ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания

Иваново
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания

Составители: Г.А. Зуева, Г.Н. Кокурина

Иваново 2016

УДК 512

Составители: Г.А. Зуева, Г.Н. Кокурина

Дифференциальное исчисление функций одной переменной: метод. указания / сост. Г.А. Зуева, Г.Н. Кокурина; Иван. гос. хим.-технол. ун-т.- Иваново, 2016. – 60 с.

Методические указания содержат изложенный в краткой форме теоретический материал, относящийся к основам дифференциального исчисления функций одной переменной. Приведены задачи и упражнения с ответами, представлен разбор решения типовых задач.

Предназначены студентам, изучающим математику, а также всем желающим пополнить, укрепить и систематизировать свои знания при самостоятельном изучении математики.

Рецензент
доктор технических наук, профессор А.Н. Лабутин
(Ивановский государственный химико-технологический университет)

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 29.01.2016. Формат 60 х 84 1/16. Бумага писчая.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,87. Тираж 150 экз. Заказ

Ивановский государственный химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры
экономики и финансов ИГХТУ

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7

1. Множество, последовательность, функция

Одним из основных понятий математики является понятие функции. При изучении различных явлений природы, решении технических задач, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Например, при движении материальной точки пройденный путь рассматривается как величина, зависящая от времени. Понятие функции связано с установлением зависимости между элементами двух множеств.

1.1. Множества и операции над множествами

Множество *– это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, принадлежащие данному множеству, называются элементами множества.*

Множество можно задать, перечислив все его элементы или указав их общее свойство.

Обозначения

1) $x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A;

2) $x \notin A$, $x \overline{\in} A$ – x не входит в множество A;

3) $A \subset B$ ($B \supset A$) – множество A включено в B, то есть, если $x \in A$, то $x \in B$;

A – подмножество множества B, $\subset$, $\supset$ – знаки включения.

4) $\varnothing$ – пустое множество; $\varnothing \subset A$, где A – любое множество.

5) Для обозначения множеств широко употребляют фигурные скобки, внутри которых тем или иным способом описываются их элементы.

Например,

$N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$– множество натуральных чисел;

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество всех целых чисел;

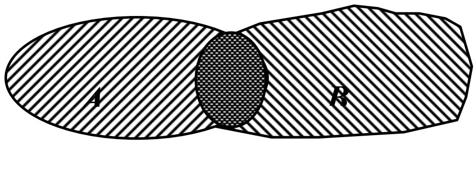
$\mathrm{Q} = \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$, где m, $n \in Z$, $n \neq 0$ – множество рациональных чисел;

$R = (-\infty; \infty)$ – множество действительных чисел.

6) $A = B$ – множества A и B равны: $A \subset B$, $B \subset A$.

Операции над множествами

Сумма (объединение) множеств A и B – это множество $C=A+B$ ($C=A \cup B$), состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.



$A \cup B$

Рис. 1

Произведение (пересечение) множеств A и B есть множество $C=AB$ ($C=A\cap B$), состоящее из элементов, одновременно принадлежащих множеству A и множеству B ($A\cap A=A$).

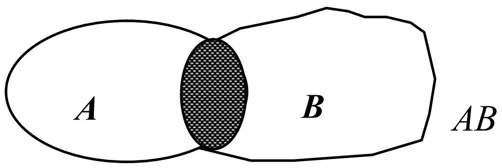


Рис. 2

Если $AB=\varnothing$, то A и B не пересекаются.

Разность множеств A и B есть множество $C=A\backslash B$, состоящее из элементов множества A, не содержащихся в B.

В общем случае $(A\backslash B)+B\neq A$.

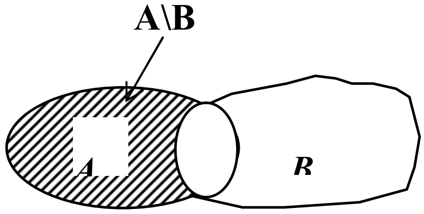


Рис. 3

Если $A\subset B$, то разность множеств $B \setminus A$ называется *дополнением множества A до множества B* .

Множество $(A\setminus B)\cup(B \setminus A)$ называется *симметрической разностью* множеств A и B и обозначается $A\Delta B$.

Основные свойства сложения и умножения:

1) $A+B=B+A$(коммутативность сложения);
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения);
3) $(AB)C=A(BC)$(ассоциативность умножения);
4) $(A+B)C=AC+BC$(дистрибутивность сложения относительно умножения).

Логические символы:

1) $\alpha\Rightarrow\beta$ – из предложения α следует предложение β.
2) $\alpha\Leftrightarrow \beta$ – предложения α и β эквивалентны: из α следует β, из β следует α.
3) $\forall x\in A$: α – для всякого элемента $x\in A$ имеет место предложение α ($\forall$ – **квантор общности**).

Кванторы (от лат. quantum – сколько) – логические эквиваленты слов «все», каждый и т.п.

4) $\exists y\in B$: β – существует элемент $y\in B$, для которого имеет место предложение β ($\exists$ – **квантор существования**).
5) $\overline{\alpha}$ – не α; отрицание предложения α.

Отрезок, интервал, ограниченное множество

1. **Отрезок, сегмент** $[a,b]$ – множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам: $a \le x \le b$.
2. **Открытый интервал** (a,b): $a < x < b$.

3. **Полуоткрытый интервал, полуинтервалы** $[a,b)$, $(a,b]$: $a \le x < b$, $a < x \le b$..
4. **Окрестность точки *с*** – интервал (a,b), содержащий точку c: $a < c < b$.
5. **ε – окрестность точки *с***: $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$.

Неравенства для абсолютных величин:

1) $|a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$;

2) $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$;

3) $|a+b| \le |a|+|b|$, $|a-b| \ge \big||a|-|b|\big|$.

Пример 1. Рассмотрим два числовых множества:
$A=\{-3,1,4,7\}$, $B=\{-5,0,1,8\}$.
Найти множества: $A+B$, AB, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A\Delta B$.
<u>*Решение.*</u> Воспользовавшись приведенными определениями, получаем:
$A+B=\{-5,-3,1,4,7,8\}$, $AB=\{1\}$, $A \backslash B=\{-3,4,7\}$,
$B \backslash A=\{-5,0,8\}$, $A\Delta B=\{-5,-3,4,7,8\}$.

1.2. Числовые функции одного переменного

Под *переменной величиной* понимается величина, которая в процессе изучения какого-либо явления принимает хотя бы два различных значения. Величина, которая при исследовании данного явления принимает только одно значение, называется *постоянной*.

Определение: Пусть даны два множества X и Y (непустых). Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$ или $f: X \to Y$ (говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y).

Пример 2. На рисунках а), б) f и g – функции; в) h – не является функцией; г) q – не является функцией (не единственный y).

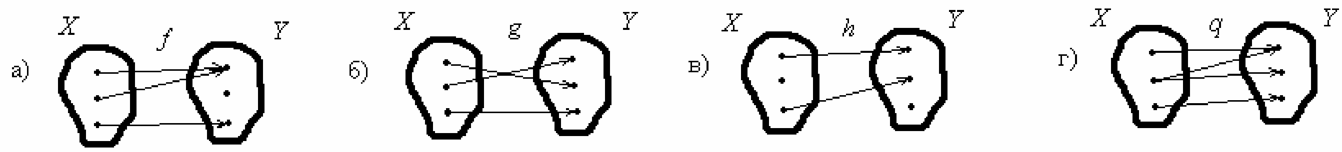


Рис. 4

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т.е. $x \in R$, $y \in R$), то функцию называют *числовой*.

Множество всех $x \in X$ называется *областью определения функции* и обозначается $D(f)$; множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений функции* и обозначается $E(f)$.

Переменная x называется *аргументом* или независимой переменной, а y – *значением функции* (функцией) или зависимой переменной (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости $y = f(x)$ (иногда пишут $y = y(x)$).

Пример 2. Найти область определения функции $y = \ln 2x + \sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$.

Решение:
Область определения данной функции задается системой неравенств
$$\begin{cases} 2x > 0, \\ \dfrac{x+2}{3-x} \ge 0, \end{cases}$$
которая эквивалентна системе неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ x \ge -2. \end{cases}$

Решением этой системы является интервал $x \in (0,\ 3)$.
Ответ. $D(f)$: $x \in$ (0, 3).

Пример 3. Найти множество значений функции $y = x^2 + 4x + 3$.

Решение: 1 способ: поскольку $y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$, то $y \ge -1$.
2 способ: графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, т.к. коэффициент при x^2 положителен. Вершина параболы может быть найдена по формуле $x = -b/(2a) = -2$, тогда y = -1. Получим тот же результат: $y \ge -1$.
Ответ. Множество значений рассматриваемой функции имеет вид: $[-1, +\infty)$.

Способы задания функций

Наиболее часто встречаются следующие способы задания функции:
- аналитический;
- графический;
- табличный.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например, а) $y = x - 5$; б) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & при\ x \ge 0 \\ x - 4, & при\ x < 0 \end{cases}$; в) $y^2 - 4x = 0$.

Если область определения функции не указывается, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл, например, для $y = \sqrt{x}$, $D(y) = [0;+\infty)$.

Аналитический способ является предпочтительным по сравнению с другими способами задания функции, т.к. методы математического анализа позволяют полностью исследовать функцию.

Графический способ: задается график функции.

Графиком функции $y(x)$ называется множество всех точек Oxy, абсциссами которых являются значения аргумента *x*, а ординатами – соответствующие им значения функции *y*.

Например, графиком функции $y = x$ является прямая.

Графический способ удобен, когда задать функцию аналитически трудно. По графику можно наглядно судить о поведении и свойствах функции (четность, монотонность, ограниченность, периодичность и т.д.). Преимуществом графического способа является его наглядность, недостатком – его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известны таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы. На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функции, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Основные элементарные функции

1) прямая пропорциональность $f(x)=k\,x$, где k - постоянная величина (*коэффициент пропорциональности*);

2) линейная функция $A\,x + B\,y = C$, где, по крайней мере, одно из чисел A или B не равно нулю, графиком этой функциональной зависимости является *прямая линия*;

3) обратная пропорциональность (гипербола): $y = k/x$, где k - постоянная величина;

4) квадратичная функция (квадратная парабола): $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c - постоянные, $a \neq 0$;

5) степенная функция: $y = ax^n$, где a, n – постоянные;

6) показательная функция $y = a^x$, где a - положительное постоянное число;

4)логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где a – постоянное положительное число, не равное 1;

8) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$;

9) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

Обратные функции, сложные функции

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если любому значению y, принадлежащему E, соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Например, для $y = 2x$ обратной функцией будет $x = \dfrac{y}{2}$.

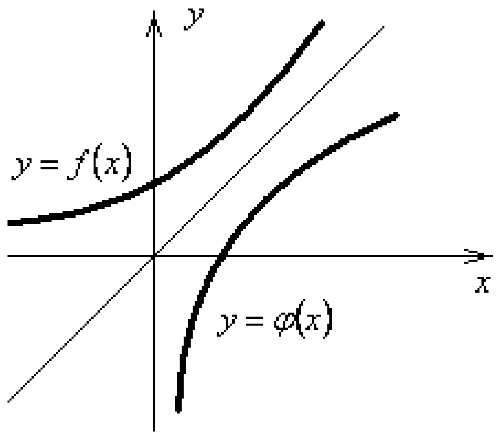


Рис. 5

Из определения обратной функции следует, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда соответствие между D и E взаимно однозначное, следовательно, любая строго монотонная функция имеет обратную (при этом если функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает)). Заметим, что обратные функции изображаются одной и той же кривой, т.е. графики их совпадают. Если же условиться считать, что, как обычно, аргумент обозначается x, а зависимая переменная y, то обратная функция запишется в виде $y = \varphi(x)$, а графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов, т.е. прямой $y = x$ (рис 5).

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве *D*, а функция $u = \varphi(x)$ в свою очередь на множестве D_1 (причем для любого $x \in D_1$, соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$). Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от x (или функцией от функции). Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом*.

Например, $y = \sin 2x$. Здесь $y = \sin u$, $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

1.3. Бесконечная числовая последовательность и ее предел

Бесконечной числовой последовательностью $\{a_{n,}\ n \in \ N\}$ называется числовая функция, областью определения которой является множество N натуральных чисел.

Задать последовательность можно, указав способ получения любого члена последовательности или указав все его члены. Часто последовательность задается с помощью *явной* формулы для *n*-го члена последовательности, например, $a_n=2^n,\ n \in N$ или с помощью *рекуррентного* соотношения, например,

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1$.

Пример 4. $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ или $\{a_n\}=\{-1;1;-1;1;\ldots\}$;

$\{a_n\}=\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ или $\{a_n\}=1;\ 0;\ -1;\ 0;\ldots$

Здесь $n \in N$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число M такое, что при всех значениях n выполняется неравенство $a_n \le M$.

Последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной.*

Важными частными случаями бесконечных последовательностей являются *арифметическая и геометрическая прогрессии*.

Арифметическая прогрессия - это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом *d*. Число *d* называют разностью арифметической прогрессии. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$**,** т. е. в арифметической прогрессии с членами: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$ по определению: $a_2=a_1+d$; $a_3=a_2+d$; ....$a_n=a_{n-1}+d$; …

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n=a_{n-1}+(n-1)d$.

Сумма n первых членов: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

Если $d>0$, то прогрессия возрастающая; если $d<0$, то прогрессия убывающая.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число. Таким образом, геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, заданная соотношениями

$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_n \neq 0$, $q \neq 0$, q – знаменатель прогрессии, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Геометрическая прогрессия является *возрастающей*, если $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

Геометрическая прогрессия является *убывающей*, если $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, при $q \neq 1$.

Определение. Число a называется ***пределом*** последовательности $x = \{x_n\}$, если для произвольного заранее заданного сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если число a есть предел последовательности $x = \{x_n\}$, то говорят, что x_n стремится к a, и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Окрестностью точки x_0 называется произвольный интервал (a,b), содержащий эту точку внутри себя. Часто рассматривается окрестность точки x_0, для которой x_0 является серединой, тогда x_0 называется *центром* окрестности, а величина $(b–a)/2$ – *радиусом* окрестности.

Проиллюстрируем геометрически понятие предела числовой последовательности. Для этого запишем последнее неравенство из определения в виде $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Это неравенство означает, что все элементы последовательности с номерами $n>N$ должны лежать в интервале $(a – \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Следовательно, постоянное число a есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой малой окрестности с центром в точке a радиуса ε (ε–окрестности точки a) найдется такой элемент последовательности с номером N, что все последующие элементы с номерами $n>N$ будут находиться внутри этой окрестности.

Пример 5. Используя определение предела числовой последовательности, доказать что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$.

Решение: Возьмем произвольное ε>0.

Рассмотрим $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{n}{2n-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{2n-2n+1}{2n-1}\right|=\dfrac{1}{2n-1}$.

Тогда $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, если $\dfrac{1}{2n-1}<\varepsilon$ или $2n-1>\dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$. Поэтому выберем любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N>\dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$.

Свойства пределов последовательностей

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$сходятся, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0)$.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $a_n\le b_n$ для всех n, то $a\le b$.

3. Если $a_n\le c_n\le b_n$ для всех n и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

1.4. Предел функции

Пусть функция *y=f(x)* определена в некоторой окрестности точки *a*. Предположим, что независимая переменная *x* неограниченно приближается к числу *a*. Это означает, что мы можем придавать *x* значения сколь угодно близкие к *a*, но не равные *a*. Будем обозначать как $x\to a$. Для таких *x* найдем соответствующие значения функции. Может случиться, что значения *f(x)* также неограниченно приближаются к некоторому числу *b*. Тогда говорят, что число *b* есть предел функции *f(x)* при $x\to a$.

Введем строгое определение предела функции.

Определение. Функция *y=f(x) стремится к пределу b при x→a*, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x\neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Проиллюстрируем это определение на графике функции (рис.6). Т.к. из неравенства $|x - a| < \delta$ должно следовать неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т.е. при $x \in (a-\delta,\ a+\delta)$ соответствующие значения функции $f(x) \in (b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, то, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем подобрать такое число δ, что для всех точек x, лежащих в δ – окрестности точки a, соответствующие точки графика функции должны лежать внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

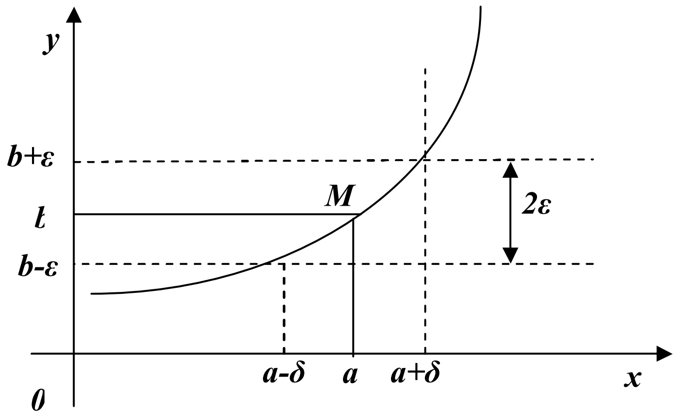


Рис. 6

Несложно заметить, что предел функции должен обладать теми же свойствами, что и предел числовой последовательности. Если при $x \to a$ функция имеет предел, то он единственный.

Пример 6. Найти предел функции

а) $y=2x+1$ при $x \to 1$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} c$ ($c = const$);

в) $\lim\limits_{x \to x_0} x$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$.

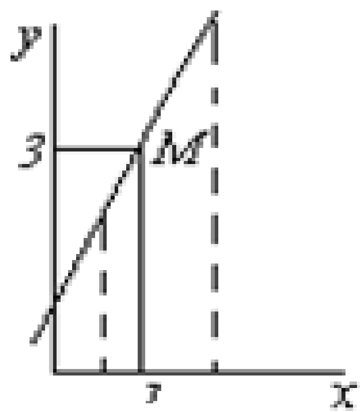


Рис. 7

Решение: а) Используя график функции (рис.7), можно увидеть, что если $x \to 1$ с любой стороны, то соответствующие точки $M(x,\ y)$ графика стремят-
ся к точке $M(1,\ 3)$, т.е. можно предположить, что $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$.

Докажем это. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Нам нужно, чтобы выполнялось неравенство $|(2x+1) - 3| < \varepsilon$ или $|2x - 2| < \varepsilon$, откуда $|x - 1| < \varepsilon$. Таким образом, если положить $\delta = \varepsilon/2$, то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, будет выполняться неравенство $|y - 3| < \varepsilon$. По определению предела это и означает, что 3 есть предел функции $y=2x+1$ при $x \to 1$.

Этот же предел можно найти проще, используя правило:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

где a может быть равным конечному числу или бесконечности. Таким образом,

$$\lim_{x \to 1}(2x+1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

б) $f(x)=c$ ($c=const$). Возьмем $x_1,x_2,...,x_n,...\to x_0$ (последовательность аргументов), тогда последовательность значений функций: $c,c,c,...,c,...\to c$ отсюда следует $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

в) $f(x)=x$. Заметим, что $x_1,x_2,...,x_n,...\to x_0$, тогда $f(x_n)=x_n$ и, следовательно, последовательность значений функции $x_1,x_2,...,x_n,...\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

г) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. Найдем предел в точке $x_0=0$ (x_0 может не принадлежать области определения). Рассмотрим последовательность, стремящуюся к нулю $x_n:\dfrac{1}{\pi};\dfrac{1}{2\pi};\dfrac{1}{3\pi};...\dfrac{1}{n\pi};...\to 0$, тогда последовательность значений функции стремится тоже к нулю: $f(x_n):\sin\pi;\sin 2\pi;\sin 3\pi;...\sin n\pi;...$ $(0;0;0;\to 0)$, но для другой последовательности аргументов $x_n:\dfrac{2}{\pi};\dfrac{2}{5\pi};\dfrac{2}{9\pi};...\dfrac{2}{(4n-3)\pi};...$ последовательность значений функции стремится к единице: $f(x_n):\sin\dfrac{\pi}{2};\sin\dfrac{5\pi}{2};...$ $(1;1;1;\to 1)$, т.е. для двух стремящихся к нулю последовательностей аргумента последовательности $f(x_n)$ имеют разные пределы, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ <u>не существует</u>.

Рассмотрим некоторые утверждения и теоремы, которые облегчают нахождение предела функции. Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда $x\to x_0$ и $x\to\infty$ аналогичны. Будем считать, что пределы функций f и g в точке существуют.

1) функция может иметь только один предел;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$;

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Следствия из них:

3) постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

4) предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$, в частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$, $n\in N$;

5) Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $g(x)$ и $h(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$ и $g(x)\le f(x)\le h(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Пример 7. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+7\right)$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+7\right)=3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7=3\cdot 1^2-2\cdot 1+7=3-2+7=8$.

Односторонние пределы

Определение. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *слева (левым пределом)* в точке x_0, если для любой, сходящейся к x_0 последовательности аргументов, элементы которой меньше x_0, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\text{A}$ или $f(x_0-0)=A$.

На $\varepsilon-\delta$ языке: $A=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $x\in(x_0-\delta;x_0)$ выполняется $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

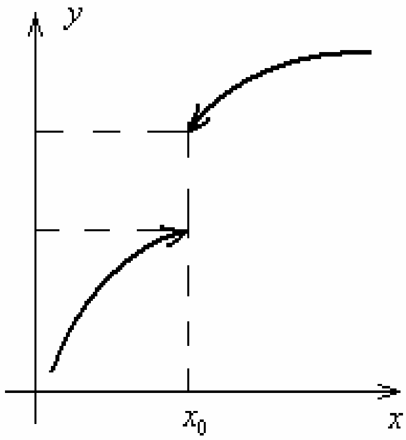


Рис. 8

Аналогично определяется предел функции справа (правый предел).

$A=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 последовательности аргументов, элементы которой больше x_0, элементы соответствующей последовательности $f(x_n)\to A$.

На $\varepsilon-\delta$ языке: $A=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $x\in(x_0;x_0+\delta)$ выполняется $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Пределы функции слева и справа называется *односторонними* пределами.

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба односторонних предела и они равны, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Если же $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

Понятие предела функции в бесконечно удаленной точке

Будем говорить, что переменная x *стремится к бесконечности*, если для каждого заранее заданного положительного числа M (оно может быть сколь угодно большим) можно указать такое значение $x=x_0$, начиная с которого, все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x|>M$.

Например, пусть переменная x принимает значения $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-3$, ..., $x_n=(-1)^n n$, ... Ясно, что это бесконечно большая переменная величина, так как при всех $M>0$ все значения переменной, начиная с некоторого, по абсолютной величине будут больше M.

Переменная величина $x\to+\infty$, если при произвольном $M>0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, удовлетворяют неравенству $x>M$.

Аналогично, $x\to-\infty$, если при любом $M>0$
$x<-M$.

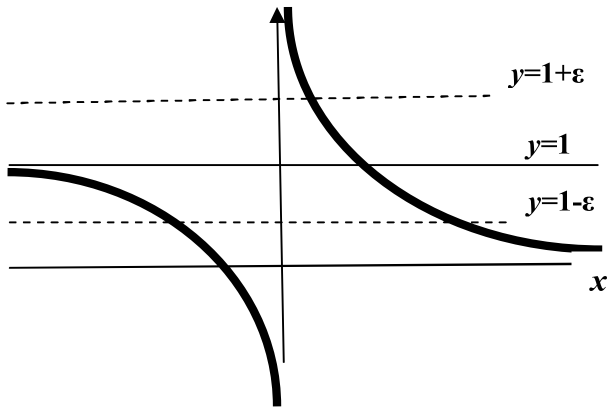


Рис. 9

Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x\to\infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Обозначают $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Пример 8.

Используя определение, доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

Нужно доказать, что при произвольном ε будет выполняться неравенство

$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon$, как только $|x|>M$, причем число M должно определяться выбором ε. Записанное неравенство эквивалентно следующему $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, которое будет выполняться, если $|x|>1/\varepsilon=M$. Это и значит, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

Бесконечно большие функции

Рассмотрим теперь случай, когда функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to a$, т.е. является *бесконечно большой* величиной, если для любого числа M, как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta>0$, что для всех значений $x\neq a$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to a$, то пишут

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ или $f(x)\to\infty$ при $x\to a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to a$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, соответственно пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Пример 9.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ (см. рис.10).

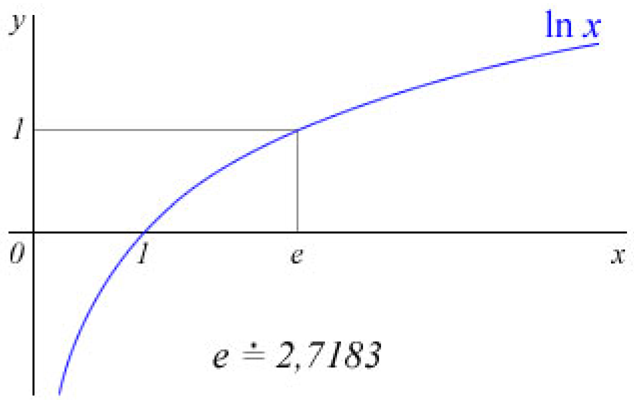


Рис.10

3. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2}=+\infty$.

4. Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ не стремится ни к какому пределу (см. рис.11).

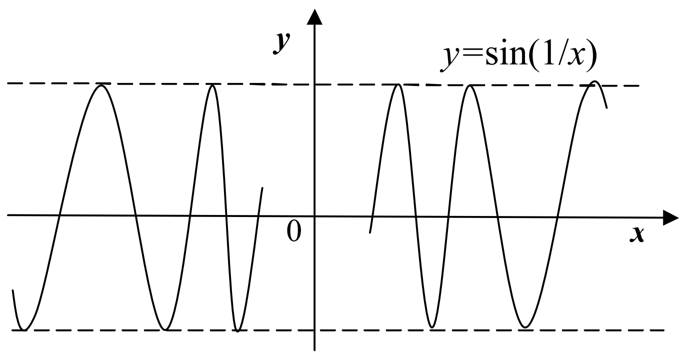


Рис.11

Ограниченные функции

Пусть задана функция *y=f(x)*, определенная на некотором множестве *D* значений аргумента.

Функция *y=f(x)* называется *ограниченной* на множестве *D*, если существует положительное число *M* такое, что для всех значений *x* из рассматриваемого множества выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Если же такого числа *M* не существует, то функция *f(x)* называется *неограниченной* на множестве *D*.

Пример 10.

1. Функция $y = \sin x$, определенная при $-\infty < x < +\infty$, является ограниченной, так как при всех значениях *x*: $|\sin x| \le 1 = M$.
2. Функция $y=x^2+2$ ограничена, например, на отрезке [0, 3], так как при всех *x* из этого отрезка $|f(x)| \le f(3) = 11$.
3. Рассмотрим функцию $y=\ln x$ при $x \in (0;1)$. Эта функция неограниченна на указанном отрезке, так как при $x \to 0$, $\ln x \to -\infty$.

Функция *y=f(x)* называется *ограниченной при* $x \to a$, если существует окрестность с центром в точке *a*, в которой функция ограничена.

Функция *y=f(x)* называется *ограниченной при* $x \to \infty$, если найдется такое число $N>0$, что при всех значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, функция *f(x)* ограничена.

Установим связь между ограниченной функцией и функцией, имеющей предел.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и *b* – конечное число, то функция *f(x)* ограничена при $x \to a$.

Теорема 2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \ne 0$, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ограничена при $x \to a$.

Бесконечно малые функции. Сравнение функций

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - сравнимые бесконечно малые функции при $x \to x_0$, и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$. Тогда:

а) если C≠0, то $f(x)$ и $g(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка. В частности, при C=1 бесконечно малые называют *эквивалентными* и пишут $f\sim g$.

б) если C=0, то $f(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, и пишут $f=o(g)$.Если при этом существует действительное число r>0 такое, что $\lim\limits_{x\to \tilde{o}_0} \frac{f(x)}{(g(x))^r} \neq 0$, то $f(x)$ называют бесконечно малой порядка r относительно $g(x)$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

1.5. Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=c$, если функция определена в самой точке $x=c$ и в окрестности этой точки и предел функции в точке равен значению функции в этой точке, т.е. если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Предел слева равен пределу справа и совпадает со значением функции в точке, то есть $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c)$.

Всякая точка, в которой функция непрерывна, называется точкой непрерывности функции.

Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Свойства функций, непрерывных в точке

Вычисление предела непрерывной функции в точке можно заменить вычислением значения функции в этой точке

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

1. Функция $f(x)$, постоянная в окрестности точки c, непрерывна в точке c.

2. Сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций в точке $x=a$ есть непрерывная функция, если знаменатель частного не обращается в нуль.
3. Основные элементарные функции непрерывны в любой точке области их определения.
4. Непрерывная функция от функции, непрерывной в данной точке, есть функция непрерывная в этой точке.
5. Многочлен $a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m$ и дробь $\dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n}$ (дробь несократимая) есть непрерывные функции, за исключением тех значений аргумента, которые обращают знаменатель в нуль.

Точки разрыва

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = a$, то говорят, что $f(x)$ имеет *разрыв* в этой точке.

Классификация точек разрыва функции

Все точки разрыва функции разделяются на *точки разрыва первого и второго рода*.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет *точку разрыва первого рода* при $x = a$, если в этой точке:

- существуют левосторонний предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и правосторонний предел $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;
- эти односторонние пределы конечны.

При этом возможны следующие два случая:

- левосторонний предел и правосторонний предел равны друг другу: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Такая точка называется *точкой устранимого разрыва*.

- левосторонний предел и правосторонний предел не равны друг другу: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Такая точка называется *точкой конечного разрыва*. Модуль разности значений односторонних пределов $\left|\lim\limits_{x\to a-0} f(x) - \lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right|$ называется *скачком функции*.

Функция $f(x)$ имеет *точку разрыва второго рода* при $x = a$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример 11.

Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{|2x+5|}{2x+5}$, если таковые существуют.

Решение:

Функция определена и непрерывна при всех x, за исключением точки $x=-\frac{5}{2}$, где существует разрыв. Исследуем точку разрыва:

$$\lim_{x\to-\frac{2}{5}-0}\frac{|2x+5|}{2x+5}=\lim_{x\to-\frac{2}{5}-0}\frac{-(2x+5)}{2x+5}=-1, \text{ если } x<-\frac{2}{5};$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{5}+0}\frac{|2x+5|}{2x+5}=\lim_{x\to-\frac{2}{5}+0}\frac{(2x+5)}{2x+5}=1, \text{ если } x\geq-\frac{2}{5}.$$

Так как значения односторонних пределов конечны, то, следовательно, в точке $x=-\frac{2}{5}$ существует разрыв первого рода.

Пример 12.

Найти точки разрыва функции $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$, если таковые существуют.

Решение: В точке $x_0=3$ функция не определена, следовательно имеет разрыв.

Найдем односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to3-0}e^{\frac{1}{x-3}}=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to3+0}e^{\frac{1}{x-3}}=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$.

Следовательно, в точке $x_0=3$ функция имеет разрыв 2-го рода.

Пример 13.

Определить точки разрыва функции $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1} & при \quad x<-1\\ \sqrt{1-x^2} & при \quad -1\leq x\leq 0\\ 1-x & при \quad x>0\end{cases}$

и их тип.

Решение:

Точки, «подозрительные» на разрыв, $x=-1$ и $x=0$, в остальных точках функция непрерывна.

Найдем односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$; $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}\sqrt{1-x^2}=0$. Пределы существуют, но не равны между собой, следовательно, в точке $x=-1$ функция имеет разрыв 1-го рода, конечный скачок $|-1-0|=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}\sqrt{1-x^2} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0}(1-x) = 1$. Пределы существуют, равны между собой и равны $y(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$, следовательно, в точке $x = 0$ функция непрерывна.

1.6. Приемы раскрытия неопределенностей при вычислении пределов функций

Если числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю или бесконечности, т.е. имеют место неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то для отыскания предела необходимы дополнительные преобразования или специальные рассмотрения. Приведем примеры.

1. Преобразование алгебраических и тригонометрических выражений:

Пример 14. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-x-4}{3x-x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4.$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-x-4}{3x-x^2-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)(x+\frac{4}{5})}{-(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+4}{2-x} = \left(\dfrac{5+4}{2-1}\right) = 9.$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\sin x-\cos x)}{(\cos^2 x-\sin^2 x)} =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-1}{(\cos x+\sin x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

2. Деление на высшую степень переменной (при раскрытии неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, при $x\to\infty$).

Пример 15. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left(\frac{1+0+0}{2+0+0}\right)=\frac{1}{2}.$$

3. Избавиться от иррациональности можно путем домножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Пример 16. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{6x-x^2}{\sqrt{30+x}-\sqrt{6x}}$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

б) $$\lim_{x\to 6}\frac{6x-x^2}{\sqrt{30+x}-\sqrt{6x}}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(6x-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)}{30+x-6x}=\lim_{x\to 6}\frac{x(6-x)\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)}{30-5x}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x(x-6)\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)}{5(6-x)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 6}\left[x\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)\right]=\frac{1}{5}\lim_{x\to 6}\left[6\cdot(3+6)\right]=\frac{1}{5}\cdot 6\cdot 9=\frac{54}{5}.$$

4. Замена переменной.

Пример 17.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix} x=\kappa^6,\sqrt{x}=\kappa^3 \\ \sqrt[3]{x}=\kappa^2, \\ при \quad x\to 1,\kappa\to 1\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{\kappa\to 1}\frac{\kappa^2-1}{\kappa^3-1}=\lim_{\kappa\to 1}\frac{(\kappa-1)(\kappa+1)}{(\kappa-1)(\kappa^2+\kappa+1)}=\lim_{\kappa\to 1}\frac{\kappa+1}{\kappa^2+\kappa+1}=\frac{2}{3}. 5.$$

5. Применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$

Пример 18.

С помощью первого замечательного предела вычислить

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}$. .

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$, т.е.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}=1$.

Пример 19.

Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\, ctgx$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{2x\cdot tg\, 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x\cdot 2x}{(2x)^2\cdot tg\, 2x}=$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg\, 2x}=2\cdot 1\cdot 1=2.$

б) $\lim\limits_{x\to 0} x\, ctgx=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tgx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{-1}=1^{-1}=1$.

6. Применение *второго замечательного предела*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e\ \ (e=2{,}7182818284...);$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(1^\infty\right)=e.$$

В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y=e^x$ называется *экспоненциальной*, употребляется обозначение $e^x=\exp(x)$.

Пример 20.
Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\,(5-x)^{-\frac{2}{x-4}}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)==\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\,(5-x)^{-\frac{2}{x-4}}=\left(1^{\infty}\right)==\begin{bmatrix}x-4=t\\ x=t+4\end{bmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}(5-t-4)^{-\frac{2}{t}}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{-\frac{2}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+(-t)\right)^{\frac{1}{-t}}\right]^{2}=e^{2}.$

Пример 21.

Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение

а) Положим $x=3t$. Тогда при $x\to\infty$, $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{3}=e^{3}.$$

б) Преобразуем: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e$.

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\log_e e=\ln e=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Мы рассмотрели некоторые, на наш взгляд, наиболее часто используемые приемы раскрытия неопределенностей. Более подробно раскрытие неопределенностей можно найти, например, в [7].

Задания для самостоятельного решения:

1. Написать первые пять членов последовательности:

   а) $x_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$; б) $x_n=n(1-(-1)^n)$;

в) $x_n = \dfrac{(3n+5)}{(2n-3)}$;　　　　　г) $x_n = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n.$

2. Написать форму общего члена последовательности:

а) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},...$　　　　б) $0,\ 2,\ 0,\ 2,...$

в) $2,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{7},...$　　　　г) $1,\ 0,\ -3,\ 0,\ 5,\ 0,\ -7,\ 0,...$

д) $-3,\ \frac{5}{3},\ -\frac{7}{5},\ \frac{9}{7},\ -\frac{11}{9},...$　　е) $0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,...$

3. Найдите наибольший (наименьший) ограниченный сверху(снизу) член последовательности $(x_n)_{n\in N}$.

а) $x_n = 6n - n^2 - 5$;　　　б) $x_n = e^{10n-n^2-24}$;　　　в) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{9+n}$;

г) $x_n = 3n^2 - 10n - 14$;　　　д) $x_n = 2n + \dfrac{512}{n^2}$;　　　е) $x_n = -\dfrac{n^2}{2^n}$.

4. Вычислить пределы последовательностей

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{3n}$;　　　б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{7-9n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$;　　　г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$;　　　е) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2})$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$;　　　з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

5. Установить, какие из заданных последовательностей являются бесконечно большими:

а) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;　　　б) ;　　　в) $x_n = \lg(\lg n), n \ge 2$.

6. Найти все предельные точки последовательности:

а) $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$;　　　б) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{4}$;　　　в) $x_n = \arcsin\dfrac{(-1)^n}{2}$.

7. Вычислить пределы следующих рациональных функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$;　　　б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$;　　　в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$;　　　д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;　е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

8. Вычислить пределы, содержащие иррациональные выражения введением новой переменной или переводом иррациональности из знаменателя в числитель или наоборот:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)$.

9. Используя замечательные пределы, вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{tg 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot ctg\pi x)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-ctgx\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

10. Найти односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}7^{\frac{1}{2-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}$.

11. Определить порядок малости $f(x)$ относительно $g(x)=x$ при $x\to x_0$:

а) $f(x)=3\dfrac{\sqrt{x^3}}{1-x}$; б) $f(x)=tgx-\sin x$; в) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$.

12.Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$; г) $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$;

д) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; е) $f(x)=\begin{cases}2^x, -1\le x<1,\\ x-1, 1<x\le 4,\\ 1, x=1.\end{cases}$

ж) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\\ 4-2x, & 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, & 2{,}5\le x\le 4.\end{cases}$ з) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi/2\le x<\pi/4,\\ 1, & x=\pi/4,\\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \pi/4<x\le\pi.\end{cases}$

Ответы:

1.а) $0,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{5}{4},\quad \frac{4}{5},\ldots$ б) $2,\quad 0,\quad 6,\quad 0,\quad 10,\ldots$

в) $-8,\quad 11,\quad \frac{14}{3},\quad \frac{17}{5},\quad \frac{20}{7},\ldots$ г) $\frac{2\pi}{3},\quad \frac{7\pi}{3},\quad \frac{8\pi}{3},\quad \frac{13\pi}{3},\quad \frac{14}{3},\ldots$

2. а) $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)}$; б) $x_n = 1+(-1)^n$; в) $x_n = \frac{(2n)}{(2n-1)}$;

г) $x_n = n\cos\frac{\pi(n-1)}{2}$; д) $x_n = (-1)^n\frac{(2n+1)}{(2n-1)}$; е) $x_n = \sin\frac{(n-1)\pi}{4}$.

3. а) Наибольший член $x_3 = 4$; б) Наибольший член $x_5 = e$;

в) Наибольший член $x_9 = \frac{1}{6}$; г) Наименьший член $x_2 = -22$;

д) Наименьший член $x_8 = 24$; е) Наименьший член $x_3 = -\frac{9}{8}$.

4. а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{5}{9}$; в) 0; г) $-\frac{1}{2}$; д) 0; е) $\frac{3}{2}$; ж) -1; з) $\frac{1}{2}$.

5. а) Является; б) Не является; в) Является.

6. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) $0,\quad \frac{\sqrt{2}}{2},\quad 1,\quad \frac{-\sqrt{2}}{2},\quad -1,\ldots$ в) $\frac{\pi}{6},\quad -\frac{\pi}{6}$.

7. а) -2; б) 2; в) 0; г) $\pm\infty$; д)0; е) $\frac{1}{4}$.

8. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{3\sqrt[6]{2}}{2}$; д)0; е) $-\frac{7}{4}$.

9. а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{1}{\pi}$; в)2; г) 0; д) e^{10}; е) e^{10}; ж) $\ln a$; з) $-\frac{1}{2}$.

10. а) $-\infty,+\infty$; б) $0,+\infty$; в) $0,+\infty$; г)-2,-2.

11. а) $\frac{3}{2}$; б) 3; в) 1.

12. а) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$- точки разрыва второго рода; б) $x=\frac{5}{3}$- точка разрыва первого рода; в) $x = 0$ - точка устранимого разрыва, $f(0)=1$; г) $x_1=2$, $x_2 = -2$ - точки разрыва второго рода. д) $x = 0$-точка устранимого разрыва; $f(0)=\frac{1}{2}$; е) $x=1$- точка разрыва первого рода; ж) $x = 2{,}5$- точка разрыва первого рода; з) $x=\frac{\pi}{4}$ - точка разрыва первого рода.

2. Производная функции

2.1. Определение производной

Определение. *Производной функции* $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении этого приращения к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначения производной: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$.

Значение производной функции в точке x_0 обозначается обычно $f'(x_0)$ или $y'\Big|_{x=x_0}$.

Замечание. Значение производной $f'(x_0)$ находится так: сначала определяется производная $f'(x)$, а потом в выражение для $f'(x)$ подставляется данное значение x_0.

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Функция, дифференцируемая в точке, обязательно и непрерывна в этой точке.

Физический (механический) смысл производной: мгновенная скорость изменения функции $f(x)$ в точке x.

Если функция $y=f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

Примеры.

1. Скорость прямолинейного движения есть производная от пути $S=S(t)$ по времени t: $S'(t)$.
2. Линейная плотность есть производная от функции массы $m=m(l)$ по длине l: $m'(l)$.

Понятие производной – фундаментальное понятие математического анализа. Один из основателей анализа – И. Ньютон (1642-1727, английский математик, физик, астроном) пришел к понятию производной, как к скорости движения.

2.2. Геометрический смысл производной

Определение. Касательной M_0T к линии AB в ее точке M_0 называется предельное положение секущей, проходящей через точку M_0 и другую точку M линии при неограниченном приближении точки M к точке M_0 ($M \to M_0$).

Предельное положение прямой линии определяется тем, что $\angle TM_0M$ стремится к нулю вместе с хордой M_0M.

Теорема. Если значение производной от функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ равно $f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}$, то прямая, проведенная через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, является касательной к графику функции в точке M_0.

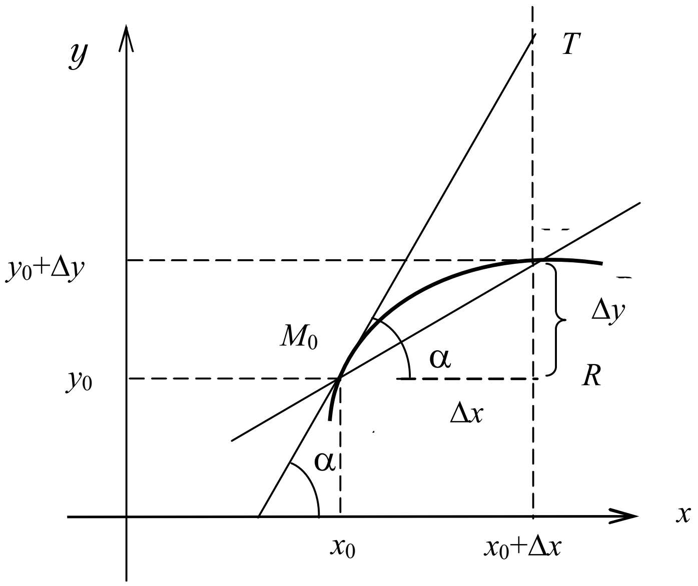


Рис. 12. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0.

Касательная и нормаль к линии

Пусть $y = f(x)$ есть уравнение линии в системе координат XOY плоскости. Тогда *уравнение касательной* к линии в точке $M_0(x_0,y_0)$ определится как уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали определится как уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно касательной:

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

2.3. Вычисление производной

Вычисление производной по определению, т.е. непосредственное отыскание предела очень часто громоздко и трудно. Поэтому надо знать производные всех основных элементарных функций, а также правила, по которым следует дифференцировать более сложные функции. Тогда можно находить производные любых элементарных функций, не выполняя предельный переход.

Производные элементарных функций приведены в табл.1.

Таблица 1

Производные элементарных функций

1. $(A)' = 0, A = const$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(x)' = 1$;
4. $(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(a^x)' = a^x \ln a$;
10. $(e^x)' = e^x$;

12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Правила дифференцирования

Будем предполагать, что слагаемые, сомножители, делимое, делитель непрерывны и имеют производные при рассматриваемых значениях независимой переменной. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования.

1. Производная суммы конечного **ч**исла функций равна сумме производных слагаемых

$$(f(x) + \varphi(x) - g(x))' = f'(x) + \varphi'(x) - g'(x).$$

Пример 22. Найти производную функции

$$y = x^3 + 2x^2 - 3.$$

<u>Решение:</u>

$$y' = (x^3)' + (\ln x)' - (3)' = 3x^2 + \frac{1}{x}.$$

2. Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй на первую, то есть если $y=u\cdot v$, то

$$y' = (u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'.$$

Следствие. Пусть один из сомножителей, например v, есть постоянная величина ($v=C=\text{const}$). Тогда

$$y' = (C\cdot u)' = C'\cdot u + C\cdot u' = C\cdot u',$$

так как производная $C' = 0$.

Пример 23. Найти производную функции

$$y = x^2\cdot \sin x.$$

<u>Решение:</u>

$$y' = (x^2\cdot \sin x)' = (x^2)'\cdot \sin x + x^2\cdot (\sin x)' = 2x\cdot \sin x + x^2\cdot \cos x.$$

Пример 24. Найти производную функции

$$y = 3\cdot \sin x.$$

<u>Решение:</u>

$$y' = (3\cdot \sin x)' = 3\cdot (\sin x)' = 3\cdot \cos x.$$

3. Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату делителя, а числитель – разности между произведением производной делимого на делитель и произведением делимого на производную делителя, то есть, если $y = \dfrac{u}{v}$, то

$$y' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2},\ v \neq 0.$$

Пример 25. Найти производную функции $y = x^{-n}$, где n – целое, положительное число.

<u>Решение:</u> Данную функцию можно записать в виде

$$y = \frac{1}{x^n}.$$

Тогда

$$y' = \frac{(1)'\cdot x^n - 1\cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0\cdot x^{n-1} - 1\cdot (x^n)'}{x^{2n}} =$$

$$= -nx^{n-1}\cdot x^{-2n} = -nx^{-2n+n-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

что подтверждает правило дифференцирования степенной функции для целого отрицательного показателя.

Пример 26. Найти производную функции

$$y=\frac{\sin x}{x}.$$

Решение:

$$y'=\frac{(\sin x)'x-\sin x(x)'}{x^2}=\frac{\cos x\,x-\sin x}{x^2}.$$

4. Производная *сложной функции* равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной, то есть, если $y = f(u)$, $u = u(x)$, то

$$y'=(f(u(x))'=f'(u)u'(x).$$

Пример 27. Найти производную функции

$$y=\sin(6x).$$

Решение:

$$y'=\cos(6x)(6x)'=6\cos(6x).$$

Пример 28. Найти производную функции

$$y=(\frac{3}{x^5}-\sqrt[7]{x^2}+5)^8.$$

Решение:

$$y'=8(3x^{-5}-x^{\frac{2}{7}}+5)^7(3(-5)x^{-6}-\frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}})=$$

$$=-8(\frac{3}{x^5}-\sqrt[7]{x^2}+5)^7(\frac{15}{x^6}-\frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}).$$

5. Производная *обратной функции.*

Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ – взаимно обратные функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Таким образом, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Формула для производной сложной функции часто используется для вычисления производной от выражения «*функция в степени функция*»:

$$(f(x)^{g(\mathrm{x})})' = (e^{g(\mathrm{x})\ln f(\mathrm{x})})' = e^{g(\mathrm{x})\ln f(\mathrm{x})}(g(\mathrm{x})\ln f(\mathrm{x}))' =$$
$$= e^{g(\mathrm{x})\ln f(\mathrm{x})}(g'(\mathrm{x})\ln f(\mathrm{x}) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}).$$

Замечание. Предыдущие выкладки можно несколько сократить, если прологарифмировать исходную функцию, а производную взять после этого (*логарифмическое дифференцирование*). Логарифмическое дифференцирование применяется для нахождения производных показательно-степенных и других функций.

Пример 29. Найти производную функции

$$y = x^x.$$

<u>Решение:</u>

Прологарифмируем равенство $y = x^x$ по основанию *e*

$$\ln y = \ln x^x;$$
$$\ln y = x\ln x.$$

Логарифмическая производная от обеих частей равна

$$\frac{y'(x)}{y} = x'\ln x + x(\ln x)';$$

$$\frac{y'}{y} = 1\cdot\ln x + x\frac{1}{x};$$

$$y' = y(\ln x + 1);$$

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

6. Производные *неявных функций*.

Пусть y задается уравнением $F(x,y)=0$, связывающим независимую переменную x с функцией y, не разрешенным относительно y (*неявно заданная функция*). Тогда производную от этой функции можно найти, дифференцируя по x обе части уравнения, с учетом того, что y есть функция от x, определяемая этим уравнением.

Пример 30. Найти производную функции $y(x)$, которая является решением уравнения

$$e^{x+2y} + xy = 5.$$

Решение:
Взяв производные от обеих частей уравнения, получим
$$e^{x+2y}(1+2y')+y+xy'=0.$$
Выразим теперь y' из этого соотношения:
$$y'(2e^{x+2y}+x)=-y-e^{x+2y},$$
$$y'=-\frac{ye^{x+2y}}{2e^{x+2y}+x}.$$
7. Производная *параметрически заданной функции.*
Если функция $y = y(x)$ задана системой уравнений
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$
(параметрическое задание функции), то производная функции $y(x)$ по x равна
$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$
Пример 31. Найти производную функции $y(x)$, которая задана параметрически
$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$
Решение:
$$x'_t=\frac{1}{t};\quad y'_t=-\frac{1}{t^2}\quad => \quad y'_x=-\frac{1}{t^2}\cdot t=-\frac{1}{t}.$$

2.4. Производные высших порядков

Производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*. Другое обозначение производной $\frac{df}{dx}$.
Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y''. Итак, $y''=(y')'=\frac{d^2f}{dx^2}$.
Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:
$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=\frac{d^nf}{dx^n}.$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Некоторые основные производные высших порядков:

1. $\left(x^n\right)^{(m)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))x^{n-m}$ $\left(\left(x^n\right)^{(n)} = n!\right)$;

2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$; 3. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

4. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$; 5. $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$; 5а. $\left(e^{kx}\right)^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Функция $f''(x)$ в точке x определяет скорость изменения $f'(x)$, то есть $f''(x)$ – ускорение изменения функции $f(x)$ при данном x. Например, вторая производная от пути $S(t)$ по времени t есть величина ускорения прямолинейного движении точки, т.е $S''(t) = a$.

Пример 32. Найти производную 3-го порядка функции:

$$y(x) = e^{-x} \cdot \sin x.$$

Решение:

$y' = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$;

$y'' = e^{-x}(-\cos x + \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^{-x} \cdot \cos x$;

$y''' = 2e^{-x} \cdot \cos x + 2e^{-x} \cdot \sin x = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$.

2.5. Дифференциал функции

Дифференциал функции есть главная часть приращения функции

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

линейно зависящая от приращения $\Delta x = \mathrm{d}x$ независимого аргумента.
Здесь $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.
Дифференциал dy функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной

$$dy = y'\,dx = f'(x)\,dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Приращение функции приближенно равно ее дифференциалу

$$\Delta y \approx dy.$$

Точнее дифференциал функции отличается от приращения функции на бесконечно малую $\alpha(\Delta x)$высшего порядка по сравнению с Δx.

Дифференциалы основных элементарных функций

Так как дифференциал функции получается умножением ее производной на дифференциал независимой переменной, то, зная производные основных элементарных функций, можно найти дифференциалы этих функций.

Пример 33. Найти дифференциал функции

$$\underline{y = x^n.}$$

Решение:

$$dy = (x^n)'\,dx = nx^{n-1}dx.$$

Пример 34. Найти дифференциал функции

$$y = \ln x\ .$$

Решение:

$$dy = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}dx.$$

Свойства дифференциала

а) $d(u + v + \ldots + w)' = du + dv + \ldots + dw$;

б) $d(uv) = vdu + udv$,

в частности, $d(cu) = cdu$;

в) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

Дифференциал сложной функции. Свойство инвариантности

Пусть $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ – непрерывные функции, имеющие производные $f'(u)$ и $\varphi'(x)$.

Так как $y'(x)=f'(u)\varphi'(x)$, то

$$dy = f'(u)\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = f'(u)du.$$

Как видим, дифференциал dy имеет такой же вид, как если бы аргумент u был независимой переменной.

Таким образом, выражение для дифференциала функции $y = f(u)$ сохраняет свой вид независимо от того, является ли ее аргумент u независимой переменной или функцией от независимой переменной.

Пример 35. Найти дифференциал функции

$$y = \ln x^2 .$$

Решение:

$$dy = (\ln x^2)'\, dx = \frac{1}{x^2} 2x dx = \frac{2}{x} dx .$$

3. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

3.1.Правило Лопиталя

Предварительно приведем без доказательства несколько теорем.

Теорема Ферма. Если $y = f(x)$, непрерывная в интервале $[x_1, x_2]$, принимает свое наибольшее (или наименьшее) значение во внутренней точке ξ этого интервала ($x_1<\xi<x_2$), то есть, если в точке ξ существует функция $f(x)$, то обязательно производная $f'(\xi) = 0$ или не существует.

Геометрический смысл теоремы Ферма

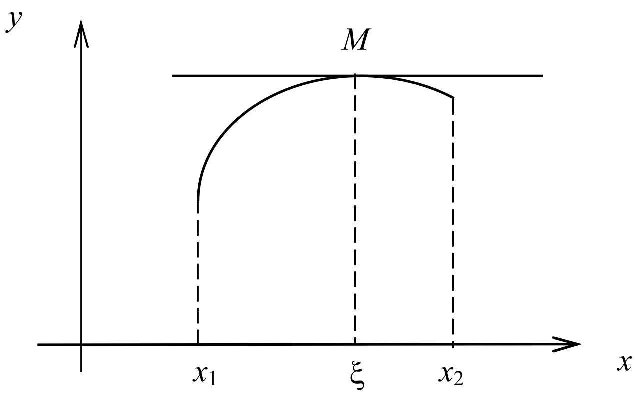


Рис. 13

Касательная к графику функции в его самой высшей (самой низшей) точке параллельна оси абсцисс или не существует.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках, имеет на концах интервала равные значения, то в интервале $[x_1, x_2]$ существует хотя бы одно значение $x = \xi$, для которого $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: На линии $y = f(x)$, где $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

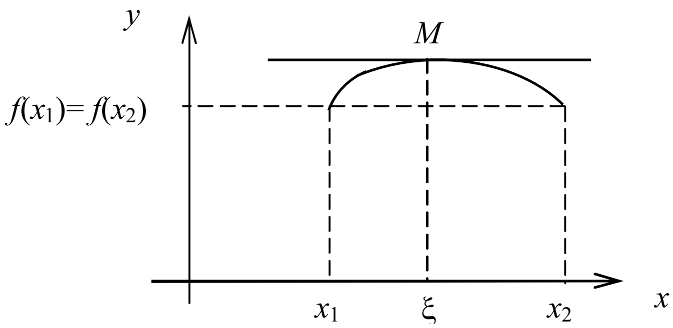


Рис. 14

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях). Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1,x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках, то в этом интервале существует хотя бы одно значение $x = \xi$, для которого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдется точка C между A и B, в которой касательная параллельна хорде AB

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha = f'(\xi).$$

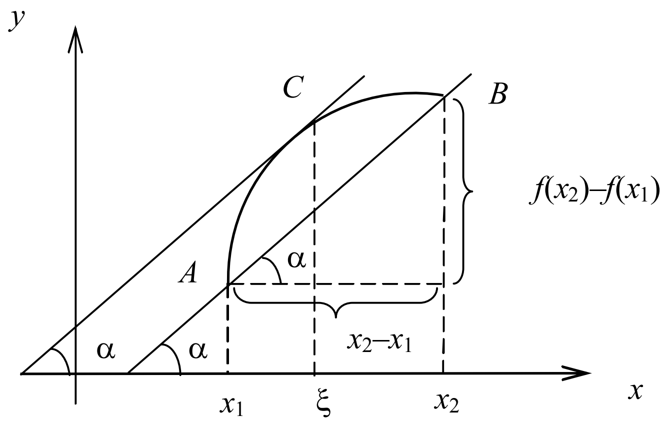


Рис. 15

Так как по теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ (формула Лагранжа), то приращение функции на интервале равно произведению производной в некоторой промежуточной точке интервала на приращение независимой переменной.

Теорема Лопиталя (раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ совместно стремятся к нулю или к ∞ при $x \to x_0$. Если отношение их производных имеет предел, то отношение самих функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 15. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x}$.

Решение:

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin^2 3x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3}{1} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \sin 6x = 3 \cdot 0 = 0.$$

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}}{x}$.

Решение:

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = \infty.$$

Неопределенности $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} и 1^{0} сводятся к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований.

Пример 36. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$.

Решение:

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{x})'}{(-\frac{1}{x^2})'} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

3.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], то она достигает на нем своего наибольшего значения

$$M = \max_{[a,b]} f(x)$$

и наименьшего значения

$$m = \min_{[a,b]} f(x).$$

Критическими точками непрерывной на отрезке [a, b] функции называются такие значения переменной $x \in (a, b)$, которые удовлетворяют уравнению $f'(x)=0$), а также такие значения переменной $x \in (a, b)$, в которых производная функции $y = f(x)$ не существует.

Для нахождения *наибольшего и наименьшего значений* функции $y = f(x)$ на отрезке [a, b] достаточно найти ее критические точки x_1, x_2, ..., принадлежащие этому отрезку, и определить M и m, сравнивая значения функции в концах отрезка $f(a)$, $f(b)$ и в критических точках внутри отрезка $f(x_1)$, $f(x_2)$,…

Пример 37. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x} \text{ на отрезке } \left[-\frac{1}{8}; 8\right].$$

Решение:

Для того чтобы вычислить критические точки, вычислим производную функции

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Решая уравнение $f'(x)=0$, получим

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x^2}=1 \quad \Rightarrow \quad x=1\in\left(-\frac{1}{8};8\right).$$

Заметим также, что производная функции не существует в точке $x = 0$.

Таким образом, у функции на данном отрезке имеются две критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Сравним значения, которые принимает функция в этих точках, а также значения на концах отрезка

$$f(0)=0; \qquad f(1)=-2; \qquad f(-\frac{1}{8})=\frac{11}{8}; \qquad f(8)=2.$$

Следовательно,

$$M=\max_{[-\frac{1}{8};\,8]} f(x)=f(8)=2;$$

$$m=\min_{[-\frac{1}{8};\,8]} f(x)=f(1)=-2.$$

3.3. Поведение функции в интервале

Необходимый признак монотонности

Теорема.

1) Если функция $f(x)$ в интервале возрастает, то ее производная $f'(x)\geq 0$.
2) Если $f(x)$ в интервале убывает, то $f'(x)\leq 0$.
3) Если $f(x)$ в интервале не изменяется ($f(x)$=const), то $f'(x)\equiv 0$.

Геометрический смысл теоремы

Если точка $M(x,y)$ при движении по графику функции слева направо поднимается, то касательная к графику образует острый угол ($\text{tg}\alpha>0$); если $M(x,y)$ опускается, то касательная образует тупой угол ($\text{tg}\alpha<0$).

В интервале монотонности знак производной не может измениться на противоположный.

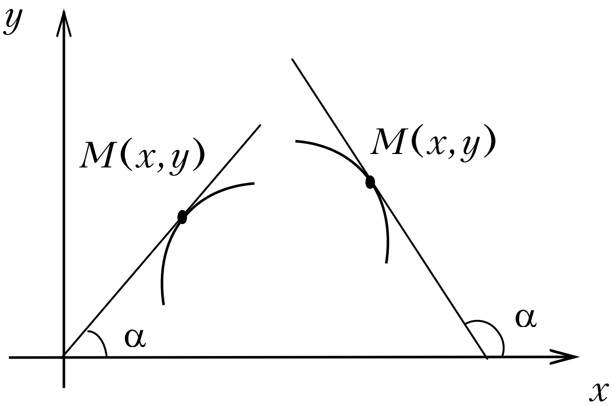


Рис. 16

Достаточный признак монотонности

Если

1) $f'(x) > 0$ всюду в интервале, то $f(x)$ в этом интервале возрастает;
2) $f'(x) < 0$ всюду в интервале, то $f(x)$ в этом интервале убывает;
3) $f'(x) = 0$ всюду в интервале, то $f(x) = \text{const}$ в этом интервале.

Те значения x, при которых производные обращаются в нуль, называются *стационарными точками функции.*

Пример 38. Функция $f(x) = x^3$ возрастает на всей числовой прямой, т.к. ее производная $f'(x) = 2x^2 \geq 0$ для всех $x \in R$.

3.4. Экстремумы функции

Особую роль в исследовании функций играют те точки, которые отделяют интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности). В этих точках функция меняет характер своего изменения.

Определение. Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $f(x)$, если $f(x_0)$ есть наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ (в некоторой **окрестности** точки x_0).

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**. Значение функции в точке экстремума называется **экстремумом (максимумом или минимумом).**

Функция на данном интервале может иметь несколько экстремумов, называемых **локальными**.

Необходимый признак экстремума

Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю, либо не существует.

Геометрически: в точке экстремума касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Функция может иметь экстремумы и в отдельных точках, в которых она не дифференцируема.

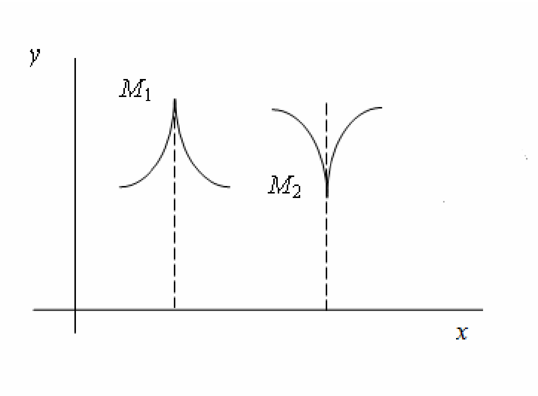


Рис. 17

Например, в точках M_1 и M_2 касательная перпендикулярна оси Ox (точки возврата). Производная в этих точках не существует.

Необходимый признак не является достаточным для существования экстремума в точке. Приведем пример.

Пример 38.

Функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ имеет $y'(0) = 0$, но $x=0$ не является точкой экстремума.

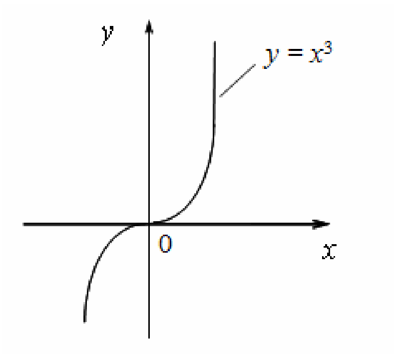


Рис. 18

Достаточный признак экстремума

Первый достаточный признак экстремума

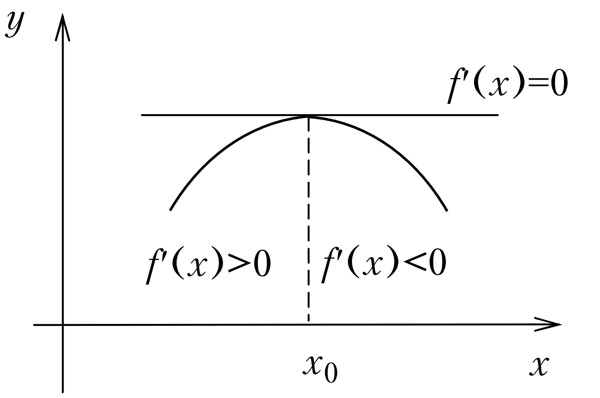


Рис. 19

Точка x_0 является точкой экстремума $f(x)$, если $f'(x)$ непрерывна и при переходе через x_0 меняет знак: при перемене знака производной с “+” на “–“ точка x_0 – точка максимума, при перемене с “–“ на “+” точка x_0 – точка минимума.

Второй достаточный признак экстремума

Точка x_0 есть точка экстремума функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$.
Причем, если: $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;
$f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.
Заметим, что если
а) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$
или
б) $f'(x_0)$ не существует,
то вторым признаком воспользоваться нельзя. Надо обратиться к первому признаку.

Исследование функции на экстремумы

Исследование функции на экстремумы проводится по следующей схеме:

- находим критические точки $x_1, x_2, \ldots$ функции $y = f(x)$;
- находим знаки производной $f'(x)$ в интервалах между критическими точками;
- анализируя, как ведут себя знаки производной при переходе через критическую точку, устанавливаем наличие и тип экстремума.

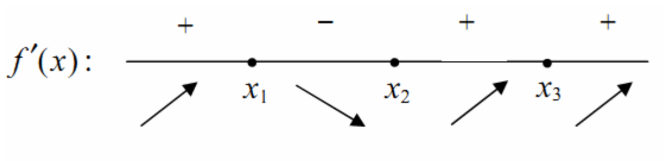


Рис. 20

В этой ситуации в точке $x = x_1$ функция $y = f(x)$ имеет максимум, в точке $x = x_2$ функция $y = f(x)$ имеет минимум, в точке $x = x_3$ экстремума нет.

Пример 39. Исследовать функцию $f(x) = x - \ln x$ на экстремумы.

Решение: Областью определения функции $f(x)$ является интервал **(0; +∞)**.

Найдем производную: $f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Точка $x = 0$ не является критической, так как функция $y = f(x)$ в ней не определена. Единственной критической точкой функции является точка $x = 1$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

Знаки производной функции изображены на следующем рисунке.

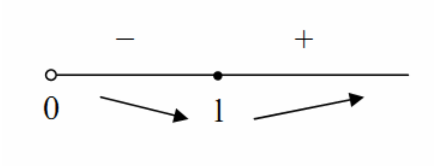


Рис. 21

Из рис. 21 видно, что производная при переходе через точку x = 1 меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, функция $y = f(x)$ в точке x = 1 имеет минимум, причем $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$.
Таким образом, $f_{\min} = f(1) = 1$.

Пример 40. Из квадратного листа картона изготавливается коробка без крышки следующим образом:

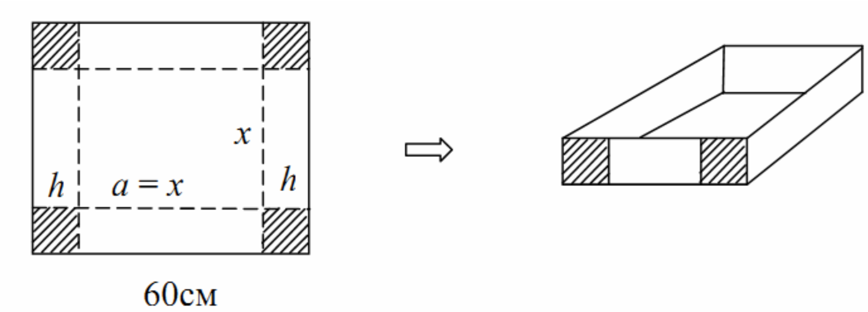


Рис. 22

Найти наибольший объем и соответствующие размеры коробки, если длина стороны заготовки равна 60 см.

Решение: Поскольку основанием коробки является квадрат, то объем коробки $V = ah^2$. Пусть $a = x$, тогда $h = \dfrac{60 - x}{2} \Rightarrow V = x^2 \cdot \dfrac{60 - x}{2} = 0{,}5 \cdot (60x^2 - x^3)$, $0 < x < 60$.

Чтобы исследовать функцию $V(x)$ на экстремумы, найдем её производную:
$V' = 0{,}5(120x - 3x^2) = 1{,}5x(40 - x)$.

Теперь найдем критические точки:
$V' = 0 \Rightarrow x_1 = 40,\ x_2 = 0 \notin (0;60)$.

Итак, функция имеет единственную критическую точку x_1 = 40. Анализируя знак производной, получим следующий рисунок.

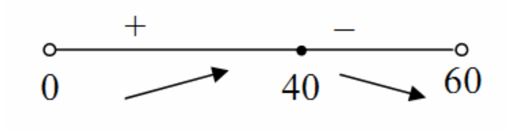


Рис.23

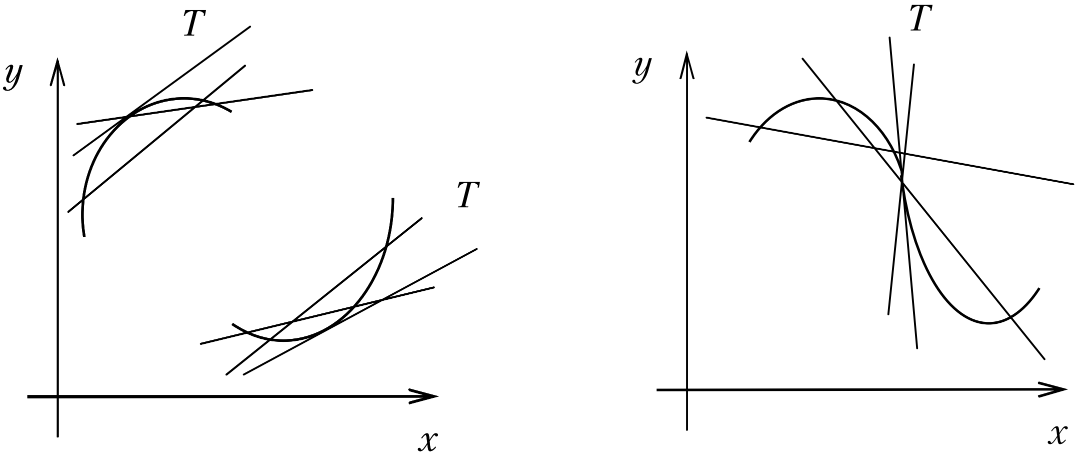
Таким образом, $V_{\max} = V(40) = 1600 \cdot \frac{60-40}{2} = 16000.$

Ответ. Наибольший объем коробки достигается при a = 40 см, h = 10 см и равен 16000 куб. см.

3.5. Выпуклость линии. Точки перегиба

Определение. Дуга называется выпуклой, если она пересекается с любой своей секущей не более чем в двух точках.

Если дуга выпуклая, то она целиком лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой ее точке (выпуклая вверх – кривая лежит под касательной, выпуклая вниз – над касательной) (рис. 24, а).



а) б)

Рис. 24

Особую роль играют **точки перегиба**, отделяющие на линии выпуклую дугу от вогнутой (рис. 24, б).

В точке перегиба касательная пересекает линию, в окрестности этой точки линия лежит по обе стороны от касательной.

Теорема. Если производная всюду в интервале $f''(x) < 0$, то дуга линии $y=f(x)$, соответствующая этому интервалу, выпуклая. Если $f''(x) > 0$, то дуга вогнутая.

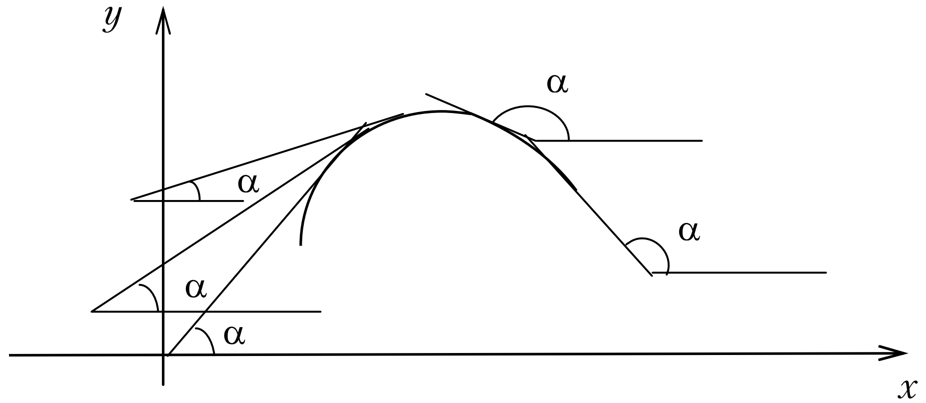


Рис. 25

Действительно, если линия $y = f(x)$ выпукла, то с увеличением x $\mathrm{tg}\alpha$ уменьшается, то есть $f'(x)$ убывает, и $f''(x) < 0$, и наоборот, если $f''(x) < 0$, то линия $y = f(x)$ выпукла.

Аналогично для $f''(x) > 0$. Если линия $y = f(x)$ вогнута, то с увеличением x $\mathrm{tg}\alpha$ увеличивается, то есть $f'(x)$ возрастает, и $f''(x) < 0$. Обратно, если $f''(x) > 0$, то линия $y = f(x)$ вогнута.

Из этой теоремы становится ясным смысл второго достаточного признака экстремума. Например, если $f'(x_0) > 0$, $f''(x) < 0$, то вершина кривой, соответствующая точке x_0, лежит на выпуклой части линии $y = f(x)$, то есть x_0 – точка максимума.

Необходимый признак точки перегиба

Если x_0 – абсцисса точки перегиба, то либо $f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ не существует.

Достаточный признак точки перегиба

Точка (x_0,y_0) есть точка перегиба линии $y=f(x)$, если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0. При перемене знака второй производной с «+» на «–» участок вогнутости сменяется участком выпуклости; при перемене знака с «–» на «+» участок выпуклости сменяется участком вогнутости.

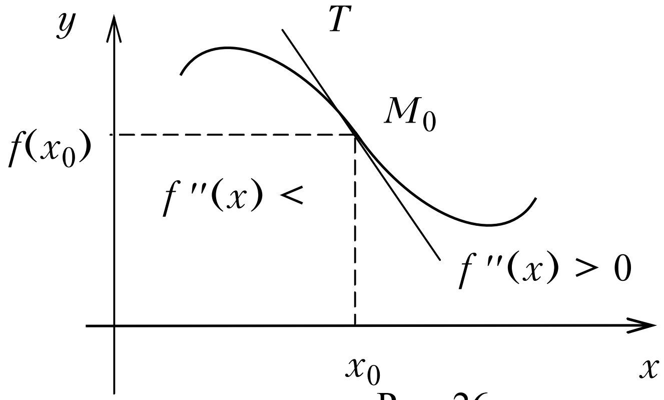


Рис. 26

3.6. Асимптоты

Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Следует различать случаи вертикальной и наклонной асимптот.

Вертикальные асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой $y = f(x)$.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот надо найти значения $x = a$, при приближении к которым $y = f(x)\to\infty$. Тогда прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой. Например, если мы посмотрим на хорошо известный нам график функции $y = \frac{1}{x}$, то увидим, что график этой функции бесконечно близко приближается к прямой $x = 0$ (ось OY) - это *вертикальная асимптота*, и к прямой $y = 0$ (ось OX) - это *горизонтальная асимптота*:

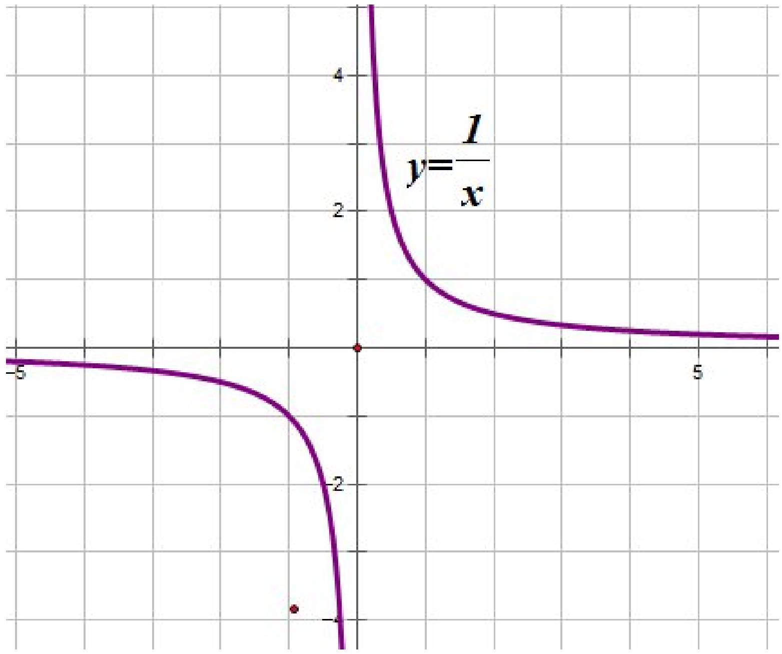


Рис. 27

В общем случае *горизонтальная асимптота* - это прямая, параллельная оси ОХ. Она является частным случаем *наклонной асимптоты.*

Наклонные асимптоты

Уравнение наклонной асимптоты линии $y = f(x)$ имеет вид $y = kx+b$. Коэффициенты k и b вычисляются следующим образом:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Аналогично находится наклонная при $x \to -\infty$.

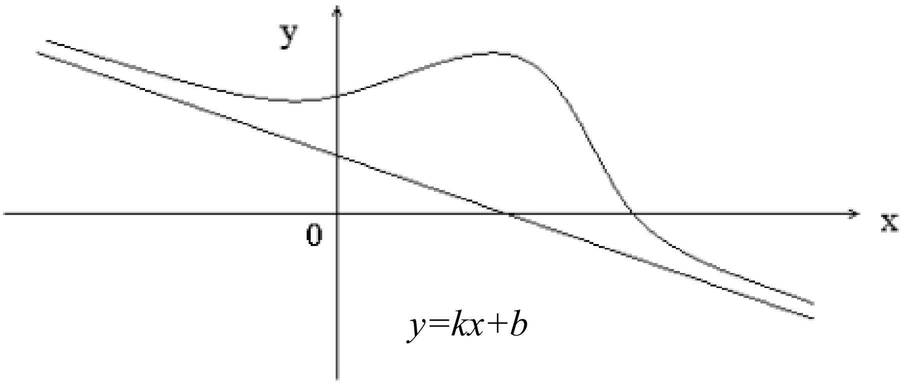


Рис. 28

Частные случаи.
1. При $b = 0$ уравнение асимптоты $y = kx$, она проходит через начало координат.
2. При $k = 0$ уравнение асимптоты $y = b$. Это *горизонтальная асимптота*, она параллельна оси OX (см. рис. 10, уравнение асимптоты $y = 0$).

Пример 41. Найти асимптоты функции $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.

Решение:

1. Начнем с области определения функции. Функция $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$ не определена в точке x = -2, следовательно, прямая x = -2 является вертикальной асимптотой. Найдем пределы слева и справа при $x \to$ -2:

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{3 - x^2}{x + 2} = \lim_{x \to -0} \frac{3 - (-2 - 0)^2}{-2 - 0 + 2} = (\frac{-1}{-0}) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{3 - x^2}{x + 2} = \lim_{x \to +0} \frac{3 - (-2 + 0)^2}{-2 + 0 + 2} = (\frac{-1}{+0}) = -\infty.$$

2. Попробуем найти наклонную асимптоту: $k = \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{3 - x^2}{(x + 2)x} = -1$.

(Предел нашли, например, воспользовавшись правилом: предел функции равен отношению коэффициентов при максимальных степенях x в числителе и знаменателе дроби).

$$b = \lim_{x \to -2+0} \left(\frac{3 - x^2}{(x + 2)} - (-1)x \right) = \lim_{x \to -2+0} \frac{3 - x^2 + x^2 + 2x}{x + 2} = \lim_{x \to -2+0} \frac{3 + 2x}{x + 2} = 2.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты: $y == x + 2$.

На рис. 29 изображен график функции и ее асимптоты.

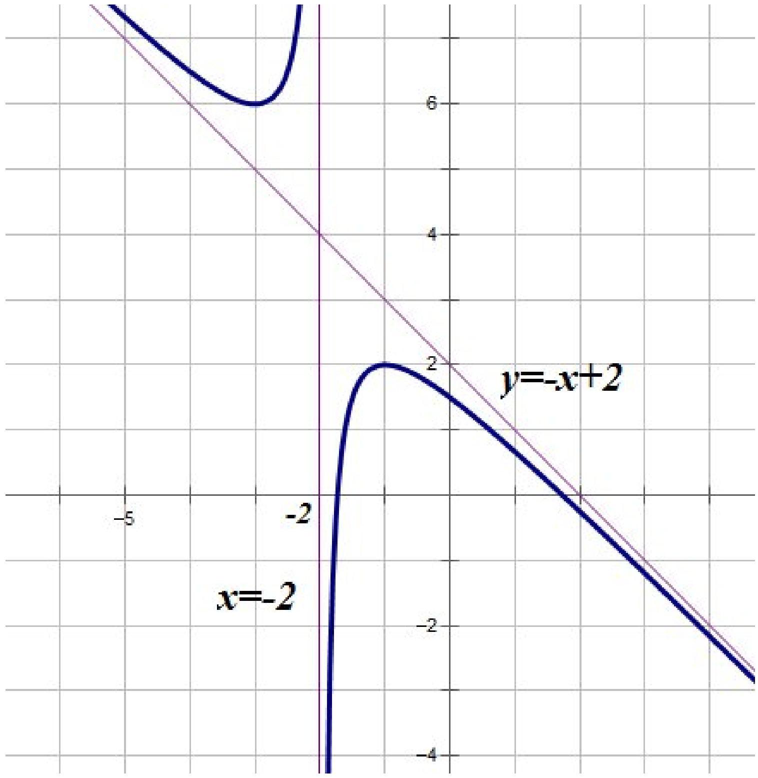


Рис. 29

3.7. Общая схема исследования функций

1. Исследование без использования производной.
   1.1. Область определения функции; периодичность; четность, нечетность функции.
   1.2. Точки разрыва и интервалы непрерывности. Поведение функции в окрестности точек разрыва; вертикальные асимптоты.
   1.3. Поведение функции на бесконечности. Наклонные (в частности, горизонтальные) асимптоты.
   1.4. Точки пересечения графика с осями координат.
2. Исследование с помощью первой производной. Интервалы монотонности функции, точки экстремума и экстремальные значения.
3. Исследование с помощью второй производной. Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
4. Построение графика функции.

Пример 42. Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

<u>Решение:</u>

1. Исследование без использования производной.

1.1. Область определения: $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

1.2. Функция непериодическая.

Четность: $y(-x)=\dfrac{x^2}{-x-1}\neq y(x)\neq -y(x)$ => функция общего вида.

1.3. Асимптоты:

1) вертикальные асимптоты:

$x = 1$ – точка разрыва;

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

$x = 1$ – вертикальная асимптота.

2) наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1.$$

Наклонная асимптота: $y = x + 1$.

1.4. Точки пересечения с осями:

Oy: $x = 0$, $y = 0$, точка пересечения: $(0;0)$;

Ox: $y = 0$ => $\dfrac{x^2}{x-1} = 0$ => точка пересечения: $(0;0)$.

2. Исследование с помощью первой производной.

Монотонность:

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

$y' = 0$: критические точки: $x = 0$, $x = 2$.

Знаки производной и поведение функции удобно представить в виде таблицы

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	–	–	–	0	+
Поведение y	↑	max	↓	–	↓	min	↑
Значение y		0		–		4	

3. Исследование с помощью второй производной.

Выпуклость:

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y''=0 \quad => \quad x=1 \notin D(y)$, следовательно, критических точек нет.

x	$(-\infty;1)$	$(1;+\infty)$
y''	–	+
Поведение y	$\cap$	$\cup$
Значение y	нет	нет

4. Построим график функции:

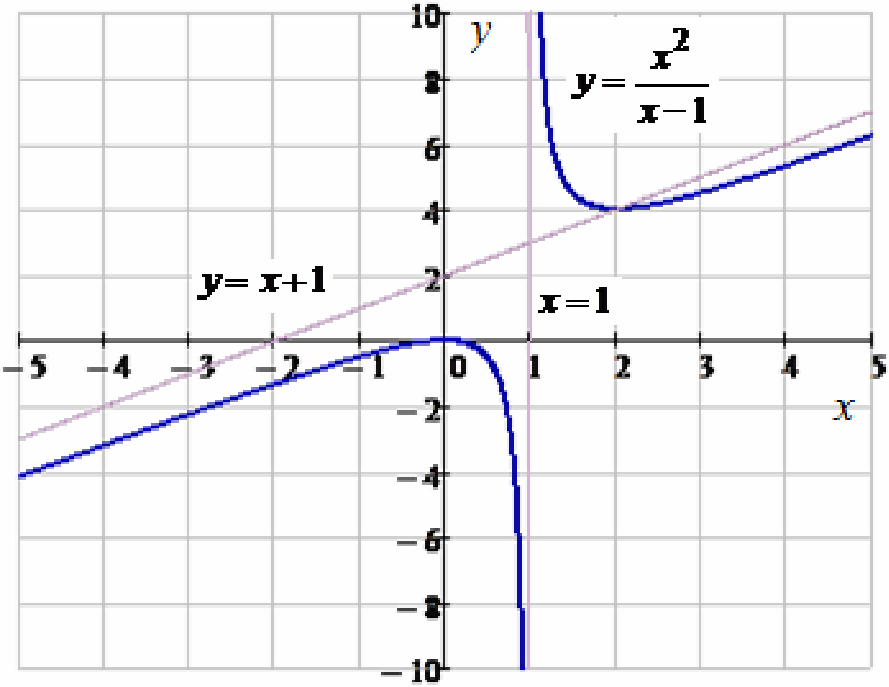


Рис. 30

Задания для самостоятельного решения.

Задача 1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

1. а) $y = \frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y = \sin\sqrt{3} + \frac{1}{3}\frac{sin^3 3x}{cos 6x}$;

в) $y=(\text{arctg}x)^{\frac{1}{2}\ln \text{arctg}x}$; г) $xy=\ln(e^x+e^y)$.

2. а) $y = \dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$;

б) $y = \operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$;

в) $y = (\sin x)^{5e^x}$;

г) $x^3 + y^3 - x^2 y = 0.$

3. а) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$;

б) $y = \dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$;

в) $y = x^{\frac{2}{x}}$;

г) $x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = 0$.

4. а) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

в) $y = x^{\arcsin x}$;

г) $y \cdot \sin x + \cos(x-y) = \cos y$.

5. а) $y = x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$;

б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

г) $x \cdot e^y + ye^x = xy$.

6. а) $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$;

б) $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $y = (\ln x)^x$;

г) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$.

7. а) $y = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$;

б) $y = x \cdot \arcsin\dfrac{2x+1}{3}$;

в) $y = (\operatorname{arctg}2\mathrm{x})^{\sin 3x}$;

г) $(x+y)^2 = (x+2y)^3$.

8. а) $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$;

б) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$;

в) $y = x^{\ln x}$;

г) $y \cdot \sin x = \cos(x-y)$.

9. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$;

б) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$;

в) $y = (\ln x)^x$;

г) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$.

10. а) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

б) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$;

в) $y = (x+x^2)^x$;

г) $x - y + x \cdot \sin y = 0$.

11. а) $y = 5 \cdot \sqrt[5]{\dfrac{x^2+x+1}{x}}$;

б) $y = 2^x \cdot e^{-x}$;

в) $y = (\cos x)^x$;

г) $\ln y = \operatorname{arctg} x/y$.

12. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{3x-5}}$; б) $y=\left(1+\mathrm{ctg}^2 3x\right)e^{-x}$;

в) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^x$; г) $(x+y)^2+(x-3y)^2=0$.

13. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$; б) $y=\cos\mathrm{ctg}2-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$;

в) $y=x^{\arcsin x}$; г) $xy+\arcsin(x+y)=0$.

14. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$; б) $y=\cos\mathrm{ctg}2-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$;

в) $y=x^{\arcsin x}$; г) $xy+\arcsin(x+y)=0$.

15. а) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(1+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y=\dfrac{\cos\ln 7\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

в) $y=(\mathrm{ctg}3x)^{2e^x}$; г) $\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}$.

16. а) $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^2}$; б) $y=\cos\mathrm{ctg}2-\dfrac{\cos^2 8x}{16\sin 16x}$;

в) $y=x^{e^{\mathrm{tg}x}}$; г) $(x+y)^2+(x-3y)^3=0$.

17. а) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; б) $y=\mathrm{ctg}\cos 2+\dfrac{\sin^2 6x}{6\cos 12x}$;

в) $y=(\mathrm{tg}x)^{4e^x}$; г) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

18. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{\frac{3}{4}})^2}{x^{\frac{3}{2}}}}$; б) $y=\sqrt[3]{\mathrm{ctg}2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$;

в) $y=(\cos 5x)^{e^x}$; г) $4xy+4x-4y+4=0$.

19. а) $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos^2 12x}{24\sin 24x}$;

в) $y=(x-5)^{\mathrm{ch}x}$; г) $xe^y+ye^x=xy$.

20. а) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=\dfrac{1}{3}\cos\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 10x}{10\cos 20x}$;

в) $y=(x\sin)^{\ln(x\sin x)}$; г) $y+x+\mathrm{arctg}3x+\arcsin 2y=0$.

21. а) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=8\sin \operatorname{ctg}3+\dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$;

в) $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$; г) $xy=\ln(e^x+e^y)$.

22. а) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; б) $y=\dfrac{\cos \operatorname{ctg}3\cos^2 14x}{28\sin 28x}$;

в) $y=x^{\sin^3}$; г) $\cos(x-y)-2x+4y=0$.

23. а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\dfrac{\cos \operatorname{tg}(\frac{1}{3}x)\sin^2 15x}{15\cos 30x}$;

в) $y=(x^2-1)^{\operatorname{sh}x}$; г) $y=\cos(x+y)$.

24. а) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=\dfrac{\sin \operatorname{tg}\left(\frac{1}{7}\right)\cos^2 16x}{32\sin 32x}$;

в) $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$; г) $xe^y+ye^x=xy$.

25. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sin\left(\frac{1}{3}\right)\sin 17x}{17\cos 34x}$;

в) $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}$; г) $\cos xy=\dfrac{y}{x}$.

26. а) $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cos^2 18x}{36\sin 36x}$;

в) $y=(x^2+1)^{\cos x}$; г) $(x+2y)^2+(x-3y)^3=0$.

27. а) $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}\ln 2\sin^2 19x}{19\cos 38x}$;

в) $y=19^{x^{19}}x^{19}$; г) $y\ln x+x\ln y=\ln(xy)$.

28. а) $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$; б) $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\dfrac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$;

в) $y=x^{3x}2^x$; г) $(x+y)^2=(x-2y)^3$.

29. а) $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y=\operatorname{ctg}\sin\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$;

в) $y=x^{2x}5^x$; г) $x-y^2+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{y}=0$.

30. а) $y=3\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}}$; б) $y=\sin\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$;

в) $y = x^{e^{\sin x}}$; г) $y\sin x = \cos(xy)$.

Задача 2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций:

1. а) $y = \dfrac{7x+1}{17(4x+3)}$; б) $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

2. а) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

3. а) $y = \log_3(x+5)$; б) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

4. а) $y = \dfrac{x}{x+1}$; б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2\cos t). \end{cases}$

5. а) $y = 2^{5x}$; б) $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t, \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

6. а) $y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$; б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$

7. а) $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$; б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

8. а) $y = a^{2x+3}$; б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

9. а) $y = \dfrac{4}{x}$; б) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

10. а) $y = \dfrac{5x+1}{13(2x+3)}$; б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

11. а) $y = \mathrm{arctg}\left(x^2\right)$; б) $\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = 2t - \sin 2t. \end{cases}$

12. а) $y = \dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$; б) $\begin{cases} y = t - \sin t, \\ x = t + \cos t. \end{cases}$

13. а) $y = xe^{-x^2}$; б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

14. а) $y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$; б) $\begin{cases} x = t - \ln \sin t, \\ y = t + \ln \cos t. \end{cases}$

15. а) $y = e^{-x} \cdot \sin x$; б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

16. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$; б) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

17. а) $y = x^3 \ln x$; б) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$

18. а) $y = \ln \operatorname{ctg} 2x$; б) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

19. а) $y = \ln \ln x$; б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t, \\ y = \sin^3 2t. \end{cases}$

20. а) $y = xe^{-x}$; б) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

21.а) $y = a^{3x}$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{1 + t^2}. \end{cases}$

22. а) $y = \lg(5x + 2)$; б) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

23. а) $y = \dfrac{x}{2(3x + 2)}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t}}. \end{cases}$

24. а) $y = \lg(x + 4)$; б) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

25. а) $y = \dfrac{4}{x}$; б) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

26. а) $y=\dfrac{x}{9(4x+9)}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t-3}, \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$

27. а) $y=\lg(1+x)$; б) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$

28. а) $y=7^{5x}$; б) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\mathrm{tg}^2 t. \end{cases}$

29. а) $y=\lg(3x+1)$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

30. а) $y=\sqrt[5]{7x-1}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Задача 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить ее график:

1. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$; б) $y=\ln(25-9x^2)$.

2. а) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$; б) $y=\dfrac{1}{xe^x}$.

3. а) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$; б) $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$.

4. а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=(e^{2x}-1)^{-1}$.

5. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

6. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

7. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

8. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-9}$; б) $y=x^2\cdot e^x$.

9. а) $y=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$; б) $y=6x^2\cdot e^{-x^2}$.

10. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$; б) $y=2x^2-\ln x$.

11. а) $y=\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)^2$; б) $y=\ln(2x^2+3)$.

12. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

13. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=x^3\cdot e^x$.

14. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=x-\ln(x+1)$.

15. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

16. а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ б) $y=x\cdot e^{-x}$.

17. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

18. а) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y=x\cdot\ln x$.

19. а) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y=\ln(x^2-4)$.

20. а) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

21. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$.

22. а) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$; б) $y=x^2\ln x$.

23. а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

24. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

25. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$; б) $y=2x^2-\ln x$.

26. а) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$; б) $y=x+\ln(x^2-4)$.

27. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$; б) $y = \ln(1 + x^2)$.

28. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$; б) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$.

29. а) $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$; б) $y = \ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

30. а) $y = \dfrac{1-2x}{x^2 - x - 2}$; б) $y = xe^{2x-1}$.

Задача 3.

1. Уравнение касательной к графику функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ в точке (1; 2) имеет вид...

   1) $x - y + 1 = 0$; 2) $y - 1 = 0$; 3) $y - 2 = 0$; 4) $x - y - 1 = 0$; 5) $y = 3$.

2. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$ в точке (0; 1) имеет вид...

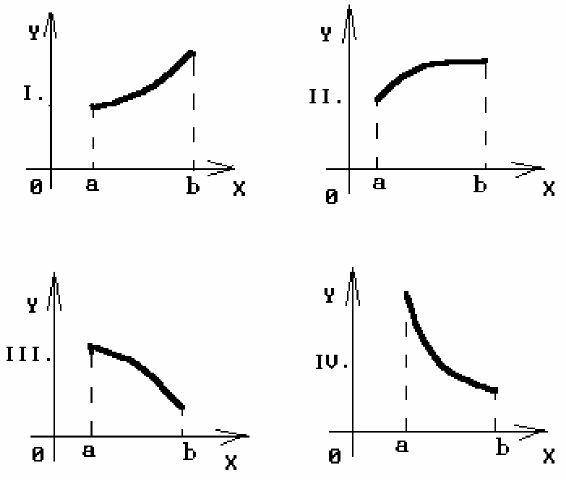
   1) $x - y + 1 = 0$; 2) $x + y - 1 = 0$; 3) $y - 1 = 0$;
   4) $y + 1 = 0$; 5) $x + y + 1 = 0$.

3. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ в точке (-1; 0,5) имеет вид...

   1) $x + 2y - 2 = 0$; 2) $x + 2y = 0$; 3) $x - 2y - 2 = 0$; 4) $x - 2y + 2 = 0$;
   5) $x - 2y = 0$.

Задача 4.

1. График какой функции на всем отрезке [a, b] одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' > 0$; $y'' < 0$?

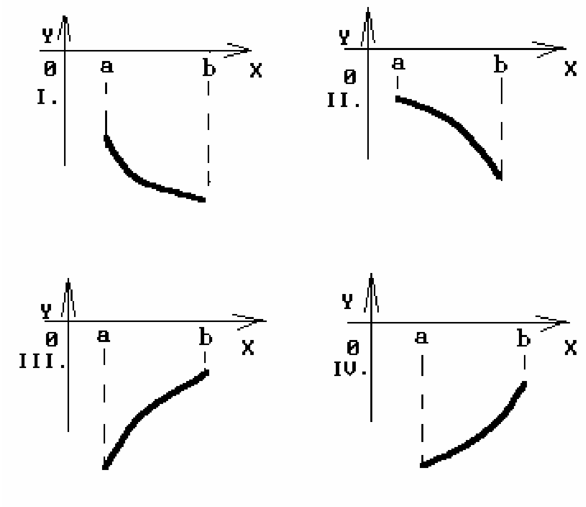


Варианты ответов:
1) Все графики. 2) Только I и IV.
3) Только II и III. 4) Только II. 5) Только III.

2. График какой функции на всем отрезке [a, b] одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' > 0$?

Варианты ответов:
1) Все графики. 2) Только II. 3) Только III.
4) Только II и III. 5) Только I и III.

3. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y < 0$; $y' < 0$; $y'' > 0$?



Варианты ответов:
1) Только IV. 2) Только I и II. 3) Только II.
4) Только II и III. 5) Только I.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. – М.: Физматлитиздат, 2005. – 336с.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т.: учеб. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 415 с.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш.шк. – 2007.
4. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч.1/под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. – М.: Физматлит, 2001. – 288с.
5. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко. – М.: ОНИКС, 2007. – 304с.

7. Введение в анализ. Раскрытие неопределённостей при вычислении пределов: метод. указания по математике / сост. Е.М. Михайлов; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2015. – 16с.
8. http://www.pm298.ru/reshenie/iren.php.
9. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture01/lecture01.html.
10.http://www.mathprofi.ru/beskonechno_malye_funkcii_zamechatelnye_ekvivalentnosti.html.

ОГЛАВЛЕНИЕ