А.Н. Бумагина, В.А. Таланова, А.А. Митрофанова

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Иваново

2018

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

А.Н. Бумагина, В.А. Таланова, А.А. Митрофанова

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Иваново 2018

УДК 517.91

Бумагина, А.Н.Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие / А.Н. Бумагина, В.А. Таланова, А.А. Митрофанова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново: ИГХТУ, 2018. – 96 с.

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал и примеры, иллюстрирующие основные понятия по теме дифференциальные уравнения. Разработано большое количество вариантов заданий. Это позволяет реализовать индивидуальный подход при изучении раздела дифференциальные уравнения в дисциплине «Математика» во время проведения практических занятий, при подготовке к контрольным работам, экзаменам,а также организации самостоятельной работы студентов дневного и заочного отделений всех направлений подготовки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук Б.Я. Солон
(ФГБОУ ВО Ивановский государственный университет);
доктор технических наук В.П. Жуков
(ФГБОУ ВО Ивановский государственный энергетический университет)

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и производные этой функции, т.е. уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0.$$

Если искомая функция $y = y(x)$ есть функция одной переменной x, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например:

1. $x^3y' - 3xy^2 = 2y$ – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.
2. $y'' - xy' = x^3$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x; y; y') = 0 \text{ или } y' = f(x; y).$$

Решением дифференциального уравнения на интервале $(a; b)$ называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на интервале $(a; b)$ вместе со своими производными, и такая, что подстановка функции $y = \varphi(x)$ в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество по x на $(a; b)$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

а) эта функция является решением дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной C, принадлежащей некоторому множеству;

б) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ у такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное $C = C_0$, при котором решение удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ называется такое решение $y = \varphi(x_0; C)$ которое получается из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при некотором частном значении произвольной постоянной C.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' = (x; y)$ состоит в том, чтобы найти решение, которое при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимает заданное значение $y = y_0$, т.е. удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Другими словами, задача Коши состоит в нахождении частного решения.

Геометрически задача Коши формулируется следующим образом: среди всех интегральных кривых данного дифференциального уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку $(x_0; y_0 \mathrm{y} = \mathrm{y}_0)$.

§2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. Дифференциальное уравнение вида:

$$f(x)dx = g(y)dy \tag{1}$$

называется уравнением с разделёнными переменными. После интегрирования уравнения (1) его общее решение получается в неявном виде:

$$F(x) = G(y) + C,$$

где *F(x)* и *G(y)* – первообразные для функций *f(x)* и *g(y); C* – произвольная постоянная.

2. Дифференциальное уравнение вида:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{2}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Делим на $f_2(x); g_1(y)\cdot$ $(f_2(x) \neq 0,\ g_1(y) \neq 0)$ уравнение (2). Получаем:

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0;$$

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = -\frac{g_2(y)dy}{g_1(y)}$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = -\int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)}.$$

Пример 1

Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Решение

$$y' = \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Отсюда имеем $dy = \frac{y}{x}dx$.

Предположим, что $y \neq 0$. Разделим на y:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя, будем иметь:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$ln|y| = ln|x| + ln|C|.$$

Потенцируя последнее равенство, окончательно получим $y = Cx$.

Пример 2

Проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$(1 + x^2)dy - 2xydx = 0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y=1$ при $x=0$.

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Разделив обе части уравнения на произведение $y(1 + x^2)$, получим уравнение:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = 0,$$

$$ln|y| - ln(1+x^2) = ln|C|$$

или

$$ln\frac{|y|}{1+x^2} = ln|C|.$$

Откуда получаем общее решение:

$$y = C(1+x^2).$$

Чтобы найти искомое частное решение, достаточно определить значение произвольной постоянной по начальным условиям.

$$1 = C(1+0), C = 1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y = 1 + x^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти частное решение:

1. $y' = 4x^3; y = 0$ при $x = 0$.
2. $(x^2+4)y' - 2xy = 0; y = 5$ при $x = 1$.
3. $xy' = \frac{y}{ln\,x}; y = 1$ при $x = e$.
4. $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; y = 1$ при $x = 0$.
5. $y' = y^2; y = 1$ при $x = -1$.
6. $y'tgx - y = 1; y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $(x+3)dy - (y+3)dx = 0$.
2. $y' = \frac{4}{x^2-4}$.
3. $(xy^2+x)dx + (y+x^2y)dy = 0$.

4. $y' = y^2 \cos x$.
5. $\sin x\, dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.
6. $dr - r ctg\varphi d\varphi = 0$.

§3. Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

называется однородным уравнением. Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки:

$$u = \frac{y}{x} \tag{4}$$

$$\Rightarrow y = ux;$$

$$y' = u'x + ux' = u'x + u, \tag{5}$$

где u – новая неизвестная функция от x, u' - ее производная по x.

Подставляем (4) и (5) в (3)

$$u'x + u = f(u);$$

$$u'x = f(u) - u,$$

так как

$$u' = \frac{du}{dx}, \text{ то}$$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u;$$

$$xdu = (f(u) - u)dx.$$

Делим на $x \neq 0$

$$du = \frac{(f(u) - u)dx}{x}.$$

Делим на $f(u) - u \neq 0$:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = ln|x| + C.$$

Пример 1

Найти общее решение уравнения:

$$xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$$

Решение

Разделим данное уравнение относительно производной y':

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}.$$

Правая часть уравнения зависит от отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем новую функцию t;

$$t = \frac{y}{x}.$$

Тогда $y = tx$; $y' = t'x + t$.

Подставляем полученное выражение в уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$t'x + t = t - \frac{1}{\cos t}$$

или

$$t'x = -\frac{1}{\cos t}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dt}{dx}x = -\frac{1}{\cos t};$$

$$\cos t\,dt = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \cos t\,dt = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\sin t + ln|x| = C.$$

Подставив вместо t его значение, получим общий интеграл:

$$sin\frac{y}{x} + ln|x| = C.$$

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $(x+y)dx + xdy = 0$.

Решение

Решим уравнение относительно производной y'.

$$\frac{x+y}{x} + y' = 0;$$

$$y' = -\frac{x+y}{x};$$

$$y' = -1 - \frac{y}{x}.$$

Правая часть уравнения зависит от отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, данное уравнение является однородным.

Введем новую функцию t; $t = \frac{y}{x}$. Тогда $y = tx$; $y' = t'x + t$.

Подставляем полученное выражение в уравнение.

$$t'x + t = -1 - t;$$

$$t'x = -1 - 2t;$$

$$\frac{dt}{dx}x = -1 - 2t;$$

$$\frac{dt}{2t+1} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dt}{2t+1} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2t+1)}{2t+1} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{d(2t+1)}{2t+1} = -2\int \frac{dx}{x};$$

$$ln|2t+1| = -2\,ln|x| + ln\,C;$$

$$ln|2t+1| = ln\frac{1}{x^2} + ln\,C\,;$$

$$2t+1=\frac{C}{x^2};$$

$$2\frac{y}{x}+1=\frac{C}{x^2};$$

и, следовательно,

$$2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}-1;$$

$$2y=\frac{C}{x}-x;$$

$$y=\frac{C}{2x}-\frac{x}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0.$
2. $(x-y)dy-ydx=0.$
3. $xy'=y+xe^{\frac{y}{x}}.$
4. $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}.$
5. $xy'+\sqrt{x^2+y^2}=y.$
6. $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y.$
7. $xy'-y=x\cos\frac{y}{x}.$
8. $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}.$

§4. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли

1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производную в первой степени:

$$y'+p(x)y=f(x), \tag{6}$$

2. Уравнением Бернулли называется уравнение вида:

$$y'+p(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \alpha\in R \tag{7}$$

(при $\alpha=0$ это уравнение является линейным, при $\alpha=1$ − уравнением с разделяющимися переменными). В (6) и (7) $p(x)$ и $f(x)$ − заданные функции.

Оба типа уравнений можно решать методом Бернулли с помощью подстановки $y = uv, y' = u'v + uv'$ где u и v – новые неизвестные функции от x, u' и v' − их производные по x.

Рассмотрим решение линейного уравнения.

Подстановка выражений для y и y' в уравнение (6) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

В качестве v выбираем одну из функций, удовлетворяющих уравнению:

$$v' + p(x)v = 0, \qquad (8)$$

тогда функция u определяется из уравнения

$$u'v = f(x). \qquad (9)$$

Уравнения (8), (9) – уравнения с разделяющимися переменными.

Рассмотрим решение уравнения (8).

$$v' + p(x)v = 0, v' = \frac{dv}{dx};$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v;$$

$$dv = -p(x)vdx, v \neq 0;$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;$$

$$ln|v| = -\int p(x)dx;$$

$$v = e^{-\int p(x)dx} \qquad (10)$$

Подставим (10) в (9), найдем функцию u.

Пример 1

Найти общее решение линейного уравнения $xy' - y = x^3$.

Решение

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$;

$$x(u'v + uv') - uv = x^3 : x \neq 0;$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2;$$

$$u'v + \mathrm{u}\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Выберем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, тогда

$$v' - \frac{v}{x} = 0.$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};$$

$$dv = \frac{v}{x}dx \quad v \neq 0;$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x};$$

$$ln|v| = ln\lceil x\rceil \implies v = x;$$

$$u'v = x^2;$$

$$u'x = x^2;$$

$$\frac{dv}{dx}x = x^2 \quad x \neq 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = x;$$

$$du = xdx;$$

$$\int du = \int xdx;$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно,

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x.$$

Пример 2

Найти частное решение уравнения $y(1) = 1$,

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}.$$

Решение

Положим $y = uv$, тогда

$$y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x^3};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = \frac{2}{x^3};$$

$$v' + \frac{3}{x}v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x};$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x};$$

$$ln|v| = -3ln|x|;$$

$$ln|v| = ln\left|\frac{1}{x^3}\right|;$$

$$v = \frac{1}{x^3};$$

$$u'v = \frac{2}{x^3};$$

$$u'\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3};$$

$$u' = 2;$$

$$\frac{dv}{dx} = 2;$$

$$dv = 2dx;$$

$$\int dv = \int 2dx;$$

$$u = 2x + C;$$

$$y = (2x + C)\frac{1}{x^3};$$

$$1 = (2 + C)1;$$

$$2 + C = 1;$$

$$C = -1;$$

$$y = (2x - 1)\frac{1}{x^3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

1. $y' = (x + \sin x)y.$
2. $y' = e^{-y} - 1.$
3. $y' = \frac{y+1}{x-1}.$
4. $\sqrt{1 - x^2}y' + xy = 0.$
5. $(\sin x)y' = y \ln y.$
6. $y' = e^{x+y}.$
7. $y \sin x\, dx + \cos x\, dy = 0.$
8. $e^y(1 + x^2)\, dy - 2x(1 + e^y)\, dx = 0.$
9. $(1 + x)\, dy = 2y\, dx.$
10. $xy\, dx + (x + 1)\, dy = 0.$
11. $(1 + y^2)\, dx - x\, dy = 0.$
12. $y' = \sqrt[3]{y^2}(x + 1)..$
13. $y' = 4x\sqrt{y - 1}.$
14. $xy' + y = y^2.$
15. $dy - xy(y + 2)\, dx = 0.$
16. $y \sin x^2\, x\, dx + dy = 0.$
17. $(1 - x)y' - y = 0.$
18. $y' = \frac{x(1-y^2)}{y}.$
19. $y' = \frac{y \cos x}{1+y}.$
20. $(1 + e^x)yy` = e^x.$
21. $\sqrt{1 - y^2}\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0.$

22. $y' = xe^y$.

23. $y^2\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

1. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$.

2. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$.

3. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$.

4. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$.

5. $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

6. $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

7. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

8. $y' + 3y = ex^{-3x}$.

9. $xy' - y = x^2 \sin x$.

10. $y' + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{3}{x^2+1}$.

11. $y' - y = e^x$.

12. $(1-x^2)y' + xy = 1$.

13. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$.

14. $y' + y = e^{-x}$.

15. $y' - \frac{3y}{x} = x$.

16. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}$.

17. $(2x+1)y' + y = x$.

18. $y' + y\cos x = \sin 2x$.

Решить уравнение:

1. $y' + y = 2$.

2. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^4$.

3. $xy' - 3y = x^4$.

4. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$.

5. $x' - 3x = e^{-t}$.

6. $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$.

7. $y'cosx + ysinx = 1$.

8. $(x+1)y' + y = cosx$.

Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1. $y' - 2y = 1, y(0) = \frac{1}{2}$.

2. $y' - \frac{3}{x}y = x, y(1) = 1$.

3. $2y' - y = e^x, y(0) = 5$.

4. $y' - 2xy = e^{x^2}, y(2) = 0$.

5. $x(y' - xcosx) = y,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

6. $xy' + y = sinx,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$.

7. $x^2y' + 2xy = -4,\ y(-1) = 0$.

Найти общее решение однородного уравнения:

1. $(xy' - y) \arcsin\frac{y}{x} = \sqrt{x^2 - y^2}$.

2. $4x^2y' - 4xy - y^2 = 0$.

3. $xy' = y\left(\ln\frac{y}{x} + 2\right)$.

4. $xyy' - y^2 - 2x^2 = 0$.

5. $xy' = y + \frac{x}{1+e^{\frac{y}{x}}}$.

6. $(xy + 2y^2)dx + (2xy - x^2)dy = 0$.

7. $(xy' - y) \sin\frac{y}{x} = x\, cos^3\frac{y}{x}$.

8. $(5x - y)y' = x + 5y$.

9. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

10. $(xy' - y) \ln\frac{y}{x} = x$.

11. $xy' \sin\frac{y}{x} = y \sin\frac{y}{x} + x$.

12. $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$.

13. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

14. $\left(xye^{\frac{y}{x}} + x^2\right) dy - y^2 e^{\frac{y}{x}}\, dx = 0.$

15. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

16. $(xy' - y)\left(tg\frac{y}{x} + 1\right) = x.$

17. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

18. $xy' = y + x\, cos^2\frac{y}{x}.$

19. $xdy = (3y - 4x)dx.$

20. $xy' + xtg^2\frac{y}{x} = y - x.$

21. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$

22. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$

23. $xy' = y - xsin^2\frac{y}{x}.$

24. $y' = \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{3y^2}.$

25. $(xy' - y)cos\frac{y}{x} = xsin^4\frac{y}{x}.$

§ 5. Дифференциальные уравнения второго порядка

Далее перейдем к изучению дифференциальных уравнений вида:

$$F(x, y, y', y'') = 0\ .$$

Обычно рассматривают уравнения, разрешенные относительно производной:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Начнем с уравнения $y'' = x.$

Последовательно интегрируя, найдем сначала первую производную:

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

а затем и саму функцию:

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Так как мы интегрировали дважды, то и получили две произвольные постоянные, которые обозначили C_1, C_2 .

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f\ (x,\ y,\ y')$ имеет бесчисленное множество решений, которые задаются формулой $y = (x,\ C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные. Эта совокупность решений называется общим решением.

Частное решение уравнения отыскивается при помощи задания начальных условий $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, мы задаем еще угловой коэффициент касательной (y_0), к этой кривой. Отметим, что так как общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит бесчисленное множество интегральных кривых, лишь одна из которых имеет данный угловой коэффициент.

§ 6. Частные случаи уравнений второго порядка

Возьмем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' = f\,(x, y, y')$$

и рассмотрим частные случаи, легко приводимые к дифференциальным уравнениям первого порядка.

1. Правая часть уравнения не содержит y и y′:

$$y'' = f\,(x).$$

Так как $y'' = (y')'$, то $y' = \int f(x) dx + C_1$.

Интегрируя еще раз, будем иметь:

$y = \int (\int f(x) dx + C_1) dx + C_2$, где C_1 , C_2 − произвольные постоянные.

2.Правая часть уравнения не содержит y:

$$y''= f(x, y'). \tag{11}$$

Положим $y= z$, $y''= z'$, и уравнение (11) обращается в уравнение первого порядка относительно z:

$$z' = f(x, z).$$

Найдя решение этого уравнения, $z = \varphi(x, C_1)$, мы искомое решение получим интегрированием равенства $y' = z$, т.е. $y = \int\varphi(x,\ C_1\ )dx + C_2$.

Пример 1

Решить уравнение $y'' + \frac{y}{x} = x$.

Решение

Полагая $y = z$, $y'' = z'$, приходим к уравнению первого порядка:

$$z' + \frac{z}{x} = x.$$

Уравнение является линейным. Положим $z = uv,$ тогда

$$z' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x;$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x;$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x};$$

$$\int\frac{dv}{dx} = -\int\frac{v}{x};$$

$$ln|v| = -ln|x|;$$

$$v = \frac{1}{x};$$

$$u'v = x;$$

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x} = x;$$

$$du = x^2dx;$$

$$\int du = \int x^2dx;$$

$$u = \frac{x^3}{3} + C_1;$$

$$z = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Тогда

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x};$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{9} + C_1\, ln|x| + C_2.$$

3. Правая часть уравнения не содержит x:

$$y'' = f\,(y, y').$$

Положим $y' = p$ и будем считать p функцией, зависящей от y.

Дифференцируя это равенство, получим

$$y' = \frac{dp}{dx},$$

Чтобы исключить x, произведем следующее преобразование:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\; y' = \frac{dp}{dy}.$$

Таким образом,

$$y' = p\frac{dp}{dy},$$

Подставив в уравнение, будем иметь

$$p\frac{dp}{dy} = f\,(y, p),$$

т.е. уравнение первого порядка относительно p как функции от y.

Решив его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Тогда искомое решение получим из уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1);$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx;$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 1

Решить уравнение $2yy'' + y^2 = 0$.

Решение

$$y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Получим:

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y};$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{2y};$$

$$ln|p| = -\frac{1}{2}ln|y| + ln|C_1|;$$

$$p = \frac{c_1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\sqrt{y}dy = C_1 dx;$$

$$\int \sqrt{y}dy = C_1 \int dx;$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}} = xC_1 + C_2.$$

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение первой степени относительно неизвестной функции и ее производных.

Мы будем записывать его в виде:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (12)$$

где a_1, a_2 – функции независимой переменной x или постоянные величины, функция $f(x)$ называется правой частью уравнения.

Если функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение (12) называется линейным уравнением без правой части (или однородным). В противном случае уравнение (12) называется линейным уравнением с правой частью (или неоднородным).

1. Линейные уравнения без правой части, т.е.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (13)$$

Теорема. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – решения линейного уравнения (13), то функция $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых постоянных C_1, C_2 также является решением уравнения.

Доказательство

Продифференцируем дважды функцию:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2;$$

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2';$$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

Подставим y, y', y'' в левую часть уравнения (13). Получим:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2).$$

Выражения в скобках тождественно равны нулю, т.к. функции y_1, y_2 – решения уравнения (13).

На основе доказанной теоремы мы можем сделать следующий вывод о структуре общего решения линейного уравнения без правой части (13).

Если y_1, y_2 – решения уравнения (13) такие, что их отношение не равно постоянной величине, то линейная комбинация этих функций

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (14)$$

является общим решением уравнения.

В предыдущей теореме мы доказали, что функция (14) является решением линейного уравнения без правой части, а так как она содержит две произвольные постоянные, то она и является общим решением.

Зная общее решение уравнения, мы можем по заданным начальным условиям отыскивать соответствующее частное. Пусть, например, заданы начальные условия: $y(x_0)=y_0$, $y(x_0)=y_0'$, причем в точке x_0 коэффициенты a_1, a_2 непрерывны. Подставляя эти значения в выражение для общего решения и его производной, получим систему линейных уравнений относительно C_1, C_2:

$$C_1 y + C_2 y = y(x_0),\ C_1 y' + C_2 y' = y'(x_0).$$

Для того чтобы из общего решения можно было получить любое частное, надо проверить, что полученная система имеет решение при любых начальных данных y_0 , y_0'.

Для этого определитель системы должен быть отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство этого факта для общего случая мы опустим, а позже произведем соответствующую проверку для частных случаев.

2. Линейные уравнения с правой частью.

Пусть дано линейное уравнение второго порядка с правой частью

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (15)$$

Уравнение без правой части

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (16)$$

получающееся из данного уравнения (15), если вместо свободного члена $f(x)$ взять нуль, назовем соответствующим уравнению (16).

Докажем теорему о структуре общего решения уравнения с правой частью (15).

Теорема. Общее решение уравнения с правой частью (15) можно составить как сумму общего решения соответствующего уравнения без правой части (16) и какого-нибудь частного решения данного уравнения (15).

Доказательство

Обозначим через $\Phi(x)$ общее решение уравнения (16), а через $\varphi(x)$ − какое-нибудь частное решение уравнения (15). Возьмем функцию

$$y = \Phi(x) + \varphi(x).$$

Имеем: $y' = \Phi'(x) + \varphi'(x)$ и $y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x)$.

Подставляя выражения для y, y', y' в левую часть уравнения (15), получим:

$$\Phi''(x) + \varphi''(x) + a_1\left[\Phi'(x) + \varphi'(x)\right] + a_2\left[\Phi(x) + \varphi(x)\right] =$$
$$= \left[\Phi''(x) + a_1\Phi'(x) + a_2\Phi(x)\right] + \left[\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)\right].$$

Выражение в первой квадратной скобке равно нулю, т.к. $\Phi(x)$ ─ решение уравнения без правой части (16), а выражение во второй квадратной скобке равно $f(x)$, т.к. $\varphi(x)$ − решение уравнения с правой частью (15). Следовательно, функция $y = \Phi(x) + \varphi(x)$ действительно есть решение уравнения (15).

Итак, для того чтобы найти общее решение уравнения с правой частью, нужно найти общее решение соответствующего уравнения без правой части и лишь одно какое-нибудь частное решение заданного уравнения. Это можно записать так:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \varphi(x),$$

где y_1, y_2 – частные решения соответствующего уравнения без правой части, а $\varphi(x)$ – частное решение уравнения с правой частью.

§ 8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (17)$$

где постоянные $p, q \in R$.

Найдем общее решение такого уравнения.

Будем искать частное решение уравнения (17) в форме $y = e^{kx}$, где

k – постоянное число, подлежащее определению.

Имеем:

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}.$$

Следовательно, должно иметь место тождество:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

или, так как

$$e^{kx} \neq 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0, \quad (18)$$

уравнение (18) называется характеристическим уравнением для уравнения (17).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (18) получаем общее решение уравнения (17) в виде:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \quad (19)$$

если k_1 и k_2 – различные действительные числа;

$$y = (C_1 + C_2)e^{k_2x}, \quad (20)$$

если $k_1 = k_2$;

$$y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x), \quad (21)$$

если $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ – комплексные числа, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Докажем каждый из этих случаев в отдельности.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные.

При этом оба корня могут быть взяты в качестве показателей k функции e^{kx}, и мы сразу получим два решения уравнения (17): e^{k_1x}, e^{k_2x}. Ясно, что их отношение не является постоянной величиной: $\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{(k_1-k_2)x}$.

Общее решение в случае действительных и различных корней характеристического уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Пример 1

Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0.$

Решение

Характеристическое уравнение для данного уравнения принимает вид:

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Так как $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, то в соответствии с формулой (19) общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные и равные.

В этом случае мы непосредственно получаем только одно решение:

$$y_1 = e^{k_1 x}.$$

Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию:

$$y_2 = xe^{k_1 x}.$$

Продифференцируем дважды функцию y_2:

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x},$$
$$y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения (17):

$$2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + p(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) + qxe^{k_1 x} = e^{k_1 x}\left[x\left(k_1^2 + pk_1 + q\right) + \left(2k_1 + p\right)\right]$$

Поскольку k_1 – корень характеристического уравнения, то

$$k_1^2 + pk_1 + q,$$

а так как k_1 – двукратный корень, то по формуле Виета:

$$k_1 + k_1 = -p; \quad 2k_1 + p = 0.$$

Таким образом, выражение, заключенное в квадратной скобке, равно нулю, и функция $y_2 = xe^{k_1 x}$ действительно является решением уравнения (17).

Итак, в случае действительных равных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (17) имеет вид:

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{k_1 x}. \qquad (22)$$

И здесь легко проверить, что определитель ни при каком значении x_0 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1x_0} & x_0e^{k_1x_0} \\ k_1e^{k_1x_0} & e^{k_1x_0}+k_1x_0e^{k_1x_0} \end{vmatrix} = e^{2k_1x_0} \neq 0.$$

Пример 2

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0.$

Решение

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -2.$

В соответствии с формулой (22) получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

3). Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные числа:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Покажем, что в этом случае решениями будут служить функции:

$$y = e^x \cos\beta x; \quad y = e^x \sin\beta x.$$

Проведем проверку для функции $y = e^x \cos\beta x$.

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Подставляя найденные производные в левую часть уравнения (18) и группируя слагаемые, получаем:

$$e^{\alpha x}\left[\left(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q\right)\cos\beta x - (2\alpha\beta + p\beta)\sin\beta x\right].$$

Если подставить корень $\alpha + \beta i$ в характеристическое уравнение, то будем иметь:

$$(\alpha + \beta i)^2 + p(\alpha + \beta i) + q = 0;$$

$$\left(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q\right) + i(2\alpha\beta + p\beta) = 0.$$

Комплексное число равно нулю только в том случае, если равны нулю его действительная и мнимая части, следовательно,

$$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = 0;$$

$$2\alpha\beta + p\beta = 0.$$

Эти равенства показывают, что в результате подстановки функции

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

в уравнение мы получаем нуль.

Совершенно аналогично можно произвести проверку и для функции:

$$y = e^{x} \sin \beta x.$$

Итак, в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \qquad (23)$$

Определитель:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}$$

всегда отличен от нуля.

Пример 3

Найти общее решение уравнения $y'' + y' + y = 0.$

Решение

Характеристическое уравнение $k^2 + k + 1 = 0$. Найдем корни этого уравнения.

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3;$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad i^2 = -1$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В соответствии с формулой (23) находим общее решение:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y' - \frac{3}{4}y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 1.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + k - \frac{3}{4} = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 3 = 4;$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2};$$

$$k_1 = \frac{1}{2}; \quad k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Так как корни k_1 и k_2 – различные действительные, то общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Найдем частное решение.

Подставим в общее решение первое начальное условие:

$$y(0) = 6 \Rightarrow C_1 + C_2 = 6.$$

Чтобы составить второе уравнение, продифференцируем общее решение и воспользуемся вторым начальным условием:

$$y' = \frac{1}{2}C_1 e^{\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}C_2 e^{-\frac{3}{2}x},$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 = 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 - 3C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Подставив найденные значения постоянных в общее решение, получим частное решение:

$$y = 5e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$a_0 k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0.$$

Если корни $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Если $k_1 = k_2 \neq k_3$, то общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Если $k_1 = k_2 = k_3$, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} + C_2 x^2 e^{k_1 x}.$$

Если k_1 - действительное число, $k_{2,3} = \alpha \pm i\beta$, то общее решение:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + e^{\alpha x}(C_2 \cos\beta x + C_3 \sin\beta x).$$

Пример 5

Найти общее решение уравнения:

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Решение

Составляем характеристическое уравнение $k^3 + 2k^2 + k = 0$ и находим его корни.

$k\left(k^2 + 2k + 1\right) = k(k+1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_{2,3} = -1.$

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, причем два из них равные.

Общее решение уравнения:

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x};$$
$$y = C_1 e + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x},$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные.

Пример 6

Решить уравнение:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим:

$$k^2(k-2) - (k-2) = 0, \ (k-2)(k^2-1) = 0.$$

Откуда $k_1 = -1, \ k_2 = 1, \ k_3 = 2$.

Получаем общее решение уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

§ 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{24}$$

1. Пусть правая часть уравнения (24) имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{mx},$$

где $P(x)$ – многочлен.

Тогда уравнение (24) имеет частное решение вида:

$$y = x^n Q(x) e^{mx},$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем если число m не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, то $n=0$, а если является, то n – кратность этого корня.

Пример 1

Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 2y' + y = x.$$

Решение

Найдем общее решение уравнения:

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

кратный корень $k = 1$.

Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Правая часть имеет рассматриваемую форму, причем $m=0$, $P(x)=1+x$.

Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде:

$$y = Ax + B,$$

где A, B – постоянные.

Дифференцируя и подставляя в дифференциальное уравнение, находим коэффициенты:

$$y' = A, \ \ y'' = 0.$$

$$-2A + Ax + B = 1 + x.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства:

$$A = 1,\ -2A + B = 1,$$

получим $A=1$, $B=3$.

Итак, частным решением заданного уравнения является функция:

$$y = x + 3,$$

а его общим решением – функция:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3.$$

2. Пусть правая часть уравнения (24) имеет вид:

$$f(x) = a\cos nx + b\sin nx.$$

Если числа $\pm\, in$ не являются корнями характеристического уравнения, то уравнение имеет частное решение вида:

$$y = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если же числа $\pm\, in$ служат корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y = x(A\cos nx + B\sin nx).$$

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 4y' + 13y = 5sin2x.$$

Решение

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$ имеет корни:

$$k_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части запишется так:

$$y = e^{-2x}(C_1cos3x + C_2sin3x).$$

Так как числа $\pm\, 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = Acos2x + Bsin2x.$$

Дважды дифференцируем:

$$y' = -2Asin2x + 2Bcos2x,$$

$$y'' = -4Acos2x - 4Bsin2x.$$

Подставляем выражения в уравнение:

$$-4Acos2x - 4Bsin2x - 8Asin2x + 8Bcos2x + 13Acos2x + 13Bsin2x =$$
$$= 5sin2x.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при $sin2x$, $cos2x$ в обеих частях равенства, получим:

$$\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\frac{8}{29}$, $B = \frac{9}{29}$, то есть, частным решением будет функция:

$$y = e^{-2x}(C_1cos3x + C_2sin3x) - \frac{8}{29}cos2x + \frac{9}{29}sin2x.$$

3. Если правая часть уравнения (24) имеет вид:

$$f(x) = e^{mx}(P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx),$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ – многочлены, а числа $m \pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде:

$$y = e^{mx}(R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx),$$

где $R_1(x)$, $R_2(x)$ – многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$.

Если числа $m \pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то указанную форму частного решения следует умножить на x.

Пример 3

Найти общее решение уравнения:

$$y'' + y = 4x\, sinx.$$

Решение

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Частное решение ищем в виде:

$$y = x[(Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx].$$

Имеем:

$y' = \big((Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx\big) +$

$+x[Acosx - (Ax + B)sinx + Csinx + (\ Cx + D)cosx];$

$y'' = Acosx - (Ax + B)sinx + Csinx + (\ Cx + D)cosx +$

$+\big((Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx\big) + \ Acosx - (Ax + B)sinxCsinx +$

$+(\ Cx + D)cosx +$

$+x[-Asinx - Asinx - (Ax + B)cosx + Ccosx - (Cx + D)sinx] =$

$= [-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D)]cosx +$

$+[-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B)]sinx.$

Подставляя в уравнение, находим:

$$[2Cx + (A + D)]cosx + [-2Ax + (C - B)]sinx = 2xsinx.$$

Это равенство будет тождественным только при:

$2C = 0,\ A + D = 0,\ -2A = 2,\ C - B = 0.$

Отсюда $A = -1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1.$

Следовательно, получаем частное решение:

$$y = x(sinx - xcosx).$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 cosx + C_2 sinx + x(sinx - xcosx).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2. $y'' - 2y' - 8y = 0$.
3. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
4. $y'' - 4y' = 0$.
5. $y'' - 2y' + y = 0$.
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$.
7. $y'' - 4y' + 13y = 0$.
8. $y'' + 6y' + 25y = 0$.
9. $y'' + 9y = 0$.
10. $y'' - 16y = 0$.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

1. $2y'' + 2y' + y = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = -1$.
2. $y'' + 4y = 0,\quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1,\quad y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

3. $y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6$.

4. $9y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{9}$.

5. $y'' - 12y' + 37y = 0, \quad y(2\pi) = 1, \quad y'(2\pi) = 6$.

6. $y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

7. $2y'' + 2y' + y = 0, \ \ y(0) = 2, y'(0) = -1.$

8. $3y'' + 4y' = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = -\frac{4}{3}.$

9. $y'' + 2\sqrt{3}y' + 4y = 0, \ \ y(0) = \sqrt{3}, y'(0) = 2.$

10. $6y'' + y' - y = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 2.$

11. $y'' + 4y' + 4y = 0, \ \ y(-1) = e^2, y'(-1) = e^2.$

12. $y'' + 2y' + 5y = 0, \ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

13. $y'' - 10y' + 26y = 0, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1.$

14. $4y'' - 3y' = 0, \ \ y(0) = 2, y'(0) = \frac{3}{4}.$

15. $y'' - 8y' + 15y = 0, \ \ y\left(\frac{1}{4}\right) = 2e, y'\left(\frac{1}{4}\right) = 4e.$

16. $3y'' - y' - 2y = 0, \ \ y(0) = 3, y'(0) = -2.$

17. $y'' + 4y' = 0, \ \ y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1, y'(-\frac{\pi}{4}) = 2.$

18. $9y'' + 2y' + 10y = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{9}.$

19. $y'' + 6y' + 10 = 0, \ \ y(\pi) = e^{-3\pi}, y'(\pi) = 0.$

20. $12y'' - y' - y = 0, \ \ y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{12}.$

21. $y'' - 12y' + 37y = 0, \ \ y(2\pi) = 1, y'(2\pi) = 6.$

22. $3y'' - 7y' - 6y = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = -8.$

23. $y'' - 2y' + 17y = 0, \ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.$

24. $2y'' - 5y' - 3y = 0, \ \ y(0) = 0, y'(0) = \frac{7}{2}.$

25. $4y'' - 4y' + 5y = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}.$

26. $y'' - 6y' = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 6.$

27. $y'' - 6y' + 5y = 0, \ \ y(1) = 0, y'(1) = 4.$

28. $5y'' - 2y' = 0, \;\; y(0) = -4, y'(0) = -1.$

29. $y'' - 2y' + 5y = 0, \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1.$

30. $2y'' + 7y' = 0, \;\; y(0) = 1, y'(0) = -8.$

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

1. $y'' + y' - 2y = 10\sin x.$
2. $y'' - 9y' = 8(x+1)e^{x}.$
3. $y'' - y = 5x + 2.$
4. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$
5. $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 + x.$
6. $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x.$
7. $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$
8. $y'' - y' - 2y = 4x.$
9. $y'' - 4y = 2x^2 - 2x + 1.$
10. $y'' + 2y' + 2y = 2(x+1).$
11. $y'' + 6y' + 9y = 10\cos x.$
12. $y'' - 2y' + y = \cos 3x.$
13. $y'' - 2y' + 5y = 17\sin 2x.$
14. $y'' - 10y' + 25y = 6e^{-x}.$
15. $y'' - 3y' - 4y = 4e^{x}.$
16. $y'' + 3y' - 2y = x^2 - 1.$
17. $y'' + 3y' + 2y = sin\, x + 2\, cos\, x.$
18. $y'' + 5y' + 6y = 2e^{3x}.$
19. $y'' - 25y = 25x^2 - 5.$
20. $y'' + 35y = 36x^2 - 5.$
21. $y'' - 5y' + 6y = 3xe^{x}.$
22. $y'' - 3y' - 10y = x^2 + 1.$
23. $y'' - 6y' - 7y = 32\cos x.$

Найти вид общего решения дифференциального уравнения

1. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos x + x\sin 2x.$

2. $5y'' - 4y' - 12y' = 3 + xe^{2x} + 5\sin 2x.$

3. $y'' - 6y' + 10y = e^{5x} + 5\cos x.$

4. $y'' - 10y' + 25y' = 4e^{5x} + 5\sin 5x - 2x.$

5. $y'' - 2y' = 3x^2 \sin x + 2xe^{2x}.$

6. $y'' - 12y' + 36y' = 7\cos 6x + 4 - 5e^{-6x}.$

7. $y'' + 9y' = 5x + 7e^{-9x}.$

8. $y'' - 8y' + 16y' = 4x\sin 4x + xe^{4x} + 2.$

9. $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x + 5x.$

10. $y'' + 4y = xe^{2x} + x^2 \sin 2x.$

11. $2y'' - y' - y' = xe^x + \cos x + x^3.$

12. $y'' + y = x\cos x + 5e^x.$

13. $y'' - 2y' = 3e^{2x}\cos 2x - 5x^2 xe^{2x}.$

14. $y'' + 16y = 3\cos 4x + xe^{4x}.$

15. $y'' - 9y' = 2 + 3x^2 \cos 3x + 7e^{3x}\sin 3x.$

16. $y'' - 6y' + 25y = 5\sin 4x + xe^{3x}.$

17. $y'' - 4y' = 3x^2 + 1 + x sin\, 4x + 5e^{4x}.$

18. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x - \cos 2x.$

19. $y'' + 8y' + 17y' = 3xe^{-4x}\sin x + \cos 4x + x^2\, e^x.$

20. $y'' + 9y = 8\sin 3x + x^2 + 1.$

21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-13x}\cos 2x + e^x.$

22. $y'' + y' - 12y' = 5 + 2\cos 3x + 3x^2\, e^{-4x}.$

Решить дифференциальные уравнения третьего порядка:

1. $y''' - 7y'' + 15y' = 0.$

2. $y''' - 8y = 0.$

3. $y''' - 4y'' + y' - 4y = 0.$

4. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$

5. $y''' - 3y'' - 2y = 0.$

6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

7. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

§ 10. Нормальная система дифференциальных уравнений

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots \dots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \end{cases} \qquad (25)$$

где x – независимая переменная, $y_1(x)$, y_2 (x) ,…, y_n (x) – искомые функции, $F_1, F_2, \dots, F_n$ – известные функции.

Совокупность n функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \dots$, $y_n = y_n$ (x) называется решением системы (25) на интервале (a, b), если она обращает на интервале (a, b) каждое уравнение этой системы в тождество.

Система, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется канонической:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \dots \quad \dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \qquad (26)$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, f_i (x) – заданные в некоторой области функции.

Класс систем дифференциальных уравнений, решение которых можно найти аналитическим путем, достаточно узок. Поэтому мы будем изучать главным образом системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, для которых существует законченная теория построения общего решения, и несложные системы нелинейных уравнений, для которых, как правило, можно подобрать интегрируемые комбинации. Для всех остальных случаев на практике используют численные методы, которые выходят за рамки нашего курса.

Частный случай канонической системы – система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, то есть система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (27)$$

Система (27) называется нормальной. Если известные функции f_i системы не зависят от свободной переменной x, то она называется автономной (стационарной).

Число уравнений системы (27) называется ее порядком. В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т. к. каноническую систему (26) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой $k = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений. Для этого достаточно ввести k новых функций $y_{i0}, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im_{i-1}}$ $(i = 1,2, \dots, n)$; полагая, что:

$$y_{i0} = y_i, \; y_{i1} = y_i', \; y_{i2} = y_i'', \; \dots, \; y_{i\,m_i-1} = y_i^{(m_i-1)} \; (i = 1,2,\dots,n).$$

Рассмотрим систему трех уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y'), \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y'). \end{cases}$$

Введем новые функции:

$y_{10} = y_1$, $y_{20} = y_2$, $y_{30} = y_3$, $y_{11} = y_1'$, $y_{21} = y_2'$, $y_{31} = y_3'$.

Тогда исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} y_{11}' = f_1(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{21}' = f_2(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{31}' = f_3(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{10}' = y_{11}, \\ y_{20}' = y_{21}, \\ y_{30}' = y_{31}. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1)$$

можно рассматривать как частный случай системы дифференциальных уравнений. Ее решением будет функция $y_1(x) = f_1(x)$, которая с геометрической точки зрения представляет собой кривую на плоскости (в двумерном пространстве). Для системы 2-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{d\,y_2}{d\,x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

решением будет пара функций $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x) \\ y_2 = \varphi_2(x) \end{cases}$, которые можно рассматривать как уравнения кривой в пространстве трех измерений.

Обобщая геометрическую терминологию, будем считать, что решение $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $y_n = f_n(x)$ системы (27) представляет собой интегральную кривую $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$.

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений: найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \dots,\ y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть в системе (27) функции $f_i\ (x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ удовлетворяют двум условиям:

1) функции $f_i\ (x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны как функции $(n+1)$ – й

переменной $x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n-1)}$ в некоторой области $D\ (n\ +1)$ – мерного пространства;

2) их частные производные по переменным $y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n-1)}$ в области D ограничены (т. е. $\exists M > 0$ такое, что $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_i}\right| \le M,\quad i,j=\overline{1,n}$).

Тогда для любой фиксированной точки $M_0\ (x_0,\ y_{10},\ y_{20},\dots,\ y_{n0}\ )$ области D существует, и притом единственное, решение:

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2\,(x),\dots,\ y_n = f_n\,(x)$$

системы (27), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям.

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_{10},\ y_{20},\dots,\ y_{n0}$ так, чтобы точка $(x_0,\ y_{10},\ y_{20},\dots,\ y_{n0})$ принадлежала области D, мы будем для каждой системы чисел $y_{10}\,,\ y_{20}\,,\dots,\ y_{n0}$ получать свое решение.

Следовательно, в области D система (27) имеет бесчисленное множество решений, и эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

Определение. Совокупность n функций:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x, C_1, \dots\dots, C_n), \\ y_2 = f_2(x, C_1, \dots\dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n = f_n(x, C_1, \dots\dots, C_n), \end{cases} \tag{28}$$

зависящих от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2\,,\dots, C_n$, называется общим решение системы (27), если:

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2\ ,\dots, C_n$ она обращает все уравнения системы (27) в тождество, то есть определяет решение системы;

2) для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант, при которых функции совокупности (28) удовлетворяют заданным начальным условиям.

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i , будем называть частным.

Для нормальных систем справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Всякое дифференциальное уравнение n-го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n.

Теорема 2. Всякая нормальная система n-го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n.

Пример 1

Найти методом исключения общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$$

Указать решение, удовлетворяющее условиям $y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 3$.

Решение

Продифференцируем второе уравнение системы:

$$y_2'' = y_1' - 2y_2' + 1.$$

Заменим y_1' ее выражением из первого уравнения системы:

$$y_2'' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1 - 2y_2' + 1.$$

Из второго уравнения системы находим:

$$y_1 = y_2' + 2y_2 - x\ .$$

Подставляя выражение для y_1 получим уравнение:

$$y_2'' - 2y_2' - 3y_2 = 0.$$

Его общее решение:

$$y_2 = C1e^{3x} + C2e^{-x.}$$

Дифференцируя y_2 и подставляя y_2 и y_2' в выражение для $y_{1,}$ находим:

$$y_1 = 5C1e^{3x} + C2e^{-x} - x.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 5C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - x, \\ y_2 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}. \end{cases}$$

Найдем значение постоянных C_1 и C_2, при которых частное решение будет удовлетворять начальным условиям $y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 3$.

Подставив в общее решение $x_0 = 0$, $y_1 = 11$, $y_2 = 3$, будем иметь:

$$\begin{cases} 11 = 5C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 10e^{3x} + e^{-x} - x, \\ y_2 = 2e^{3x} + e^{-x}. \end{cases}$$

Пример 2

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

Решение

1) Дифференцируем первое уравнение системы по x два раза, каждый раз заменяя y_2' и y_3' их выражениями из второго и третьего уравнений системы:

$$y_1' = y_2 + y_3;$$

$$y_1'' = y_2' + y_3' = \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3)}_{y_2'} + \underbrace{(y_2 + y_3)}_{y_3'},$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' = y_1 + 2y_2.$$

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = (y_2 + y_3) + 2(y_1 + y_2 - y_3),$$

$$\Rightarrow \quad y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3.$$

Получили систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

находим y_2 и y_3 : $y_2 = 0{,}5(y_1'' - y_1)$, $y_3 = y_1' - 0{,}5(y_1'' - y_1)$.

Подставляя выражения для y_2 и y_3 в уравнение, получим:

$y_1''' = 2y_1 + 1{,}5\cdot(y_1'' - y_1) - y_1' + 0{,}5\cdot(y_1'' - y_1), \;\Rightarrow\; y_1''' - 2y_1'' + y_1' = 0.$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3x).$$

2) Теперь найдем y_2 и y_3.

Имеем: $y_2 = 0{,}5(y_1'' - y_1)$ $y_3 = y_1' - 0{,}5y_1'' - y_1$.

Из $y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3x)$ находим

$$y_1' = e^x(C_2 + C_3 + C_3x) \quad \text{и} \quad y_1'' = e^x(C_2 + 2C_3 + C_3x).$$

Тогда

$$y_2 = 0{,}5[e^x(C_2 + 2C_3 + C_3x) - C_1 - e^x(C_2 + C_3x)],$$

$$\Rightarrow\; y_2 = 0{,}5[e^x(C_2 + 2C_3 + C_3x - C_2 - C_3x) - C_1],$$

$$\Rightarrow\; y_2 = -0{,}5C_1 + C_3e^x;\; y_3 = e^x(C_2 + C_3 + C_3x) - (-0{,}5C_1 + C_3e^x),$$

$$\Rightarrow\; y_3 = 0{,}5C_1 + e^x(C_2 + C_3x).$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3x), \\ y_2 = -0{,}5\,C_1 + C_3e^x, \\ y_3 = 0{,}5\,C_1 + e^x(C_2 + C_3x). \end{cases}$$

§ 11. Метод интегрируемых комбинаций

Пусть решение системы дифференциальных уравнений:

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1,n})$$

имеет вид:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1,n}).$$

Можно доказать, что в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2, …, C_n. То есть в области D справедливы равенства:

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases}$$

Совокупность равенств называют общим интегралом системы, а каждое из равенств системы называют первым интегралом системы.

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений легче найти именно общий интеграл системы.

Такой способ интегрирования систем называют методом интегрируемых комбинаций.

Пример 1

Найти первые интегралы системы:

$$\begin{cases} y_1 y_1' + y_2 y_2' + 1 = 0, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} + y_1 y_2' + y_2 y_1' = 0. \end{cases}$$

Решение

Заметим, что систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + dx = 0, \\ \dfrac{dy_1}{y_1} + \dfrac{dy_2}{y_2} + y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} d(y_1^2) + \dfrac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln|y_1|) + d(\ln|y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(y_1^2 + y_2^2 + 2x) = 0, \\ d(\ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1) = 0. \end{cases}$$

Значит, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases}$$

Пример 2

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение

Почленно сложим второе и третье уравнения, вычтем первое и получим:

$$-\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = -(2y_1 - y_2 - y_3) + (3y_1 - 2y_2 - 3y_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) = 0.$$

Или

$$\frac{d}{dx}(-y_1 + y_2 + y_3) = 0.$$

Отсюда первый интеграл системы:

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Этот интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через две другие, например,

$$y_3 = C_1 + y_1 - y_2.$$

Подставим y_3 в первые два уравнения системы и получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными y_1 и y_2:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - (C_1 + y_1 - y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3(C_1 + y_1 - y_2), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - C_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 3C_1. \end{cases}$$

Каждое из уравнений этой системы является уравнением с разделяющимися переменными.

Интегрируя их, находим:

$$y_1 = C_1 + C_2e^x, \quad y_2 = 3C_1 + C_3e^x.$$

Подставим найденные y_1 и y_2 и найдем y_3:

$$y_3 = C_1 + (C_1 + C_2e^x) - (3C_1 + C_3e^x) = e^x(C_2 - C_3) - C_1 .$$

Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2e^x, \\ y_2 = 3C_1 + C_3e^x, \\ y_3 = e^x(C_2 - C_3) - C_1 . \end{cases}$$

Равенства, дающие общий интеграл системы обладают следующей особенностью: независимая переменная и функции входят в них равноправно. Следовательно, они сохранят свой вид и в том случае, когда мы берем в качестве независимой переменной y_i, хотя сама система дифференциальных уравнений свою форму в этом случае меняет.

Систему дифференциальных уравнений тоже можно записать в виде, который не будет меняться при смене независимого переменного.

Действительно, из уравнений:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}),$$

получаем:

$$dx = \frac{dy_i}{f_i(x, y_1, \ldots, y_n)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{f(x)} = \frac{dy_1}{f(x) \cdot f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f(x) \cdot f_n(x, y_1, \ldots, y_n)},$$

где f (x) – любая отличная от нуля функция.

Обозначим $x = x_1, y_1 = x_2, \ldots, y_n = x_{n+1}$.

Тогда равенства примут вид:

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}.$$

Форма записи системы дифференциальных уравнений называется симметричной (или симметрической). Для метода интегрируемых комбинаций она обычно более удобна.

Замечание. При интегрировании системы методом интегрируемых комбинаций часто оказывается полезным свойство равных дробей пропорций:

$$\text{если}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\qquad \text{то}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}.$$

Действительно, пусть:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k,$$

$$\Rightarrow\quad a_1=k\cdot b_1,\quad a_2=k\cdot b_2,\quad a_3=k\cdot b_3.$$

Тогда

$$\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}=\frac{\alpha_1 kb_1+\alpha_2 kb_2+\alpha_3 kb_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}=k=\frac{a_1}{b_1}.$$

Пример 3

Решить систему методом интегрируемых комбинаций:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=-\dfrac{\ln x}{2y_1},\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{\ln x}{2y_1}-1.\end{cases}$$

Решение

Запишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dy_1}{-\dfrac{ln\,x}{2y_1}}=\frac{dy_2}{\dfrac{ln\,x}{2y_1}-1}=\frac{dx}{1},\ \Rightarrow\ \frac{dy_1}{ln\,x}=\frac{dy_2}{2y_1-ln\,x}=\frac{dx}{-2y_1}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл:

$$\frac{dy_1}{ln\,x}=\frac{dx}{-2y_1}\ \Rightarrow\ -2y_1dy_1=ln\,xdx\Rightarrow -y_1^{\,2}=x(ln\,x-1)+C_1\ \text{или}\ y_1^{\,2}+x(ln\,x-1)=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy_1+dy_2}{ln\,x+2y_1-ln\,x}=\frac{dx}{-2y_1}\ \Rightarrow\ dy_1+dy_2=-dx\ \Rightarrow\ y_1+y_2=-x+C_2\ \text{или}\ y_1+y_2+x=C_2.$$

Убедимся, что найденные первые интегралы

$y_1^{\,2}+x(ln\,x-1)=C_1$ и $y_1+y_2+x=C_2$ независимы.

Имеем:

$\Phi_1 = y_1^2 + x(\ln x - 1)$, $\Phi_2 = y_1 + y_2 + x$.

Таким образом, первые интегралы действительно независимы, и общий интеграл системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1^2 + x(\ln x - 1) = C_1, \\ y_1 + y_2 + x = C_2. \end{cases}$$

§ 12. Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений называется линейной, если функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейны относительно неизвестных функций, т. е. если она имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{29}$$

или, более кратко,

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x), \quad (i = \overline{1,n}),$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x, $y_i(x)$ – искомые функции.

Если все $b_i(x) \equiv 0$ $(i = 1,n)$, то система называется однородной.

Систему линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) можно записать в более компактной матричной (векторно-матричной) форме.

Обозначим матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y'}=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно записать в виде матричного уравнения:

$$Y' = AY + B \text{ или } Y' - AY = B.$$

Для однородной системы матричная форма записи имеет вид:

$Y' = AY$ или $Y' - AY = 0$,(29), где O – нулевая матрица-столбец длины n.

Чтобы упростить дальнейшее изложение, свяжем также систему линейных дифференциальных уравнений с действием некоторого линейного оператора.

Пусть $C_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$, $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$. Легко доказать, что оба этих множества образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем $D_n[a,b]$ является подпространством $C_n[a,b]$.

Пусть L – оператор, действующий из $D_n[a,b]$ в $C_n[a,b]$ по следующему правилу: $L[Y] = Y' - AY$, $\forall Y \in D_n[a,b]$.

Тогда система (29) означает, что

$$L[Y] = B. \tag{30}$$

Равенство (30) называется операторной формой неоднородной системы. Операторная форма однородной системы имеет вид: $L[Y] = 0$.

В дальнейшем, мы чаще всего будем использовать именно такую форму записи систем линейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что оператор $L[Y]$ является линейным, т. к. обладает следующими свойствами:

$$L[CY] = CL[Y], \forall C \in R; \tag{31}$$

$$L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]. \tag{32}$$

Действительно, по свойствам матриц:

$$L[CY] = (CY)' - A(CY) = CY' - CAY = C\left(Y' - AY\right) = CL[Y];$$

$$L[Y_1 + Y_2] = \left(Y_1' + Y_2'\right) - A(Y_1 + Y_2) = Y_1' + Y_2' - AY_1 - AY_2 = \left(Y_1' - AY_1\right) + \left(Y_2' - AY_2\right) =$$

$$= L[Y_1] + L[Y_2].$$

Изучение СЛДУ будем проводить по той же схеме, что и изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка: сначала изучим однородные СЛДУ, а затем – неоднородные.

§ 13. Интегрирование однородной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему:

$$L[Y] = 0, \tag{33}$$

в которой все коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда в области

$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid x \in [a;b], \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

для системы (33) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения и, следовательно, для любого $x_0 \in [a;b]$ и любого $y_{i0} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение системы (33), удовлетворяющее условию:

$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}$.

Так как оператор $L[Y]$ – линейный, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если Y_1 и Y_2 – решения линейной однородной системы* (33)*, то $Y_1 + Y_2$ и CY_1* ($\forall C \in \mathbb{R}$) *тоже являются решениями линейной однородной системы* (33).

Следствие. *Если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ – решения линейной однородной системы* (33), *то для любых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ линейная комбинация решений*

$\sum_{i=1}^{k} C_i Y_i = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_k Y_k$ *тоже является решением системы.*

Теорема 2. *Если векторы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, то их* *определитель Вронского на* $[a,b]$ *тождественно равен нулю.*

Теорема 2 дает необходимое условие линейной зависимости векторов $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$. Достаточным это условие для произвольных n элементов пространства $D_n[a,b]$ не будет, т. е. если $W[Y_1,\mathrm{Y}_2,\ldots,\mathrm{Y}_n]\equiv 0$, то векторы $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

Пример 1

Для векторов $Y_1=\begin{pmatrix}x^2\\0\end{pmatrix}$ и $Y_2=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ имеем: $W[Y_1,Y_2]=\begin{vmatrix}x^2 & x\\0 & 0\end{vmatrix}=0.$

Однако эти векторы линейно независимы, так как из $a_1Y_1+a_2Y_2\equiv 0$ следует:

$$\begin{cases}a_1x^2+a_2x\equiv 0\\ a_10+a_20\equiv 0;\end{cases}\Rightarrow a_1x^2+a_2x\equiv 0 \text{ или } a_1x+a_2\equiv 0\Rightarrow a_1=a_2=0.$$

Но ситуация меняется, если $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ – решения линейной однородной системы (33). Здесь справедлива следующая теорема.

Теорема 3. (Условие линейной независимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений) *Если n решений* $\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2,\ldots,\mathrm{Y}_n$ *линейной однородной системы* (33) *линейно независимы на* $[a;b]$, *то их определитель Вронского* $W[\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2,\ldots,\mathrm{Y}_n]$ *не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

Следствие (теоремы 2 и 3). *Пусть* $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ *– решения системы* (33). *Тогда их определитель Вронского* $W[\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2,\ldots,\mathrm{Y}_n]$ *либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* Y_i *линейно зависимы*; *либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x\in[a,b]$, *и это означает, что решения* Y_i *линейно независимы.*

Теорема 4. *Пространство решений* $S_n[a,b]$ *линейной однородной системы* (33) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком системы, т. е.* $\dim S_n[a;b]=n$.

Пример 2

Доказать, что $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ и $Y_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$

Записать общее решение этой системы.

Решение

Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Следовательно, Y_1, Y_2 – линейно независимы (по следствию (33)) и образуют фундаментальную систему решений (по теореме 3). Поэтому общее решение можно записать в виде:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}.$$

§ 14. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему:

$$Y' - AY = B. \tag{34}$$

Если известно общее решение соответствующей однородной системы:

$$Y' = AY, \tag{35}$$

то можно найти общее решение неоднородной системы (34) изложенным ниже методом, который называют *методом вариации постоянных*.

Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы (35). Тогда его общее решение будет иметь вид:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n\,, \tag{36}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что решение линейной неоднородной системы по структуре совпадает с решением соответствующей однородной системы, т. е. имеет вид:

$$Y = C_1(x)Y_1 + C_2(x)Y_2 + \ldots + C_n(x)Y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)Y_i, \qquad (37)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции.

Тогда

$$\mathbf{Y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i'.$$

Подставим Y и Y′ в неоднородную систему $Y' - AY = B$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A}\mathbf{Y}_i) = \mathbf{B}.$$

Так как Y_i – решения однородной системы, то $Y_i' - AY_i = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases}$$

Это линейная неоднородная система относительно неизвестных функций $C_i'(x)$. Ее определитель – определитель Вронского для системы линейно независимых решений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, и, следовательно, он отличен от нуля.

Значит система (33) имеет единственное решение:

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad (i = \overline{1, n}),$$

откуда интегрированием находим

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = 1, n), \qquad (38)$$

где C_i – произвольные постоянные.

Подставим найденные функции C_i (x) в (37) и получим общее решение неоднородной системы (34):

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + C_i \right) \mathbf{Y}_i .$$

Пример 1

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решение

Запишем соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$y_1'' = y_2' \quad \Rightarrow \; y_1'' = -y_1.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение уравнения:

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Тогда из первого уравнения системы

$$y_2 = y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{Y}_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$\mathbf{Y}_{он} = C_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \\ y_2 = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x. \end{cases}$$

Тогда функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ должны удовлетворять системе (37)

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = -tgx, \quad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \quad C_2(x) = x + C_2.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы будет иметь вид:

$$Y_{он} = \left(ln|cos\,x| + C_1\right)\begin{pmatrix} cos\,x \\ -sin\,x \end{pmatrix} + \left(x + C_2\right)\begin{pmatrix} sin\,x \\ cos\,x \end{pmatrix} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix} cos\,x \\ -sin\,x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} sin\,x \\ cos\,x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\,x \\ -sin\,x \end{pmatrix} ln|cos\,x| + \begin{pmatrix} sin\,x \\ cos\,x \end{pmatrix} x$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x, \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\ln|\cos x| + x\cos x. \end{cases}$$

Замечание. Общее решение (38) линейной неоднородной системы (33) можно переписать в виде:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)Y_i.$$

Здесь слагаемое $\sum_{i=1}^{n} C_i Y_i$ – общее решение соответствующей однородной системы, а слагаемое $\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)Y_i$ – частное решение системы (33) (получается из общего решения при $C_i = 0$, $(i = 1, n)$).

В общем случае оказалась справедлива следующая теорема.

Теорема 4. (О структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений)

Общее решение неоднородной системы $Y' = AY + B$ *с непрерывными на* $[a,b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$ *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $Y' = AY$ *и частного решения* $\bar{Y}$ *рассматриваемой неоднородной системы, то есть*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i + \bar{Y}, \tag{39}$$

где $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ *– фундаментальная система решений однородной системы* $Y' = AY$.

Теорема 5. (О наложении решений) *Если* Y_i *– решения неоднородных систем* $Y' = AY + B_i$ $(i = 1, m)$, *то их сумма* $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$ *является решением неоднородной системы* $Y' = AY + (B_1 + B_2 + \dots + B_m)$.

§ 15. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

В предыдущем параграфе мы использовали линейный дифференциальный оператор для компактной формы записи системы дифференциальных уравнений и доказательства некоторых теорем. Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить ряд понятий, связанных с линейными операторами. А именно, нам понадобятся понятия собственного вектора и собственного значения оператора конечномерных пространств.

Определение. *Пусть* G *– оператор пространства* L. *Если для некоторого ненулевого вектора* $x \in L$ *и числа* λ *имеем* $G(x) = \lambda x$, *то число* λ *называется собственным значением оператора* G, *а вектор* x *называется собственным вектором оператора* G, *относящимся к собственному значению* λ.

Укажем свойства, которыми обладают собственные векторы:

1. *Каждый собственный вектор* x *оператора* G *относится к единственному собственному значению.*

2. *Если* x_1 *и* x_2 *– собственные векторы оператора* G*, относящиеся к одному и тому же собственному значению* λ*, то их линейная комбинация* $\alpha x_1 + \beta x_2$ *– собственный вектор оператора* G*, относящийся к тому же собственному значению.*

Из второго свойства следует:

а) каждому собственному значению λ соответствует *бесчисленное множество собственных векторов*;

б) если к множеству всех собственных векторов x оператора G, относящихся к одному и тому же собственному значению λ, присоединить нулевой вектор (нулевой вектор по определению не является собственным), то получим подпространство пространства L .

Это подпространство называется собственным подпространством оператора G и обозначается $L\lambda$.

3. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \ldots x_k$ *оператора* G*, относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$*, линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в* n*-мерном линейном пространстве* L_n *, не может иметь более* n *собственных значений*. Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы*.

Процесс поиска собственных значений и собственных векторов оператора конечномерного пространства на практике сводится к решению алгебраических уравнений и систем.

Действительно, предположим, что А – матрица оператора G в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, Х – матрица-столбец координат вектора x в том же базисе.

Тогда векторное равенство $G(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству:

$$A \cdot X = \lambda X \quad \text{или} \quad (A - \lambda E)X = O. \qquad (40)$$

Но матричное уравнение $(A - \lambda E)X = O$ представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Так как собственные векторы ненулевые, то система (40) должна иметь нетривиальные решения. Это будет иметь место, если $rang(A - \lambda E) \neq n$ или, что то же,

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Матрица $A - \lambda E$ называется *характеристической матрицей* оператора G (матрицы A), а ее определитель $\det(A - \lambda E)$, являющийся многочленом относительно λ, – *характеристическим многочленом* оператора G (матрицы A).

Найдя корни характеристического многочлена, мы определим собственные значения. Подставив конкретное собственное значение в (40) и решив получившуюся систему, мы найдем относящиеся к нему собственные векторы.

Пример 1

Найти собственные векторы и собственные значения оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Запишем характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{pmatrix}, \Rightarrow |A - \lambda E| = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18).$$

Корни характеристического многочлена (собственные значения):

$\lambda_1 = 6$, $\lambda_{2,3} = 3$.

2. Для каждого из найденных собственных значений λ_i запишем систему линейных однородных уравнений $(A - \lambda_i E)X = O$ и найдем ее фундаментальную систему решений. Это будут координаты базисных векторов собственного подпространства $L\lambda i$.

а) Для $\lambda_1 = 6$ имеем:

$$(A-6E)X=\begin{pmatrix} 2-6 & -5 & -3 \\ -1 & -2-6 & -3 \\ 3 & 15 & 12-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,\Rightarrow\begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{cases} -4x_1-5x_2-3x_3=0, \\ -x_1-8x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+15x_2+6x_3=0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1,x_2 будут зависимыми, а x_3 – свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 = 3x_3, \\ -x_1 - 8x_2 = 3x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}=27, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3x_3 & -5 \\ 3x_3 & -8 \end{vmatrix}=-9x_3, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -4 & 3x_3 \\ -1 & 3x_3 \end{vmatrix}=-9x_3;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Чтобы ее записать, придадим свободной переменной x_3 любое отличное от нуля значение. Например, полагаем $x_3=-3$. Тогда из общего решения находим
$x_1=1$, $x_2=1$.

Итак, получили: $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ – решение фундаментальной системы.

Следовательно, базисом собственного подпространства $L\lambda_{=6}$ является вектор $c_1=1e_1+1e_2-3e_3=\{1;1;3\}$.

$\Rightarrow \ L_{\lambda=6}=\{\alpha c_1 | \forall\alpha\in\mathbb{R}\}$.

б) Для $\lambda_{2,3}=3$ имеем:

$$\left(A-3E\right)X=\begin{pmatrix}2-3 & -5 & -3\\ -1 & -2-3 & -3\\ 3 & 15 & 12-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,\ \Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -5 & -3\\ -1 & -5 & -3\\ 3 & 15 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x_1-5x_2-3x_3=0,\\ -x_1-5x_2-3x_3=0,\\ 3x_1+15x_2+9x_3=0.\end{cases}$$

Матрица системы имеет три пропорциональные строки и, следовательно, ее ранг равен 1. Выбирая в качестве зависимой переменной x_1 получаем, что ее общее решение имеет вид: $x_1=-5x_2-3x_3$.

Находим фундаментальную систему решений:

$x_2=1,\ x_3=0\quad\Rightarrow\ x_1=-5;$

$x_2=0,\ x_3=1\quad\Rightarrow\ x_1=-3.$

Итак, получили: $X_2=\begin{pmatrix}-5\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ – решения фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=3}$ являются векторы

$c_2=\{-5;1;0\}$ и $c_3=\{-3;0;1\}\ \Rightarrow\ L_{\lambda=3}=\{\alpha c_2+\beta c_3\,|\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$

В заключение этого пункта заметим, что говорят также о *собственных векторах матрицы* А порядка n, имея при этом в виду собственные векторы оператора n-мерного пространства, имеющего А своей матрицей в некотором базисе. Использование такой терминологии удобно в задачах, в которых на каком-то этапе решения возникает система линейных однородных уравнений $(A-\lambda E)X=O$. В этом случае любое решение системы $(A-\lambda E)X=O$ обычно называют собственным вектором матрицы А, а ее фундаментальную систему решений – линейно независимыми собственными векторами матрицы А.

§ 16. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + b_i(x), \left(i = 1, n\right), \tag{41}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные.

Такие системы называют *системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* и именно они имеют наибольшее практическое применение.

Систему (41) можно решить методом исключения. При этом получится линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Мы умеем интегрировать такие дифференциальные уравнения. Проблема лишь в том, что процесс получения дифференциального уравнения порядка n довольно трудоемкий и требует аккуратности.

Другой способ – найти общее решение соответствующей однородной системы, а затем найти общее решение неоднородной системы методом вариации постоянных. Этот путь, как правило, менее трудоемкий, так как оказалось, что фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы. Именно установление этой связи и является целью нашего дальнейшего изложения. Нахождение фундаментальной системы решений с использованием собственных векторов матрицы называется *методом Эйлера*.

Итак, рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \left(i = 1, n\right). \tag{42}$$

Вид уравнений системы (42) наводит на мысль, что решения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде:

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x}, y_2 = d_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = d_n e^{\lambda x}, \tag{43}$$

где $\lambda, d_1, d_2, \ldots, d_n$ – неизвестные действительные числа, которые нужно выбрать так, чтобы функции (43) удовлетворяли системе (42).

Запишем систему (42) в матричном виде:

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}, \tag{44}$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{D}.$$

Подставим Y и Y' в (44) и получим:

$$\lambda e^{\lambda x} D = A\left(e^{\lambda x} D\right) \text{ или } \lambda D = AD, \Rightarrow AD - \lambda D = 0,$$

$$\Rightarrow (A - \lambda E)D = 0. \tag{45}$$

Матричное уравнение (45) представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0$.

Но это означает, что λ *должно являться действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* A*, а* D *– ее собственным вектором, относящимся к* λ.

Матрица A имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Рассмотрим ситуации, которые в связи с этим могут возникнуть.

Характеристические корни матрицы A действительны и различны.

В этом случае для каждого характеристического корня λ_i ($i=1,n$) найдем собственный вектор $D_i = (d_{ji})$ и запишем решения $Y_i = e^{\lambda_i x}D_i$:

$$\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}d_{11} \\ e^{\lambda_1 x}d_{21} \\ \dots \\ e^{\lambda_1 x}d_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x}d_{12} \\ e^{\lambda_2 x}d_{22} \\ \dots \\ e^{\lambda_2 x}d_{n2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} e^{\lambda_n x}d_{1n} \\ e^{\lambda_n x}d_{2n} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x}d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений. Имеем:

$$W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = \begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x}\dots e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, так как все собственные векторы D_i относятся к различным собственным значениям, то они линейно независимы, т. е.
$\alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \dots + \alpha_n D_n = O$ только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Это означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 d_{11} + \alpha_2 d_{12} + \dots + \alpha_n d_{1n} = 0, \\ \alpha_1 d_{21} + \alpha_2 d_{22} + \dots + \alpha_n d_{2n} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \quad \dots \quad \dots \dots \\ \alpha_1 d_{n1} + \alpha_2 d_{n2} + \dots + \alpha_n d_{nn} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное (тривиальное) решение и, следовательно, ее определитель

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \neq 0$, то решения $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы в этом случае имеет вид:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_nY_n$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n d_{1n}, \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n d_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ y_n = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n d_{nn}. \end{cases}$$

Пример 1

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Решение

Данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \Rightarrow |A - \lambda E| = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1.$$

Характеристические корни являются собственными значениями матрицы A. Найдем ее собственные векторы, относящиеся к каждому из собственных значений.

а) Для $\lambda_1 = 5$ имеем:

$$(A - 5E)X = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1$ – общее решение системы.

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что D_1 – собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 5$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{5x}\mathbf{D_1} = e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix}.$$

б) Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$$(A + E)X = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_1$ – общее решение системы.

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как D_2 – собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = -1$, то решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_2} = e^{-x}\mathbf{D_2} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1 и Y_2 образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Характеристические корни матрицы A различны, но среди них есть комплексные.

Так как характеристический многочлен матрицы А имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \ \lambda_2 = \alpha - \beta i .$$

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(A - \lambda_1 E)X = O \text{ и } (A - \lambda_2 E)X = O.$$

В алгебре доказано, что если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получатся сопряженные значения.

Пусть $D = (d_{j1})$ – решение системы $(A - \lambda_1 E)X = O$. Тогда

$D = (d_{j1})$ – решение системы $(A - \lambda_2 E)X = O$. Рассмотрим матрицы-столбцы

$$Z_1 = e^{\lambda_1 x} D = e^{(\alpha + i\beta)x} D = e^{\alpha x} e^{i\beta x} D = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)D,$$
$$Z_2 = e^{\lambda_2 x} \overline{D} = e^{(\alpha - i\beta)x} \overline{D} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \overline{D} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)\overline{D}.$$

В силу выбора D и $\overline{D}$ эти матрицы-столбцы Z_1 и Z_2 будут удовлетворять матричному уравнению $Y' = AY$. Полагаем далее

$$Y_1 = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2), \ Y_2 = \frac{1}{2i}(Z_1 - Z_2).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что Y_1 и Y_2 состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $Y' = AY$. Более того, можно доказать, что Y_1 и Y_2 линейно независимы и, следовательно, могут быть включены в фундаментальную систему решений.

Замечание. На практике матрицу-столбец Z_2 не записывают, так как $Z_2 = Z_1$.

Следовательно,

$$Y_1 = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) = Re Z_1, \; Y_2 = \frac{1}{2i}(Z_1 - Z_2) = Im Z_1.$$

Пример 3

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 3y_1 + y_3. \end{cases}$$

Решение

Так как данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \; \Rightarrow \; |A - \lambda E| = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right].$$

Найдем характеристические корни:

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right] = 0, \Rightarrow \; \lambda_1 = 1, \; \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Действительный корень $\lambda_1 = 1$ является собственным значением матрицы А. Найдем собственный вектор матрицы, относящийся к этому собственному значению. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 3x_1 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 1$ и находим его:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что D_1 – собственный вектор матрицы А, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^x \mathbf{D_1} = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Возьмем один из комплексных корней, например $\lambda_2 = 1 + 2i$, и найдем фундаментальную систему решений системы $(A - \lambda_2 E)X = O$.

Имеем:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_2, x_3 будут зависимыми, а x_1 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \dfrac{3x_1}{2i}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 2i$ и находим его:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Z = e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{x}\left(\cos 2x + i\sin 2x\right)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$Z = e^{x}\begin{pmatrix} -2\sin 2x + i2\cos 2x \\ \cos 2x + i\sin 2x \\ 3\cos 2x + i3\sin 2x \end{pmatrix} = e^{x}\begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^{x}\begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Откуда находим

$$Y_1 = Re\,Z = e^{x}\begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad Y_1 = Im\,Z = e^{x}\begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1, Y_2, Y_3 образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 = C_1e^{x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{x}\begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + C_3e^{x}\begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = - 2C_2e^{x}\sin 2x + 2C_3e^{x}\cos 2x, \\ y_2 = -C_1e^{x} + C_2e^{x}\cos 2x + C_3e^{x}\sin 2x, \\ y_3 = C_1e^{x} + 3C_2e^{x}\cos 2x + 3C_3e^{x}\sin 2x. \end{cases}$$

Характеристические корни матрицы A действительны, но среди них есть кратные.

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы A кратности l, $r = rang(A - \lambda E)$. Возможны два случая.

1) $n - r = l$.

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E)X = O$ состоит из l решений. Следовательно, существуют l линейно независимых собственных векторов $D_1, D_2, \ldots, D_l$ матрицы A, относящихся к собственному значению λ.

Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$Y_1 = e^{\lambda x} D_1,\ Y_2 = e^{\lambda x} D_2, \ldots, Y_i = e^{\lambda x} D_i$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

2) $n - r \neq l$ (точнее, $n - r < l$, случай $n - r > l$ вообще невозможен из алгебраических соображений).

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E)X = O$ состоит из $k < l$ решений. С их помощью мы сможем получить k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений. В такой ситуации существует два возможных способа найти все решения.

Первый способ – искать l решений вида

$$\mathbf{Y} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} a_{10} & + & a_{11}x & + & \ldots & + & a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} & + & a_{21}x & + & \ldots & + & a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & + & a_{n1}x & + & \ldots & + & a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты многочленов a_{ij} находят, подставляя Y в исходную систему.

Пример 4

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Решение

Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы: $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \Rightarrow \ |A - \lambda E| = \lambda^2 - 4\lambda + 4 .$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = 2 .$$

Итак, имеем характеристический корень кратности l= 2. При этом $r = rang$(A − 2E) =1 (т. к. $|$ A − 2E $|$ = 0). Следовательно, $n - r = 2 - 1 = 1$ и $n - r < l$.

Будем искать решения системы в виде:

$$\mathbf{Y} = e^{2x}\begin{pmatrix} a + bx \\ c + dx \end{pmatrix},$$

то есть полагаем $y_1 = (a + bx)e^{2x}$, $y_2 = (c + dx)e^{2x}$.

Тогда

$$y_1' = (2a + 2bx + b)e^{2x}, \quad y_2' = (2c + 2dx + d)e^{2x} .$$

Подставим y_1, y_2, y_1', y_2' в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} (2a + b + 2bx)e^{2x} = (a + bx - c - dx)e^{2x}, \\ (2c + d + 2dx)e^{2x} = (a + bx + 3c + 3dx)e^{2x} \end{cases}$$

или, после сокращения на e^{2x}:

$$\begin{cases} 2a + b + 2bx = a + bx - c - dx, \\ 2c + d + 2dx = a + bx + 3c + 3dx; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + b + c) + (b + d)x = 0, \\ (-a - c + d) - (b + d)x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, получим:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -a - c + d = 0, \\ -b - d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Или после преобразований:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ \quad b+d=0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда переменные a, b будут зависимыми, c и d – свободными.

Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d-c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$d=1,\ c=0 \Rightarrow\ a=1,\ b=-1;$$

$$d=0,\ c=1\ \Rightarrow\ a=-1,\ b=0.$$

Первое из решений фундаментальной системы ($a=1$, $b=-1$, $c=0$, $d=1$) дает для системы дифференциальных уравнений решение:

$$Y_1 = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix},$$

второе решение из фундаментальной системы ($a=-1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$) дает решение:

$$Y_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1, Y_2 образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 = C_1e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Как показывает рассмотренный пример, чтобы найти решения для системы дифференциальных уравнений второго порядка, нам пришлось решать алгебраическую систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. А если порядок исходной системы будет 3, то алгебраическая система будет содержать в лучшем случае шесть уравнений и шесть неизвестных (а в худшем

– девять уравнений и неизвестных). И хотя мы в каждом случае точно знаем количество свободных переменных (их количество совпадает с кратностью корня), задача получается трудоемкая.

Второй способ решения – найти k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений, а недостающие $l-k$ решений искать в виде:

$$Y_{k+1} = e^{\lambda x}\left(D_{k+1,0} + D_{k+1,1}x\right), \quad Y_{k+2} = e^{\lambda x}\left(D_{k+2,0} + D_{k+2,1}x + D_{k+2,2}\frac{x^2}{2}\right),$$

$$Y_{k+3} = e^{\lambda x}\left(D_{k+3,0} + D_{k+3,1}x + D_{k+3,2}\frac{x^2}{2} + D_{k+3,3}\frac{x^3}{3}\right) \text{ и так далее.}$$

Здесь D_{ij} – числовые матрицы-столбцы, определяемые так, чтобы Y_i были решениями системы дифференциальных уравнений.

На первый взгляд кажется, что этот способ такой же трудоемкий, как и предыдущий. Но на самом деле это не так. Рассмотрим его применительно к системам дифференциальных уравнений 3-го порядка, т. е. к системам вида:

$$Y' = AY, \tag{46}$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица третьего порядка, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Число характеристических корней матрицы совпадает с ее порядком, следовательно, если матрица A имеет кратный характеристический корень λ, то его кратность l равна двум или трем. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) Пусть $l = 2, \ \ n - r = 1.$

В этом случае матрица A имеет один линейно независимый собственный вектор D_1 , относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $Y_1 = e^{\lambda x}D_1$ – решение системы (46). Еще одно решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде $Y_2 = e^{\lambda x}\left(D_{20} + D_{21}x\right)$.

Тогда $Y_2{}' = e^{\lambda x}(\lambda D_{20} + \lambda D_{21}x + D_{21})$

и, подставляя Y_2 и $Y_2{}'$ в (46), получаем:

$$e^{\lambda x}(\lambda D_{20} + \lambda D_{21}x + D_{21}) = A \cdot e^{\lambda x}(D^{20} + D^{21}x).$$

После преобразований будем иметь:

$$\lambda D_{20} + D_{21} + \lambda D_{21}x = AD_{20} + AD_{21}x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda D_{21} = AD_{21} \\ \lambda D_{20} + D_{21} = AD_{20} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} AD_{21} - \lambda D_{21} = 0 \\ AD_{20} - \lambda D_{20} = D_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda \mathrm{E})D_{21} = 0 \\ (A - \lambda \mathrm{E})D_{20} = D_{21}. \end{cases} \quad (47)$$

Первое уравнение системы (47) означает, что D_{21} – собственный вектор матрицы А, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $D_{21} = D_1$. Тогда второе уравнение системы (47) перепишется в виде:

$$(A - \lambda E)D_{20} = D_1,$$

то есть в качестве D_{20} можно взять любое решение системы линейных уравнений:

$$(A - \lambda E)X = D_1.$$

Таким образом, *если* $l = 2$ и $n - r = 1$, то рассматриваемая система (46) имеет решения:

$$Y_1 = e^{\lambda x} D_1 \quad \text{и} \quad Y_2 = e^{\lambda x}(D_{20} + D_1 x), \quad (48)$$

где D_1 – собственный вектор матрицы А, относящийся к собственному значению λ; D_{20} – любое решение системы линейных уравнений

$$(A - \lambda E)X = D_1.$$

Найденные таким образом решения Y_1 и Y_2 входят в фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы. Действительно, рассматривая $\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0,$ получаем

$$(\alpha D_1 + \beta D_{20}) + \beta D_1 x = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} \beta D_1 = 0 \\ \alpha D_1 + \beta D_{20} = 0. \end{cases}$$

По определению собственного вектора $D_1 \neq O$. Тогда из этой системы находим $\alpha = \beta = 0$.

А это означает, что Y_1 и Y_2 – линейно независимы.

Замечание. При получении формул (48) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

Пример 5

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Решение

Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 4\lambda + 4, \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2.$

Итак, имеем характеристический корень кратности l= 2. При этом $r = rang$(A − 2E) =1 (т. к. | A − 2E | = 0). Следовательно, $n - r$ = 2 −1=1, и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (49).

Найдем собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению λ= 2. Имеем:

$$(A - 2E)X = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_2 = 1$ и находим это решение:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что D_1 – собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$Y_1 = e^{2x} D_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

2) Второе решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде:

$Y_2 = e^{2x} (D_{20} + D_1 x),$

где D_{20} – любое решение системы линейных уравнений $(A - 2E)X = D_1$.

Имеем:

$$(A - 2E)X = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = D_1,$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Полагаем $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$D_{20} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем D_1 и D_{20} в Y_2 и получаем:

$$Y_2 = e^{2x} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] = e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1, Y_2 образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}.$$

б) Пусть $l = 3, \quad n - r = 1.$

В этом случае матрица A имеет один линейно независимый собственный вектор D_1, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $Y_1 = e^{\lambda x} D_1$ – решение системы (46). Необходимо найти еще два решения. Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде:

$$Y_2 = e^{\lambda x}\left(D_{20} + D_{21}x\right).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять D_{20} и D_{21} были нами уже получены ранее. А именно, D_{21} будет собственным вектором матрицы A, относящимся к собственному значению λ, и, следовательно, можно считать $D_{21} = D_1$; D_{20} – любое решение системы линейных уравнений $(A - \lambda E)X = D_1$.

Третье решение системы запишем в виде:

$$Y_3 = e^{\lambda x}\left(D_{30} + D_{31}x + D_{32}\frac{x^2}{2}\right).$$

Тогда

$$Y_3' = e^{\lambda x}\left(\lambda D_{30} + \lambda D_{31}x + \lambda D_{32}\frac{x^2}{2} + D_{31} + D_{32}x\right)$$

и, подставляя Y_3 и Y_3' в (46), получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda D_{30} + \lambda D_{31}x + \lambda D_{32}\frac{x^2}{2} + D_{31} + D_{32}x\right) = Ae^{\lambda x}\left(D_{30} + D_{31}x + D_{32}\frac{x^2}{2}\right).$$

После преобразований будем иметь:

$$(\lambda \mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}) + (\lambda \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32})x + \lambda \mathbf{D}_{32}\frac{x^2}{2} = \mathbf{AD}_{30} + \mathbf{AD}_{31}x + \mathbf{AD}_{32}\frac{x^2}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D}_{32} = \mathbf{AD}_{32}, \\ \lambda\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32} = \mathbf{AD}_{31}, \\ \lambda\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31} = \mathbf{AD}_{30} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{AD}_{32} - \lambda\mathbf{D}_{32} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{AD}_{31} - \lambda\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{32}, \\ \mathbf{AD}_{30} - \lambda\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{31}. \end{cases} \qquad (49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{32} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{32}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{31}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы (49) означает, что D_{32} – собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $D_{32} = D_1$. Тогда второе уравнение системы (49) перепишется в виде:

$$(A-\lambda E)D_{31} = D_1,$$

т. е. в качестве D_{31} можно взять любое решение системы линейных уравнений $(A-\lambda E)X = D_1$. Так как D_{20} тоже является решением этой системы, то можем полагать

$D_{31} = D_{20}$.

С учетом этого, третье уравнение системы (49) перепишется в виде:

$(A-\lambda E)D_{30} = D_{20}$,

т. е. в качестве D_{30} можно взять любое решение системы линейных уравнений $(A-\lambda E)X = D_{20}$.

Таким образом, если $l=3$ и $n - r = 1$, то рассматриваемая система (46) имеет решения

$$Y_1 = e^{\lambda x} D_1, \quad Y_2 = e^{\lambda x}\left(D_{20} + D_1 x\right), \quad Y_3 = \left(D_{30} + D_{20}x + D_1\frac{x^2}{2}\right), \qquad (50)$$

где D_1 – собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению λ; D_{20} – любое решение системы линейных уравнений

$(A-\lambda E)X = D_1$; D_{30} – любое решение системы линейных уравнений $(A-\lambda E)^X = D_{20}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения Y_1, Y_2, Y_3 будут линейно независимыми.

Замечание. При получении формул (50) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

Пример 6

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

Решение

Система является линейной однородной с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left| \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} \right| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3,$$
$$\Rightarrow \ \lambda_{1,2,3} = 1.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $l = 3$. При этом

$$\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 3 \\ -2 & -6-1 & 13 \\ -1 & -4 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \ r = rang(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2.$$

Следовательно, $n - r = 3 - 2 = 1$,

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (50).

2) Найдем собственный вектор матрицы А, относящийся к собственному значению 1.

Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \quad\;\; - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 2, и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1,x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} \quad\;\; - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 3x_3, \\ 2x_1 + 7x_2 = 13x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3, \\ x_1 = 3x_3 \end{cases} \text{– общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем x_3 =1 и находим это решение:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что D_1 – собственный вектор матрицы A, относящийся к собственному значению λ=1. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1}=e^x\mathbf{D_1}=e^x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде $Y_2 = e^x (D_{20} + D_1 x)$,

где D_{20} – любое решение системы линейных уравнений $(A - E)X = D_1$.

Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2+3x_3=3,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=1,\\ -x_1-4x_2+7x_3=1.\end{cases}$$

Выбирая переменные x_1,x_2 зависимыми, а x_3 свободной, получаем общее решение:

$$\begin{cases} x_2=-1+x_3,\\ x_1=3+3x_3.\end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{20}}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Подставляем D_1 и D_{20} в Y_2 и получаем:

$$\mathbf{Y_2}=e^x\left[\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}x\right]=e^x\begin{pmatrix}3+3x\\ -1+x\\ x\end{pmatrix}.$$

Третье решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде:

$$Y_3=\left(D_{30}+D_{20}x+D_1\frac{x^2}{2}\right),$$

где D_{30} – любое решение системы линейных уравнений $(A-E)X=D_{20}$.

Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{D_{20}},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2+3x_3=3,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=-1,\\ -x_1-4x_2+7x_3=0.\end{cases}$$

Выбирая переменные x_1,x_2 зависимыми, а x_3 – свободной, получаем общее решение:

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 4 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем D_1, D_{20} и D_{30} в Y_3 и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^x\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{x^2}{2}\right] = e^x\begin{pmatrix} 4+3x+1{,}5x^2 \\ -1-x+0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1, Y_2, Y_3 образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$\mathrm{Y} = C_1\mathrm{Y}_1 + C_2\mathrm{Y}_2 + C_3\mathrm{Y}_3 =$

$$= C_1e^x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^x\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}x\right] + C_3e^x\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{x^2}{2}\right] =$$

$$= C_1e^x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^x\begin{pmatrix} 3+3x \\ -1+x \\ x \end{pmatrix} + C_3e^x\begin{pmatrix} 4+3x+1{,}5x^2 \\ -1-x+0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = 3C_1e^x + C_2e^x(3+3x) + C_3e^x(4+3x+1{,}5x^2), \\ y_2 = C_1e^x + C_2e^x(-1+x) + C_3e^x(-1-x+0{,}5x^2), \\ y_3 = C_1e^x + C_2e^x\cdot x + C_3e^x\cdot 0{,}5x^2. \end{cases}$$

в) Пусть $l = 3,\ \ n - r = 2.$

В этом случае матрица A имеет два линейно независимых собственных вектора D_1 и D_2, относящихся к собственному значению λ и, следовательно, $Y_1 = e^{\lambda x}D_1$, $Y_2 = e^{\lambda x}D_2$ – решения системы (46). Необходимо найти еще одно решение. Третье решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде:

$$Y_3 = e^{\lambda x}(D_{30} + D_{31}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять D_{30} и D_{31}, нами получены ранее. А именно, D_{31} будет собственным вектором матрицы А, относящимся к собственному значению λ; D_{30} – любое решение системы линейных уравнений $(A - \lambda E)X = D_{31}$.

В нашем случае размерность собственного подпространства матрицы А для собственного значения λ равна двум, а в качестве его базиса выбраны D_1 и D_2. Следовательно,

$$D_{31} = \alpha D_1 + \beta D_2,$$

где α, β – некоторые числа, одновременно не равные нулю, которые следует выбрать так, чтобы система линейных уравнений $(A - \lambda E)X = D_{31}$ была совместна.

Замечание. Если $\alpha = \beta = 0$, то $D_{31} = \alpha D_1 + \beta D_2 = O$ и, следовательно, D_{31} не будет собственным вектором.

Таким образом, если $l = 3$, $n - r = 2$, то рассматриваемая система (46) имеет решения:

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}, \quad \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2}, \quad \mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{31}}x), \tag{51}$$

где D_1, D_2 – линейно независимые собственные векторы матрицы А, относящиеся к собственному значению λ;

$D_{31} = \alpha D_1 + \beta D_2,$

α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(A - \lambda E)X = D_{31}$ была совместна;

D_{30} – любое решение системы уравнений $(A - \lambda E)X = D_{31}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения Y_1, Y_2, Y_3 будут линейно независимыми.

Замечание. Формулы (51) останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n, так как при их получении не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка.

Пример 7

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y' = 2y_1, \\ y' = y_2 - y_3, \\ y' = 2y_2 + 3y_3\,. \end{cases}$$

Решение

Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^3,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_{1,2,3} = 2\,.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $l = 3$. При этом

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1.$$

Следовательно, $n - r = 3-1 = 2$, и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (51). Найдем собственные векторы матрицы А, относящиеся к собственному значению $\lambda = 2$.

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

Имеем: $$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = 0,\\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0.\end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение: $x_3 = 0\cdot x_1 - x_2$. Находим фундаментальную систему решений:

$$x_1=1,\ x_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=1 \quad \Rightarrow \quad x_3=-1.$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{D_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что D_1, D_2 – линейно независимые собственные векторы матрицы A, относящиеся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решения системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1}=e^{2x}\mathbf{D_1}=e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y_2}=e^{2x}\mathbf{D_2}=e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

2) Третье решение системы уравнений найдем в виде $Y_3 = e^{\lambda x}(D_{30} + D_{31}x)$, где $D_{31} = \alpha D_1 + \beta D_2$, α,β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(A - \lambda E)X = D_{31}$ была совместна;

D_{30} – любое решение системы уравнений $(A - \lambda E)X = D_{31}$. Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(A-\lambda E)_X = \alpha D_1 + \beta D_2$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

$$\alpha\mathbf{D}_1+\beta\mathbf{D}_2=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0=\alpha,\\ 0\cdot x_1-x_2-x_3=\beta,\\ 0\cdot x_1+x_2+x_3=-\beta.\end{cases}$$

Система будет совместна при $\alpha = 0$ и $\forall\beta\in\mathbb{R}$. Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = -1$.

$$\begin{cases} 0x_1-x_2-x_3=-1\\ 0x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение: $x_3 = 1 - 0x_1 - x_2$.

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подставляем $D_{31} = -D_2$ и D_{30} в Y_3 и получаем:

$$\mathbf{Y}_3=e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right]=e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1, Y_2, Y_3 образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 =$$

$$=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right]=$$

$$=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x}, \\ y_2 = C_2e^{2x} - C_3xe^{2x}, \\ y_3 = -C_2e^{2x} + C_3(1+x)e^{2x}. \end{cases}$$

Пример 8

Найти общее решение системы $Y' = AY$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda) = -\lambda^3,$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$A - 0E = \begin{pmatrix} 4-0 & -4 & 2 \\ 2 & -2-0 & 1 \\ -4 & 4 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow r = rang(A - 0E) = 1$$

Следовательно, $n-r=3-1=2$, и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (51).

2) Найдем собственный вектор матрицы А, относящийся к собственному значению $\lambda=0$.

Имеем:

$$(A-0E)X=\begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,\ \Rightarrow \begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

или $\begin{cases}4x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 2x_1-2x_2+x_3=0,\\ -4x_1+4x_2-2x_3=0.\end{cases}$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 1, и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор 1 . Тогда переменная x_3 будет зависимой, а x_1, x_2 – свободными. Отбрасываем первое и третье уравнения системы и находим общее решение:

$$2x_1-2x_2+x_3=0,\Rightarrow x_3=-2x_1+2x_2.$$

Фундаментальная система решений состоит из двух решений. Полагая $x_1=1$, $x_2=0$ и $x_1=0$, $x_2=1$, находим их:

$$D_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix},\ D_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что D_1 и D_2 – собственные векторы матрицы A, относящиеся к собственному значению $\lambda=0$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$Y_1=e^{0x}D_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix} \text{ и } Y_2=e^{0x}D_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде:

$$Y_3=e\lambda x(D_{30}+D_{31}x),$$

где $D_{31}=\alpha D_1+\beta D_2$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(A-\lambda E)X=D_{31}$ была совместна;

D_{30} – любое решение системы уравнений $(A-\lambda E)X=D_{31}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений:

$$(A-\lambda E)X=\alpha D_1+\beta D_2.$$

Имеем

$$(A-0E)X=\begin{pmatrix}4&-4&2\\2&-2&1\\-4&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

$$\alpha D_1+\beta D_2=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\beta 2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-2\alpha+2\beta\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&-4&2\\2&-2&1\\-4&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-2\alpha+2\beta\end{pmatrix}$$

Умножим вторую строку на –2 и 2 и прибавим к первой и третьей строке соответственно. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-2\beta\\\beta\\-2\alpha+4\beta\end{pmatrix}$$

Система будет совместна при $\alpha-2\beta=-2\alpha+4\beta=0$, где β – любое действительное число. Пусть $\beta=1\Rightarrow\alpha=2$.

Тогда

$$D_{31}=2D_1+D_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

и система для нахождения D_{30} имеет вид:

$2x_1-2x_2+x_3=1.$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение: $x_3=1-2x_1+2x_2$.

Полагаем $x_1=0$, $x_2=0$ и находим частное решение:

$$D_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подставляем $D_{31}=2D_1+D_2$ в Y_3 и получаем:

$$Y_3=e^{0x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}x\right]=\begin{pmatrix}2x\\x\\1-2x\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения Y_1, Y_2, Y_3 образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}x\right] = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + 2C_3x, \\ y_2 = C_1 + C_3x, \\ y_3 = -2C_1 + 2C_2 = C_3(1-2x). \end{cases}$$

Итак, мы рассмотрели метод Эйлера в трех случаях:

1) характеристические корни матрицы А действительны и различны;

2) характеристические корни матрицы А различны, но среди них есть комплексные;

3) характеристические корни матрицы А действительны, но среди них есть кратные.

Не рассмотренным остался случай, когда среди характеристических корней матрицы А есть кратные комплексные корни. В этой ситуации алгебраические трудности метода Эйлера возрастают настолько, что лучше использовать другие методы интегрирования.

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы дифференциальных уравнений двумя способами:

а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

б) с помощью характеристического уравнения.

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^{t}, \\ y = 3C_1e^{5t} - C_2e^{t}. \end{cases} \right)$

2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{t}, \\ y = -2C_1e^{3t} + C_2e^{-t}. \end{cases} \right)$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}, \\ y = \frac{1}{2}C_1e^{3t} - \frac{1}{4}C_2e^{-3t}. \end{cases} \right)$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{-3t} + C_2e^t, \\ y = \frac{1}{3}C_1e^{-3t} - C_2e^t. \end{cases} \right)$

5. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 + C_2e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2e^{5t}. \end{cases} \right)$

6. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e -^t, \\ y = 3C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{cases} \right)$

7. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t}, \\ y = 3C_1e^{-t} + C_2e^{5t}. \end{cases} \right)$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-t}, \\ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t}. \end{cases} \right)$

9. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t}. \end{cases} \right)$

10. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{2t}, \\ y = -C_1e^t - \frac{3}{2}C_2e^{2t}. \end{cases} \right)$

11. $\begin{cases} x' = -2, \\ y' = y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-2t}, \\ y = C_1e^t + C_2. \end{cases} \right)$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{8t}, \\ y = -C_1e^{2t} + 2C_2e^{8t}. \end{cases} \right)$

13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{7t}, \\ y = 2C_1e^{2t} + \frac{1}{3}C_2e^{7t}. \end{cases} \right)$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}, \\ y = -C_1e^{2t} + C_2e^{4t}. \end{cases} \right)$

15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{7t}, \\ y = -C_1e^{-t} + \frac{5}{3}C_2e^{7t}. \end{cases} \right)$

16. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 + C_2e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2}C_1 + 3C_2e^{7t}. \end{cases} \right)$

17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{9t}, \\ y = -C_1e^t + C_2e^{9t}. \end{cases} \right)$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}. \end{cases} \right)$

19. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$

20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

21. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{4t} + \frac{1}{3} C_2 e^{8t}. \end{cases} \right)$

23. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 e^{-3t} - C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{6t}, \\ y = -\frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^{6t}. \end{cases} \right)$

25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y = -\frac{3}{4} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -4C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

27. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t}. \end{cases} \right)$

28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t}. \end{cases} \right)$

29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$

30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ}: \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}. \end{cases} \right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / М. Л. Краснов – М.: Высш. шк., 1983. – 128 с.
2. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие / М. Л Краснов., А. И. Киселев, Г. И. Макаренко– 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1978. – 287 с.
3. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник / Н. М. Матвеев– 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ч. 1,2 / [В. К. Барышева В.К. и др.]. – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – 112 с.
5. Пономарёв, К.К. Составление дифференциальных уравнений: учебное пособие / К. К. Пономарёв – Минск: Высш. шк., 1973. – 252 с.
6. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для вузов / В. В. Степанов– 9-е изд., стер. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 472 с.
7. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учебное пособие / А. Ф. Филиппов– 2-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 240 с.
8. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для вузов / М. В. Федорюк – М.: Высш. шк., 1985. – 372 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор О.А. Соловьева
Подписано в печать 12.08.2019. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.
Усл. печ. л. 6,0. Тираж 50 экз. Заказ
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»
Отпечатано на полиграфическом оборудовании редакционно-издательского центра ФГБОУ ВО «ИГХТУ»
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7