу. Заполнение новой таблицы (табл. 4.3) начинаем с разрешающей (второй) строки – строки x_1. Элементы разрешающей строки прежней таблицы делим на ключевой элемент, который равен 5/2. Для заполнения первой строки табл. 4.3 умножим каждый элемент второй строки табл. 4.2 на (-1/2) и прибавим к соответствующему элементу строки 1 табл. 4.2. Для заполнения третьей строки табл. 4.3 умножим каждый элемент второй строки табл. 4.3 на (-15/2) и прибавим к соответствующему элементу строки 3 табл. 4.2. Получаем:

Таблица 4.3

Базис	c_j / c_i	План	17	32	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	32	6	0	1	3/16	-1/5	0	
x_1	17	22	1	0	-5/16	2/5	0	
x_5	0	229	0	0	9/4	-3	1	
$z_j - c_j$		566	0	0	11/16	2/5	0	

Произошел переход к новым базисным переменным: x_2, x_1, x_5. При этом переменные x_3, x_4 являются свободными, и в новом опорном плане их значения равны нулю. Значения остальных переменных получаем из нового столбца b свободных членов (находятся напротив единиц базисных переменных): $x_2 = 6$; $x_1 = 22$; $x_5 = 229$.

Запишем опорный план в векторной форме: $\overline{x}_2 = (22; 6; 0; 0; 229)$.

Этому плану соответствует значение целевой функции, равное 566.

Поскольку в индексной строке уже нет отрицательных элементов, план является оптимальным: $\overline{x}^* = \overline{x}_2$; $F_{\max}=566$.

Ответ: $\overline{x}^* = (22; 6)$, $F_{\max}=566$.

<u>Пример 4.6.</u> Решить ЗЛП симплекс-методом с использованием М-метода.

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases} \tag{4.35}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \tag{4.36}$$

Для решения задачи симплекс–методом приведем задачу (4.34)-(4.36) к *каноническому виду*, введя дополнительные переменные x_5, x_6. Неравенства (4.35) преобразуются в уравнения путем добавления переменной x_5 во второе неравенство и вычитания переменной x_6 из третьего неравенства. Целевую функцию перепишем на максимум, поменяв коэффициенты при неизвестных на противоположные значения:

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10. \end{cases} \tag{4.37}$$

Начальный план $x^0 = (0; 0; 0; 24; 22; -10)$ недопустимый. Воспользуемся М-методом. В третье ограничение системы (4.37) добавим искусственную переменную y_1, а в целевую функцию введем её с коэффициентом -М, где М – большое положительное число. Получаем канонический вид задачи:

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - My_1 \to max \tag{4.38}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + y_1 = 10. \end{cases} \tag{4.39}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,6}, \; y_1 \ge 0. \tag{4.40}$$

Решаем задачу (4.38)-(4.40) симплекс-методом. В качестве базисных переменных выбираем переменные x_4, x_5, y_1, каждая из которых входит только в одно уравнение системы (4.39) и поэтому матрица коэффициентов при них будет единичной, и, стало быть, невырожденной. Остальные переменные будут свободными. Подставив в (4.39) $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 0$, легко получаем значения базисных переменных: x_4= 24; x_5= 22; y_1= 10, которые удовлетворяют ограничениям (4.39). Тем самым найден исходный опорный план, который в векторном виде запишется: $\overline{x}_0$= (0 ; 0 ; 0 ; 24 ; 22 ; 0 ; 10). Подставив компоненты $\overline{x}_0$ в целевую функцию (4.38), получим её значение для этого плана: $F(\overline{x}_0)$=0. Теперь составим первоначальную симплексную таблицу (табл. 4.4):

Таблица 4.4

Базис	c_j / c_i	План	2	-3	6	1	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	
x_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0	24/-2=∞
x_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	22/4=5,5
y_1	-M	10	1	-1	2	0	0	-1	1	10/2=5
$z_j - c_j$		-10M +24	-M	M +3	-2M -8	0	0	M	0	-

Переменная, которая войдет в число базисных – это x_3, так как ей в индексной строке соответствует наименьшее отрицательное число -2M-8. Переменная, «покидающая» число базисных – это y_1, так как ей соответствует минимальное симплексное отношение $\theta_3 = 5$.

Пересчитаем таблицу. Заполнение новой таблицы (табл. 4.5) начинаем с разрешающей (третьей) строки – строки x_3. Элементы разрешающей строки прежней таблицы делим на ключевой элемент, который равен 2. Для заполнения первой строки табл. 4.5 умножим каждый элемент третьей строки табл. 4.5 на (2) и прибавим к соответствующему элементу строки 1 табл. 4.4. Для заполнения второй строки табл. 4.5 умножим каждый элемент третьей строки табл. 4.5 на (-4) и прибавим к соответствующему элементу строки 2 табл. 4.4. Заметим, что столбец можно не заполнять, так как y_1 носит вспомогательный характер и с учетом её коэффициента в целевой функции больше не войдет в число базисных переменных. Получаем:

Таблица 4.5

Базис	c_j / c_i	План	2	-3	6	1	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	
x_4	1	34	3	0	0	1	0	-1		34/-1=∞
x_5	0	2	-1	4	0	0	1	2		2/2=1
x_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	-1/2		∞
$z_j - c_j$		64	4	0	0	0	0	-4		

Произошел переход к новым базисным переменным: x_3, x_4, x_5. При этом переменные x_1, x_2, x_6 являются свободными, и в новом опорном плане их значения равны нулю. Значения остальных переменных получаем из нового столбца b свободных членов (находятся напротив единиц базисных переменных): $x_3 = 5$; $x_4 = 34$; $x_5 = 2$. Запишем опорный план в векторной форме: $\overline{x}_1 = (0; 0; 5; 34; 2; 0)$. Этому плану соответствует значение целевой функции, равное 64.

Переменная, которая войдет в число базисных – это x_6, так как ей в индексной строке соответствует наименьшее отрицательное число -4. Переменная, «покидающая» число базисных – это x_5, так как ей соответствует минимальное симплексное отношение $\theta_2 = 1$.

Пересчитаем таблицу. Заполнение новой таблицы (табл. 4.6) начинаем с разрешающей (второй) строки – строки x_6. Элементы разрешающей строки прежней таблицы делим на ключевой элемент, который равен 2. Для заполнения первой строки табл. 4.6 каждый элемент второй строки табл. 4.6 прибавим к соответствующему элементу строки 1 табл. 4.5. Для заполнения третьей строки табл. 4.6 умножим каждый элемент второй строки табл. 4.6 на (1/2) и прибавим к соответствующему элементу строки 3 табл. 4.5. Получаем:

Таблица 4.6

Базис	c_j / c_i	План	2	-3	6	1	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	
x_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0		
x_6	0	2	-1/2	2	0	0	1/2	1		
x_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0		
$z_j - c_j$		68	2	8	0	0	2	0		

Произошел переход к новым базисным переменным: x_4, x_6, x_3. При этом переменные x_1, x_2, x_5 являются свободными, и в новом опорном плане их значения равны нулю. Значения остальных переменных получаем из нового столбца b свободных членов (находятся напротив единиц базисных переменных): $x_4 = 35$; $x_6 = 2$; $x_3 = 11/2$. Запишем опорный план в векторной форме: $\overline{x}_2 =$ (0; 0; 11/2; 35; 0; 2). Этому плану соответствует значение целевой функции, равное 68. Поскольку в индексной строке уже нет отрицательных элементов, план является оптимальным: $\overline{x}^* = \overline{x}_2$; $F_{\max}$=68.

Ответ: $\overline{x}$*=(0; 0; 11/2; 35), $F_{\max}$=68.

4.3. Задача оптимального планирования перевозок груза

Имеется m пунктов производства, в которых сосредоточены запасы какого-то однородного груза и n пунктов потребления. Требуется составить оптимальный план перевозок груза таким образом, чтобы общая стоимость всех перевозок груза была минимальной.

В общем виде модель *задачи оптимального планирования перевозок груза* можно записать следующим образом:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (4.41)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots m, \qquad (4.42)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots n, \qquad (4.43)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots m; \quad j = 1, 2, \ldots n. \qquad (4.44)$$

i – индекс пунктов производства;

j – индекс пунктов потребления;

x_{ij} – количество груза, перевозимого из пункта i в пункт j;

c_{ij} – стоимость (тариф) перевозки единицы груза из пункта i в пункт j;

a_i – запас груза в пункте i;

b_j – потребность в грузе в пункте j.

В моделях оптимального планирования перевозок груза должно выполняться *балансовое равенство*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (4.45)$$

то есть суммарный запас груза должен равняться суммарным потребностям. Модели, для которых выполняется балансовое равенство, называются *закрытыми*, а в которых не выполняется – *открытыми*.

Условия транспортной задачи записывают в виде таблицы перевозок (табл. 4.7). Здесь представлен случай трех пунктов производства и четырех пунктов потребления:

Таблица 4.7. Таблица перевозок

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}
a_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}

I. *Закрытая модель транспортной задачи*

Методы построения первоначального опорного плана

1. Метод северо-западного угла. Заполнение таблицы начинается с левой верхней клетки, куда дается максимально возможная поставка. Объем поставки (число x_{11}) выбирается таким, чтобы полностью закрыть либо потребность по столбцу b_1, либо запас по строке a_1,то есть в качестве x_{11} выбирается минимум между запасами груза на первом складе и потребностями в грузе у первого потребителя $x_{11} = \min(a_1; b_1)$. Дальнейшее заполнение таблицы происходит слева направо, сверху вниз.

2. Метод наименьшего тарифа. Заполнение таблицы начинается с клетки с наименьшим тарифом. Если таких клеток несколько, то заполняется та, у которой объем перевозок больше. Объем поставки определяется, как и в методе

северо-западного угла. Заполнив первую клетку, среди оставшихся клеток снова выбираем клетку с наименьшим тарифом и т.д.

Проверка условия оптимальности плана методом потенциалов

Для каждой *занятой объемами перевозок клетки* таблицы записываем уравнение

$$u_i + v_j = c_{ij}, \tag{4.46}$$

где $i = 1, 2, \ldots n;\ j = 1, 2, \ldots m.$

Решаем систему уравнений относительно чисел u_i, v_j, называемых *потенциалами*, полагая, например $u_1 = 0$.

Для клеток, *не занятых объемами перевозок* (свободные клетки) считаем *оценки*:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \tag{4.47}$$

где $i = 1, 2, \ldots n;\ j = 1, 2, \ldots m.$

Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то *план оптимальный*, в противном случае осуществляем перераспределение поставок следующим образом.

Из клетки, которой соответствует наибольшая положительная оценка, начинаем строить цикл, поставив в этой клетке знак «+». *Цикл* – это замкнутая ломаная линия, звенья которой параллельны строкам и столбцам таблицы, а *вершины лежат в занятых клетках*. Вершинам цикла поочередно присваиваем знаки «-» и «+». Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбирают наименьший и обозначают d. В новой таблице прибавляют d к объемам груза в «плюсовых» клетках и вычитают d из объемов «минусовых» клеток.

Пример 4.7. По данным о запасах груза на трех складах, потребностях в грузе у четырех магазинов и тарифах на перевозки, приведенных в таблице, записать экономико-математическую модель задачи оптимального планирования перевозок груза. Построить первоначальный опорный план методом северо-западного угла и методом наименьшего тарифа. Опираясь на план, построенный методом наименьшего тарифа, найти оптимальный план методом потенциалов.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	3	6	7	5
7	7	1	7	4
8	2	5	8	8
6	6	1	6	8

<u>Решение.</u> Обозначим x_{ij} – количество груза, перевозимого из пункта i в пункт j, где $i=1,2,3;\ j=1,2,3,4$.

Балансовое равенство выполняется (суммарная потребность в грузе равняется суммарным запасам: 7+8+6=3+6+7+5), значит, транспортная задача – закрытая. Тогда экономико-математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$Z(x)=7x_{11}+x_{12}+7x_{13}+4x_{14}+2x_{21}+5x_{22}+8x_{23}+8x_{24}+6x_{31}+$$
$$+x_{32}+6x_{33}+8x_{34}\to\min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=8,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=6,\\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=3,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=6,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=7,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=5,\\ x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3;\ \ j=1,2,3,4. \end{cases}$$

Построим первоначальный опорный план методом северо-западного угла. В левую верхнюю клетку делаем максимально возможную поставку $x_{11}=\min(a_1;b_1)=\min(7;3)=3$. Тем самым на первом складе остается 4 единицы груза, а потребности первого магазина удовлетворены полностью, поэтому следующую перевозку будем осуществлять с первого склада ко второму потребителю: $x_{12} = \min(a_1\text{-}3; b_2) = \min(4; 6) = 4$. Так как при этом на первом складе запас груза исчерпан, а потребности второго потребителя удовлетворены не полностью, то производим поставку со второго склада второму магазину: $x_{22} = 2$. Продолжаем до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а потребности магазинов не удовлетворены полностью. В итоге получаем:

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	3	6	7	5
7	7 **3**	1 **4**	7	4
8	2	5 **2**	8 **6**	8
6	6	1	6 **1**	8 **5**

Посчитаем стоимость перевозки: $Z_{\min} = 7 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 5 = 129$ (д. ед.).

Построим первоначальный опорный план методом наименьшего тарифа. На первом шаге заполняется клетка с наименьшим тарифом 1. Заметим, что клеток с наименьшим тарифом две, но так как максимальные объемы поставок в обе клетки одинаковы, то заполнение таблицы можно начать как с той, так и с другой клетки. Будем осуществлять перевозку с первого склада ко второму потребителю: $x_{12} = \min(a_1; b_2) = \min(7; 6) = 6$. Тем самым на первом складе осталась одна единица груза, а потребности второго магазина удовлетворены полностью. Поэтому далее выбираем клетку с наименьшим тарифом из второго, четвертого и пятого столбцов таблицы. Это клетка с тарифом 2: $x_{21} = \min(a_2; b_1) = \min(8; 3) = 3$. Далее заполнение таблицы происходит следующим образом:

$x_{13} = \min(a_1\text{-}6; b_3) = \min(1; 5) = 1$, $x_{33} = \min(a_3; b_3) = \min(6; 7) = 6$,

$x_{23} = \min(a_2 - 3; b_3 - 6) = \min(5; 1) = 1$, $x_{24} = \min(a_2 - 3 - 1; b_4 - 1) = \min(4; 4) = 4$

.

Первоначальный опорный план, построенный методом наименьшего тарифа:

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	3	6	7	5
7	7	1 **6**	7	4 **1**
8	2 **3**	5	8 **1**	8 **4**
6	6	1	6 **6**	8

Стоимость перевозки $Z_{\min} = 92$ д. ед.

Практически всегда метод наименьшего тарифа дает более приближенный к оптимальному опорный план, чем метод северо-западного угла.

Проверим план, построенный методом наименьшего тарифа, на оптимальность. Для этого по занятым объемами перевозок клеткам составим систему уравнений по формуле (4.46):

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_4 = 4, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 8, \\ u_2 + v_4 = 8, \\ u_3 + v_3 = 6. \end{cases}$$

Неизвестные потенциалы $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ находим из этой системы уравнений, полагая $u_1 = 0$. Тогда из первого и второго уравнений $v_2 = 1, v_4 = 4$, далее из предпоследнего $u_2 = 4$, затем из третьего и четвертого уравнений $v_1 = -2, v_3 = 4$ и, наконец, из последнего $u_3 = 2$.

Перепишем матрицу перевозок, добавив справа столбец с потенциалами u_i, а внизу строку с потенциалами v_j:

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.				u_i
	3	6	7	5	
7	7	1 **6**	7	4 **1**	*0*
8	2 **3**	5	8 **1**	8 **4**	*4*
6	6	1	6 **6**	8	*2*
v_j	*-2*	*1*	*4*	*4*	

Посчитаем оценки свободных клеток по формуле (4.47):

$$\Delta_{11} = 0 + (-2) - 7 \leq 0,$$
$$\Delta_{13} = 0 + 4 - 7 \leq 0,$$
$$\Delta_{22} = 4 + 1 - 5 \leq 0,$$

$$\Delta_{31} = 2 + (-2) - 6 \leq 0,$$
$$\Delta_{32} = 2 + 1 - 1 > 0,$$
$$\Delta_{34} = 2 + 4 - 8 \leq 0.$$

План не оптимальный, так как оценка Δ_{32} положительна. Поэтому ставим в этой клетке знак «+» и строим цикл:

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.				u_i
	3	6	7	5	
7	7	1 - **6**	7	4 + **4**	*0*
8	2 **3**	5	8 + **1**	8 - **4**	*4*
6	5	1 +	6 - 6	8	*2*
v_j	*-2*	*1*	*4*	*4*	

Заметим, что такой цикл всегда существует и он единственный. Наименьший объем груза в «минусовых» клетках $d = 4$. Новую таблицу перевозок составляем с учетом следующих изменений: в клетках со знаком «+» объем перевозок увеличится на 4 ед., в клетках со знаком «-» уменьшится на 4, а в остальных останется без изменений.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.				u_i
	3	6	7	5	
7	7	1 **2**	7	4 **8**	*0*
8	2 **3**	5	8 **5**	8	*2*
6	5	1 **4**	6 **2**	8	*0*
v_j	*0*	*1*	*6*	*4*	

Для проверки полученного плана на оптимальность по формуле (4.46) составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_4 = 4, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_3 = 6. \end{cases}$$

Решив систему, получаем новые значения для потенциалов u_i, v_j, которые заносим в таблицу перевозок. Проверяя по формуле (4.47) план на оптимальность, замечаем, что все оценки свободных клеток не положительны, то есть полученный план перевозок является оптимальным:

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки $Z_{\min} = 96$ д. ед.

II. Фиктивные перевозки

Необходимым условием для существования решения транспортной задачи является ограничение на количество занятых объемами поставок клеток таблицы перевозок. Их число должно всегда равняться $m+n-1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей.

При составлении первоначального опорного плана, заполняя клетку таблицы перевозок поставкой, из рассмотрения выводится либо строка, либо столбец таблицы. Если *запас* в строке a_{i_0} и *потребность* в столбце b_{j_0} *совпадают*, то после заполнения клетки $\left(a_{i_0}; b_{j_0}\right)$ пришлось бы выводить строку и столбец одновременно, что делать нельзя, так как число занятых клеток будет меньше, чем $m+n-1$. В этом случае необходимо выбрать в столбце b_{j_0} или в строке a_{i_0} клетку с наименьшим тарифом и заполнить её *фиктивной перевозкой*. Она обозначается 0*.

Фиктивная перевозка может появиться также при перераспределении поставок, если окажется, что существует несколько наименьших объемов перевозок, стоящих в «минусовых» клетках цикла. Тогда любую одну клетку считаем свободной, а остальные – занятыми фиктивными объемами перевозок.

Пример 4.8. Составить первоначальный опорный план транспортной задачи методом северо-западного угла, заданной таблицей перевозок:

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	10	9	3	7
11	6	5	5	3
11	3	7	1	7
7	7	6	1	4

Решение. Заполнение таблицы начинаем с левого верхнего угла: $x_{11} = \min(11;10) = 10$. Тогда запас в первой строке: $a_1 = 11\text{-}10 = 1$ ед. груза, а первый столбец выводим из рассмотрения. Далее $x_{12} = \min(1;9) = 1$, $x_{22} = \min(a_2;b_2 - 1) = \min(11;8) = 8$, $x_{23} = \min(a_2 - 8;b_3) = \min(3;8) = 3$. На этом шаге из рассмотрения одновременно выпадают строка и столбец, поэтому выведем только строку, а в столбце запишем потребность, равную нулю. Тогда следующая перевозка $x_{33} = \min(a_3;b_3 - 3) = \min(7;0) = 0*$. Затем $x_{34} = \min(a_3 - 0;b_4) = 7$.

Можно сделать вывод, что первоначальный опорный план выглядит следующим образом:

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	10	9	3	7
11	6 **10**	5 **1**	5	3
11	3	7 **8**	1 **3**	7
7	7	6	1 **0***	4 **7**

III. *Открытая модель транспортной задачи*

Открытую модель можно преобразовать в закрытую путем введения фиктивного пункта производства или потребления. В случае, если суммарный запас груза превышает суммарные потребности на s единиц, добавляется фиктивный потребитель с потребностью, равной s единиц. Если же суммарные потребности превышают суммарный запас груза, то добавляют фиктивного поставщика. Тарифы перевозок в строке (столбце) фиктивного поставщика (потребителя) полагают равными нулю.

Пример 4.9. Для задачи оптимального планирования перевозок груза тарифы перевозок, запасы груза и потребности в грузе такие же, как в примере 4.1, за исключением потребности 3-го магазина, которая составляет 9 ед. Найти оптимальный план перевозок.

Решение. Задача открытая, так как суммарная потребность в грузе превышает суммарный запас на три единицы. Поэтому для решения этой задачи вводим фиктивного поставщика с запасом груза 2 ед.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	3	6	9	5
7	7	1	7	4
8	2	5	8	8
6	6	1	6	8
2	0	0	0	0

Модель задачи запишется следующим образом:

$$Z(x) = 7x_{11} + x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} + 8x_{24} +$$
$$+6x_{31} + x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 7, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 8, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 6, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 2, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 9, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Построение первоначального опорного плана, проверка плана на оптимальность и переход в случае не оптимального плана к новому для открытой транспортной задачи осуществляются точно так же, как и для закрытой.

Решая закрытую задачу, находим её оптимальный план:

$$\tilde{x}^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить оптимальный план исходной задачи, нужно отбросить последнюю строку, соответствующую фиктивному поставщику:

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отброшенная строка плана $\tilde{x}^{opt}$ означает, сколько единиц груза недополучат потребители, а именно третий магазин недополучит 2 ед. груза.

4.4. Контрольные вопросы по теме «Линейные оптимизационные модели»

1. Что называется задачей линейного программирования?

2. Что представляет собой область допустимых решений?

3. Запишите ЗЛП в стандартном виде.

4. Запишите ЗЛП в каноническом виде.

5. Как перейти от задачи минимизации к задаче максимизации?

6. Что такое симплекс?

7. Что такое предпочтительный вид уравнения?

8. Что такое метод искусственного базиса (М-метод)?

9. Сформулируйте критерий оптимальности симплексного метода.

10. Что представляет собой симплексная таблица?

11. Как определить направляющий столбец?

12. Как определить направляющую строку?

13. Какой метод используется при переходе от одного опорного плана к другому?

14. Что называется задачей оптимального планирования перевозок груза?

15. В чем заключается балансовое равенство?

16. Как построить первоначальный опорный план по методу северо-западного угла?

17. Как построить первоначальный опорный план по методу наименьшего тарифа?

18. В чем заключается метод потенциалов?

19. Сформулируйте критерий оптимальности в задаче оптимального планирования перевозок груза.

4.5. Задания для выполнения лабораторной работы «Линейные оптимизационные модели»

Задание 1. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Вариант	Задача	Вариант	Задача
1	$Z(x)=-x_1+3\to\max$ $\begin{cases}2x_1-x_2\ge-2,\\ x_1-x_2\ge-2,\\ x_1\le1,\\ 2x_1-x_2\ge3,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$	**6**	$Z(x)=2x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}5x_1+3x_2\le15,\\ 2x_1+6x_2\le12,\\ 2x_1\le6,\\ 2x_2\le4,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$
2	$Z(x)=4x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}3x_1-x_2\ge0,\\ x_1-x_2\le0,\\ x_1\le2,\\ 2x_1+x_2\le6,\\ 3x_1-x_2\ge-4,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$	**7**	$Z(x)=-x_2\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\ge6,\\ 7x_1+2x_2\ge14,\\ -x_1+x_2\le2,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$
3	$Z(x)=-2x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}4x_1-x_2\ge0,\\ 4x_1+x_2\le40,\\ x_2\le6,\\ x_1-x_2+8\ge0,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$	**8**	$Z(x)=2x_1-3x_2\to\min$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2\le6,\\ 2x_1+5x_2\le10,\\ x_1-5x_2\le5,\\ x_1+x_2\ge1,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$
4	$Z(x)=2x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases}4x_1+3x_2\le40,\\ 12x_1+2x_2\ge24,\\ 2x_1\le6,\\ x_2\ge3,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$	**9**	$Z(x)=x_1-x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\ge1,\\ x_1-x_2\le1,\\ 2x_1-x_2\ge-1,\\ x_1\ge1,\\ x_2\le3,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0.\end{cases}$

5	$Z(x) = -x_1 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$	**10**	$Z(x) = -x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

Задание 2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом. Предварительно записать задачу в канонической (основной) форме.

Вари-ант	Задача	Вари-ант	Задача
1	$Z(x) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \leq 1100, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 \leq 120, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8000, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$	**6**	$Z(x) = 72x_1 + 62x_2 + 76x_3 \to \max$ $\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \leq 600, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 \leq 700, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \leq 500, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
2	$Z(x) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 420, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 600, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 900, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$	**7**	$Z(x) = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} 17x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 850, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 1120, \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 1060, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
3	$Z(x) = 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \to \max$ $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 800, \\ 10x_1 + 13x_2 + 18x_3 \leq 520, \\ 20x_1 + 8x_2 + 12x_3 \leq 940, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$	**8**	$Z(x) = 6x_1 + 16x_2 + 25x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 36, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ x_2 + 5x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$

4	$Z(x)=2x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases} x_1+3x_2\le 18, \\ 2x_1+x_2\le 16, \\ x_2\le 5, \\ 3x_1\le 21, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$	**9**	$Z(x)=6x_1+5x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3\le 180, \\ 6x_1+x_2+3x_3\le 50, \\ 4x_1+2x_2+x_3\le 40, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
5	$Z(x)=8x_1+6x_2+4x_3\to\max$ $\begin{cases} 16x_1+7x_2+9x_3\le 520, \\ 18x_1+7x_2+2x_3\le 140, \\ 9x_1+2x_2+3x_3\le 810, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$	**10**	$Z(x)=x_1-x_2\to\max$ $\begin{cases} -2x_1+x_2\le 2, \\ x_1-2x_2\le -8, \\ x_1+x_2\le 5, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$

Задание 3. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, используя М-метод. Предварительно записать задачу в предпочтительной форме.

Вари-ант	Задача	Вари-ант	Задача
1	$Z(x)=2x_1+x_2-x_3-x_4\to\min$ $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=2, \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4=6, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=7, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}. \end{cases}$	**6**	$Z(x)=72x_1+62x_2+76x_3\to\max$ $\begin{cases} 0{,}3x_1+0{,}2x_2+0{,}4x_3\le 600, \\ 0{,}2x_1+0{,}3x_2+0{,}2x_3\le 700, \\ 0{,}2x_1+0{,}1x_2+0{,}1x_3\le 500, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$

2	$Z(x) = -x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$	**7**	$Z(x) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$
3	$Z(x) = x_1 + 48x_2 + 16x_3 \to \min$ $\begin{cases} 16x_1 + 6x_2 - 32x_3 \ge 48, \\ -8x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 96, \\ -8x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 16, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$	**8**	$Z(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$
4	$Z(x) = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 11, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 46, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$	**9**	$Z(x) = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$
5	$Z(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$	**10**	$Z(x) = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 - 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 420, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$

Задание 4. Имеются три производителя, поставляющие свои товары четырем потребителям. Запасы производителей, потребность потребителей и стоимость одной единицы перевозки от производителя к потребителю представлены в таблице. Построить первоначальный опорный план: а) методом северо-западного угла; б) методом наименьшего тарифа. Опираясь на первоначальный план, построенный по методу наименьшего тарифа, методом потенциалов найти оптимальный план транспортной задачи.

Вариант 1.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	100	125	325	350
200	5	8	10	3
450	4	2	5	6
250	7	3	9	2

Вариант 2.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	150	160	130	210
250	27	36	35	31
200	22	23	26	32
200	35	42	28	32

Вариант 3.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	240	180	165	165
300	8	13	2	7
250	4	11	9	17
200	16	10	1	4

Вариант 4.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	180	180	150	190
280	19	25	25	35
250	26	27	18	38
170	27	36	40	45

Вариант 5.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	270	180	240	160
200	24	50	55	27
350	50	47	23	17
300	35	59	55	27

Вариант 6.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	100	100	160	140
150	17	3	6	12
150	14	10	2	10
200	14	11	5	8

Вариант 7.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	270	220	260	200
330	12	24	50	42
270	22	49	66	32
350	27	35	67	63

Вариант 8.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	240	260	280	270
270	30	15	19	37
450	19	13	19	21
330	20	19	29	26

Вариант 9.

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	180	100	190	130
200	7	4	2	5
175	1	3	1	10
225	3	6	8	7

Вариант 10

Запасы производителей, усл. ед.	Спрос потребителей, усл. ед.			
	125	325	100	350
200	3	7	10	5
450	2	2	5	4
250	3	5	9	7

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гартман, Т.Н. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: учеб. пособие / Т.Н. Гартман, Д.В. Клушин. – М.: Академкнига, 2006. – 416 с.
2. Лабутин, А.Н. Методы оптимизации химико-технологических процессов: учеб. пособие / А.Н. Лабутин, Л.С. Гордеев; Иван. хим.-технол. ин-т. – Иваново, 1983. – 78 с.
3. Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов: практическое руководство / [В.А. Холоднов и др.]. –СПб.: АНО НПО «Профессионал», 2003. – 480 с.
4. Бояринов, А.И. Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. – М.: Химия. 1975. – 576 с.
5. Кафаров, В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии / В.В. Кафаров. – М.: Химия, 1985. – 468 с.
6. Бочкарев, В.В. Оптимизация химико-технологических процессов: учеб. пособие / В.В. Бочкарев; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 264 с.
7. Ефремов, Г.И. Моделирование химико-технологических процессов: учеб. пособие / Г.И. Ефремов. – М.: Инфра-М, 2016. – 256 с.
8. Турчак, Л.И. Основы численных методов: учебное пособие / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с
9. Формалев, В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
10. Кузнецов А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сокович, В.И. Холод. – Минск: Высш. шк., 1994. – 286 с.
11. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.– М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Для заметок

Учебное издание

Лысова Марина Александровна

Методы оптимизации и организации энерго- и ресурсосберегающих химико-технологических систем. Оптимизационные модели.

Учебное пособие

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 7.06.2019. Формат $60\times84\,{}^{1}\!/_{16}$. Бумага писчая.

Усл. печ. л. 6,05. Тираж 50 экз. Заказ

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
редакционно-издательского центра ФГБОУ ВО «ИГХТУ»

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7