Математика: исторический экскурс, множество, вероятность

Методические указания

Иваново
2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Математика: исторический экскурс, множество, вероятность

Методические указания

Составитель Г.А. Зуева

Иваново 2019

УДК 517. 9
Составитель Г.А. Зуева

Математика: исторический экскурс, множество, вероятность: метод. указания/ сост. Г.А. Зуева; Иван. гос. хим.–технол. ун–т. – Иваново, 2019. – 44 с.

Методические указания содержат экскурс в историю развития математики, определяют место и роль математики в науке, культуре и общественной жизни, ее «гуманитарную» составляющую. Математическое образование необходимо каждому для успешной жизни в современном обществе, оно развивает познавательные способности человека, логическое мышление. Выпускник вуза должен иметь представление об истории развития математики и ее роли в культуре человечества, владеть основными математическими понятиями и методами, уметь их применять. Кроме того, в указаниях рассматриваются основы следующих математических разделов: теории множеств, комбинаторики, теории вероятностей (раздел случайные события, классическое определение вероятности). В методических указаниях приводятся основные определения и методы, примеры решения типовых задач. В каждом разделе содержится ряд практических задач для самостоятельного решения, в конце указаний приведен список используемой литературы.

Данные методические указания можно применять для самообразования, реферативной работы студентов, организации работы на практических занятиях. Методические указания рекомендуются студентам всех форм обучения.

Рецензент – доктор технических наук, профессор В.П. Жуков (Ивановский государственный энергетический университет)

Математику уже за то любить следует,

что она ум в порядок приводит.

М.В. Ломоносов

ВВЕДЕНИЕ

Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, логическое мышление. Качественное математическое образование необходимо каждому для успешной жизни в современном обществе.

Математика нужна и «технарям» и гуманитариям для общей культуры и для работы. Выпускник технического вуза должен быть знаком с основными идеями математики, изложенными в их историческом развитии. Такой подход позволяет раскрыть наиболее полно сам процесс познания человеком окружающего мира, нашедшего отражение в формировании математического аппарата. Кроме того, обучаемые должны знать возможности применения теоретических основ и методов математики, элементов теории множеств, теории вероятности.

1. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1.1. Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории

1.1.1. История развития математического знания

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира, греческое слово «mathematike» происходит от греческого слова «mathema», означающего «знание», «наука», «учение путем размышления», таким образом, категорически отбрасывалось получение знаний опытным путем.

Математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей [1]. Ее содержание и характер изменялись на протяжении всей истории и продолжают изменяться теперь. От первичных представлений о целом положительном числе, а также о представлении об отрезке прямой как кратчайшем расстоянии между двумя точками математика прошла длительный путь развития, прежде чем стала абстрактной наукой со специфическими методами исследования.

История развития математического знания распадается на 4 периода (с точки зрения выдающегося советского математика академика А.Н. Колмогорова):

1) период зарождения математики (приблизительно до 5–6 веков до н.э.), на протяжении которого был накоплен достаточно большой фактический материал;

2) период элементарной математики, математики *постоянных величин*, он продолжался до конца 17 века – составляет и до настоящего времени основу «элементарной математики», преподаваемой в начальной и средней школе;

3) период математики переменных величин, охватывающий 17–18 века, который можно назвать периодом «высшей математики», характеризующийся созданием и развитием математического анализа, изучением процессов в их развитии, движении;

4) период современной математики – математики 19–21 веков характерен сознательным и систематическим изучением возможных типов количественных отношений и пространственных форм. В геометрии изучаются не только реальное трехмерное пространство, но и сходные с ним пространственные формы. В *математическом анализе* рассматриваются *переменные величины*, зависящие не только от числового аргумента, но и от некоторой линии (*функции*), что приводит к понятиям *функционала* и *оператора*. Алгебра превратилась в теорию алгебраических операций над элементами произвольной природы, лишь бы над ними можно было производить эти операции.

Задание. Подготовьте реферат, презентацию, мини-проект на тему «Исторический обзор развития математики».

1.1.2. Математика в современном мире и гуманитарных науках

Математика является значительной и важной частью общечеловеческой культуры. Математика как наука возникла около 2-х с половиной тысяч лет назад. Ученые, создавая математику, рассматривали ее как составную часть философии, которая служила средством познания мира. О значении математики для человечества говорит, например, тот факт, что книга Евклида «Начала» издавалась наибольшее число раз (не считая Библии).

Математика имеет богатейшие возможности воздействия на выработку научного мировоззрения и достижение необходимого общекультурного уровня. История зарождения великих математических идей, судьбы выдающихся математиков (Архимед, Галуа, Паскаль, Галилей, Гаусс, Эйлер, Ковалевская, Чебышев и др.) дают пищу для ума и сердца, примеры беззаветного служения науке, приводят к философским и нравственным поискам.

Что же дает математика людям?

Наиболее распространенный ответ не так давно состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять, т.е. осуществлять математическую обработку цифровых данных, связанных с тем или иным изучаемым процессом.

Однако, особенно с развитием вычислительной техники, вычислительный аспект математики оказывается не главным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Главная же причина этого процесса такова: математика предлагает весьма общие и дает достаточно четкие логические *модели* для изучения окружающей действительности.

Математической моделью изучаемого объекта (явления, процесса) называется логическая конструкция, отражающая геометрические формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами.

Такие модели формулируются на особом языке – языке чисел, различных символов. Язык должен обладать свойством универсальности для применения в различных научных отраслях. *Таким языком является математика*. Математическая символика позволяет точно выражать мысли, автоматизировать проведение действий, необходимых для получения выводов.

Другие функции языка математики: сжимать запись информации, делать ее легко обозримой, удобной для обработки и получения выводов. Так, замечательный датский физик Нильс Бор заявил, что математика представляет собой значительно больше, чем наука, поскольку она является также *языком* науки.

Владение математикой дает людям мощные методы изучения и познания окружающего их мира, *методы исследования* как теоретических, так и практических проблем.

Использование математического моделирования, *дедуктивных методов* и специального математического аппарата сближает гуманитарные и естественные науки. Происходит *математизация гуманитарных наук*, все чаще дедуктивный вывод (один из признаков научности) используется в гуманитарных науках. Наблюдается и обратное явление. В математику проникают подходы и методы гуманитарных наук. Примером тому может быть теория нечетких множеств. На стыке математики и наук возникают новые науки: математическая биология, математическая лингвистика, математическая психология и др.

Для чего же необходимо изучение математики современному человеку? Помимо безусловного практического значения математики, в чем состоит ее «гуманитарный потенциал»?

«Гуманитарный потенциал» математики состоит в следующем:

1. Математика выполняет важную роль в развитии интеллекта, формировании мышления и личностных качеств человека. Стиль изложения математики, ее язык оказывают влияние на развитие речи. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных понятиях математики, таких как число, функция, математическая модель, алгоритм, вероятность, оптимизация, величины дискретные и непрерывные, бесконечно малые и бесконечно большие. Речь идет именно об основных понятиях и идеях, а не о наборе конкретных формул и теорем.

2. Математический язык. Человек, знающий математический язык способен глубже проникать в суть изучаемых явлений и процессов, правильно обрабатывать информацию.

3. Математика – значительная часть общечеловеческой культуры, такая же важная как история, философия, экономика.

4. Математика соответствует системе принципов теории развивающего обучения: изучая математику, человек постоянно осознает свое развитие.

Для формирования личности более значимы не те конкретные математические знания, а формирование качеств мышления, т.е. математика как база, «полигон» для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности. Правильно задавать цель тому или иному процессу, определить условия и ограничения в достижении цели, проиграть на «моделях» возможные ситуации и получить оптимальное решение. Даже биолог Чарльз Дарвин когда-то высказался так: «У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных». Формируется склад ума, который требует критической проверки и логического обоснования положений и точек зрения.

1.2. Об аксиоматическом методе

Еще в 4-м веке до н.э. греческие философы начали размышлять над тем, как должна строиться научная теория (контуры выработанного ими воззрения обрисованы в сочинениях Аристотеля), а на современном этапе развития математики сущность так называемого «аксиоматического метода» дал Д. Гильберт (1862–1943 гг.):

1. Строится абстрактная теория. В ее основе лежат термины двоякого рода: элементы одного или нескольких множеств (неопределяемые понятия, например, точка, прямая и т.д.) и отношения между этими элементами (например, «лежать», «между» и т.д.). Этим терминам не приписывается никакого содержательного смысла. Устанавливаются аксиомы (недоказываемые утверждения), которым должны удовлетворять термины. Из аксиом выводятся логические

следствия – «теоремы». Для сокращения речи вводят новые термины при помощи определений.

2. Терминам абстрактной теории приписывается содержательный смысл. Следует проверить, соблюдаются ли для этих понятий аксиомы абстрактной теории. Доказывают непротиворечивость математической теории (но дать ее внутренними средствами нельзя).

1.3. Геометрия Евклида как первая естественно-научная теория. «Начала» Евклида

Основным методом современной математики, в частности геометрии, является *аксиоматический метод*. Геометрия, прежде чем стать аксиоматической теорией, прошла долгий путь эмпирического развития.

Зададимся двумя вопросами: когда возникла геометрия? И что явилось причиной ее возникновения? На второй вопрос дать однозначный ответ затруднительно. Возможно два крайних мнения.

1. Геометрия родилась для удовлетворения потребностей практики. И это отмечается почти во всех учебниках. Геометрия – слово греческое, означает землемерие. Первые сведения о геометрии были добыты цивилизациями Древнего Востока – в Египте, Китае, Индии – в связи с развитием земледелия. Уже во II тысячелетии до н.э. египтяне умели точно вычислять площадь треугольника, площадь круга, вавилоняне знали теорему Пифагора (конечно, без доказательства, только правила вычисления).

2. А вот другое суждение. Геометрия (ровно, как и поэзия, живопись, скульптура, музыка) есть порождение не до конца еще осознанной потребности человека в духовности, в познании и красоте (об этом в учебниках не пишут, только в энциклопедии [1]).

Истина лежит где-то посередине. Создание геометрии как науки выпало на долю древнегреческой цивилизации, и этот факт трудно объяснить лишь практическими причинами. Где-то на рубеже 8–7 веков до н.э. в Древней Греции сформировалось сообщество людей, которые могли пользоваться двумя бесценными благами – свободой и досугом. И это им дало возможность взглянуть на окружающий их мир. Они начали размышлять о том, как он устроен, что повлекло за собой изучение геометрических тел, наполняющих окружающее нас пространство.

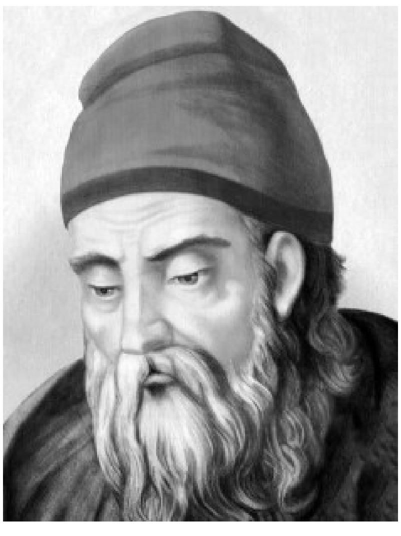
Родоначальник науки геометрии (по легенде) – Фалес, ионический купец, путешественник и философ. Ему принадлежат первые доказательства геометрических теорем, например, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о том, что угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой. Отсюда практическое применение – вычисление высоты египетских пирамид.

Затем наступила эра Пифагора (6 век до н.э.). Он был создателем первой научной школы. Практические приложения уже стали играть второстепенную роль.

А спустя еще два столетия греческие философы стали размышлять, как должна строиться научная теория. С работ Аристотеля положены начала аксиоматическому методу.

Подведение итогов развития геометрии и ее дедуктивное построение было осуществлено Евклидом. «Начала» Евклида – одна из самых поразительных книг в истории человечества.

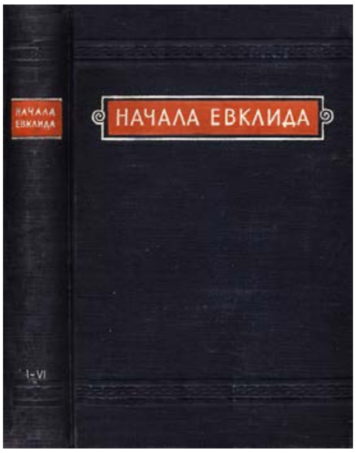
Замечание. Великая греческая цивилизация оказалась не вечной, она погибла, и на многие столетия прервалась научная традиция. Возрождение геометрии произошло в 16 веке, а в 17 веке резкий скачок: французские ученые П. Ферма, Р. Декарт заложили основы аналитической геометрии.



Евклид (330–275 гг. до н.э.) – крупнейший геометр древности, жил в Египте (в Александрии). Составленные им «Начала» дают систематическое изложение начал геометрии, выполненное на таком научном уровне, что многие века преподавание геометрии велось по этому сочинению.

«Начала» включают 13 книг: I–VI – планиметрия; XI–XIII – стереометрия; VII–IX – арифметика в геометрическом изложении. Каждая книга начинается с *определений*. В I-й книге приведены *постулаты* и *аксиомы*, за которыми следуют предложения: *теоремы* и задачи на построение, расположенные в строгой последовательности так, что доказательство каждого последующего опирается на предыдущие.

«Начала» построены строго логически по *дедуктивной* системе.



Приведем примеры определений, их всего 23 (в I-й книге):

1) точка есть то, что не имеет частей;

2) линия есть длина без ширины;

3) прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем точкам.

За определениями следует 5 постулатов и 7 аксиом. Например, первый постулат: от всякой точки до всякой точки можно провести прямую; четвертый постулат: все прямые углы равны; пятый постулат: если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньше двух прямых, то продолженные неограниченно

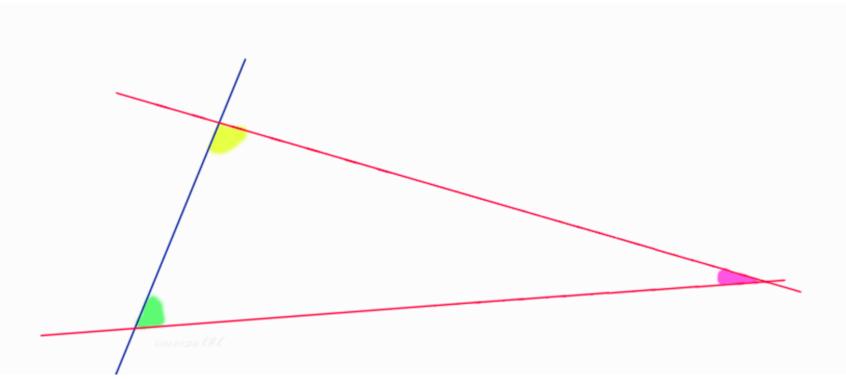


Рис. 1. К пятому постулату Евклида

эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Знаменитый пятый постулат о параллельных безрезультатно пытались еще в древности вывести из остальных постулатов и аксиом. Попытки продолжались вплоть до работ российского ученого Лобачевского Н.И., построившего геометрическую теорию, в которой этот постулат не выполняется (геометрия Лобачевского).

За постулатами следуют 5 аксиом. Например, первая аксиома: равные одному и тому же равны между собой. Вторая аксиома: Если к равным прибавлять равные, то и целые будут равны.

До 18 века «Начала» Евклида были основным пособием по геометрии. Однако «Начала» не достигают уровня современной строгости изложения. Многие определения включают такие понятия, которые сами должны быть определены, например, определение *линии* содержит упоминание о *длине* и *ширине*, которые сами нуждаются в определении. Список аксиом неполный, например, нет *аксиомы порядка*.

В конце 19 века выяснены полностью логические недостатки «Начал» и создана полная аксиоматика современной Евклидовой геометрии.

Геометрические системы, отличные от Евклидовой, называются неевклидовыми геометриями. Геометрия Лобачевского – одна из неевклидовых геометрий. Основана на тех же основных посылах, что и Евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на противоположную. Именно, Евклидова аксиома о параллельных гласит: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более чем одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая ее (параллельные прямые).

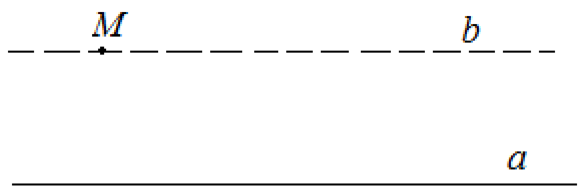
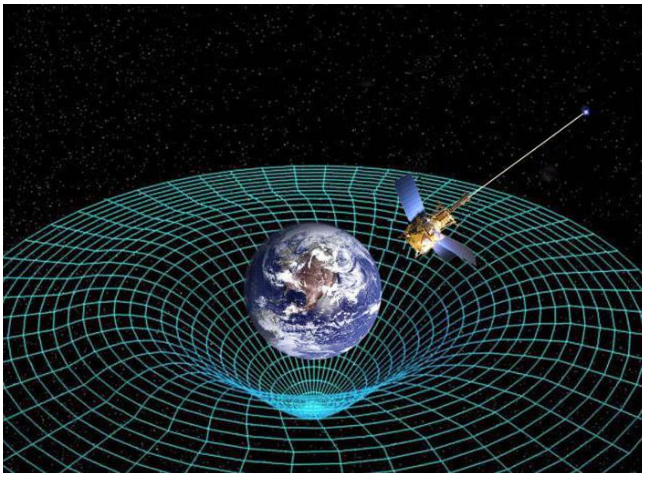


Рис. 2. К аксиоме о параллельных прямых

В геометрии Лобачевского вместо этой аксиомы принимается противоположная: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее. Лобачевский сообщил о своей геометрии в 1826 г. В 20 веке обнаружено, что геометрия Лобачевского не только имеет важное значение для абстрактной математики, как одна из возможных геометрий, но и непосредственно связана с приложениями. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая в работах А. Эйнштейна в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского.



1.4. Достоинства и недостатки математического языка

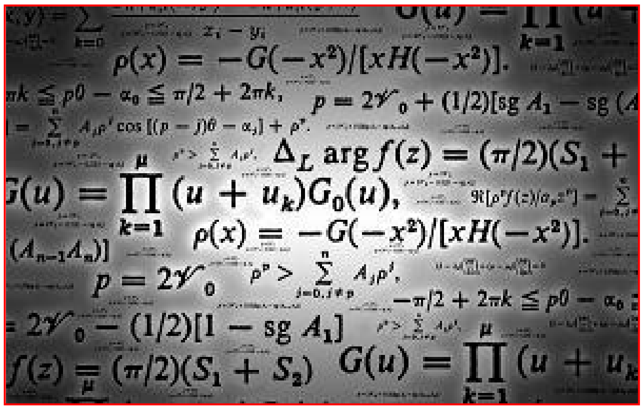
Математика, с функциональной точки зрения, характеризуется как язык естествознания и техники, как инструмент познания окружающего мира и нас самих.

В различных областях деятельности вырабатываются «свои» (искусственные) языки: в технике – чертежи, в химии – химические формулы и уравнения. С русским надо говорить по-русски, с англичанином – по-английски, с природой – на языке математики. Как устроен математический язык? Он абстрактный в противоположность нашим языкам, где каждое слово имеет свое значение. Язык математических формул и знаков обладает большей универсальностью, он используется во всех сферах человеческой деятельности. Являясь достоянием всего человечества, он вырабатывался на протяжении тысячелетий.

Аналогом слов и грамматик в математическом языке является операционная система, а рассказов, повестей и прочего – математические модели [2].

Математическая операционная система включает идеализированные объекты (элементы): числа, фигуры, векторы, функции, …; действия (операции): сложение, вычитание, …, дифференцирование, интегрирование и аксиомы, определения, теоремы.

Недостатки математического языка: специфичность; ограниченная возможность отображения действительности.



Достоинства математического языка: позволяет с помощью символов выражать мыслительные операции в сокращенном и свернутом виде, отличается большой прогностической силой.

Темы рефератов, докладов, мини-проектов.

1. Исторический обзор развития математики.
2. Геометрия Евклида как первая естественно-научная теория.
3. «Начала» Евклида. Значение для общечеловеческой культуры.
4. Числа. Развитие понятия числа.
5. Числа. От натуральных чисел к действительным и далее.
6. Равносильность формул. Логические законы.
7. О системах счисления в различных цивилизациях.
8. Применение двоичной системы в вычислительной технике.
9. Фундаментальные свойства числовой прямой.
10. Аксиоматика действительных чисел.
11. Появление комплексных чисел и их развитие.
12. Другие геометрии: геометрия Лобачевского.
13. Высказывания и логические операции.
14. Логика: ее происхождение и развитие.
15. Моделирование как метод научного познания.
16. Компьютерные системы и искусственный интеллект.
17. Математический язык: особенность, становление и развитие.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1. Множества и действия над ними

Множество – это набор, совокупность каких-либо объектов, называемых его **элементами,** обладающих общим характеристическим свойством.

Понятие множества считается первичным, неопределяемым. При этом множество можно задать либо перечислив все его элементы, либо дать правило, по которому можно определить, принадлежит или нет объект к данному множеству.

Примеры

1) множество натуральных чисел

   $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$;

2) множество целых чисел

   $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$;

3) множество действительных чисел

   $R = (-\infty; +\infty)$;

4) пустое множество Ø не содержит элементов;

5) $A = \{ a \mid 1; 2; -5; 6\}$;

6) $B = \{ b \mid 1; -5; 2; 8; -0.1\}$.

N, Z, R – бесконечные множества.

A, B – конечные множества.

$a = 1$, $a \in A$, a – элемент множества A, a принадлежит множеству A.

Определение . Множество A называется **подмножеством** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

В этом случае пишут $A \subset B$ и говорят также, что имеем отношение *включения* (множества A в множество B). Эту ситуацию можно проиллюстрировать кругами Л. Эйлера (1707–1783) (см. рис. 3).

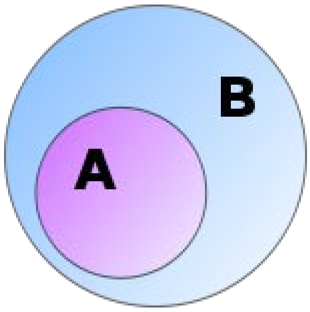


Рис. 3. Иллюстрация включения $A \subset B$

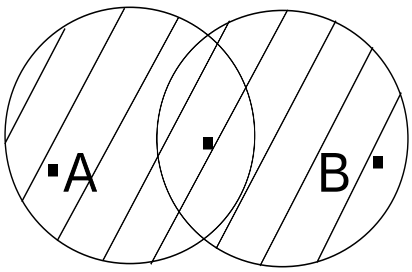
Мы можем производить некоторые операции над множествами.

I. Сумма (объединение) множеств A и B есть множество, состоящее из таких элементов, которые принадлежат либо множеству A, либо множеству B, либо им обоим одновременно.

$$A \cup B = \{1; 2; -5; 6; 8; -0{,}1\}.$$

Геометрический образ

Множество A – это множество точек одного круга, множество B – это множество точек другого круга. Множества $A \cup B$ – это множество точек либо одного круга, либо другого, либо обоих одновременно (заштрихованная область).



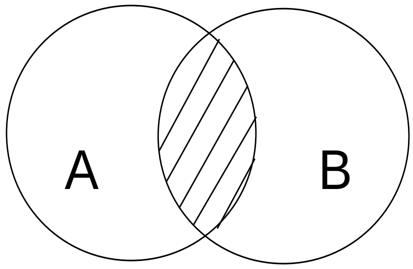
$A \cup B$

II. Пересечение множеств A и B есть множество, состоящее из таких элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

$$A \cap B = \{1; 2; -5\}.$$

Геометрический образ

Множество $A \cap B$ – это множество точек, принадлежащих обоим кругам одновременно (заштрихованная область).



$A \cap B$

Найти объединение и пересечение множеств (2.2–2.5).

2.1. 1) $A = \{-2; 3; 9; 0{,}5\}$, $B = \{5; 6; 0{,}5; 3\}$;   2) $A = \{-100; -3; 0; 1; 5; 18\}$, $B = \{-100; -4; 8; 18\}$.

2.2. $(-8; 3] \overset{\cup}{\cap} [-2; 15]$.

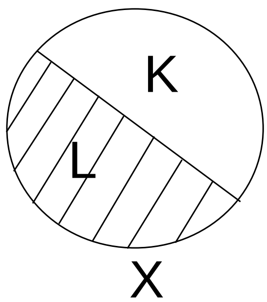
2.3. 1) $(-\infty; -3) \overset{\cup}{\cap} (0; +\infty)$;   2) $(-15; 9) \overset{\cup}{\cap} [-3; 10]$.

2.4. $A = Z$, $B = N$.

III. Множество L – есть **дополнение** множества K, если оно состоит из элементов, принадлежащих множеству X и не принадлежащих множеству K,

$L = X \setminus K$.

Геометрический образ



Пример

$X = \{-2; 0; 3; 11\}$, $K = \{0; 11\}$.

Следовательно,

$L = X \setminus K = \{-2; 3\}$.

Заметим, что L есть подмножество X, т.е. $L \subset X$, т.к. все элементы множества L принадлежат множеству X.

2.5. Найти дополнение L множества K до X:

1) $X = Z$, $K = \{1; 2; 3\}$.

2) $X = \{–3; 0; 1,5; 200\}$, $K = \{0\}$.

IV. Симметрическая разность $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$.

Пример

A={1, 5, 7, 11}, B={5, 9, 11, 15}.

Следовательно,

$A\Delta B$={1, 7, 9, 15}.

2.6. Заданы два множества: A и B. Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

1) A={1, 5, 7, 11}, B={5, 9, 11, 15}.

2) A={-2, 0, 4, 12}, B={-3, -2, 01, 16}.

3) A={-6, 7,8, 10}, B={-6, 7, 9, 10}.

2.7. По данным промежуткам A и B на числовой прямой, определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$:

1) A=(0; 3], B=(3; 6).

2) A=(2; 10], B=(-3;8).

3) A=[3; 12], B=(-4;6).

2.8. Заданы множества A={1,2,3} и B={1,2,3,4,5}. Верным для них будет утверждение:

1) множества A и B не имеют общих элементов;

2) множество A включает в себя множество B;

3) множества A и B равны;

4) множество A есть подмножество множества B.

Выбрать верное утверждение.

2.9. На факультете учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть A – множество всех студентов факультета, В ¬ множество студентов факультета, получающих стипендию. Тогда пересечением этих множеств будет:

1) множество студентов факультета, получающих стипендию;
2) пустое множество;
3) множество всех студентов факультета;
4) множество студентов факультета, не получающих стипендию.

2.2. Векторы и прямые произведения

Вектор – это упорядоченный набор элементов (кортеж).

Примеры: (0; 5; 4; 5) или (0 5 4 5).

(5; 4) – упорядоченная пара;

(5; 4; 3) – тройка;

$(a_1, a_1, \dots, a_n)$ – n-ка, «энка» – вектор длины n.

Прямым произведением множеств A и B (A×B) называется множество пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$. В частности, если A = B, то произведение обозначается A^2, например, $R \times R = R^2$, $(x, y) \in R^2$. Здесь $x \in R$, $y \in R$. Это множество точек плоскости Oxy.

Аналогично *прямым произведением* множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$ называется множество всех векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ длины n таких, что $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \dots,$ $a_n \in A_n$.

Пример. Пусть – конечное множество, элементами которого являются символы (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций и т.д.). Такие множества обычно называются **алфавитами**. Элементы множества A^n называются словами длины n в алфавите A – это просто конечная последовательность символов алфавита A.

Пример. Десятичное целое число 148 – это слово в алфавите $\{0;1;\dots;9\}$ (не принято пользоваться ни скобками, ни запятыми).

2.3. Бинарные отношения. Способы представления отношений и операции над ними. Общие свойства отношений. Отношения эквивалентности, порядка и толерантности

Определение. Подмножество $R \subseteq M^n$ называется ***n*-местным отношением** на множестве М. Говорят, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ находятся в отношении R, если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$.

Одноместное отношение – это просто подмножество М. Такие отношения называются *признаками*: a обладает признаком R, если $a \in R$ и $R \subseteq M$. Если $n = 1$, то термин «отношение» употребляется редко.

Примером трехместного отношения является множество троек нападающих в хоккейной команде. Каждый нападающий находится в этом отношении со всеми теми игроками, с которыми он играет в одной тройке (один нападающий может быть в нескольких тройках).

Наиболее часто встречающимися и хорошо изученными являются **двухместные** или **бинарные** отношения. Именно о них будем вести речь в дальнейшем. Слово «бинарные» будем опускать. Если a, b находятся в отношении R, это записывается $a\mathrm{R}b$.

Пример

Отношения на N:

а) отношение ≤ выполняется для пар (3; 5) и (5; 5), но не выполняется для пары (5; 3);

б) отношение «быть делителем» (т.е. $a\mathrm{R}b$ означает «a делитель b») выполняется для пар (2; 4) и (4; 4), но не выполняется для пар (4; 2) и (2; 5).

Пример

Отношения на множестве действительных чисел: отношение «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат» выполняется для пары точек (3; 4) и (-2; $\sqrt{21}$), но не выполнено для пары точек (3; 4) и (1; 6).

Пример

Отношение на множестве людей:

а) «жить в одном городе»;

б) «быть моложе»;

в) «быть сыном».

Для задания бинарных отношений можно использовать любые способы задания множеств, например, список элементов, находящихся в этом отношении.

Для отношений на конечных множествах часто используют матричный способ задания.

Матрица бинарного отношения на множестве М = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ – это квадратная матрица C порядка m, в которой

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \mathrm{R} a_j ; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример

Для конечного множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	1

Для любого множества М отношение Е, заданное матрицей, по главной диагонали которой **1**, а в остальных местах **нули**, – называется **отношением равенства** на М.

Поскольку отношения на М задаются подмножествами M^2, для них можно определить те же операции, что и над множествами.

Пример

Отношение ≤ является объединением отношений < и = (равенства).

Отношение называется **обратным** к отношению R (обозначение R^{-1}), если $a_i \mathrm{R} a_j$ тогда и только тогда, когда $a_j \mathrm{R} a_i$. Из определения следует, что

$(R^{-1})^{-1} = R$.

Пример

Для отношения $\leq$ обратным является отношение $\geq$.

Свойства бинарных отношений

Определение. Отношение R называется **рефлексивным**, если для любого $a \in M$ имеет место aRa.

Главная диагональ его матрицы содержит только единицы.

Пример

1) отношения $\leq$ и «быть делителем» – рефлексивны;

2) отношения < и «быть сыном» – антирефлексивны;

3) отношение «быть симметричным относительно оси *x*» не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным: точка плоскости симметрична сама себе, если она лежит на оси *x*, и не симметрична сама себе в противном случае.

Определение. Отношение R называется **симметричным**, если для пары $(a, b) \in M^2$ из aRb следует bRa.

Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали: $\forall i, j\ c_{i,j} = c_{j,i}$.

Отношение R называется **антисимметричным**, если из $a_i R a_j$ и $a_j R a_i$ следует $a_i = a_j$.

Пример

1) Отношение «быть симметричным относительно оси *x*» является симметричным: если первая точка симметрична второй, то и вторая симметрична первой;

2) отношение $\leq$ – антисимметрично, т.к., если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $b = a$.

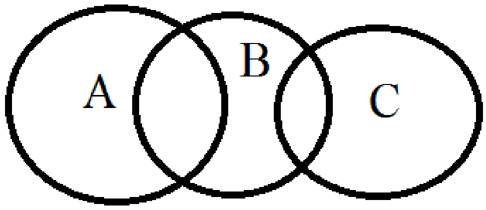
Нетрудно убедиться в том, что отношение R симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$.

Определение. Отношение *R* называется **транзитивным**, если $\forall a, b, c$ из aRb и bRc следует aRc.

Примеры

1) Отношения « $\le$ », « $=$ », « $\ge$ », «жить в одном городе» – транзитивны;

2) отношение «иметь непустое пересечение» – нетранзитивно.



Отношение эквивалентности

Определение. Отношение называется **отношением эквивалентности** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.
Обозначение $a \Leftrightarrow b$.

Примеры

1) Отношение равенства E на любом множестве является отношением эквивалентности;

2) конгруэнтность является отношением эквивалентности на множестве треугольников.

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R. Осуществим следующее построение. Выберем элемент $a_1 \in \mathrm{M}$ и образуем класс (подмножество M) C_1, состоящий из a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1; затем выберем $a_2 \notin C_1$ и образуем класс C_2, состоящий из всех элементов M, эквивалентных a_2 и т.д. Получится система классов C_1, C_2, …(может быть бесконечная) такая, что любой элемент из *M* входит хотя бы в один класс, т.е. $\bigcup_i C_i = \mathrm{M}$. Эта система обладает свойствами: 1) она образует разбиение, т.е. классы попарно не пересекаются; 2) любые два элемента из одного класса эквивалентны; 3) любые два элемента из разных классов неэквивалентны. Свойства вытекают немедленно из рефлексивности, симметричности, транзитивности R.

Пример

Все классы эквивалентности по отношению равенства E состоят из одного элемента.

Отношение порядка

Определение. Отношение называется **отношением нестрогого порядка**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Определение. Отношение называется **отношением строгого порядка**, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Оба типа отношений называются **отношениями порядка**. Элементы a и b называются **сравнимыми** по отношению порядка R, если выполняется $a\mathrm{R}b$ или $b\mathrm{R}a$.

Множество M, на котором задано отношение порядка, называется **полностью упорядоченным**, если любые два элемента M сравнимы, и **частично упорядоченным** в противном случае.

Примеры

1) Отношения $\le$ и $\ge$ для чисел являются отношениями нестрогого порядка. Отношения $<$ и $>$ - отношения строгого порядка. Оба отношения полностью упорядочивают множества N, R;

2) на системе подмножеств множества M отношение включения $\subseteq$ задает нестрогий частичный порядок, а отношение строгого включения $\subset$ задает строгий частичный порядок (частичный, т.к. не полностью, есть непересекающиеся множества).

Пример

$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$, а $\{1,2\}$и $\{3,4\}$несравнимы.

Дадим еще несколько определений, связанных с понятием множества.

Определение. Множество D называется **открытым**, если для любой точки $z \in \mathrm{D}$ существует ее окрестность (круг) $|z - z_0| < \delta$, принадлежащая D.

Пример

$x \in (a,b)$ **–** открытый интервал, является открытым множеством.

Замкнутое множество – это дополнение к открытому множеству.

Пример

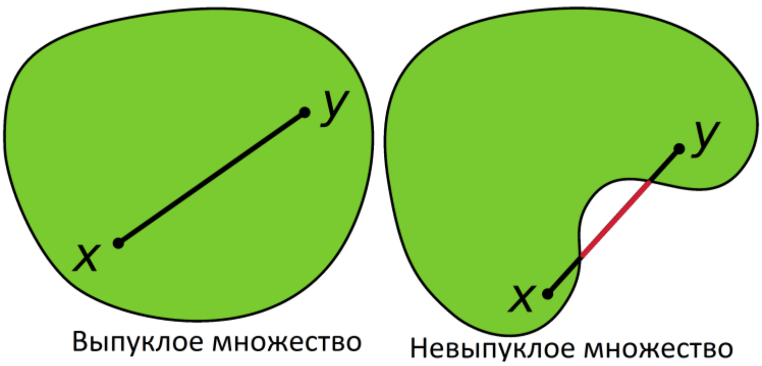
Если $\mathrm{L} = (a,b)$, то $\overline{\mathrm{L}} = [a,b]$ – отрезок, замкнутое множество, является дополнением к открытому интервалу.

Пустое множество замкнуто. Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнуто.

Замкнутое множество определяют как множество, содержащее все свои предельные точки.

Определение. Выпуклое множество – это множество, которое вместе с любыми двумя точками содержит все точки соединяющего его отрезка.

Свойство: пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.



Примеры выпуклых множеств: прямоугольный отрезок, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство.

2.4. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются различные вопросы, связанные с взаимным расположением частей данного множества, состоящего обычно из конечного числа элементов.

Рассмотрим основные структуры на множестве: перестановки, сочетания, размещения.

Определение. Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ («n!» читается «n-факториал»);

$0! = 1$.

Пример

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ – число перестановок из трех чисел 1; 2; 3,

например, количество трехзначных чисел из этих цифр:

123

132

213

231

312

321.

Определение. Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются составом элементов, но не порядком (порядок не важен).

Число сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Пример

$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$, т.е.

12

23

31.

Определение. Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком (порядок важен).

Число размещений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6, \text{ т.е.}$$

12 21

23 32

31 13 .

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^m = P_n C_n^m.$$

2.10. Найти число способов, которыми могут быть осуществлены следующие действия:

а) P_3 – ?

б) A_{25}^{23} – ?

в) C_{40}^{35} – ?

2.11. Найти число способов, которыми могут быть осуществлены следующие действия:

а) P_4 – ?

б) A_{30}^{20} – ?

в) C_{16}^{8} – ?

2.12. Найти число способов, которыми могут быть осуществлены следующие действия:

а) P_5 – ?

б) A_{10}^{5} – ?

в) C_9^3 – ?

2.13. Сколькими разными способами можно расставить четырех бегунов эстафеты 4×100 м на четырех стартовых позициях?

Решение. $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

2.14. Аня и Рита хотят пойти на маскарад. У них на выбор есть четыре разных костюма. Сколько возможностей одеться они имеют?

Решение. $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = 12.$

2.15. Пусть в коробке находятся 7 разноцветных шаров, и мы наугад вынимаем три шара. Тогда число вариантов такого выбора:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Число C_n^m называется биномиальным коэффициентом. Оно входит в формулу разложения степени бинома:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Эта формула называется *бином Ньютона.* Частные ее случаи – формулы для квадрата (при n=2) и куба (при n=3) двух величин:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$

2.16. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, входящих в слово «WORD», равно:

1) 16, 2) 20, 3) 24, 4) 8.

2.17. Количество различных двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 (все цифры в числе разные), равно:

1) 6, 2) 24, 3) 4, 4) 12.

2.18. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2-х томов из 12-томного собрания сочинений Л.Н. Толстого равно:

1) 24, 2) 132, 3) 66, 4) 2.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений независимо от их конкретной природы и дающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления, называется **теорией вероятностей** [3–7].

3.1. Случайные события

Основой научного исследования в теории вероятностей является **опыт** и **наблюдение.** Качественная характеристика результата опыта есть **событие**. Наблюдаемые события можно подразделить на следующие три вида: случайное, достоверное, невозможное.

Случайным называют событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти по воле случая.

Обозначают события A, B, C, …

Пример. Появление «герба» (случайное событие) при подбрасывании монетки (опыт):

A – «появление «герба»».

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет в результате опыта.

Достоверное событие будем обозначать I.

Пример. I – «наступление зимы после осени» .

Невозможным называют событие, которое заведомо не происходит в результате опыта.

Невозможное событие будем обозначать Ø.

Пример. Ø – «наступление лета после осени».

Несколько событий образуют **полную группу** событий, если в результате опыта (испытания) обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий.

Пример. Подбрасывают монетку (опыт).

B_1 – «выпал «герб», B_2 – «выпала «решка».

События B_1, B_2 образуют полную группу.

Определение. События A и B называются **несовместными**, если появление одного из них исключает возможность появления другого.

Пример. Выпадение «герба» и «решки» – несовместные события при одном подбрасывании монетки.

Пример. Извлекают одну карту из колоды (опыт).

События A – «появление красной карты», B – «появление туза» являются совместными («появление красного туза»).

Определение. События A и B называются **независимыми**, если появление одного из них никак не влияет на возможность появления другого.

Пример. Появление того или другого числа очков на брошенной игральной кости.

Над событиями можно производить действия (алгебра событий).

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в исполнении или события A, или события B, или обоих вместе (исполняется **хотя бы** одно):

$$C = A + B.$$

Пример. Появление или красной карты, или любого туза, или красного туза (см. пример выше).

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в исполнении и события A, и события B одновременно:

$$C = AB.$$

Пример. Появление красного туза (см. пример выше).

Противоположное событие $\overline{A}$ состоит в ненаступлении A.

Пример. A – «поражение мишени», $\overline{A}$ – «промах».

Заметим, что

$A + I = I$, $A\varnothing = \varnothing$,

$A + \varnothing = A$, $A\,I = A$.

Полная группа событий: $\sum_{i=1}^{n} A_i = I$; $A_i A_j = 0$ $(i \neq j)$.

3.2. Классическое определение вероятности

Различные события можно сравнить по степени возможности их осуществления. Человек, бросая монетку, не знает, выпадет «герб» или «решка». Но оба события имеют одинаковую долю успеха, равную $\frac{1}{2}$.

Попадание в мишень с дальнего расстояния менее возможно, чем попадание с ближнего.

Необходима числовая характеристика, определяющая степень возможности наступления случайного события. Эту характеристику называют **вероятностью**. Как ее посчитать?

Пример.

Пусть в урне 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, примем, что 2 из них синие, 3 – красные, 1 – белый. Вынимаем один шар. Какова вероятность, что он красный?

Решение. Появление красного шара будем рассматривать в качестве события А. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара) назовем **элементарным исходом**. В нашем случае 6 возможных исходов, обозначим $n = 6$. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно независимых событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем **благоприятствующими** этому событию (появление красного шара). Обозначим $m = 3$.

Определение. Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных, несовместных, элементарных исходов, образующих полную группу.

Вероятность определяется формулой

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события А, n - общее число исходов.

У нас в примере $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ – вероятность извлечь красный шар.

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна 1.

Действительно, $m = n$. $P(A)=\frac{n}{n}=1$.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна 0.

Действительно, ни один из исходов не является благоприятным, $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1,

$$0\le P(A)\le 1.$$

Таким образом, чтобы вычислить вероятность, надо научиться считать число исходов. При этом используют формулы комбинаторики (п. 2.4).

Пример. Слово «тропа» составлено из букв разборной азбуки. Карточки с буквами перемешиваются, из них по очереди извлекаются пять карточек. Какова вероятность, что карточки составят в порядке выхода слово «тропа»?

Решение. $n = P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$;

$m = 1$;

$$P(A)=\frac{1}{120}.$$

Пример. Условия те же. По очереди извлекается 3 карточки. Какова вероятность, что они составят слово «тор»?

Решение. $n = A_5^2=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5=60$;

$m = 1$;

$$P(A)=\frac{1}{60}.$$

Пример. Имеется колода из 36 карт. Наугад вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно один валет.

Решение. В выбранных трех картах может быть три валета, два, один или ни одного валета. Поэтому реализовать благоприятный случай А – выбрать один из них (любой!) можно C_4^1 различными способами, две другие карты (не валеты) можно выбрать C_{32}^2 различными способами. Следовательно,

$m = C_4^1 \cdot C_{32}^2$.

Общее же число исходов есть число сочетаний из 36 по 4, т.е. $n = C_{36}^4$.

Искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^4} = \frac{31 \cdot 16}{35 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{496}{1785}\ .$$

3.1. Пусть в урне 10 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, примем, что 4 из них белые, 6 – синие. Вынимаем один шар. Какова вероятность, что он белый?

3.2. Слово «WORD» составлено из букв разборной азбуки. Карточки с буквами перемешиваются, из них по очереди извлекаются четыре карточки. Какова вероятность, что карточки составят в порядке выхода слово «WORD»?

3.3. Условия те же, что в задаче 3.2. По очереди извлекается 3 карточки. Какова вероятность, что они составят слово «DOR»?

3.4. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8.

3.5. В группе 20 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобрано 10 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 3 отличника.

3.3. Относительная частота. Статистическая вероятность

Вероятность вычисляется до опыта, не требуется проводить испытание**.** Теперь же предположим, что рассматриваемый опыт, испытание могут воспроизводиться многократно, т.е. в принципе осуществима целая серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых по воле случая происходит интересующее нас событие А.

Пусть N обозначает число всех опытов и N(A) – число тех из них, в которых осуществляется событие А. Отношение $\frac{N(A)}{N}$ называют **относительной частотой** события А в данной серии испытаний. Оказывается, в различных сериях испытаний соответствующие относительные частоты $\frac{N(A)}{N}$ при больших N практически совпадают, группируясь около некоторого постоянного значения, называемого **вероятностью события** А.

Записывают

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}. \qquad (2)$$

Определение вероятности события по формуле (1) называют **классическим**, определение вероятности события по формуле (2) называют **статистическим**.

3.4. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема умножения вероятностей. Пусть рассматриваются два случайных события А и В, для которых известны вероятности их появления Р(А) и Р(В).

Если события А и В *независимы*, то

$$P(A\cdot B) = P(A)\,P(B)\,, \qquad (3)$$

если события А и *В зависимы*, то

$$P(A\cdot B) = P(A)\,P_A(B), \qquad (4)$$

где $P_A(B)$ – условная вероятность события В, т.е. вероятность, вычисленная при условии, что событие А имело место.

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,7. Какова вероятность, что оба попадут?

Решение. Пусть событие А – «поражение мишени первым стрелком», событие В – «поражение мишени вторым стрелком». По условию задачи $P(A) = 0{,}8$ и

P(B) = 0,7. Обозначим событие D – «оба попадут». Так как события A и B независимые, то по формуле (3)

$$P(A \cdot B) = P(A)\, P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Пример. В ящике содержится 10 шаров, 4 синих и 6 красных. Наудачу извлекают один за другим два шара. Найти вероятность того, что последовательно появятся два синих шара: а) *без возвращения*; б) *с возвращением* (извлеченный шар возвращается в ящик).

Решение.

Ведем обозначения A – «первый шар синий», B – второй шар синий.

а) $P(A \cdot B) = P(A)\, P_A(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ (события A и B *зависимые*);

б) $P(A \cdot B) = P(A)\, P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0{,}16$ (события A и B *независимые*).

Теорема сложения вероятностей

Если события A и B *несовместны*, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B)\,, \tag{5}$$

если события A и B совместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{6}$$

Пример. Условия те же. Какова вероятность, что мишень будет поражена (т.е. попадет хотя бы один стрелок)?

Решение. Так как события A и B совместные, то по формуле (6)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\,B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 1{,}5 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,$ образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Заметим, что $P(A_i \cdot A_j) = 0,\ i \neq j$.

Противоположные события

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень 0,8. Найти вероятнбость того, что он промахнется при одном выстреле?

Решение. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Часто применяют обозначения:

$p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$, тогда $p = 1 - q$.

3.6. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,6. Какова вероятность, что

1) оба попадут?

2) мишень будет поражена?

3) первый промахнется?

4) попадет только один?

3.7. В ящике содержится 15 шаров, 10 белых и 5 зеленых. Наудачу извлекают один за другим три шара. Найти вероятность того, что последовательно появятся три белых шара: а) без возвращения; б) с возвращением (извлеченный шар возвращается в ящик).

Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна:

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Пример. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,9. Найти вероятность того, что он попадет хотя бы один раз при 4-х выстрелах.

Решение. $q = 1 - 0,9 = 0,1$ (вероятность промах при одном выстреле);

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0,1)^4 = 0,9999.$$

3.8. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

3.5. Формула полной вероятности

Пусть *событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий* $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ события А. Как найти вероятность события А? Ответ дает теорема.

Теорема. Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события *А*:

$$P(A) = P(B_1)\,P_A(B_1) + P(B_2)\,P_A(B_2) + \ldots + P(B_n)\,P_A(B_n). \qquad (7)$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности.*

Пример. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,7. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

Решение. Обозначим события:

А – «извлеченная деталь стандартна»;

B_1 – «деталь извлечена из первого набора»;

B_2 – «деталь извлечена из второго набора».

По условию задачи:

$P(B_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ – вероятность того, что деталь извлечена из первого набора;

$P(B_2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ – вероятность того, что деталь извлечена из второго набора;

$P_A(B_1) = 0{,}8$ – вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь;

$P_A(B_2) = 0{,}7$ – вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – стандартная, по формуле полной вероятности (7) равна:

$$P(A) = P(B_1)\,P_A(B_1) + P(B_2)\,P_A(B_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}75.$$

3.9. В первой урне содержится 5 шаров, из них 2 белых. Во второй урне 10 шаров, из них 6 белых. Из наудачу выбранной урны извлекли один шар. Какова вероятность, что он белый?

3.10. Из 1000 ламп 380 принадлежат к 1 партии, 270 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4 % брака, во второй – 3%, в третьей – 6 %. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

3.11. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнить норму для лыжника 0,9, для бегуна – 0,75, для велосипедиста – 0,8. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

3.6. Вероятность гипотез. Формула Байеса

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность появления события А определяется по формуле полной вероятности (7):

$$P(A) = P(B_1)\, P_A(B_1) + P(B_2)\, P_A(B_2) + \ldots + P(B_n)\, P_A(B_n).$$

Допустим, что произведено испытание в результате которого появилось событие A. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \ldots, P_A(B_n)$.

Справедливы **формулы Байеса** (по имени английского математика, который их вывел в 18 веке):

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\, P_{B_i}(A)}{P(B_1)\, P_A(B_1) + P(B_2)\, P_A(B_2) + \ldots + P(B_n)\, P_A(B_n)}\,. \qquad (8)$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,7. Наудачу выбранная деталь оказалась стандартной. К какому набору вероятнее всего принадлежала эта деталь?

Решение. Обозначения оставим, как в предыдущем примере. Тогда по условию задачи нам требуется найти следующие вероятности:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_A(B_1) + P(B_2)\,P_A(B_2)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}75} \approx 0{,}53;$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(B_1)\,P_A(B_1) + P(B_2)\,P_A(B_2)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{0{,}75} \approx 0{,}47.$$

Видим, что вероятнее всего отобранная стандартная деталь принадлежала первому набору.

3.12. В больницу поступают в среднем 40 % больных с заболеванием М, 50 % – с заболеванием N, 10 % – с заболеванием Q. Вероятность полного излечения заболевания М равна 0,8; для болезни N – 0,7; для болезни Q – 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием М.

3.13. Из 30 стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, 8 – с вероятностью 0,5 и 10 – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

3.7. Повторные испытания. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события А в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $(n - k)$ раз. Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Эту вероятность вычисляют **по формуле Бернулли:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{9}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} . \tag{10}$$

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4-х суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода энергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0{,}75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!2!} 0{,}75^4\, 0{,}25^2 = 0{,}30.$$

3.14. Монету бросают четыре раза. Найти вероятность того, что «герб» выпадет два раза; не менее двух раз; менее двух раз.

3.15. Два автомата производят детали. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым — 0,9. Производительность первого автомата впятеро выше производительности второго. Рабочий взял наугад деталь, и она оказалась стандартной. Какова вероятность, что эта деталь изготовлена вторым автоматом?

3.8. Роль вероятностных моделей в приложениях

Так ранней утренней порой
Отрывок тучи громовой ,
В лазурной тишине чернее,
Один, нигде пристать не смея,
Летит без цели и следа, бог весть откуда и куда!

М.Ю. Лермонтов «Демон»

Первые задачи по вычислению вероятностей появились в 17 веке в работах французского ученого Б. Паскаля, П. Ферма, швейцарского ученого Я. Бернулли и др. в связи с азартными играми. Они дали первые строгие определения вероятности. Свое завершение первоначальное классическое определение вероятности получило в начале прошлого века в трудах выдающегося математика П. Лапласа.

Первые исследования по теории вероятностей в России относятся к середине 19 столетия. К этому же времени (1846 г.) относится и появление на русском языке книги В.Я. Буняковского «Основания математической теории вероятностей», терминология которой практически неизменной сохраняется в отечественной специальной литературе до настоящего времени. К концу 19 и началу 20 века относится целый ряд выдающихся работ блестящих русских математиков Чебышева П.Л., Ляпунова А.М., Маркова А.А., после которых во всем мире теорию вероятностей стали называть «русской наукой».

Эти традиции были продолжены русскими советскими математиками, среди которых по праву первое место должно быть отдано А.Н. Колмогорову, предложившему *аксиоматическое* обоснование теории вероятностей. Именно его работа «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.) знаменует новый этап в развитии этой науки. Сейчас трудно назвать область человеческого знания – от физики до стихосложения, – в которой в большей или меньшей мере не использовались бы методы теории вероятностей.

Теория вероятностей – полноправная математическая наука, имеющая многочисленные применения в естественных науках, технике, социологии, военном деле и т.п. Назовем несколько примеров современных приложений теории вероятностей: закон Менделя в генетике, метод Монте-Карло, метод стойкого шифрования с помощью случайных чисел, теория случайных процессов и т.д.

При изучении явлений окружающего мира мы часто сталкиваемся с процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Эта неопределенность (непредсказуемость) вызвана влиянием случайных факторов, воздействующих на ход процесса. Приведем несколько таких процессов:

1. Напряжение в электросети, номинально постоянное и равное 220 В, фактически меняется во времени, колеблется вокруг номинала под влиянием таких случайных факторов, как количество и вид включенных в сеть приборов, моменты их включений и выключений и т.д.

2. Население города меняется с течением времени случайным образом под влиянием таких факторов, как рождаемость, смертность, миграция и т.д.

3. Частица, совершающая броуновское движение в поле зрения микроскопа, меняет свое положение случайным образом в результате соударений с молекулами воды.

4. Происходит полет космической ракеты, которую необходимо вывести в заданный момент в заданную точку пространства с заданными направлением и абсолютным значением вектора скорости. Фактическое движение ракеты не совпадает с расчетным из-за таких случайных факторов, как турбулентность атмосферы, неоднородность горючего, ошибки в отработке команд и т.д.

5. При изучении процесса химической реакции возникают вопросы: какая часть молекулы уже вступила в реакцию, как происходит эта реакция во времени, когда практически реакция уже закончилась?

Строго говоря, в природе не существует совершенно не случайных, в точности детерминированных процессов. Учитывать (или не учитывать) случайность процесса зависит от того, какая практическая задача решается.

Теория случайных процессов изучает закономерности случайных явлений в динамике, она быстро развивается в последние десятилетия в связи с расширяющимся кругом его практических приложений [7–10].

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский, С.М. Школьная математика / С.М. Никольский. – М.: Большая Российская энциклопедия.– Сер. Золотой фонд, 2003.– 528 с.
2. Грес, П.В. Математика для гуманитариев: учеб. пособие /П.В. Грес.– М.: Юрайт, 2000.– 112 с.
3. Гмурман , В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2019. – 479 с.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для бакалавриата и специалитета / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2019. – 406 с.
5. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2008. – 960 с.
6. Теория вероятностей. Случайные события: метод. указания / сост. А.В. Буров; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2016 – 50 с., №65 http://edu.isuct.ru/mod/data/view.php?d=117&rid=786
7. Вся высшая математика. Т. 5. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теория игр: учебник / М.Л. Краснов [и др.]. –М.: ЛКИ, 2013. – 296 с.
8. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие для студ. втузов / Е.С. Вентцель. – М.: Академия, 2003. – 432 с.
9. Дынкин, Е.Б. Математические беседы /Е.Б. Диткин, В.А. Успенский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с.
10. Попов, В.А. Математика в социогуманитарной сфере: учебное пособие / В.А. Попов – СПб.: Лань, 2016. – 164 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Математика: исторический экскурс, множество, вероятность

Методические указания

Составитель
Зуева Галина Альбертовна

Техн. редактор О.А. Соловьева
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7