

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ивановский государственный химико-технологический университет

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.  
Дифференциальные уравнения**

Методические указания

Составитель С.В. Кулакова

Иваново 2016

УДК 519.6

Составитель С.В. Кулакова

Численные методы. Дифференциальные уравнения: метод. указания / сост. С.В. Кулакова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. - Иваново, 2016. – 32 с.

Методические указания содержат математическую постановку задач, описание численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представлен анализ возможных подходов к решению задач, приведены примеры численной реализации методов и упражнения для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлениям: «Автоматизация технологических процессов и производств» и «Управление в технических системах» дневного и заочного отделений, изучающих предмет «Численные методы».

Рецензент

доктор экономических наук, профессор М.Б. Ермолаев

(Ивановский государственный химико-технологический университет)

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Уравнение  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , связывающее неизвестную функцию  $y(x)$ , независимую переменную  $x$  и производные  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$  неизвестной функции, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Порядок  $n$  старшей производной называется порядком дифференциального уравнения.

Решением или интегралом дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется функция  $y(x)$ , непрерывная на некотором интервале  $(a, b)$  вместе со своими производными до  $(n-1)$  порядка включительно, имеющая производную  $y^{(n)}(x)$  и такая, что подстановка  $y(x)$  в уравнение обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Одной из важнейших задач в теории и приложениях дифференциальных уравнений является задача Коши (начальная задача), в которой требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$y^{(n)} = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  - заданные числа.

**Теорема** (о существовании и единственности решения задачи Коши).

*Пусть выполнены следующие условия:*

*а) функция  $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  определена и непрерывна в некоторой замкнутой области  $\bar{D}$ , а также имеет в  $\bar{D}$  ограниченные частные производные по переменным  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ;*

*б) точка  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  лежит в области  $\bar{D}$ .*

*Тогда решение задачи Коши существует и единственно.*

Общим решением дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется функция  $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ , зависящая от  $n$  произвольных постоянных, и такая, что при подстановке в уравнение она обращает его в тождество при любых значениях  $C_1, \dots, C_n$ .

При конкретных значениях  $C_1, \dots, C_n$ , которые можно определить с помощью начальных условий, из общего решения выделяют частное решение, а общий интеграл становится частным интегралом.

Задача называется краевой, если указывается интервал интегрирования  $[a; b]$  и ставятся дополнительные условия для значений функции  $y(x)$  и её производных  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  на концах этого интервала.

Задача Коши для системы состоит в нахождении решения системы:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

где  $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , - неизвестные функции, удовлетворяющие начальным условиям:  $y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$ , где  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$  - неизвестные числа.

Решением системы называется совокупность  $n$  функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , непрерывных на некотором интервале  $(a, b)$ , такая, что подстановка этих функций в систему обращает все уравнения в тождества.

Методы решения задач для дифференциальных уравнений можно разбить на три типа: точные, приближенные и численные.

Точными называют методы, с помощью которых решение дифференциального уравнения можно выразить через известные функции (элементарные функции или интегралы от элементарных функций). Точные методы решения известны только для некоторых классов дифференциальных уравнений (линейные дифференциальные уравнения, уравнения с разделяющимися переменными и др.).

Приближенными называются методы, в которых решение находят как предел последовательности функций, являющихся элементарными или интегралами от

элементарных функций. Например, метод разложения искомой функции в ряд Тейлора является приближенным методом.

Численный метод решения дифференциального уравнения — это алгоритм вычисления значений искомого решения  $y(x)$  на некотором дискретном множестве значений аргумента  $x$ . При этом вычисляемые значения искомого решения  $y(x)$  являются приближенными, но могут быть и точными.

Численное решение задачи ищется в узлах сетки  $\Omega_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , где  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , — расстояние между соседними узлами, называемое шагом интегрирования. Если  $h_{i+1} = h = const$ , сетка называется равномерной (регулярной), а если  $h_{i+1} = var$  — неравномерной (нерегулярной).

Решение находится в виде последовательности значений  $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ , являющихся приближением значений  $y_0, y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$  точного решения  $y(x)$  в узлах сетки  $\Omega_n$  (рис.1).

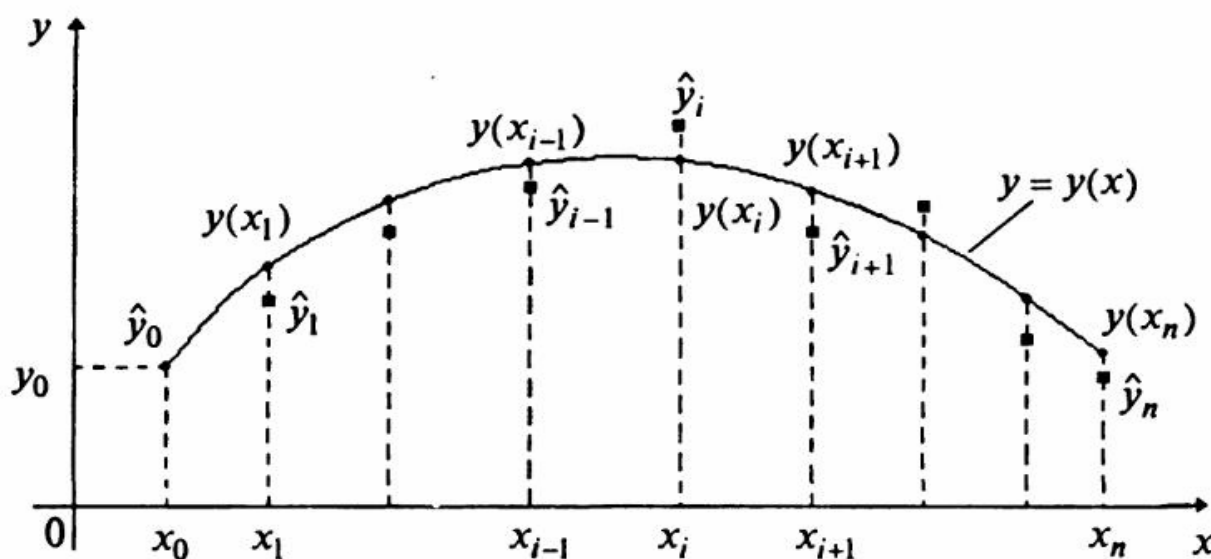


Рис.1. Иллюстрация точного и приближённого решения

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений делятся на 2 группы:

- дискретные методы, позволяющие найти решение только в узлах сетки. Эти методы называются ещё разностными методами или методами сеток;
- непрерывно-дискретные методы, основанные на использовании дискретных методов и сплайн-функций для восполнения численных результатов. Они позволяют найти непрерывные решения дифференциальных уравнений.

Дискретные методы (метод сеток) подразделяются на *явные* и  *неявные*.

Значение  $\hat{y}_{i+1}$  на  $(i+1)$ -м шаге может определяться

явно:  $\hat{y}_{i+1} = \Phi(x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, \hat{y}_{i-k+1}, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_i)$ , где  $\Phi(\cdot)$  - некоторая функция, зависящая от конкретного метода (кроме последней рассчитанной точки  $(x, \hat{y}_i)$  могут использоваться еще  $(k-1)$  предыдущих точек),

или  неявно:  $\hat{y}_{i+1} = \Phi(x_{i-k+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i-k+1}, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_i, \hat{y}_{i+1})$ ,

где искомая величина  $\hat{y}_{i+1}$  входит одновременно и в левую и в правую часть.

Явные и неявные методы делятся также на *одношаговые* и *многошаговые* ( $k$ -шаговые). В одношаговых методах для расчета очередной точки  $(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$  требуется информация только о последней рассчитанной точке  $(x, \hat{y}_i)$ .

В  $k$ -шаговых методах для нахождения точки  $(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$  требуется информация о  $k$  предыдущих точках.

Численный алгоритм (метод) называется устойчивым, если численные результаты непрерывно зависят от входных данных и, если погрешность остается ограниченной при заданных пределах изменения параметров численного алгоритма (шагов сетки, числа итерации и др.).

Численный алгоритм называется сходящимся, если при стремлении его параметров к определенным предельным значениям, например, при  $h \rightarrow 0$  (или при  $s \rightarrow \infty$ , где  $s$ -число итераций), результаты стремятся к точному решению.

## 2. Методы Рунге – Кутты

Широкая категория методов, наиболее часто применяемых на практике для решения дифференциальных уравнений, известна под общим названием: методы Рунге - Кутты. Различные методы этой категории требуют большего или меньшего объема вычислений и, соответственно, обеспечивают большую или меньшую точность.

Методы Рунге - Кутты обладают следующими отличительными свойствами:

- они согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка  $h^k$ , где степень  $k$  определяет порядок метода;
- эти методы не требуют вычисления производных от  $f(x, y)$ , а требуют вычисления самой функции.

Именно благодаря последнему свойству методы Рунге - Кутты более удобны для практических вычислений.

## 2.1. Метод Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага. Правило Рунге оценки погрешности

Для метода Рунге-Кутты применимо правило Рунге для оценки погрешности. Пусть  $y(x;h)$  – приближенное значение решения в точке  $x$ , полученное с шагом  $h$ , а  $p$  — порядок точности соответствующей формулы. Тогда погрешность  $R(h)$  значения  $y(x;h)$  можно оценить, используя приближенное значение  $y(x;2h)$  решения в точке  $x$ , полученное с шагом  $2h$ :

$$R(h) = \frac{y(x;h) - y(x;2h)}{2^p - 1}. \quad (1)$$

Уточненное решение запишется в виде:

$$\tilde{y}(x;h) = y(x;h) + \frac{y(x;h) - y(x;2h)}{2^p - 1}.$$

В алгоритмах с автоматическим выбором шага предварительно задают погрешность в виде положительного параметра  $\varepsilon$ , и на каждом этапе вычисления следующего значения  $y_{i+1}$  подбирают шаг  $h$  такой, что выполняется неравенство:

$$\left| \frac{y(x;h) - y(x;2h)}{2^p - 1} \right| \leq \varepsilon.$$

## 2.2. Метод Эйлера (метод Рунге - Кутты первого порядка)

Метод Эйлера играет важную роль в теории численных методов решения ОДУ, хотя и не часто используется в практических расчетах из-за невысокой точности. Вывод расчетных соотношений для этого метода может быть произведен несколькими способами: с помощью геометрической интерпретации, с использованием разложения в ряд Тейлора, конечно разностным методом, квадратурным способом.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка разрешённого относительно производной:

$$y'(x) = f(x, y), \quad (2)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (3)$$

Требуется найти функцию  $y=y(x)$ , которая удовлетворяет уравнению (2) на интервале  $(x_0; b)$  и начальному условию (3).

Проведем разбиение отрезка  $[x_0; b]$  на  $n$  равных частей:

$$x_0 = x_i + i \cdot h, \quad i = \overline{0, n}, \quad h = \frac{b - x_0}{n}. \quad (4)$$

Найдём приближенные значения решения  $y(x)$  в узлах сетки  $x_i$

|       |       |       |     |           |
|-------|-------|-------|-----|-----------|
| $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n = b$ |
| $y_i$ | $y_0$ | $y_1$ | ... | $y_n$     |

$y_i$  - приближенное значение решения  $y=y(x)$ .

Рассмотрим уравнение (2) в точках  $x_i, i = \overline{0, n-1}$  и заменим производную  $y'(x_i)$  разностной формулой:

$$y'(x_i) = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i; y_i).$$

Тогда получим рекуррентную формулу метода Эйлера для вычисления приближенных значений  $y_i \approx y(x_i), i = \overline{1, n}$ :

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i). \quad (5)$$

Уравнение касательной к графику решения  $y(x)$  в точке  $(x_0; y_0)$  имеет вид:

$$y = y_0 + f(x_0; y_0)(x - x_0), \text{ т.к. } y'(x_0) = f(x_0; y_0).$$

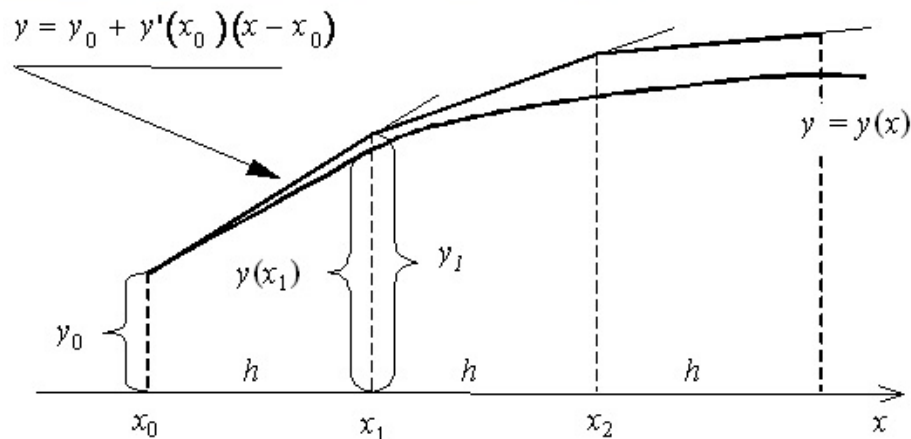


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация метода Эйлера

Таким образом, интегральная кривая  $y(x)$  на отрезке  $[x_0; x_1]$  заменяется отрезком касательной, соединяющей точку  $(x_0; y_0)$  с точкой  $(x_1; y_1)$ , где  $y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0)$ . При  $i=1$  формула дает точку с координатами  $(x_2; y_2)$ ,



которая определяется с помощью касательной  $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1)$ , проведенной в точке  $(x_1; y_1)$  к интегральной кривой, и т.д.

Суть метода Эйлера заключается в замене интегральной кривой  $y(x)$  ломаной, звеньями которой являются касательные, проведенные в точках  $(x_i; y_i)$  к интегральной кривой. Поэтому его часто называют методом ломаных.

Локальная ошибка метода на каждом шаге:  $\varepsilon_i^k = \frac{y''(\zeta)}{2} h^2$ , где  $\zeta \in [x_{k-1}, x_k]$ .

Глобальная погрешность метода Эйлера  $O(h)$ , то есть имеет первый порядок точности относительно шага  $h$ .

Метод Эйлера легко обобщается для системы дифференциальных уравнений первого порядка разрешённых относительно первых производных:

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k), \quad k \in \overline{1, n}.$$

Начальные условия:  $y_k(x_0) = y_k, \quad k \in \overline{1, n}$ .

Приближённое решение по методу Эйлера для системы имеет вид:

$$y_{k, i+1} = y_{k, i} + h \cdot f_k(x_i; y_{1, i}; y_{2, i}; \dots; y_{k, i}), \quad k \in \overline{1, n}, \quad (6)$$

где  $k$  – номер переменной ;

$i$  – номер шага интегрирования.

Пусть задана система ОДУ первого порядка: 
$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z); \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases} \quad (7)$$

Начальные условия:  $y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (8)$

Приближённые значения  $y(x_i) \approx y_i, \quad z(x_i) \approx z_i$  вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i); \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Метод Эйлера обладает двумя существенными недостатками:

- 1) малой точностью (метод первого порядка точности);
- 2) систематическое накопление ошибок.

Уравнения высших порядков сводятся к системе уравнений первого порядка путём введения новых переменных.

**Пример 1.** Используя метод Эйлера, построить приближенное решение для следующей задачи Коши:  $y' = 2x - 3y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x \in [0; 0,6]$ ,  $h=0,1$ .

Найдём точное решение.

Это дифференциальное уравнение первого порядка, линейное.

Решение будем искать в виде подстановки:  $y = uv$ ,  $y' = u'v + v'u$ .

Подставляем в уравнение:  $u'v + v'u + 3uv = 2x$ ,

сгруппируем первое и третье слагаемое:  $v(u' + 3u) + v'u = 2x$ . (10)

Приравняем скобку к нулю:  $u' + 3u = 0$  - это д.у. с разделяющимися переменными.

$$u' = -3u; \quad \frac{du}{dx} = -3u; \quad \frac{du}{u} = -3dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int 3dx; \quad \ln|u| = -3x; \quad u = e^{-3x}.$$

Подставим функцию  $u(x)$  в уравнение (10):

$v'e^{-3x} = 2x$ ;  $v' = 2xe^{3x}$ ;  $v = \int 2xe^{3x} dx$ . Интеграл берём методом по частям:

$$v = 2x \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} 2dx; \quad v = \frac{2xe^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C.$$

Так как  $y = uv$ , то  $y = e^{-3x} \left( \frac{2xe^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C \right)$ .

Получаем общее решение:  $y = \frac{2x}{3} - \frac{2}{9} + Ce^{-3x}$ .

Подставляем начальное условие  $y(0) = 1$ :  $1 = \frac{2 \cdot 0}{3} - \frac{2}{9} + Ce^{-3 \cdot 0}$ ;

$$1 = -\frac{2}{9} + C \Rightarrow C = \frac{11}{9}. \quad \text{Частное решение имеет вид: } y = \frac{2x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{11}{9}e^{-3x}.$$

2 способ. Это уравнение можно решить другим способом – как уравнение линейное, с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Решение такого уравнения складывается из решения общего однородного и частного неоднородного:  $y = y_{o.o} + y_{ч.н}$ .

$$y' + 3y = 2x, \quad y(0) = 1.$$

$$y' + 3y = 0,$$

составим характеристическое уравнение:

$$r + 3 = 0 \Rightarrow r = -3; \quad y_{o.o} = Ce^{-3x}.$$

$$y_{ч.н} = Ax + B; \quad y'_{ч.н} = A.$$

Подставляем в первоначальное уравнение:  $A + 3(Ax + B) = 2x$ .

$$\begin{cases} 3A = 2; \\ A + 3B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3}; \\ B = -\frac{2}{9}. \end{cases} \quad \text{Общее решение: } y = Ce^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}.$$

Подставляем начальные условия:

$$1 = Ce^{-3 \cdot 0} + \frac{2 \cdot 0}{3} - \frac{2}{9} \Rightarrow C = \frac{11}{9}.$$

$$\text{Решение задачи Коши: } y = \frac{11}{9}e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}.$$

Построим приближённое решение, используя метод Эйлера.

$$y' = 2x - 3y, y(0) = 1, x \in [0; 0.6], h = 0,1.$$

**1 шаг.**

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0);$$

$$y_0 = 1; \quad x_0 = 0; \quad f(x_0; y_0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3;$$

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot (-3) = 0,7.$$

**2 шаг.**

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1);$$

$$y_1 = 0,7; \quad x_1 = 0,1; \quad f(x_1; y_1) = 2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,7 = -1,9;$$

$$y_2 = 0,7 + 0,1(-1,9) = 0,51.$$

и т. д.

Аналогично можно найти значения искомой величины на всём интервале. Результаты (с точностью до пятого знака после запятой) приведены в таблице. В четвёртой колонке таблицы для сравнения приведены значения, вычисленные

по аналитическому решению данного уравнения:  $y(x) = \frac{11}{9}e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}$ .

В пятой колонке таблицы приведена погрешность полученного решения.

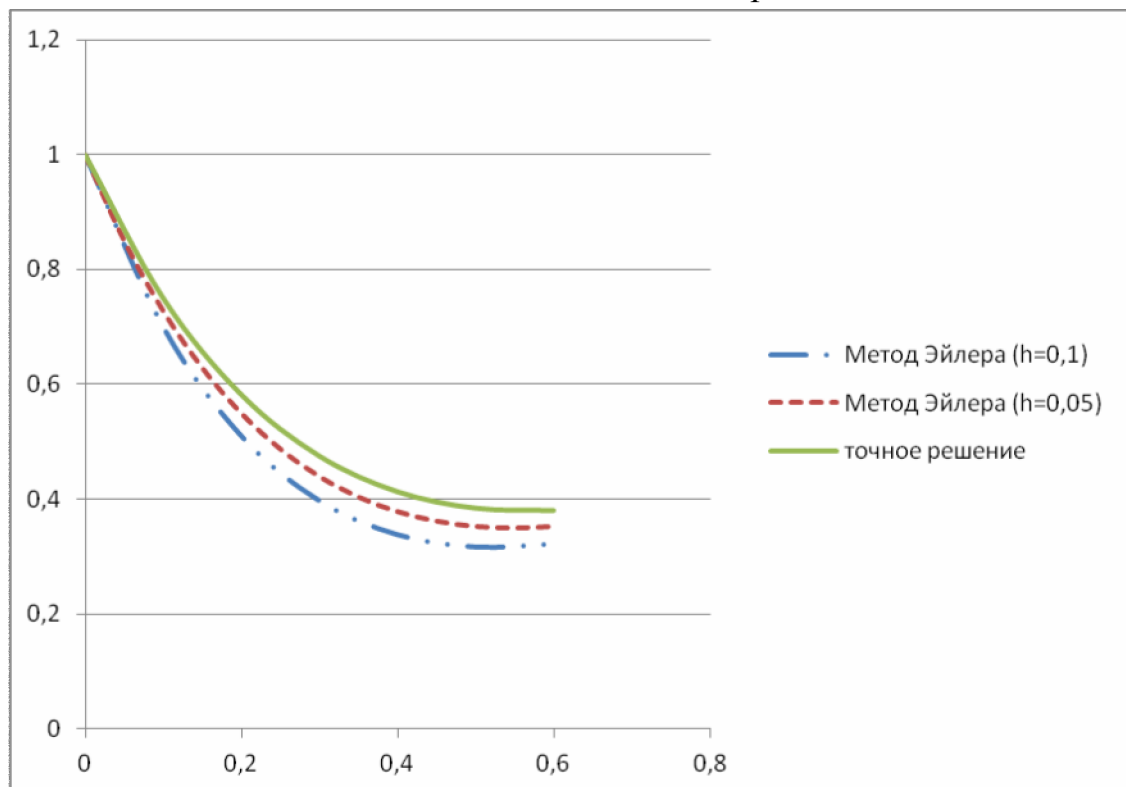
| 1   | 2       | 3       | 4           | 5              |
|-----|---------|---------|-------------|----------------|
| x   | y* МЭ   | f       | y(x) точное | e =  y(x) - y* |
| 0   | 1       | -3      | 1           | 0              |
| 0,1 | 0,7     | -1,9    | 0,74989     | 0,04989        |
| 0,2 | 0,51    | -1,13   | 0,58188     | 0,07188        |
| 0,3 | 0,397   | -0,591  | 0,4747      | 0,0777         |
| 0,4 | 0,3379  | -0,2137 | 0,41257     | 0,07467        |
| 0,5 | 0,31653 | 0,05041 | 0,38383     | 0,0673         |
| 0,6 | 0,32157 | 0,23529 | 0,37981     | 0,05824        |

Уменьшим шаг интегрирования вдвое ( $h = 0,05$ ). В этом случае для каждого узла сетки вычисление будет проводиться за два шага. Получим  $y^{**}$ .

Результаты вычислений приведены в таблице. В четвёртой колонке приведены значения  $y^*$ , вычисленные с шагом  $h=0,1$ . В пятой колонке приведена погрешность двойного расчёта:  $e = |y^*(h = 0,1) - y^{**}(h = 0,05)|$ .

| 1    | 2        | 3       | 4       | 5                    |
|------|----------|---------|---------|----------------------|
| x    | $y^{**}$ | f       | $y^*$   | $e =  y^* - y^{**} $ |
| -0   | 1        | -3      | 1       | 0                    |
| 0,05 | 0,85     | -2,45   |         |                      |
| 0,1  | 0,7275   | -1,9825 | 0,7     | 0,0275               |
| 0,15 | 0,62838  | -1,5851 |         |                      |
| 0,2  | 0,54912  | -1,2474 | 0,51    | 0,0391               |
| 0,25 | 0,48675  | -0,9603 |         |                      |
| 0,3  | 0,43874  | -0,7162 | 0,397   | 0,0417               |
| 0,35 | 0,40293  | -0,5088 |         |                      |
| 0,4  | 0,37749  | -0,3325 | 0,3379  | 0,0396               |
| 0,45 | 0,36087  | -0,1826 |         |                      |
| 0,5  | 0,35174  | -0,0552 | 0,31653 | 0,0352               |
| 0,55 | 0,34898  | 0,05307 |         |                      |
| 0,6  | 0,35163  | 0,14511 | 0,32157 | 0,0301               |

*Графическая иллюстрация решения задачи Коши по методу Эйлера с шагом  $h=0,1$ , с шагом  $h=0,05$  и точное решение.*



В следующей таблице приведены погрешности приближённых вычислений с разными шагами. С уменьшением шага вдвое и погрешность уменьшилась вдвое.  $e1 = |y^*(h=0,1) - y(x)|$ ,  $e2 = |y^{**}(h=0,05) - y(x)|$ .

|    |   |       |       |       |       |       |       |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x  | 0 | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   |
| e1 | 0 | 0,05  | 0,072 | 0,078 | 0,075 | 0,067 | 0,058 |
| e2 | 0 | 0,022 | 0,033 | 0,036 | 0,035 | 0,032 | 0,028 |

**Пример 2.** Используя метод Эйлера, построить приближенное решение для следующей задачи Коши:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0, \quad y(1) = 0,77, \quad y'(1) = -0,44, \quad h = 0.05, \quad x \in [1; 1,6].$$

Решение. Уравнение второго порядка сводится к системе уравнений первого порядка путём введения новых переменных:  $y' = z$ ,  $y'' = z'$ .

$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = -\frac{z}{x} - y; \end{cases} \quad y(1) = 0,77; \quad z(1) = -0,44.$$

$$1 \text{ шаг} \begin{cases} y_1 = y_0 + h \cdot f_0(x_0, y_0, z_0) = 0,77 + 0,05(-0,44) = 0,748; \\ z_1 = z_0 + h \cdot g_0(x_0, y_0, z_0) = -0,44 + 0,05\left(\frac{-0,44}{1} - 0,77\right) = -0,4565. \end{cases}$$

$$2 \text{ шаг} \begin{cases} y_2 = y_1 + h \cdot f_1(x_1, y_1, z_1) = 0,748 + 0,05(-0,4565) = 0,72518; \\ z_2 = z_1 + h \cdot g_1(x_1, y_1, z_1) = -0,44 + 0,05\left(\frac{-0,4565}{1,05} - 0,748\right) = -0,47216. \end{cases}$$

Результаты вычислений приведены в таблице. В третьей и четвёртой колонках приведены значения  $y^*$  и  $z^*$ , вычисленные с шагом  $h=0,05$ . В пятой и шестой - значения  $y^{**}$  и  $z^{**}$ , вычисленные с шагом  $h=0,1$ . В седьмой и восьмой - погрешности двойного расчёта:

$$e1 = |y^*(h=0,1) - y^{**}(h=0,05)|, \quad e2 = |z^*(h=0,1) - z^{**}(h=0,05)|.$$

| 1 | 2    | 3             | 4             | 5               | 6               | 7      | 8       |
|---|------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|--------|---------|
| i | x    | $Y^*(h=0,05)$ | $Z^*(h=0,05)$ | $Y^{**}(h=0,1)$ | $Z^{**}(h=0,1)$ | e1     | e2      |
| 0 | 1    | 0,77          | -0,44         | 0,77            | -0,44           | 0      | 0       |
| 1 | 1,05 | 0,748         | -0,4565       |                 |                 |        |         |
| 2 | 1,1  | 0,72518       | -0,47216      | 0,726           | -0,473          | 0,0008 | 0,00084 |
| 3 | 1,15 | 0,70157       | -0,48696      |                 |                 |        |         |
| 4 | 1,2  | 0,67722       | -0,50086      | 0,6787          | -0,5026         | 0,0015 | 0,00174 |

|    |      |         |          |         |          |        |         |
|----|------|---------|----------|---------|----------|--------|---------|
| 5  | 1,25 | 0,65218 | -0,51386 |         |          |        |         |
| 6  | 1,3  | 0,62648 | -0,52591 | 0,62844 | -0,52859 | 0,002  | 0,00268 |
| 7  | 1,35 | 0,60019 | -0,53701 |         |          |        |         |
| 8  | 1,4  | 0,57334 | -0,54713 | 0,57558 | -0,55077 | 0,0022 | 0,00364 |
| 9  | 1,45 | 0,54598 | -0,55625 |         |          |        |         |
| 10 | 1,5  | 0,51817 | -0,56437 | 0,5205  | -0,56899 | 0,0023 | 0,00462 |
| 11 | 1,55 | 0,48995 | -0,57147 |         |          |        |         |
| 12 | 1,6  | 0,46138 | -0,57753 | 0,46361 | -0,58311 | 0,0022 | 0,00557 |

### 2.3. Модифицированный метод Эйлера - Коши с пересчётом (метод Рунге - Кутты второго порядка)

Для повышения точности метода Эйлера применяют следующий прием. Сначала находят приближенное значение решения по методу Эйлера:

$$\text{прогноз} \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (11)$$

а затем уточняют его по формуле:

$$\text{коррекция} \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + \tilde{f}(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}. \quad (12)$$

Глобальная погрешность метода  $O(h^2)$ , то есть второй порядок точности относительно шага  $h$ .

Геометрически процесс нахождения точки  $(x_1, y_1)$  можно проследить по рис.3.

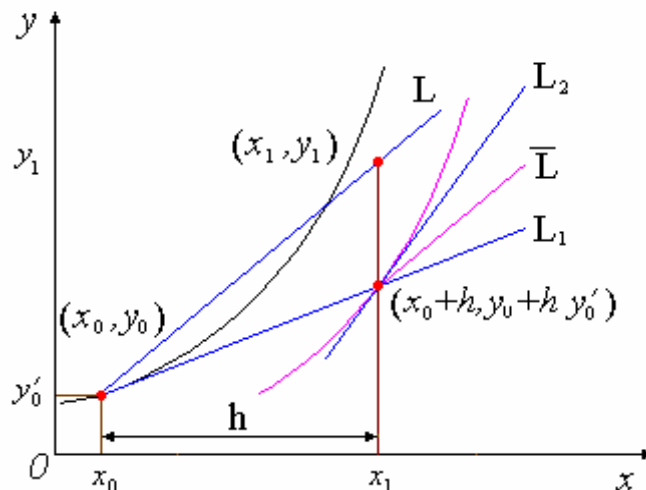


Рис. 3. Геометрическая иллюстрация метода Эйлера-Коши

По методу Эйлера находится точка  $(x_0+h, y_0+h y'_0)$ , лежащая на прямой  $L1$ . В этой точке снова вычисляется тангенс угла наклона касательной (прямая  $L2$ ). Усреднение двух тангенсов дает прямую  $\bar{L}$ . Проводим через точку  $(x_0, y_0)$

прямую  $L$ , параллельную  $\bar{L}$ . Точка, в которой прямая  $L$  пересечётся с ординатой  $x=x_l=x_0+h$ , и будет искомой точкой  $(x_1, y_1)$ .

$$\text{Локальная погрешность на } i\text{-м шаге: } \varepsilon_i = \frac{h^3 y^{(3)}(x_i)}{6}. \quad (13)$$

Оценка погрешности в точке  $x_n$  может быть получена с помощью двойного

$$\text{просчёта (с шагом } h \text{ и } h/2): \left| y_n^{**} - y(x_n) \right| \approx \frac{1}{3} \left| y_{(h)}^* - y_{(h/2)}^{**} \right|. \quad (14)$$

Метод Эйлера - Коши легко обобщается для системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно первых производных:

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k), \quad k \in \overline{1, n}$$

Начальные условия:  $y_k(x_0) = y_k, \quad k \in \overline{1, n}$

Приближённое решение по методу Эйлера-Коши для системы имеет вид:

$$\text{прогноз } \tilde{y}_{k,i+1} = y_i + h \cdot f_k(x_i; y_{1,i}; y_{2,i}; \dots; y_{k,i}), \quad (15)$$

$$\text{коррекция } y_{k,i+1} = y_i + h \cdot \frac{f_k(x_i, y_{1,i}; \dots; y_{k,i}) + \tilde{f}_k(x_{i+1}, \tilde{y}_{1,i+1}; \dots; \tilde{y}_{k,i+1})}{2}, \quad (16)$$

где  $k$  – номер переменной,  $k \in \overline{1, n}$ ;

$i$  – номер шага интегрирования.

Уравнения высших порядков сводятся к системе уравнений первого порядка путём введения новых переменных.

### Пример 3.

Применяя модифицированный метод Эйлера – Коши, найти приближённое решение задачи из примера 1:  $y' = 2x - 3y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 0,6], \quad h=0,1$ .

#### Решение

##### **1 шаг**

$$\begin{cases} \tilde{y}_{0+1} = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0) = 1 + 0,1(2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = 1 + 0,1(-3) = 0,7; \\ \tilde{f}_{0+1} = f(x_{0+1}, \tilde{y}_{0+1}) = 2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,7 = -1,9. \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot \frac{f_0 + \tilde{f}_1}{2} = 1 + 0,1(-3 - 1,9)/2 = 0,755.$$

## 2 шаг

$$\begin{cases} \tilde{y}_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1) = 0,755 + 0,1(2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,755) = \\ = 0,755 + 0,1(-2,065) = 0,5485; \\ \tilde{f}_2 = f(x_1, \tilde{y}_2) = 2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,5485 = -1,2455. \end{cases}$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot \frac{f_1 + \tilde{f}_2}{2} = 0,755 + 0,1(-2,065 - 1,2455)/2 = 0,589475.$$

Все вычисления приведены в таблице.

В восьмой колонке приведено точное решение:  $y(x) = (11e^{-3x} + 6x - 2)/9$ .

В девятой колонке приведена погрешность:  $e = |y_n^* - y(x_n)|$ .

| 1 | 2   | 3        | 4                 | 5       | 6                 | 7   | 8        | 9        |
|---|-----|----------|-------------------|---------|-------------------|-----|----------|----------|
| i | x   | $y^*$    | $\tilde{y}_{i+1}$ | f       | $\tilde{f}_{i+1}$ | h   | y(x)     | e        |
| 0 | 0   | 1        | 0,7               | -3      | -1,9              | 0,1 | 1        | 0        |
| 1 | 0,1 | 0,755    | 0,5485            | -2,065  | -1,2455           | 0,1 | 0,749889 | 0,005111 |
| 2 | 0,2 | 0,589475 | 0,45263           | -1,3684 | -0,7579           | 0,1 | 0,581881 | 0,007594 |
| 3 | 0,3 | 0,483159 | 0,39821           | -0,8495 | -0,3946           | 0,1 | 0,474696 | 0,008463 |
| 4 | 0,4 | 0,420953 | 0,37467           | -0,4629 | -0,124            | 0,1 | 0,412571 | 0,008383 |
| 5 | 0,5 | 0,39161  | 0,37413           | -0,1748 | 0,07762           | 0,1 | 0,383826 | 0,007785 |
| 6 | 0,6 | 0,38675  | 0,39072           | 0,03975 | 0,22783           | 0,1 | 0,37981  | 0,00694  |

## 2.4. Усовершенствованный метод Эйлера (метод Рунге - Кутты второго порядка)

Для повышения точности метода Эйлера применяют следующий прием. Сначала находят приближенное значение производной от решения в точке на середине расчётного интервала по методу Эйлера на половинном шаге по x:

$$\begin{cases} x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, & y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i), \\ f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right). \end{cases} \quad (17)$$

А затем вычисляют приближённое значение в точке  $x_{i+1}$  с шагом h, сохраняя найденный тангенс угла наклона касательной:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_{i+\frac{1}{2}}\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (18)$$



Этот метод называется усовершенствованным методом Эйлера (или методом средней точки) и имеет погрешность порядка  $O(h^2)$ .

Локальная погрешность на  $i$ -м шаге:  $\varepsilon_i = h^3 \cdot y'''(x_i) / 6$ .

Оценка погрешности в точке  $x_n$  может быть получена с помощью двойного просчёта (с шагом  $h$  и  $h/2$ ):  $|y_n^{**} - y(x_n)| \approx |y_{(h)}^* - y_{(h/2)}^{**}| / 3$ .

Геометрически процесс нахождения точки  $(x_1, y_1)$  можно проследить по рис.4. Сначала по методу Эйлера вычисляется приближенное значение в точке  $x_0 + h/2$ . В этой точке (точке  $P$ ) определяется касательная (прямая  $L^*$ ) к интегральной кривой, параллельно которой через точку  $(x_0, y_0)$  проводится прямая  $L_0$  до точки пересечения с прямой  $x = x_1$ . Ордината точки пересечения  $y_1$  принимается за приближенное значение искомого решения в точке  $x_1$ .

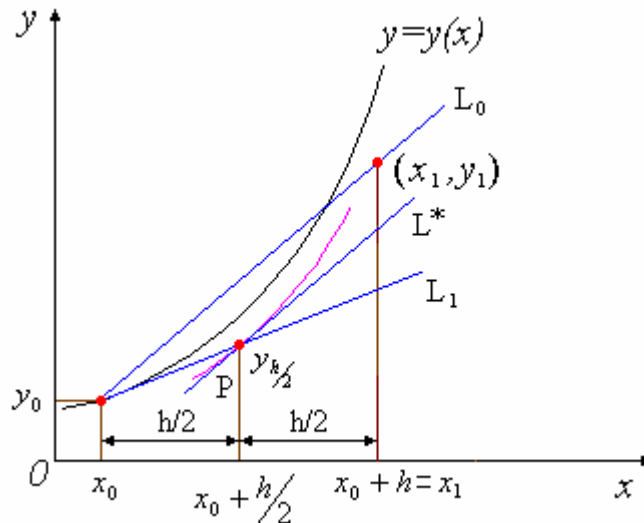


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация усовершенствованного метода Эйлера

Метод средней точки легко обобщается для системы дифференциальных уравнений первого порядка разрешённых относительно первых производных:  $y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $k \in \overline{1, n}$ . Начальные условия:

$$y_k(x_0) = y_k, \quad k \in \overline{1, n}.$$

Приближённое решение по усовершенствованному методу Эйлера для системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + h/2; & y_{k, i+\frac{1}{2}} = y_{k, i} + h \cdot f_k(x_i; y_{1, i}; y_{2, i}; \dots; y_{n, i}) / 2; \\ f_{k, i+\frac{1}{2}} = f_k \left( x_{i+\frac{1}{2}}; y_{1, i+\frac{1}{2}}; y_{2, i+\frac{1}{2}}; \dots; y_{n, i+\frac{1}{2}} \right). \end{cases} \quad (19)$$

$$y_{k,i+1} = y_{k,i} + h \cdot f_{k,i+\frac{1}{2}}(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{1,i+\frac{1}{2}}; y_{2,i+\frac{1}{2}}; \dots; y_{k,i+\frac{1}{2}}), \quad (20)$$

где  $k$  – номер переменной,  $k \in \overline{1, n}$ ;

$i$  – номер шага интегрирования.

Уравнения высших порядков сводятся к системе уравнений первого порядка путём введения новых переменных.

**Пример 4.** Применяя усовершенствованный метод Эйлера (метод средней точки), найти приближённое решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = y + 2z - 9x; \\ z' = 2y + z - 4e^x. \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 2, \quad x \in [0; 0,6], \quad h = 0,05.$$

1 шаг

$$f(x_0; y_0; z_0) = 1 + 2 \cdot 2 - 9 \cdot 0 = 5;$$

$$g(x_0; y_0; z_0) = 2 \cdot 1 + 2 - 4e^0 = 0.$$

$$\begin{cases} x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2} = 0 + 0,025 = 0,025; & y_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0; z_0) = 1 + 0,025 \cdot 5 = 1,125; \\ z_{0+\frac{1}{2}} = z_0 + \frac{h}{2} \cdot g(x_0; y_0; z_0) = 2 + 0,025 \cdot 0 = 2; \\ f_{0+\frac{1}{2}} = f(x_{0+\frac{1}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}; z_{0+\frac{1}{2}}) = 1,125 + 2 \cdot 2 - 9 \cdot 0,025 = 4,9; \\ g_{0+\frac{1}{2}} = g(x_{0+\frac{1}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}; z_{0+\frac{1}{2}}) = 2 \cdot 1,125 + 2 - 4e^{0,025} = 0,149. \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0,05 \cdot 4,9 = 1,245;$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot g_{0+\frac{1}{2}} = 2 + 0,05 \cdot 0,149 = 2,007.$$

2 шаг

$$f(x_1; y_1; z_1) = 1,245 + 2 \cdot 2,007 - 9 \cdot 0,05 = 4,81;$$

$$g(x_1; y_1; z_1) = 2 \cdot 1,245 + 2,007 - 4e^{0,05} = 0,292.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1+\frac{1}{2}} = x_1 + h/2 = 0,05 + 0,025 = 0,075; \\ y_{1+\frac{1}{2}} = y_1 + h/2 \cdot f(x_1; y_1; z_1) = 1,245 + 0,025 \cdot 4,81 = 1,365; \\ z_{1+\frac{1}{2}} = z_1 + h/2 \cdot g(x_1; y_1; z_1) = 2,007 + 0,025 \cdot 0,292 = 2,015; \\ f_{1+\frac{1}{2}} = f(x_{1+\frac{1}{2}}; y_{1+\frac{1}{2}}; z_{1+\frac{1}{2}}) = 1,365 + 2 \cdot 2,015 - 9 \cdot 0,075 = 4,72; \\ g_{1+\frac{1}{2}} = g(x_{1+\frac{1}{2}}; y_{1+\frac{1}{2}}; z_{1+\frac{1}{2}}) = 2 \cdot 1,365 + 2,015 - 4e^{0,075} = 0,434. \end{array} \right.$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f_{1+\frac{1}{2}} = 1,245 + 0,05 \cdot 4,72 = 1,48099;$$

$$z_2 = z_1 + h \cdot g_{1+\frac{1}{2}} = 2,007 + 0,05 \cdot 0,434 = 2,029.$$

*Все вычисления приведены в таблице:*

| i  | x    | x+h/2 | y       | y+hf/2 | z     | z+hg/2 | f     | f(1/2) | g     | g(1/2) |
|----|------|-------|---------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| 0  | 0    | 0,025 | 1       | 1,125  | 2     | 2      | 5     | 4,9    | 0     | 0,149  |
| 1  | 0,05 | 0,075 | 1,245   | 1,365  | 2,007 | 2,015  | 4,81  | 4,72   | 0,292 | 0,434  |
| 2  | 0,1  | 0,125 | 1,48099 | 1,597  | 2,029 | 2,043  | 4,639 | 4,559  | 0,57  | 0,705  |
| 3  | 0,15 | 0,175 | 1,70892 | 1,821  | 2,064 | 2,085  | 4,488 | 4,417  | 0,835 | 0,962  |
| 4  | 0,2  | 0,225 | 1,92975 | 2,039  | 2,112 | 2,14   | 4,355 | 4,293  | 1,086 | 1,208  |
| 5  | 0,25 | 0,275 | 2,1444  | 2,25   | 2,173 | 2,206  | 4,24  | 4,187  | 1,326 | 1,441  |
| 6  | 0,3  | 0,325 | 2,35377 | 2,457  | 2,245 | 2,284  | 4,144 | 4,1    | 1,553 | 1,662  |
| 7  | 0,35 | 0,375 | 2,55876 | 2,66   | 2,328 | 2,372  | 4,065 | 4,03   | 1,769 | 1,873  |
| 8  | 0,4  | 0,425 | 2,76025 | 2,86   | 2,422 | 2,471  | 4,004 | 3,977  | 1,975 | 2,073  |
| 9  | 0,45 | 0,475 | 2,95912 | 3,058  | 2,525 | 2,58   | 3,96  | 3,942  | 2,17  | 2,264  |
| 10 | 0,5  | 0,525 | 3,15624 | 3,255  | 2,639 | 2,697  | 3,933 | 3,924  | 2,356 | 2,445  |
| 11 | 0,55 | 0,575 | 3,35246 | 3,451  | 2,761 | 2,824  | 3,924 | 3,924  | 2,533 | 2,617  |
| 12 | 0,6  | 0,625 | 3,54864 | 3,647  | 2,892 | 2,959  | 3,932 | 3,94   | 2,7   | 2,78   |

В следующей таблице приведены значения  $y^*$  и  $z^*$ , вычисленные с шагом  $h=0,05$  и  $y^{**}$  и  $z^{**}$ , вычисленные с шагом  $h=0,1$ . Погрешности двойного расчёта:

$$e1 = |y^*(h=0,1) - y^{**}(h=0,05)|/3, \quad e2 = |z^*(h=0,1) - z^{**}(h=0,05)|/3.$$

| i | x    | $y^*$   | $y^{**}$ | e1      |  | $z^*$   | $z^{**}$ | e2      |
|---|------|---------|----------|---------|--|---------|----------|---------|
| 0 | 0    | 1       | 1        | 0       |  | 2       | 2        | 0       |
| 1 | 0,05 | 1,245   |          |         |  | 2,00744 |          |         |
| 2 | 0,1  | 1,48099 | 1,48     | 0,00033 |  | 2,02912 | 2,02949  | 0,00012 |
| 3 | 0,15 | 1,70892 |          |         |  | 2,06436 |          |         |
| 4 | 0,2  | 1,92975 | 1,92778  | 0,00066 |  | 2,11248 | 2,11294  | 0,00015 |

|    |            |         |         |         |  |         |         |         |
|----|------------|---------|---------|---------|--|---------|---------|---------|
| 5  | 0,25       | 2,1444  |         |         |  | 2,17286 |         |         |
| 6  | <b>0,3</b> | 2,35377 | 2,35074 | 0,00101 |  | 2,2449  | 2,24513 | 0,00008 |
| 7  | 0,35       | 2,55876 |         |         |  | 2,32801 |         |         |
| 8  | <b>0,4</b> | 2,76025 | 2,75602 | 0,00141 |  | 2,42166 | 2,42131 | 0,00012 |
| 9  | 0,45       | 2,95912 |         |         |  | 2,52533 |         |         |
| 10 | 0,5        | 3,15624 | 3,15054 | 0,0019  |  | 2,63852 | 2,63714 | 0,00046 |
| 11 | 0,55       | 3,35246 |         |         |  | 2,76075 |         |         |
| 12 | <b>0,6</b> | 3,54864 | 3,54108 | 0,00252 |  | 2,89159 | 2,88863 | 0,00099 |

## 2.5. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка

Алгоритм четвертого порядка требует на каждом шаге четыре вычисления функции, но является весьма точным и одним из самых широко используемых методов для решения Задачи Коши.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (21)$$

$$\text{где } K_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \quad K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_1\right), \quad (22)$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_2\right), \quad K_4 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + K_3)$$

Здесь тангенс угла наклона касательной  $f(x_i; y_i)$  в методе Эйлера заменяется на взвешенное среднее значение функций, вычисленных в четырёх различных точках.

Погрешность метода  $O(h^4)$ , то есть четвёртый порядок точности относительно шага  $h$ .

Правило Рунге практической оценки погрешности решения для численного метода четвёртого порядка имеет вид:

$$\left| y_n^{**} - y(x_n) \right| \approx \frac{1}{15} \left| y_{(h)}^* - y_{(h/2)}^{**} \right|. \quad (23)$$

Контроль правильности выбора шага  $h$  в случае использования метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности может быть организован с помощью вычисления на каждом шаге  $h$  параметра:

$$q = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_2^{(i)} - K_1^{(i)}} \right|. \quad (24)$$

Если величина  $q$  порядка нескольких сотых единицы, то расчет продолжается с тем же шагом, если  $q$  больше одной десятой, то шаг следует уменьшить, если же  $q$  меньше одной сотой, то шаг можно увеличить.

Метод Рунге - Кутты легко обобщается для системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно первых производных.

$$\text{Рассмотрим систему двух ОДУ первого порядка: } \begin{cases} y' = f(x, y, z); \\ z' = g(x, y, z). \end{cases} \quad (25)$$

Начальные условия:  $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ .

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (26)$$

$$z_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4),$$

где  $K_1 = h \cdot f(x_i, y_i), L_1 = h \cdot g(x_i, y_i),$

$$K_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_1), L_2 = h \cdot g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}L_1),$$

$$K_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}K_2), L_3 = h \cdot g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}L_2), \quad (27)$$

$$K_4 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + K_3), L_4 = h \cdot g(x_i + h, y_i + L_3).$$

Контроль правильности выбора шага  $h$  в случае использования метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы (25) может быть организован с помощью вычисления на каждом шаге  $h$  параметров:

$$q_1 = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_2^{(i)} - K_1^{(i)}} \right| \quad \text{и} \quad q_2 = \left| \frac{L_2^{(i)} - L_3^{(i)}}{L_2^{(i)} - L_1^{(i)}} \right|. \quad (28)$$

Если величина  $q$  порядка нескольких сотых единицы, то расчет продолжается с тем же шагом, если  $q$  больше одной десятой, то шаг следует уменьшить, если же  $q$  меньше одной сотой, то шаг можно увеличить.

**Пример 5.** Применяя метод Рунге – Кутты четвёртого порядка, найти приближённое решение задачи из примера 1:  $y' = 2x - 3y, y(0) = 1, x \in [0; 0,6]$ .

**1 шаг**

$$K_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1(2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = -0,3;$$

$$x_0 + h/2 = 0 + 0,05 = 0,05, \quad y_0 + K_1/2 = 1 + (-0,3)/2 = 0,85;$$

$$K_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2) = 0.1(2 \cdot 0,05 - 3 \cdot 0,85/2) = -0,245;$$

$$y_0 + K_2/2 = 1 + (-0,245)/2 = 0,8775;$$

$$K_3 = f(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2) = 2 \cdot 0,05 - 3 \cdot 0,8775/2 = -0,25325;$$

$$x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1; \quad y_0 + K_3 = 1 + (-0,25325) = 0,74675;$$

$$K_4 = f(x_0 + h, y_0 + K_3) = 2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,74675 = -0,204025 :$$

$$y_1 = y_0 + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 = \\ = 1 + (-0,3 + 2(-0,245) + 2(-0,25325) + (-0,204025))/6 = 0,749913;$$

$$q_0 = \left| \frac{K_2^0 - K_3^0}{K_2^0 - K_1^0} \right| = \left| \frac{-0,245 - (-0,25325)}{-0,245 - (-0,3)} \right| = 0,15.$$

**2 шаг**

$$K_1 = hf(x_1, y_1) = 0,1(2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,749913) = -0,204974 ;$$

$$x_1 + h/2 = 0,1 + 0,05 = 0,15 ; \quad y_1 + K_1/2 = 0,749913 + (-0,204974)/2 = 0,647426;$$

$$K_2 = hf(x_1 + h/2, y_1 + K_1/2) = 0,1(2 \cdot 0,15 - 3 \cdot 0,647426/2) = -0,16423;$$

$$y_1 + K_2/2 = 0,749913 + (-0,16423)/2 = 0,667799;$$

$$K_3 = f(x_1 + h/2, y_1 + K_2/2) = 2 \cdot 0,15 - 3 \cdot 0,667799/2 = -0,17034;$$

$$x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2 ; \quad y_1 + K_3 = 0,749913 + (-0,17034) = 0,579573;$$

$$K_4 = f(x_1 + h, y_1 + K_3) = 2 \cdot 0,2 - 3 \cdot 0,579573 = -0,133872;$$

$$y_2 = y_1 + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 = 0,749913 + \\ + (-0,204974 + 2(-0,16423) + 2(-0,17034) + (-0,133872))/6 = 0,581916;$$

$$q_1 = \left| \frac{K_2^1 - K_3^1}{K_2^1 - K_1^1} \right| = \left| \frac{-0,16423 - (-0,17034)}{-0,16423 - (-0,204974)} \right| = 0,15.$$

Следующие вычисления приведены в таблице:

| x   | y        | y+K1/2   | y+K2/2   | y+K3     | K1=hf     | K2        | K3        | K4       | Q    |
|-----|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|------|
| 0   | 1        | 0,85     | 0,8775   | 0,74675  | -0,3      | -0,245    | -0,25325  | -0,20403 | 0,15 |
| 0,1 | 0,749913 | 0,647426 | 0,667799 | 0,579573 | -0,204974 | -0,164228 | -0,17034  | -0,13387 | 0,15 |
| 0,2 | 0,581916 | 0,514628 | 0,529722 | 0,472999 | -0,134575 | -0,104389 | -0,108916 | -0,0819  | 0,15 |
| 0,3 | 0,474735 | 0,433525 | 0,444706 | 0,411323 | -0,082421 | -0,060057 | -0,063412 | -0,0434  | 0,15 |
| 0,4 | 0,412609 | 0,390718 | 0,399001 | 0,382909 | -0,043783 | -0,027215 | -0,0297   | -0,01487 | 0,15 |
| 0,5 | 0,383861 | 0,376282 | 0,382419 | 0,379136 | -0,015158 | -0,002885 | -0,004726 | 0,006259 | 0,15 |
| 0,6 | 0,379841 | 0,382865 | 0,387412 | 0,393618 | 0,0060476 | 0,0151405 | 0,0137765 | 0,021915 | 0,15 |

*Погрешность - сравнение с точным решением:*  $y(x) = (11e^{-3x} + 6x - 2)/9$ .

| x                  | 0 | 0,1     | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     |
|--------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $y^*$              | 1 | 0,74991 | 0,58192 | 0,47474 | 0,41261 | 0,38386 | 0,37984 |
| y(x) точное        | 1 | 0,74989 | 0,58188 | 0,4747  | 0,41257 | 0,38383 | 0,37981 |
| $e =  y(x) - y^* $ | 0 | 0,00002 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00004 | 0,00003 | 0,00003 |

### 3. МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ

Многошаговые методы решения задачи Коши характеризуются тем, что решение в текущем узле зависит от данных не в одном предыдущем узле, как это имеет место в одношаговых методах, а от нескольких предыдущих узлов.

Решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  удовлетворяет

интегральному соотношению:  $y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx$ .

Если решение задачи Коши получено в узлах вплоть до  $k$ -го, то можно аппроксимировать подынтегральную функцию, например: интерполяционным многочленом какой-либо степени. Вычислив интеграл от построенного многочлена на отрезке получим семейство формул, которое называется явной  $k$ -шаговой схемой Адамса (методы Адамса - Башфорта).

Если для построения интерполяционного полинома использовать  $k$  узлов, начиная с  $x_{i+1}$ , то можно получить формулы интегрирования ОДУ, известные как неявные схемы Адамса (или методы Адамса - Моултона).

Неявными эти формулы называются потому, что значение искомой функции в  $(i+1)$ -м узле -  $y_{i+1}$  - оказывается одновременно и в левой, и правой частях равенства. Однако обычно это уравнение не решается, а значение в правой части заменяется на рассчитанное по какой-либо явной формуле - например, формуле Адамса - Башфорта. Такой подход лежит в основе методов прогноза – коррекции.

Достоинства многошаговых методов:

- в каждом узле рассчитывается только одно значение правой части ОДУ - функции  $f(x, y)$ ;
- высокая точность.

Недостатки:

- невозможность старта многошагового метода из единственной начальной точки, так как для вычислений по  $k$ -шаговой формуле необходимо знание значения функции в  $k$  узлах;
- невозможность изменения шага в процессе решения, что легко реализуется в одношаговых методах.

### 3.1. Методы прогноза и коррекции

Схемы прогноза-коррекции могут быть получены сочетанием явных (прогноз) и неявных (коррекция) формул Адамса для различных  $k$ .

#### Стартовая процедура

Для вычислений по  $k$ -шаговой формуле необходимо знание значения функции в  $k$  узлах. В узле  $x_0$  решение  $y_0$  известно из начального условия, а в других узлах:  $x_1, x_2, \dots, x_k$  решения  $y_1, y_2, \dots, y_k$  можно получить, используя какой-либо одношаговый метод того же порядка точности.

#### Рекурсивная процедура

Определяют в узле  $x_{k+1}$  предварительное решение (у прогноз):  $y_{k+1}^{np}$  по явной формуле Адамса – Башфорта.

Вычисляют  $f$  прогноз:  $f_{k+1}^{np} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{np})$ , а далее рассчитывается «окончательное» значение решения в узле  $x_{k+1}$  (у коррекция):  $y_{k+1}^{kop}$  по неявной формуле Адамса – Моултона и вычисляют  $f_{k+1}^{kop} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{kop})$ .

Контролировать шаговую погрешность можно сравнением двух полученных по явной и неявной формулам приближений к  $y(x_{k+1})$ .

#### Предиктор – корректорные методы Адамса:

*первого порядка (он же явно-неявный метод Эйлера)*

$$\begin{cases} y_{k+1}^{np} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \\ y_{k+1}^{kop} = y_k + h \cdot f_{k+1}^{np}(x_{k+1}, y_{k+1}^{np}); \end{cases} \quad (29)$$

*второго порядка*

$$\begin{cases} y_{k+1}^{np} = y_k + \frac{h}{2}(3 \cdot f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})), \\ y_{k+1}^{kop} = y_k + \frac{h}{2}(f_{k+1}^{np}(x_{k+1}, y_{k+1}^{np}) + f(x_k, y_k)); \end{cases} \quad (30)$$

*третьего порядка*

$$\begin{cases} y_{k+1}^{np} = y_k + \frac{h}{12}(23 \cdot f(x_k, y_k) - 16 \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 5 \cdot f(x_{k-2}, y_{k-2})), \\ y_{k+1}^{kop} = y_k + \frac{h}{12}(5 \cdot f_{k+1}^{np}(x_{k+1}, y_{k+1}^{np}) + 8 \cdot f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})); \end{cases} \quad (31)$$



### четвёртого порядка

$$\begin{cases} y_{k+1}^{np} = y_k + \frac{h}{24} (55 \cdot f(x_k, y_k) - 59 \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}) + \\ + 37 \cdot f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9 \cdot f(x_{k-3}, y_{k-3})), \\ y_{k+1}^{kop} = y_k + \frac{h}{24} (9 \cdot f_{k+1}^{np}(x_{k+1}, y_{k+1}^{np}) + 19 \cdot f(x_k, y_k) - \\ - 5 \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})). \end{cases} \quad (32)$$

Методы Адамса обобщаются для системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно первых производных и для дифференциальных уравнений высших порядков.

**Пример 6.** Применяя метод Адамса четвёртого порядка, найти приближённое решение задачи из примера 1:  $y' = 2x - 3y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x \in [0; 0,6]$ ,  $h=0,1$ .

#### Первый этап: стартовая процедура

Так как метод четвёртого порядка, то нам нужны четыре стартовые точки, одна точка  $(x_0, y_0)$  из начального условия и три точки возьмём из предыдущего примера 5, которые найдены по методу Рунге-Кутты того же порядка точности.

| i | x   | y        | f         |
|---|-----|----------|-----------|
| 0 | 0   | 1        | -3        |
| 1 | 0,1 | 0,749913 | -2,049738 |
| 2 | 0,2 | 0,581916 | -1,345747 |
| 3 | 0,3 | 0,474735 | -0,824205 |

#### Второй этап: рекурсивная процедура

##### *1 шаг*

**Явный метод Адамса 4-го порядка** используется в качестве прогноза.  $k = 3$

$$\begin{aligned} y_4^{np} &= y_3 + h(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)/24 = \\ &= 0,474735 + 0,1(55(-0,824205) - 59(-1,345747) + 37(-2,049738) - 9(-3))/24 = \\ &= 0,413183; \end{aligned}$$

$$x_4 = 0,4; \quad f_4^{np} = f(x_4; y_4^{np}) = 2 \cdot 0,4 - 3 \cdot 0,413183 = -0,439549.$$

**Неявный метод Адамса 4-го порядка**, используется в качестве коррекции.

$$\begin{aligned} y_4^{kop} &= y_3 + h(9f_4^{np} + 19f_3 - 5f_2 + f_1)/24 = \\ &= 0,474735 + 0,1(9(-0,439549) + 19(-0,824205) - 5(-1,345747) - 2,049738)/24 = 0,412498; \end{aligned}$$

$$x_4 = 0,4; \quad f_4^{kop} = f(x_4; y_4^{kop}) = 2 \cdot 0,4 - 3 \cdot 0,412498 = -0,437495.$$

**2 шаг**

Прогноз  $k = 4$

$$y_5^{np} = y_4 + h(55f_4 - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1)/24 = 0,412498 + \\ + 0,1(55(-0,437495) - 59(-0,824205) + 37(-1,345747) - 9(-2,049738))/24 = \\ = 0,384252;$$

$$x_5 = 0,5; \quad f_5^{np} = f(x_5; y_5^{np}) = 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,384252 = -0,152756.$$

Коррекция

$$y_5^{kop} = y_4 + h(9f_5^{np} + 19f_4 - 5f_3 + f_2)/24 = 0,412498 + \\ + 0,1(9(-0,152756) + 19(-0,439549) - 5(-0,824205) - 1,345747)/24 = 0,383699.$$

Все вычисления приведены в таблице, погрешность:  $e = |y^{np} - y^{kop}|$

| l | x   | y пр        | y кор      | f пр      | f кор      | h   | e        |
|---|-----|-------------|------------|-----------|------------|-----|----------|
| 0 | 0   |             | 1          |           | -3         | 0,1 |          |
| 1 | 0,1 |             | 0,7499125  |           | -2,0497375 | 0,1 |          |
| 2 | 0,2 |             | 0,5819158  |           | -1,3457474 | 0,1 |          |
| 3 | 0,3 |             | 0,47473505 |           | -0,8242051 | 0,1 |          |
| 4 | 0,4 | 0,413183075 | 0,41249821 | -0,439549 | -0,4374946 | 0,1 | 0,000685 |
| 5 | 0,5 | 0,384251886 | 0,38369854 | -0,152756 | -0,1510956 | 0,1 | 0,000553 |
| 6 | 0,6 | 0,380023791 | 0,37966441 | 0,0599286 | 0,06100677 | 0,1 | 0,000359 |

Погрешность (сравнение с точным решением:  $y(x) = (11e^{-3x} + 6x - 2)/9$ ):

| x   | y кор       | y(x) точное | e       |
|-----|-------------|-------------|---------|
| 0   | 1           | 1           | 0       |
| 0,1 | 0,7499125   | 0,74988894  | 2,4E-05 |
| 0,2 | 0,581915802 | 0,58188089  | 3,5E-05 |
| 0,3 | 0,474735048 | 0,47469625  | 3,9E-05 |
| 0,4 | 0,412498209 | 0,4125707   | 7,2E-05 |
| 0,5 | 0,38369854  | 0,38382575  | 0,00013 |
| 0,6 | 0,379664411 | 0,37980975  | 0,00015 |

**Пример 7.** Применяя метод Адамса 2-го порядка, найти приближённое решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = y + 2z - 9x; \\ z' = 2y + z - 4e^x. \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 2, \quad x \in [0; 0,6], \quad h = 0,1.$$

Первый этап: стартовая процедура

Так как это метод второго порядка, то нам нужны две стартовые точки, которые возьмём, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка (из примера 4):

| i | x   | y    | z     | f     | g     |
|---|-----|------|-------|-------|-------|
| 0 | 0   | 1    | 2     | 5     | 0     |
| 1 | 0,1 | 1,48 | 2,029 | 4,639 | 0,569 |

Второй этап: рекурсивная процедура

**1 шаг**

**Явный метод Адамса 2-го порядка** используется в качестве прогноза.

$$y_2^{np} = y_1 + h(3f_1 - f_0)/2 = 1,48 + 0,1(3 \cdot 4,639 - 5)/2 = 1,926;$$

$$z_2^{np} = z_1 + h(3g_1 - g_0)/2 = 2,029 + 0,1(3 \cdot 0,569 - 0)/2 = 2,115;$$

$$x_2 = 0,2; \quad f_2^{np} = f(x_2, y_2^{np}, z_2^{np}) = 1,926 + 2 \cdot 2,115 - 9 \cdot 0,2 = 4,355;$$

$$g_2^{np} = g(x_2, y_2^{np}, z_2^{np}) = 2 \cdot 1,926 + 2,115 - 4e^{0.2} = 1,081.$$

**Неявный метод Адамса 2-го порядка** используется в качестве коррекции.

$$y_2^{kop} = y_1 + h(f_2^{np} + f_1)/2 = 1,48 + 0,1(4,355 + 4,639)/2 = 1,93;$$

$$z_2^{kop} = z_1 + h(g_2^{np} + g_1)/2 = 2,03 + 0,1(1,081 + 0,569)/2 = 2,112;$$

$$x_2 = 0,2; \quad f_2^{kop} = f(x_2, y_2^{kop}, z_2^{kop}) = 1,93 + 2 \cdot 2,112 - 9 \cdot 0,2 = 4,354;$$

$$g_2^{kop} = g(x_2, y_2^{kop}, z_2^{kop}) = 2 \cdot 1,93 + 2,112 - 4e^{0.2} = 1,086.$$

**2 шаг**

Прогноз

$$y_3^{np} = y_2 + h(3f_2 - f_1)/2 = 1,93 + 0,1(3 \cdot 4,355 - 4,639)/2 = 2,351;$$

$$z_3^{np} = z_2 + h(3g_2 - g_1)/2 = 2,112 + 0,1(3 \cdot 1,086 - 0,569)/2 = 2,246;$$

$$x_3 = 0,3; \quad f_3^{np} = f(x_3, y_3^{np}, z_3^{np}) = 2,351 + 2 \cdot 2,246 - 9 \cdot 0,3 = 4,144;$$

$$g_3^{np} = g(x_3, y_3^{np}, z_3^{np}) = 2 \cdot 2,351 + 2,246 - 4e^{0.3} = 1,549.$$

Коррекция

$$y_3^{kop} = y_2 + h(f_3^{np} + f_2)/2 = 1,93 + 0,1(4,144 + 4,354)/2 = 2,355;$$

$$z_3^{kop} = z_2 + h(g_3^{np} + g_2)/2 = 2,112 + 0,1 \cdot (1,549 + 1,086)/2 = 2,244;$$

Все вычисления по методу Адамса 2-го порядка приведены в таблице,

погрешность  $e1 = |y^{np} - y^{kop}|$ ,  $e2 = |z^{np} - z^{kop}|$ .

| x   | y пр  | y кор        | z пр  | z кор    | f пр  | f кор    | g пр  | g кор        | e1       | e2       |
|-----|-------|--------------|-------|----------|-------|----------|-------|--------------|----------|----------|
| 0   |       | <b>1</b>     |       | <b>2</b> |       | <b>5</b> |       | <b>0</b>     | <b>1</b> | <b>2</b> |
| 0,1 |       | <b>1,48</b>  |       | 2,029    |       | 4,639    |       | <b>0,569</b> | 1,48     | 2,029    |
| 0,2 | 1,926 | <b>1,93</b>  | 2,115 | 2,112    | 4,355 | 4,354    | 1,081 | <b>1,086</b> | 0,004    | 0,003    |
| 0,3 | 2,351 | <b>2,355</b> | 2,246 | 2,244    | 4,144 | 4,142    | 1,549 | <b>1,553</b> | 0,004    | 0,003    |
| 0,4 | 2,758 | <b>2,762</b> | 2,422 | 2,42     | 4,003 | 4,002    | 1,972 | <b>1,976</b> | 0,004    | 0,002    |
| 0,5 | 3,155 | <b>3,159</b> | 2,639 | 2,636    | 3,932 | 3,931    | 2,354 | <b>2,359</b> | 0,004    | 0,002    |
| 0,6 | 3,548 | <b>3,552</b> | 2,891 | 2,889    | 3,931 | 3,93     | 2,699 | <b>2,704</b> | 0,003    | 0,002    |

#### 4. ЗАДАНИЯ

1. Решить задачу Коши  $y'(x) = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  на отрезке  $[x_0, X]$  методом Рунге-Кутты четвертого порядка, применяя деление отрезка на  $N$  частей. Оценить погрешность.

| Номер варианта | Дифференциальное уравнение                                      | Начальное условие | $[x_0, X]$ | $N$ |
|----------------|---|-------------------|------------|-----|
| 1              | $y'(x) = \sin(xy^2)$  | $y(0) = 1$        | $[0, 2]$   | 10  |
| 2              | $y'(x) = \cos x + y^2$  | $y(0) = 2$        | $[0, 2]$   | 20  |
| 3              | $y'(x) = \cos(xy^2)$  | $y(0) = 3$        | $[0, 2]$   | 30  |
| 4              | $y'(x) = \sin x / (1 + y^2)$                                    | $y(0) = 1$        | $[0, 2]$   | 40  |
| 5              | $y'(x) = \operatorname{tg}((x^2 + y^2) / (1 + x^2 + y^2))$      | $y(0) = 2$        | $[0, 2]$   | 50  |
| 6              | $y'(x) = x + y^2$   | $y(1) = 3$        | $[1, 2]$   | 10  |
| 7              | $y'(x) = xy / (1 + x^2 + y^2)$                                  | $y(1) = 1$        | $[1, 2]$   | 20  |
| 8              | $y'(x) = \cos \sqrt{xy^2}$                                      | $y(1) = 2$        | $[1, 2]$   | 30  |
| 9              | $y'(x) = \sin(x\sqrt{1 + y^2})$                                 | $y(1) = 3$        | $[1, 2]$   | 40  |
| 10             | $y'(x) = (x^2 + y^2) / \sqrt[3]{1 + x^2 + y^2}$                 | $y(1) = 1$        | $[1, 2]$   | 50  |
| 11             | $y'(x) = x \ln(1 + y^2)$  | $y(1) = 2$        | $[1, 3]$   | 10  |
| 12             | $y'(x) = y \cos(x + y^2)$                                       | $y(1) = 3$        | $[1, 3]$   | 20  |
| 13             | $y'(x) = e^x x + y^2$   | $y(1) = 1$        | $[1, 3]$   | 30  |
| 14             | $y'(x) = \sin(x(1 + y^2))$                                      | $y(1) = 2$        | $[1, 3]$   | 40  |
| 15             | $y'(x) = \operatorname{lg}((10 + x^2 + y^2) / (1 + x^2 + y^2))$ | $y(1) = 3$        | $[1, 3]$   | 50  |
| 16             | $y'(x) = x + y^2 3^x$   | $y(-1) = 1$       | $[-1, 1]$  | 10  |

|    |   |                |                |    |
|----|---|----------------|----------------|----|
| 17 | $y'(x) =  x - y  \cdot (1 + x^2 + y^2)$             | $y(-1) = 2$    | $[-1, 1]$      | 20 |
| 18 | $y'(x) = \sqrt{ xy^2 }$                             | $y(-1) = 3$    | $[-1, 1]$      | 30 |
| 19 | $y'(x) = (x + \sqrt{1 + y^2})$                      | $y(-1) = 1$    | $[-1, 1]$      | 40 |
| 20 | $y'(x) = \sqrt[4]{1 + x^2 + y^2}$                   | $y(-1) = 2$    | $[-1, 1]$      | 50 |
| 21 | $y'(x) = \cos(x^2 + y^2) / \sqrt[3]{1 + x^2 + y^2}$ | $y(0) = 3$     | $[0, \pi]$     | 10 |
| 22 | $y'(x) = \sin x \ln(1 + y^2)$                       | $y(0) = 1$     | $[0, \pi]$     | 20 |
| 23 | $y'(x) = \sin y \cos(x + y^2)$                      | $y(0) = 2$     | $[0, \pi]$     | 30 |
| 24 | $y'(x) = e^x \sin y + x^2 e^y$                      | $y(0) = 3$     | $[0, \pi]$     | 40 |
| 25 | $y'(x) = (\cos x)(x + y^2)$                         | $y(0) = 1$     | $[0, \pi]$     | 50 |
| 26 | $y'(x) = (x^2 - y^2) / (1 + x^2 + y^2)$             | $y(\pi/2) = 2$ | $[\pi/2, \pi]$ | 10 |
| 27 | $y'(x) = x \cdot 2^y + y \cdot 2^x$                 | $y(\pi/2) = 3$ | $[\pi/2, \pi]$ | 20 |
| 28 | $y'(x) =  x - y  \cdot \cos(x^2 + y^2)$             | $y(\pi/2) = 1$ | $[\pi/2, \pi]$ | 30 |
| 29 | $y'(x) = \sqrt{ x^2 - y^2 }$                        | $y(\pi/2) = 2$ | $[\pi/2, \pi]$ | 40 |
| 30 | $y'(x) = (y + x\sqrt{1 + y^2})$                     | $y(\pi/2) = 3$ | $[\pi/2, \pi]$ | 50 |

**2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения сведением к задаче Коши для системы уравнений первого порядка на отрезке  $[x_0, X]$ , применяя деление отрезка на  $N$  частей. Оценить погрешность.**

| Номер варианта | Дифференциальное уравнение                             | Начальные условия                 | $[x_0, X]$ | $N$ |
|----------------|--|-----------------------------------|------------|-----|
| 1              | $y''(x) = x \cdot y(x) + \sin x$                       | $y(0) = 1, y'(0) = 2$             | $[0, 2]$   | 10  |
| 2              | $y'''(x) = 2x^2 \cdot y(x) \cdot y''(x)$               | $y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = 1$ | $[0, 2]$   | 20  |
| 3              | $y''(x) - (3 \cos x) \cdot y(x) = \operatorname{tg} x$ | $y(0) = 3, y'(0) = 2$             | $[0, 2]$   | 30  |
| 4              | $y'''(x) = x \cdot y'(x)$                              | $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$ | $[0, 2]$   | 40  |
| 5              | $y''(x) - \sin x \cdot y(x) = \sin x$                  | $y(0) = 2, y'(0) = 2$             | $[0, 2]$   | 50  |
| 6              | $y'''(x) = -\cos x \cdot y''(x) - y(x) \sin x$         | $y(1) = 3, y'(1) = 1, y''(1) = 1$ | $[1, 2]$   | 10  |
| 7              | $y''(x) - 2x^2 \cdot y(x) = \cos x$                    | $y(1) = 1, y'(1) = 1$             | $[1, 2]$   | 20  |
| 8              | $y'''(x) = ((x - 1)) \cdot y(x) + xy''(x)$             | $y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1$ | $[1, 2]$   | 30  |
| 9              | $y''(x) - \sin x \cdot y(x) = \sin^3 x$                | $y(1) = 3, y'(1) = 1$             | $[1, 2]$   | 40  |
| 10             | $y'''(x) = x \cdot y(x) - \sin xy'(x)$                 | $y(1) = 1, y'(1) = 1, y''(1) = 1$ | $[1, 2]$   | 50  |
| 11             | $y''(x) - \cos x \cdot y(x) = x$                       | $y(1) = 2, y'(1) = 1$             | $[1, 3]$   | 10  |
| 12             | $y'''(x) - 2x^2 \cdot y(x) = x^2$                      | $y(1) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 1$ | $[1, 3]$   | 20  |
| 13             | $y''(x) - (\lg x) \cdot y(x) = 2^x$                    | $y(1) = 1, y'(1) = 1$             | $[1, 3]$   | 30  |
| 14             | $y'''(x) - (2 \sin x ) \cdot y'(x) = 3x^3$             | $y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1$ | $[1, 3]$   | 40  |
| 15             | $y''(x) - (2 \ln x) \cdot y(x) = 1 + x$                | $y(1) = 3, y'(1) = 1$             | $[1, 3]$   | 50  |

|    |  |                                      |            |    |
|----|--|--------------------------------------|------------|----|
| 16 | $y'''(x) -  \cos x  \cdot y(x) = x$        | $y(-1) = 1, y'(-1) = 1, y''(-1) = 1$ | $[-1, 1]$  | 10 |
| 17 | $y''(x) - 2 x  \cdot y(x) = \cos^2 x$      | $y(-1) = 2, y'(-1) = 1$              | $[-1, 1]$  | 20 |
| 18 | $y'''(x) - y(x) = e^{2x}$                  | $y(-1) = 3, y'(-1) = 1, y''(-1) = 1$ | $[-1, 1]$  | 30 |
| 19 | $y''(x) - \ln(1+x^2) \cdot y(x) = \sin 2x$ | $y(-1) = 1, y'(-1) = 1$              | $[-1, 1]$  | 40 |
| 20 | $y'''(x) - \sin x  \cdot y(x) = \sin x$    | $y(-1) = 2, y'(-1) = 1, y''(-1) = 1$ | $[-1, 1]$  | 50 |
| 21 | $y''(x) - 2 \cdot y(x) = \sin x$           | $y(0) = 3, y'(0) = 2$                | $[0, \pi]$ | 10 |
| 22 | $y'''(x) = 3 \cdot y(x) + y''(x)\cos x$    | $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$    | $[0, \pi]$ | 20 |
| 23 | $y''(x) - (2x) \cdot y(x) = x^3$           | $y(0) = 2, y'(0) = 2$                | $[0, \pi]$ | 30 |
| 24 | $y'''(x) - x \cdot y(x) = x^4 y'(x)$       | $y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 1$    | $[0, \pi]$ | 40 |
| 25 | $y''(x) - 2x^2 \cdot y(x) = x^2$           | $y(0) = 1, y'(0) = 2$                | $[0, \pi]$ | 50 |
| 26 | $y'''(x) = \cos x \cdot y(x) + e^x y''(x)$ | $y(2) = 2, y'(2) = 1, y''(2) = 1$    | $[2, \pi]$ | 10 |
| 27 | $y''(x) - 2x^2 \cdot y(x) = 2xe^x$         | $y(2) = 3, y'(2) = 2$                | $[2, \pi]$ | 20 |
| 28 | $y'''(x) - 5 \cdot y''(x) = 3^{2x}$        | $y(2) = 1, y'(2) = 1, y''(2) = 1$    | $[2, \pi]$ | 30 |
| 29 | $y''(x) - 2 \sin x \cdot y(x) = \sin 3x$   | $y(2) = 2, y'(2) = 2$                | $[2, \pi]$ | 40 |
| 30 | $y'''(x) - \ln x \cdot y'(x) = 1$          | $y(2) = 3, y'(2) = 1, y''(2) = 1$    | $[2, \pi]$ | 50 |

**3. Решить задачу Коши  $y'(x) = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  на отрезке  $[x_0, x_0+1]$  указанным методом с шагом  $h=0,1$ .**

Найти точное решение и оценить погрешность 2-мя способами.

|     |   |     |  |
|-----|---|-----|--|
| 1.  | $y' - y/x = x^2, y(1) = 0$              | 2.  | $y' - y \operatorname{ctgx} = 2x \sin x, y(\pi/2) = 0$             |
| 3.  | $y' + y \cos x = (\sin 2x)/2, y(0) = 0$ | 4.  | $y' + y \operatorname{tgx} = \cos^2 x, y(\pi/4) = 0.5$             |
| 5.  | $y' - y/(x+2) = x^2 + 2x, y(-1) = 1.5$  | 6.  | $y' - y/(x+1) = e^x(x+1), y(0) = 1$                                |
| 7.  | $y' - y/x = x \sin x, y(\pi/2) = 1$     | 8.  | $y' + y/x = \sin x, y(\pi) = 1/\pi$                                |
| 9.  | $y' + y/(2x) = x^2, y(1) = 1$           | 10. | $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$ |
| 11. | $y' - y(2x-5)/x^2 = 5, y(2) = 4$        | 12. | $y' + y/x = e^x(x+1)/x, y(1) = e$                                  |
| 13. | $y' - y/x = (-2 \ln(x))/x, y(1) = 1$    | 14. | $y' - y/x = -12/(x^3), y(1) = 4$                                   |
| 15. | $y' + 2y/x = x^3, y(1) = -5/6$          | 16. | $y' + y/x = 3x, y(1) = 1$  |
| 17. | $y' - 2xy/(x^2+1) = 1+x^2, y(1) = 3$    | 18. | $y' + y(1-2x)/x^2 = 1, y(1) = 1$                                   |

|     |                                    |     |                                     |
|-----|------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 19. | $y'+3y/x = 2/x^3, y(1)=1$          | 20. | $y'+2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$     |
| 21. | $y'+xy/(2(1-x^2)) = x/2, y(0)=2/3$ | 22. | $y'+xy = -x^3, y(0)=3$              |
| 23. | $y'-2y/(x+1) = e^x(x+1)^2, y(0)=1$ | 24. | $y'+2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0)=1$ |
| 25. | $y'-2y/(x+1) = (x+1)^3, y(0)=0.5$  | 26. | $y'-y \cos x = -\sin 2x, y(0)=3$    |
| 27. | $y'-4xy = -4x^3, y(0)=0.5$         | 28. | $y'-y/x = -\ln(x)/x, y(1)=1$        |
| 29. | $y'-3x^2y = x^2(1+x^3)/3, y(0)=0$  | 30. | $y'-y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1$  |

4. Решить задачу Коши на отрезке  $[x_0, x_0+1]$  указанным методом с шагом  $h=0,1$  и оценить погрешность.

| Номер вар. | Дифференциальное уравнение  | Начальные условия   | Номер вар. | Дифференциальное уравнение  | Начальные условия                                  |
|------------|---|---|------------|---|--|
| 1          | $\begin{cases} y'_1 = \cos(1.2 \cdot y_2 + x) + y_1 \\ y'_2 = -y_2^2 + 2.2 \cdot y_1 + 1.2 \end{cases}$ | $\begin{cases} y_1(0) = 0.5 \\ y_2(0) = 0.02 \end{cases}$ | 7          | $y'' = 2 \cdot e^{-x} \cdot y' - 0.005 \cdot y$   | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 20 \end{cases}$ |
| 2          | $\begin{cases} y' = z \\ z' = -0.01 \cdot x \cdot z - x^2 \cdot y \end{cases}$                          | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 0.5 \end{cases}$        | 8          | $2 \cdot y' - 0.05 \cdot x \cdot y = y''$   | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$  |
| 3          | $\begin{cases} y' = z \\ z' = -0.01 \cdot x \cdot z - y \end{cases}$                                    | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 0.5 \end{cases}$        | 9          | $y'' = x^{-2} \cdot y' - 0.05 \cdot y$  | $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 50 \end{cases}$ |
| 4          | $\begin{cases} y' = z \\ z' = -0.02 \cdot x \cdot z - y \end{cases}$                                    | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 0.33 \end{cases}$       | 10         | $y'' = 2 \cdot \operatorname{tg}(x) - 0.05 \cdot y$                                       | $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$  |
| 5          | $\begin{cases} y' = z \\ z' = -0.02 \cdot y \cdot e^x \end{cases}$                                      | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 1/3 \end{cases}$        | 11         | $\begin{cases} y' = z - 450 \cdot y \\ z' = y + 10 \cdot \sin(t) - 5 \cdot z \end{cases}$ | $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$  |
| 6          | $\begin{cases} y' = z \\ z' = -0.03 \cdot x \cdot z - y \end{cases}$                                    | $\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 0.25 \end{cases}$       | 12         | $y'' = 20 \cdot x^2 - 0.05 \cdot y$   | $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 10 \end{cases}$ |

### Список литературы

1. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учеб. пособие / В.М. Вержбицкий. - М.: Высш. шк, 2005. - 840 с.
2. Волков, Е.А. Численные методы: учеб. пособие / Е.А. Волков. - СПб.: Лань, 2008. - 256с.
3. Охорзин, В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учеб. пособие / В.А. Охорзин. - СПб.: Лань, 2009. - 349с.
4. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики: учеб. пособие / Б. П. Демидович. - СПб.: Лань, 2009. - 665с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| 1. Основные понятия и определения.....   | 3  |
| 2. Методы Рунге – Кутты.....   | 6  |
| 2.1. Метод Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага.<br>Правило Рунге оценки погрешности..... | 7  |
| 2.2. Метод Эйлера .....  | 7  |
| Пример 1. ....   | 10 |
| Пример 2. ....   | 13 |
| 2.3. Модифицированный метод Эйлера-Коши с пересчётом .....                                     | 14 |
| Пример 3. ....   | 15 |
| 2.4. Усовершенствованный метод Эйлера.....   | 16 |
| Пример 4. ....   | 18 |
| 2.5. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.....   | 20 |
| Пример 5. ....   | 21 |
| 3. Многошаговые методы.....  | 23 |
| 3.1. Методы прогноза и коррекции.....  | 24 |
| Пример 6. ....   | 25 |
| Пример 7. ....   | 26 |
| 4. ЗАДАНИЯ .....   | 28 |
| Список литературы.....   | 31 |

Редактор В. Л. Родичева

Подписано в печать 9.06.2016. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.  
Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 2, 06. Тираж 200 экз. Заказ

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный  
химико-технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры  
Экономики и финансов ФГБОУ ВО «ИГХТУ»  
153000, г. Иваново, пр. Шереметевский, 7