Элементы математической статистики

Методические указания

Иваново

2017

Составитель: Т.А. Баранова

Элементы математической статистики: метод. указания/сост. Т.А. Баранова; Иван. гос. хим.–технол. ун–т. – Иваново, 2017. – 55 с.

Методические указания охватывают традиционный курс высшей математики по разделу «Элементы математической статистики», написаны в соответствии с действующей рабочей учебной программой дисциплины «Математика» с целью облегчить усвоение и использование основных методов математической обработки статистических данных. Методические указания содержат теоретические сведения о выборочном методе, о точечных и интервальных оценках параметров распределения, о статистической проверке статистических гипотез. Изложение материала сопровождается соответствующими примерами. Данные методические указания можно использовать как для самообразования, так и для активной работы на практических занятиях, при подготовке к контрольным работам и экзаменам для студентов дневного и заочного отделений всех факультетов. Дан список заданий для расчетной работы.

1. **О задачах, решаемых методами математической статистики**

При исследовании реальных технологических и экономических процессов приходится обрабатывать большие объемы статистических данных по самым разнообразным показателям, которые по своей сути являются случайными величинами (СВ). Часто возникает необходимость оценивания числовых значений различных параметров, неоднократно приходится выдвигать и проверять различные предположения, устанавливать наличие и силу зависимости между разнообразными факторами. На практике мы сталкиваемся с конкретными реализациями рассматриваемых СВ. Количество таких реализаций ограничено, что не позволяет применять напрямую теоретические методы анализа. Поэтому в первую очередь используются методы и модели математической статистики (в частности, выборочный метод), позволяющие получить необходимые знания об исследуемом объекте, осуществить направленный анализ и сделать обоснованные выводы.

Математическая статистика – раздел математики, посвященный методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называют сведения о числе объектов в какой-либо совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Одной из *центральных задач математической статистики* является выявление закономерностей в статистических данных, на базе которых можно строить соответствующие модели и принимать обдуманные решения. Под статистическими данными подразумеваются данные наблюдений за значениями некоторой СВ или совокупности СВ, характеризующих изучаемый процесс.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических данных, полученных в результате наблюдений или испытаний.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статических данных в зависимости от целей исследования. Элементами такого анализа являются:

1. Оценки неизвестной вероятности события, неизвестной функции распределения, неизвестных параметров известного распределения, зависимости двух или нескольких случайных величин.
2. Проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения; о величинах параметров известного распределения; о виде и силе зависимости между рассматриваемыми случайными величинами.

Таким образом, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов. Статистические данные могут быть получены в результате проведения некоторого числа (достаточно большого) однотипных опытов или измерений, сплошного или выборочного исследования объектов данной совокупности, социологического обследования и т. д. Математическая статистика базируется на понятиях и методах теории вероятностей.

2. Генеральная совокупность и выборка

Пусть изучается совокупность однородных объектов относительно некоторого количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, доход населения, количество покупателей в магазине в течение дня, количество качественных товаров в исследуемой партии.

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений или реализаций исследуемой СВ X при данном реальном комплексе условий.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют часть генеральной совокупности, отобранную для изучения.

Число элементов рассматриваемой совокупности называется ее объемом: N –объем генеральной совокупности, n – объем выборочной совокупности.

Изучение всей генеральной совокупности во многих случаях либо невозможно, либо нецелесообразно в силу больших материальных затрат, уничтожения или порчи исследуемых объектов. Поэтому на практике вся генеральная совокупность никогда не анализируется. Для осуществления выводов о генеральной совокупности чаще всего используется выборка ограниченного объема. В силу этого задача математической статистики состоит в исследовании свойств выборки обобщения этих свойств на генеральную совокупность. Полученный при этом вывод называется статистическим.

Информация о генеральной совокупности, полученная на основании выборочного наблюдения, обычно обладает некоторой погрешностью, так как она основывается на изучении только части элементов выборки. Это определяет две проблемы, составляющие содержание математической теории выборки:

1. Как организовать выборочное наблюдение, чтобы полученная информация достаточно полно отражала пропорции генеральной совокупности (*проблема репрезентативности выборки*).

2. Как использовать результаты выборки для суждения по ним с наибольшей надежностью о свойствах и параметрах генеральной совокупности (*проблема оценки*).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если отбор будет носить случайный характер.

Различают *повторную* и *бесповторную* выборки. В первом случае отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. Во втором – отобранный в выборку объект не возвращается в генеральную совокупность. Если выборка составляет незначительную часть генеральной совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается.

Случайный отбор может проводиться с помощью датчика таблицы случайных чисел либо обычной жеребьевкой. Однако строгое соблюдение правил случайного отбора не всегда осуществимо, так как оно требует четко ограниченной базы статистического анализа, каковой является генеральная совокупность, перенумеровки всех ее элементов или непосредственного их извлечения при жеребьевке. Так, при проведении обследования дохода населения в масштабах города практически невозможно составить список всех его жителей или семей с последующей организацией выборки с помощью датчика случайных чисел. Аналогично невозможно организовать опросы по изучению покупательского спроса, потребностей населения и т. д. путем создания строго случайной выборки. Поэтому прибегают к различным приемам *неслучайного отбора*, стремясь, однако, приблизиться к условиям случайного.

Виды неслучайного отбора:

1. Механический отбор, при котором элементы генеральной совокупности, предварительно упорядоченные, отбираются по заранее установленному правилу, не связанному с вариацией исследуемого признака. Например, можно фиксировать доход каждого сотого, входящего в метро.

2. Серийный отбор, при котором объекты выбираются из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, о продукции предприятия можно судить по продукции, выпущенной в какой-то конкретный день.

3. Типический отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, население города можно предварительно классифицировать по социальному статусу (бизнесмены, чиновники, служащие, рабочие и т. д.).

4. Комбинированный отбор, при котором сочетаются описанные выше способы.

3. Способы представления и обработки статистических данных

Во многих случаях для анализа важен порядок получения статистических данных. Но при рассмотрении так называемых перекрестных данных порядок их получения не играет существенной роли. Кроме того, результаты выборочных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ количественного признака X генеральной совокупности, записанные в порядке их регистрации, обычно труднообозримы и неудобны для дальнейшего анализа.

Задачей статистического описания выборки является получение такого ее представления, которое позволит наглядно выявить вероятностные характеристики. Для этого применяются различные формы упорядочения данных в выборке – по возрастанию, по совпадающим значениям, по интервалам.

При анализе какого-либо конкретного показателя X в фиксированный момент времени (либо без учета фактора времени) наблюдаемые значения $x_1, x_2, ..., x_n$ обычно упорядочивают по возрастанию: $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

Разность между максимальным и минимальным значениями СВ X называется <u>размахом выборки</u>.

Пусть количество различных значений в выборке равно $k (k \le n)$. Для определенности положим $x < x < ... < x$. Значения x_i, $i = 1, 2, ..., k$, называют <u>вариантами</u>.

Если значение x_i встретилось в выборке n_i раз, то число n_i называется частотой значения x_i, а величина $\varpi_i = \frac{n_i}{n}$ – относительной частотой значения x_i. Тогда наблюдаемые значения можно сгруппировать в <u>статистический (вариационный) ряд</u>.

Таблица 1. Статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X

X	x_1	x_2	…	x_k	
n_i	n_1	n_2	…	n_k	$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$
$\varpi_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1$

По статистическому ряду можно построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число значений случайной величины X, меньших, чем x; n – объем выборки.

По определению $F^*(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$

2. Для любых $x_1 < x_2$ $F^*(x_1) \le F^*(x_2)$, т.е. является неубывающей функцией.

3. $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является оценкой функции распределения $F(x) = P(X < x)$, которая в этом случае называется теоретической функцией распределения.

Пример 1. Анализируется прибыль X(%) предприятий отрасли. Обследованы $n = 100$ предприятий, данные по которым занесены в следующий статистический ряд:

X	5	10	15	20	25
n_i	5	20	40	25	10
$\frac{n_i}{n}$	0,05	0,2	0,4	0,25	0,1

Необходимо построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ и ее график.

Решение.

1. Из условия задачи нам известен объем выборки $n = 100$. Наименьшая варианта равна 5, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \le 5$. Значение X<10, а именно: $x_1 = 5$ наблюдалось 5 раз, следовательно, $F^*(x) = 0{,}05$ при $5 < x \le 10$. Значения X<15, а именно: $x_1 = 5$ и $x_2 = 10$ наблюдались 25 раз, следовательно, $F^*(x) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25$ при $10 < x \le 15$. Значения X<20 , а именно: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$ и $x_3 = 15$ наблюдались 65 раз, следовательно, $F^*(x) = 0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}65$ при

$15 < x \le 20$. Значения X<25 , а именно: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$ и $x_4 = 20$ наблюдались 90 раз, следовательно, $F^*(x) = 0,05 + 0,2 + 0,4 + 0,25 = 0,9$ при $20 < x \le 25$. Так как $x = 25$ наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 25$.

2. Напишем искомую эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5 \\ 0,05, & 5 < x \le 10 \\ 0,25, & 10 < x \le 15 \\ 0,65, & 15 < x \le 20 \\ 0,9, & 20 < x \le 25 \\ 1, & x > 25 \end{cases}$$

3. Изобразим эмпирическую функцию распределения на графике (рис. 1).

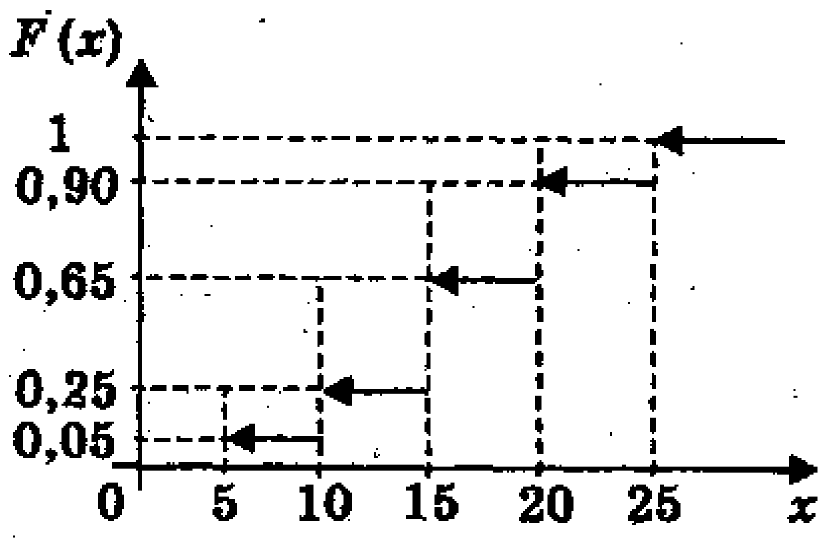

Рис. 1. График эмпирической функции распределения

Наглядно статистический ряд может быть представлен в виде полигона частот или полигона относительных частот.

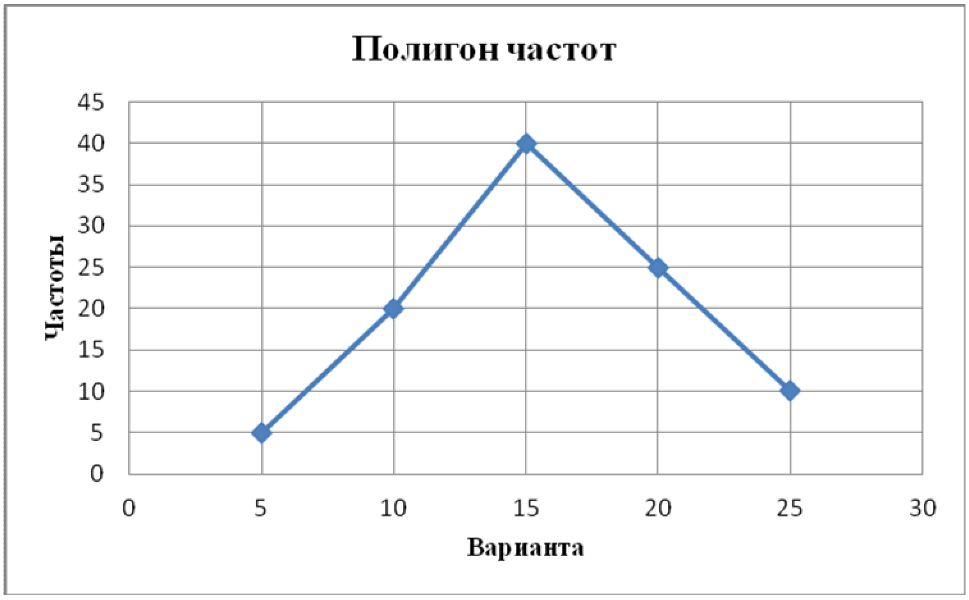

Рис. 2. Полигон частот

Рис. 3. Полигон относительных частот

При большом объеме выборки ее элементы могут быть сгруппированы в интервальный статистический ряд. Для этого все n наблюдаемых значений выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ разбивают по k непересекающимся подынтервалам равной длины h (h – шаг разбиения). Пусть n_i – количество наблюдаемых значений СВ X, попадающих в i-й подынтервал; $\varpi_i = \frac{n_i}{n}$ – относительная частота попадания СВ X в i-й подынтервал. Тогда интервальный статистический ряд имеет вид:

Таблица 2. Статистический (вариационный) ряд с непрерывным распределением признака X

$[x_{i-1}, x_i)$	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	$\cdots$	$[x_{k-1}, x_k]$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\cdots$	$\frac{n_k}{n}$

При построении статистического (вариационного) ряда с непрерывным распределением признака X необходимо оценить количество интервалов **r**, на которые будет разбиваться статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X. Длина интервала $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r}$ может быть как целочисленной, так и дробной величиной. Размах выборки $[x_{\max} - x_{\min}]$ определяется как разность между максимальной и минимальной вариантой выборки.

Интервальный статистический ряд наглядно может быть представлен в виде гистограммы. Гистограммой частот (относительных частот) статистического ряда с непрерывным распределением признака X называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, основаниями которых служат разряды, а площади равны частотам (относительным частотам) этих разрядов. Отсюда следует, что площадь гистограммы частот равна объему выборки, а площадь гистограммы относительных частот равна 1. При большом объеме выборки и малой длине разряда верхнюю границу гистограммы можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения случайной величины X. На основании вида гистограммы обычно выдвигают предположение о виде закона распределения исследуемой величины, что позволяет придать определенную направленность исследованиям.

Пример 2. Анализируется доход населения, для чего извлечена выборка объема $n = 300$. По уровню дохода население подразделяется на $k = 6$ групп. Полученные по выборке данные сгруппированы в следующий интервальный статистический ряд:

$[x_{i-1}, x_i)$	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)	[100; 120]
n_i	10	50	80	100	40	20
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

Необходимо построить гистограмму частот, гистограмму относительных частот и выдвинуть предположение о виде закона распределения СВ Х – дохода населения.

Отметим, что в последнюю группу могут быть включены все субъекты, чей доход превышает 100. Для получения теоретических выводов последний подынтервал полагается той же длины, что и все предыдущие – $h = 20$.

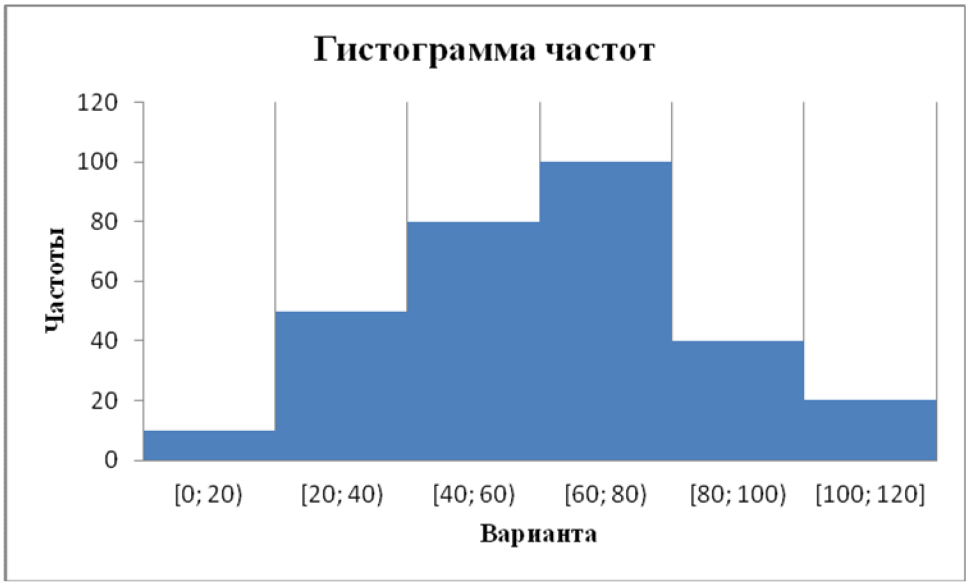

Рис.4. Гистограмма частот

Форма гистограммы в наибольшей степени соответствует нормальному закону распределения. Поэтому естественным является предположение о нормальном распределении СВ X: X~N(m, σ). Следующим этапом исследования является определение параметров m и σ.

4. Вычисление выборочных характеристик

Для любой случайной величины X кроме определения ее функции распределения и вида распределения (по гистограмме частот или гистограмме относительных частот) желательно указать числовые характеристики, важнейшими из которых являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Пусть объем генеральной совокупности равен N. Тогда математическим ожиданием СВ X является генеральное среднее:

$$\bar{x}_{Г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Дисперсией случайной величины X является генеральная дисперсия:

$$D_{Г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_{Г})^2 .$$

Квадратный корень из генеральной дисперсии называется генеральным средним квадратическим отклонением:

$$\sigma_{Г} = \sqrt{D_{Г}} .$$

Для нахождения генеральных числовых характеристик необходим анализ всей генеральной совокупности. В силу того, что в большинстве случаев проведение анализа поведения всей генеральной совокупности весьма затруднительно, работают с выборками. Поэтому находят не числовые характеристики генеральной совокупности, а оценки указанных выше генеральных характеристик – выборочные числовые характеристики: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.

Выборочное среднее – это среднее арифметическое наблюдаемых значений выборки $\bar{x}_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. При задании выборки в виде статистического ряда с дискретным распределением признака выборочное среднее рассчитывается по формуле $\bar{x}_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$, где x_i – варианта, n_i – соответствующая варианте частота.

Оценкой генеральной дисперсии является выборочная дисперсия: $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$. При задании выборки в виде статистического ряда с дискретным распределением признака (если известны варианты x_i) $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}n_i(x_i - \bar{x}_в)^2$ или $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 n_i - (\bar{x}_в)^2$.

Квадратный корень из выборочной дисперсии называется выборочным средним квадратическим отклонением: $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Для **примера 1** имеем:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}n_i x_i = \frac{1}{100}\cdot(5\cdot 5 + 20\cdot 10 + 40\cdot 15 + 25\cdot 20 + 10\cdot 25) = 15{,}75.$$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}n_i(x_i - \bar{x}_в)^2 =$$

$$= \frac{1}{100}\cdot(5\cdot 10{,}75^2 + 20\cdot 5{,}75^2 + 40\cdot 0{,}75^2 + 25\cdot 4{,}75^2 + 10\cdot 9{,}75^2) = 27{,}7625.$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{27{,}7625} = 5{,}269.$$

Выборочный коэффициент вариации определяется отношением выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней, выраженным в процентах:

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в}\cdot 100\%.$$

Коэффициент вариации – безразмерная величина, удобная для сравнения величин рассеивания двух выборок, имеющих различные размерности.

Многие технологические и экономические показатели определяются несколькими числами, являясь многомерными случайными величинами. Например, издержки предприятия включают в себя фиксированную и переменную составляющие; уровень жизни населения подразумевает использование большого числа показателей (ВВП на душу населения, распределение доходов, наличие товаров и услуг, продолжительность жизни и другие). Одна из центральных задач экономического анализа – выявить наличие и определить силу взаимосвязи между различными экономическими показателями (фактически между СВ). С этой целью используется коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции СВ X и Y называют величину

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

Зависимость между СВ X и Y, характеризуемая коэффициентом корреляции, называется корреляцией. СВ X и Y называют некоррелированными, если $\rho_{xy} = 0$. В противном случае СВ X и Y называют коррелированными.

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

1) $\rho_{xx} = 1$.
2) $\rho_{xy} = \rho_{yx}$.
3) $-1 \le \rho_{xy} \le 1$.
4) Если СВ X и Y независимы, то $\rho_{xy} = 0$.
5) $|\rho_{xy}| = 1$ тогда и только тогда, когда $y = a + bx$ (между СВ X и Y существует линейная функциональная зависимость).

5. Статистические выводы: оценки и проверка гипотез

Статистические выводы – это заключения о генеральной совокупности (о законе распределения исследуемой случайной величины (СВ) и его параметрах либо о наличии и силе связи между исследуемыми переменными) на основе выборки, случайно отобранной из генеральной совокупности. При исследовании различных параметров генеральной совокупности на основе выборки возможно лишь получение оценок этих параметров. Эти оценки строятся на основе ограниченного набора данных, что влечет за собой вероятность погрешности. Процесс нахождения оценок по определенному правилу (формуле) называют оцениванием. Цель любого оценивания – получение наиболее точного значения оцениваемой характеристики.

Можно выделить два типа оценивания: оценивание вида распределения и оценивание параметров распределения. В качестве оценки вида распределения (в силу закона больших чисел) можно взять выборочное распределение, подсчитав частоты попадания рассматриваемой случайной величины в заданные подынтервалы интервального статистического ряда. Процедура оценивания всегда однотипна. На основе выборки с помощью соответствующей формулы рассчитывается оценка соответствующей характеристики. В качестве оценок параметров распределения генеральной совокупности берутся их выборочные оценки. При этом различают два вида оценок – точечные и интервальные.

5.1. Точечные оценки и их свойства

Пусть оценивается некоторый параметр Θ наблюдаемой случайной величины X генеральной совокупности. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$, по которой может быть найдена оценка Θ^* параметра Θ.

Точечной оценкой Θ^* параметра Θ называется числовое значение этого параметра, полученное по выборке объема n.

Оценка Θ^* является функцией от выборки, т.е. $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$. Так как выборка носит случайный характер, то оценка Θ^* является случайной величиной, принимающей различные значения для различных выборок.

Число ε такое, что $\left|\Theta - \Theta^*\right| \le \varepsilon$ называется точностью оценки. Естественно стремление получить по возможности наиболее точную оценку при данном объеме выборки.

Приведем свойства, выполнимость которых желательна для того, чтобы оценка была признана удовлетворительной. Качество оценок характеризуется следующими основными свойствами: несмещенность, эффективность и состоятельность.

Оценка Θ^* называется несмещенной оценкой параметра Θ, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру: $M(\Theta^*) = \Theta$.

Разность $M(\Theta^*) - \Theta$ называется смещением или систематической ошибкой оценивания. Для несмещенных оценок систематическая ошибка равна нулю. Свойство несмещенности оценки является важнейшим, но не единственным.

Оценка Θ^* называется <u>эффективной оценкой</u> параметра Θ, если ее дисперсия $D(\Theta^*)$ меньше дисперсии любой другой альтернативной оценки при фиксированном объеме выборки n, т.е. $D(\Theta^*) = D_{\min}$.

Оценка Θ_n^* называется <u>состоятельной оценкой</u> параметра Θ, если Θ_n^* сходится по вероятности к Θ при $n \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ $P(\left|\Theta_n^* - \Theta\right| < \varepsilon) \to 1$. Другими словами, состоятельной называется такая оценка, которая дает истинное значение при достаточно большом объеме выборки вне зависимости от значений входящих в нее конкретных наблюдений.

5.2. Свойства выборочных оценок

На начальном этапе в качестве оценки той или иной числовой характеристики (математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения) берется выборочная числовая характеристика. Затем, исследуя эту оценку, ее уточняют таким образом, чтобы она удовлетворяла описанным выше свойствам (несмещенность, состоятельность, эффективность).

Доказано, что выборочное среднее $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X) = \sigma^2$, так как доказано, что $D_в = \sigma^2 \frac{n-1}{n}$. Таким образом, выборочная дисперсия оценивает генеральную дисперсию с недостатком. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии $D(X)$ удобнее брать исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_в)^2 .$$

Исправленная дисперсия S^2 является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$ СВ X.

Аналогично вводится исправленное среднее квадратическое отклонение

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_в)^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x}_в)^2}\,.$$

5.3. Интервальные оценки

После получения точечной оценки Θ^* желательно иметь данные о надежности такой оценки. Поэтому точечная оценка может быть дополнена интервальной оценкой – интервалом (Θ_1,Θ_2), внутри которого с наперед заданной вероятностью γ находится точное значение оцениваемого параметра Θ. Задачу определения такого интервала называют интервальным оцениванием, а сам интервал – доверительным интервалом. При этом γ называют доверительной вероятностью или надежностью, с которой оцениваемый параметр Θ попадает в интервал (Θ_1,Θ_2).

Обычно для определения доверительного интервала заранее выбирают число $\alpha=1-\gamma$, $0<\alpha<1$, называемое уровнем значимости, и находят два числа Θ_1 и Θ_2, зависящих от точечной оценки Θ^*, такие, что $P(\Theta_1<\Theta<\Theta_2)=1-\alpha=\gamma$. В этом случае говорят, что интервал (Θ_1,Θ_2) накрывает неизвестный параметр Θ с вероятностью $(1-\alpha)$ или в $100(1-\alpha)\%$ случаев. Границы интервала называются доверительными и находятся из условия $P(\Theta<\Theta_1)=P(\Theta>\Theta_2)=\alpha/2$.

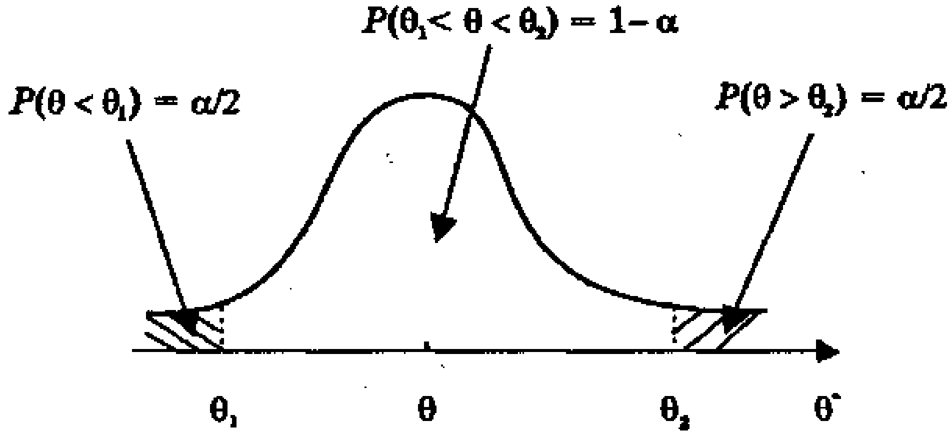

Рис. 5. Границы доверительных интервалов

Длина доверительного интервала, характеризующая точность интервальной оценки, зависит от объема выборки n и надежности γ. При увеличении объема выборки длина доверительного интервала уменьшается, а с приближением надежности γ к единице – увеличивается. Выбор надежности γ или уровня значимости $\alpha = 1-\gamma$ определяется конкретными условиями. Обычно используются $\alpha = 0{,}1;\ \ 0{,}05;\ \ 0{,}01$, что соответствует 90, 95, 99%-м доверительным интервалам.

Общая схема построения доверительного интервала:

1. Из генеральной совокупности с известным распределением $f(x,\Theta)$ СВ X извлекается выборка объема n, по которой находится точечная оценка Θ^* параметра Θ.
2. Строится случайная величина $Y(\Theta)$, связанная с параметром Θ и имеющая известную плотность вероятности $f(y,\Theta)$ (статистика).
3. Задается уровень значимости α.
4. Используя плотность вероятности СВ Y, определяют два числа c_1 и c_2, такие, что $P(c_1 < Y(\Theta) < c_2) = \int_{c1}^{c2} f(y,\Theta)dy = 1-\alpha$. Значения c_1 и c_2 выбираются, как правило, из условий $P(Y(\Theta) < c_1) = \alpha/2$ и $P(Y(\Theta) > c_2) = \alpha/2$.

Неравенство $c_1 < Y(\Theta) < c_2$ преобразуется в равносильное $\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$ такое, что $P(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) = 1-\alpha$. Полученный интервал $(\Theta^* - \delta; \Theta^* + \delta)$, накрывающий неизвестный параметр Θ с вероятностью $1-\alpha$, и является интервальной оценкой параметра Θ.

5.4. Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины X при известной дисперсии

Пусть количественный признак X генеральной совокупности имеет нормальное распределение с заданной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием $m (X \sim N(m,\sigma))$. Построим доверительный интервал для математического ожидания.

1. Пусть для оценки m извлечена выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n. По данным выборки находим точечную оценку математического ожидания $m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_в$.

2. Составим случайную величину $U = \frac{\bar{x}_в - m}{\sigma/\sqrt{n}}$. Эта случайная величина имеет стандартизированное нормальное распределение.

3. Зададим уровень значимости α.

4. Применяя формулу нахождения вероятности отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания, имеем

$$P(|U| < u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\bar{x}_в - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_{\alpha/2}\right) = P\left(\bar{x}_в - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x}_в + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha .$$

Это означает, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ накрывает неизвестный параметр m с надежностью $\gamma = 1-\alpha$. Точность оценки определяется величиной $\delta = u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Число $u_{\alpha/2}$ определяется по таблице значений функции Лапласа (приложение 2, Гмурман «Руководство к решению задач по ТВ и МС») из равенства $\Phi(u_{\alpha/2}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

Пример 3. На основе продолжительных наблюдений за весом X пакетов орешков, заполняемых автоматически, установлено, что стандартное отклонение веса пакетов $\sigma = 10$ г. Взвешено 25 пакетов, при этом их средний вес составил $\bar{x}_в = 244$ г. В каком интервале с надежностью 95 % лежит истинное значение среднего веса пакетов?

<u>Решение.</u>

1. Логично считать, что СВ X имеет нормальный закон распределения: $X \sim N(m,10)$.

2. Составим случайную величину $U = \frac{\bar{x}_в - m}{\sigma/\sqrt{n}}$. Эта случайная величина имеет стандартизированное нормальное распределение.

3. Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

4. В этом случае доверительный интервал будет иметь вид $\left(\bar{x}_в - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Найдем критическую точку $u_{\alpha/2} = u_{0{,}025}$ из

приложения 2 по соотношению $\Phi(u_{\alpha/2}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} = \Phi(u_{0,025}) = \frac{1-0,05}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475 \quad \Rightarrow u_{0,025} = 1,96$.

Подставляем значения $\bar{x}_в$, $u_{0,025}$, σ, n, получаем $(244 - 1,96 \cdot \frac{10}{5}; \quad 244 + 1,96 \cdot \frac{10}{5}) = (240,08; 247,92)$.

5.5. Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии

В реальности истинное значение дисперсии исследуемой случайной величины чаще всего неизвестно. Это приводит к необходимости использования другой формулы при определении доверительного интервала для математического ожидания СВ, имеющей нормальное распределение.

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, причем m и σ^2– неизвестны. Необходимо построить доверительный интервал, накрывающий с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ истинное значение параметра m.

Для этого из генеральной совокупности извлекается выборка объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$.

1. В качестве точечной оценки математического ожидания m используется выборочное среднее $\bar{x}_в$, а в качестве оценки дисперсии σ^2– исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$, которой соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.
2. Для нахождения доверительного интервала строится статистика $T = \frac{\bar{x}_в - m}{S/\sqrt{n}}$, имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$ независимо от значений параметров m и σ^2.
3. Задается требуемый уровень значимости α .
4. Применяется следующая формула расчета вероятности $P(|T| < t_{\alpha/2, n-1}) = P(-t_{\alpha/2, n-1} < T < t_{\alpha/2, n-1}) = 1 - \alpha$, где $t_{\alpha/2, n-1}$– критическая точка распределения Стьюдента, которая находится по соответствующей таблице (приложение 3). Тогда

$$P(-t_{\alpha/2,n-1} < T < t_{\alpha/2,n-1}) = P(-t_{\alpha/2,n-1} < \frac{\bar{x}_в - m}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2,n-1}) =$$

$$= P(\bar{x}_в - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{x}_в + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Это означает, что интервал $(\bar{x}_в - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}};\ \ \bar{x}_в + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}})$ накрывает неизвестный параметр m с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$.

5.6. Доверительный интервал для дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, причем m и σ^2 – неизвестны. Пусть для оценки σ^2 извлечена выборка объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$.

1. В качестве точечной оценки дисперсии используется исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$, которой соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.
2. При нахождении доверительного интервала для дисперсии в этом случае вводится статистика $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, имеющая χ^2–распределение с числом степеней свободы $\nu = n - 1$ независимо от значения параметра σ^2.
3. Задается требуемый уровень значимости α .
4. Тогда, используя таблицу критических точек χ^2–распределения (приложение 5), нетрудно указать критические точки $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$, $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$, для которых будет выполняться следующее равенство: $P(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha$. Подставив вместо χ^2 соответствующее значение, получим

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,n-1}) = P(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}) =$$

$$= P\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Неравенство $\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$ может быть преобразовано в следующее: . Таким образом, доверительный интервал $\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}};\ \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$ накрывает неизвестный параметр σ^2 с надежностью $\gamma = 1-\alpha$. А доверительный интервал $\left(S\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}};\ S\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right)$ с надежностью $\gamma = 1-\alpha$ накрывает неизвестный параметр σ.

5.7. Статистическая проверка статистических гипотез

Большинство создаваемых экономических, эконометрических и технологических моделей требуют многократного улучшения и уточнения. Для этого необходимо проведение соответствующих расчетов, связанных с установлением выполнимости или невыполнимости тех или иных предпосылок, анализом качества найденных оценок, достоверностью полученных выводов. Обычно эти расчеты проводят по схеме статистической проверки статистических гипотез. Поэтому знание основных принципов проверки гипотез является важным звеном в создании моделей.

Во многих случаях необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его А), выдвигают гипотезу: генеральная совокупность (СВ X) распределена по закону А. Например, можно выдвинуть предположение, что доход населения, ежедневное количество покупателей в магазине, размер выпускаемых деталей имеют нормальный закон распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр Θ равен ожидаемому числу Θ_0, выдвигают гипотезу: $\Theta = \Theta_0$. Например, можно выдвинуть предположение о величине среднего дохода населения, среднего ожидаемого дохода по акциям, о разбросе в доходах и т.д.

Статистической называют гипотезу о виде закона распределения или о параметрах известного распределения. В первом случае гипотеза называется непараметрической, а во втором – параметрической.

Гипотеза H_0, подлежащая проверке, называется нулевой (основной). Наряду с нулевой рассматривают гипотезу H_1, которая будет приниматься, если отклоняется H_0. Такая гипотеза называется альтернативной (конкурирующей). Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра Θ некоторому значению Θ_0, то в качестве альтернативной могут рассматриваться следующие гипотезы:

$$H_1^{(1)} : \Theta \neq \Theta_0 \ ; \quad H_1^{(2)} : \Theta > \Theta_0 \ ; \quad H_1^{(3)} : \Theta < \Theta_0 \ ; \quad H_1^{(4)} : \Theta = \Theta_1 \ ; \quad (\Theta_1 \neq \Theta_0) .$$

Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи, а нулевая гипотеза часто специально подбирается так, чтобы отвергнуть ее и принять тем самым альтернативную гипотезу. Для того чтобы принять гипотезу о наличии корреляции между двумя экономическими показателями (например, между инфляцией и безработицей), можно опровергнуть гипотезу об отсутствии такой корреляции, взяв ее в качестве нулевой гипотезы.

Гипотезу называют простой, если она содержит одно конкретное предположение $H_1^{(1)} : \Theta \neq \Theta_0$, $H_1^{(4)} : \Theta = \Theta_1$. Гипотезу называют сложной, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез $H_1^{(1)} : \Theta \neq \Theta_0$; $H_1^{(2)} : \Theta > \Theta_0$; $H_1^{(3)} : \Theta < \Theta_0$.

Сущность статистической проверки статистической гипотезы заключается в том, чтобы установить, согласуются или нет данные наблюдений и выдвинутая гипотеза.

При проверке гипотезы выборочные данные могут противоречить гипотезе H_0. Тогда она отклоняется. Если же статистические данные согласуются с выдвинутой гипотезой, то она не отклоняется. Статистическая проверка статистических гипотез на основе выборочных данных неизбежно связана с риском принятия ложного решения. При этом возможны ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята нулевая гипотеза, в то время как в действительности верна альтернативная гипотеза.

Возможные результаты статистических выводов представлены следующей таблицей:

	Возможные состояния гипотезы	
	верна H_0	верна H_1
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильный вывод
Гипотеза H_0 не отклоняется	Правильный вывод	Ошибка второго рода

Последствия указанных ошибок неравнозначны. Первая приводит к более осторожному, консервативному решению; вторая – к неоправданному риску. Что лучше или хуже – зависит от конкретной постановки задачи и содержания нулевой гипотезы. Например, если H_0 состоит в признании продукции предприятия качественной и допущена ошибка первого рода, то будет забракована годная продукция. Допустив ошибку второго рода, мы отправим потребителю брак. Очевидно, что последствия второй ошибки более серьезны с точки зрения имиджа фирмы и ее долгосрочных перспектив.

Исключить ошибки первого и второго рода невозможно в силу ограниченности выборки. Поэтому стремятся минимизировать потери от этих ошибок. Одновременное уменьшение вероятностей данных ошибок невозможно, так как задачи их уменьшения являются конкурирующими, и снижение вероятности допустить одну из них влечет за собой увеличение вероятности допустить другую. В большинстве случаев единственный способ уменьшения вероятности ошибок состоит в увеличении объема выборки.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать буквой α, и ее называют уровнем значимости.

5.7.1. Критерии проверки. Критическая область

Проверку статистической гипотезы осуществляют на основе данных выборки. Для этого используют специально подобранную случайную величину (статистику, критерий), точное или приближенное значение которой известно. Эту величину обозначают:

1. U (или Z) – если она имеет стандартизированное нормальное распределение.
2. T – если она распределена по закону Стьюдента.
3. χ^2 – если она распределена по закону χ^2.
4. F – если она имеет распределение Фишера.

Таким образом, статистическим критерием называют СВ К, которая служит для проверки нулевой гипотезы. После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется, другое – при которых она не отклоняется. Совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отклоняют, называют критической областью. Совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу не отклоняют, называют областью принятия гипотезы.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия К (вычисленное по выборке) принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отклоняют. Если же наблюдаемое значение критерия К принадлежит области принятия гипотезы, то нулевую гипотезу принимают.

Точки, разделяющие критическую область и область принятия гипотезы, называют критическими.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ – положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ – отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенством $-k_{кр} < K < k_{кр}$ или равносильным неравенством $|K| > k_{кр}$.

Для отыскания критической области задают уровень значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

а) для правосторонней критической области $P(K > k_{кр}) = \alpha \quad k_{кр} > 0$;

б) для левосторонней критической области $P(K < k_{кр}) = \alpha \quad k_{кр} < 0$;

в) для двусторонней симметричной области $P(K > k_{кр}) = \alpha/2 \quad k_{кр} > 0, \quad P(K < -k_{кр}) = \alpha/2$.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Общая схема статистической проверки статистических гипотез:

1. Формулировка проверяемой (нулевой – H_0) и альтернативной (H_1) гипотез.
2. Выбор соответствующего уровня значимости α.
3. Определение объема выборки n.
4. Выбор критерия К для проверки H_0.
5. Определение критической области и области принятия гипотезы.
6. Вычисление наблюдаемого значения критерия $K_{набл}$.
7. Принятие статистического решения.

5.8. Примеры проверки статистических гипотез

5.8.1. Проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины при известной дисперсии

Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, причем ее математическое ожидание m неизвестно, а дисперсия σ^2 известна. Также есть основания полагать, что $m = m_0$. Тогда

$H_0 : m = m_0$

$H_1^{(1)} : m \neq m_0 \quad (H_1^{(2)} : m > m_0; \quad H_1^{(3)} : m < m_0)$.

Для проверки H_0 извлекается выборка объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$. В качестве критерия проверки строится статистика $U = \dfrac{\bar{x}_в - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, где $\bar{x}_в = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Доказано, что если H_0 справедлива, то статистика U имеет стандартизированное нормальное распределение.

1. Пусть в качестве альтернативной гипотезы рассматривается гипотеза $H_1^{(1)} : m \neq m_0$. Тогда критические точки $u_{\alpha/2}$ и $u_{1-\alpha/2} = -u_{\alpha/2}$ будут определяться по таблице значений функции Лапласа (приложение 2) из условия $\Phi(u_{\alpha/2}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

   Если $\left|U_{набл}\right| = \left|\dfrac{\bar{x}_в - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < u_{\alpha/2}$ – нет оснований для отклонения H_0.

   Если $\left|U_{набл}\right| \geq u_{\alpha/2}$ – гипотеза H_0 отклоняется в пользу альтернативной гипотезы $H_1^{(1)} : m \neq m_0$.

2. При $H_1^{(2)} : m > m_0$ критическую точку u_α правосторонней критической области находят из равенства $\Phi(u_\alpha) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$.

   Если $U_{набл} < u_\alpha$ – нет оснований для отклонения H_0.

   Если $U_{набл} \geq u_\alpha$ – H_0 отклоняют в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : m < m_0$ критическая точка левосторонней критической области $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$.

   Если $U_{набл} > u_{1-\alpha}$ – нет оснований для отклонения H_0.

   Если $U_{набл} \leq u_{1-\alpha}$ – H_0 отклоняют в пользу $H_1^{(3)}$.

Пример 4. На основе продолжительных наблюдений за весом X пакетов орешков, заполняемых автоматически, установлено, что стандартное отклонение веса пакетов $\sigma = 10$ г. Взвешено 25 пакетов, при этом их средний вес составил $\bar{x}_в = 244$ г. Проверить гипотезу M(X)=250 г при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Если данное утверждение неверно, то станок-автомат требует подналадки.

Решение.

1. $$\begin{aligned} &H_0 : m = 250 \\ &H_1 : m \neq 250 \end{aligned}$$

2. По формуле $U = \dfrac{\bar{x}_в - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ по данным выборки строим статистику $U = \dfrac{244 - 250}{10/\sqrt{25}} = -3$.

3. В данном случае по виду альтернативной гипотезы используем двустороннюю критическую область. По таблице функции Лапласа находим критическую точку $u_{\alpha/2} = u_{0,025} = 1{,}96$.

4. Так как $|U_{набл}| = 3 > 1{,}96 = u_{кр}$, то H_0 должна быть отклонена в пользу H_1. Это свидетельствует о том, что станок требует подналадки. Аналогичный ответ можно получить, используя интервальную оценку, найденную для этой задачи выше (240,08; 247,92). Если гипотетическое значение 250 не принадлежит данному интервалу, то вывод о ложности нулевой гипотезы H_0 является полностью обоснованным.

5.8.2. Проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии

Пусть генеральная совокупность X имеет нормальное распределение, причем ее математическое ожидание m и дисперсия σ^2 являются неизвестными. Данная ситуация более реалистична по сравнению с предыдущей. Пусть есть основания утверждать, что $m = m_0$. Тогда строятся следующие гипотезы:

$$H_0 : m = m_0$$

$$H_1^{(1)} : m \neq m_0 \quad (H_1^{(2)} : m > m_0; \quad H_1^{(3)} : m < m_0)$$

Для проверки H$_0$ извлекается выборка объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$; вычисляются выборочное среднее $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$, которой соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$. Далее строится следующая Т–статистика $T = \frac{\bar{x}_в - m_0}{S/\sqrt{n}}$, имеющая при справедливости нулевой гипотезы распределение Стьюдента с $\nu = n-1$ степенями свободы. Критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы так же, как и в предыдущем пункте.

1. При $H_1^{(1)} : m \neq m_0$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (приложение 3) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n-1$ находятся критические точки $t_{\alpha/2, n-1}$ и $t_{1-\alpha/2, n-1} = -t_{\alpha/2, n-1}$.

   Если $|T_{набл}| = \left|\frac{\bar{x}_в - m_0}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2, n-1}$ – нет оснований для отклонения нулевой гипотезы.

   Если $|T_{набл}| = \left|\frac{\bar{x}_в - m_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2, n-1}$ – гипотезу H$_0$ отклоняют в пользу $H_1^{(1)} : m \neq m_0$.

2. При $H_1^{(2)} : m > m_0$ определяют критическую точку $t_{\alpha, n-1}$ правосторонней критической области.

   Если $T_{набл} < t_{\alpha, n-1}$ – нет оснований для отклонения H$_0$.

   Если $T_{набл} \geq t_{\alpha, n-1}$ – H$_0$ отклоняется в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : m < m_0$ определяют критическую точку $t_{1-\alpha, n-1} = -t_{\alpha, n-1}$ левосторонней критической области.

   Если $T_{набл} > -t_{\alpha, n-1}$ – нет оснований для отклонения H$_0$.

Если $T_{набл} \le -t_{\alpha,\,n-1}$ – нулевая гипотеза отклоняется в пользу $H_1^{(3)}: m < m_0$.

Пример 5. Анализируется доход X фирм в отрасли, имеющий нормальное распределение. Предполагается, что средний доход в данной отрасли составляет не менее 1 млн. \$. По выборке из 49 фирм получены следующие данные: $\bar{x}_в = 0{,}9$ млн. \$ и S=0,15 млн. \$. Не противоречат ли эти результаты выдвинутой гипотезе при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$?

Решение.

1. $H_0: m = 1$
   $H_1: m < 1$

2. Для проверки нулевой гипотезы по формуле $T = \dfrac{\bar{x}_в - m_0}{S/\sqrt{n}}$ строим статистику $T_{набл} = \dfrac{0{,}9 - 1}{0{,}15/\sqrt{49}} = -4{,}67$.

3. Критическую точку левосторонней критической области определяем по таблице критических точек распределения Стьюдента (приложение 3) $t_{кр} = -t_{0{,}01{,}48} = -2{,}404$.

4. Поскольку $T_{набл} = -4{,}67 < -2{,}404 = t_{кр}$, то нулевая гипотеза должна быть отклонена в пользу H_1, что дает основание считать, что средний доход в отрасли меньше, чем 1млн. \$.

5.8.3. Проверка гипотезы о величине дисперсии нормальной случайной величины

Принятие того или иного решения в экономике часто связано с анализом возможных результатов, точнее, разброса возможных результатов. Например, при покупке акций какой-либо компании весьма важно оценить риск от такого вложения, который определяется рассеиванием годовых дивидендов по данным акциям за продолжительный период времени. Такую оценку можно осуществлять на базе анализа дисперсии случайной величины – размера дивидендов. Следовательно, при изучении многих экономических проблем приходится иметь дело с выдвижением и проверкой гипотез о величине дисперсии. Одной из самых распространенных является гипотеза о величине дисперсии нормальной случайной величины.

Пусть генеральная совокупность X имеет нормальное распределение, математическое ожидание m и дисперсия σ^2 которой неизвестны. Проверяется гипотеза о равенстве дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности X гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2. Тогда строятся следующие гипотезы:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1^{(1)} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad (H_1^{(2)} : \sigma^2 > \sigma_0^2 \ ; \quad H_1^{(3)} : \sigma^2 < \sigma_0^2) .$$

Для проверки H_0 извлекается выборка объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$; вычисляются выборочное среднее $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$, которой соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$. Тогда критерий проверки H_0 имеет вид: $\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2}$. При справедливости H_0 построенная статистика χ^2 имеет χ^2– распределение с $\nu = n-1$ степенями свободы.

1. При $H_1^{(1)} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ по таблице критических точек χ^2– распределения (приложение 4) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n-1$ находят критические точки $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ и $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ двусторонней критической области.

   Если $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ – нет оснований для отклонения H_0.

   Если $\chi^2_{набл} \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ или $\chi^2_{набл} \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ – отклоняется в пользу $H_1^{(1)} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

2. При $:\sigma^2 > \sigma_0^2$ определяют критическую точку $\chi^2_{\alpha, n-1}$ правосторонней критической области.

   Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha, n-1}$ – нет оснований для отклонения H_0.

   Если $\chi^2_{набл} \geq \chi^2_{\alpha, n-1}$ – H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ находят критическую точку $\chi^2_{1-\alpha, n-1}$ левосторонней критической области.

   Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{1-\alpha, n-1}$ – нет оснований для отклонения H_0.

   Если $\chi^2_{набл} \leq \chi^2_{1-\alpha, n-1}$ – H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(3)}$.

Пример 6. Точность работы станка-автомата, заполняющего пакеты порошком, определяется совпадением веса пакетов. Дисперсия веса не должна превышать 25 (г)^2. По выборке из 20 пакетов определена исправленная дисперсия $S^2 = \frac{1}{20-1}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x}_в)^2 = 30$ (г)^2. Определите, требуется ли срочная подналадка станка. Принять $\alpha = 0{,}05$.

Решение.

1. Сформулируем нулевую и альтернативную гипотезы, соответствующие условию задачи

   $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

   $H_1 : \sigma^2 > 25$

2. Рассчитаем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 30}{25} = 22{,}8$.

3. По таблице критических точек χ^2– распределения (приложение 4) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n-1$

находят критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр} = \chi_{0{,}05,19} = 30{,}14$.

4. Так как $\chi^2_{набл} = 22{,}8 < 30{,}14 = \chi^2_{кр}$, то нет оснований для отклонения H_0. Другими словами, имеющиеся данные не дают основания считать, что станок требует срочной подналадки.

5.8.4. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции

Одним из важнейших элементов экономического анализа является установление наличия связи между различными показателями (между ценой и спросом, доходом и потреблением, инфляцией и безработицей). Обычно анализ начинают с простейшей – линейной зависимости. Для того, чтобы установить наличие значимой линейной связи между двумя случайными величинами X и Y, следует проверить гипотезу о статистической значимости коэффициента корреляции. В этом случае используется следующая гипотеза:

$$\begin{aligned} &H_0 : \rho_{xy} = 0 \ (\textit{коэффициент корреляции статистически незначим}) \\ &H_1 : \rho_{xy} \neq 0 \ (\textit{коэффициент корреляции статистически значим}) \end{aligned}.$$

Для проверки нулевой гипотезы H_0 по выборке $(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ объема n строится статистика $T = \dfrac{r_{xy} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2_{xy}}}$,

где r_{xy} – выборочный коэффициент корреляции.

При справедливости нулевой гипотезы H0 статистика T имеет распределение Стьюдента с $\nu = n - 2$ степенями свободы. По таблице критических точек распределения Стьюдента (приложение 3) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - 2$ определяют критическую точку $t_{\alpha/2, n-2}$ двусторонней критической области.

Если $|T_{набл}| = \left| \dfrac{r_{xy} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2_{xy}}} \right| < t_{\alpha/2, n-2}$, то нет оснований для отклонения H_0.

Если $\left|T_{набл}\right| = \left|\dfrac{r_{xy}\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}\right| \ge t_{\alpha/2,n-2}$, то H_0 отклоняется в пользу альтернативной гипотезы H_1.

Если H_0 отклоняется, то это фактически означает, что коэффициент корреляции статистически значим (существенно отличен от нуля). Следовательно, X и Y – коррелированны, т.е. между ними существует линейная связь.

Пример 7. Определяется наличие линейной зависимости между уровнями инфляции (X) и безработицы (Y) в некоторой стране за 11 лет. По статистическим данным рассчитан выборочный (эмпирический) коэффициент корреляции $r_{xy} = -0{,}34$. Существует ли значимая линейная связь между указанными показателями в данной стране на рассматриваемом временном интервале? Принять $\alpha = 0{,}02$.

Решение.

1. Для ответа на поставленный вопрос проанализируем следующую гипотезу:

$$H_0 : \rho_{xy} = 0 \ (\textit{коэффициент корреляции статистически незначим})$$
$$H_1 : \rho_{xy} \ne 0 \ (\textit{коэффициент корреляции статистически значим})$$

2. По формуле $T = \dfrac{r_{xy}\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$ построим T–статистику

$$T_{набл} = \frac{-0{,}34\cdot\sqrt{11-2}}{\sqrt{1-(-0{,}34)^2}} = -3{,}254.$$

3. С помощью таблицы критических точек распределения Стьюдента (приложение 3) находим критическую точку двусторонней критической области $t_{кр} = t_{\alpha/2,n-2} = t_{0{,}01,9} = 2{,}821$.

4. Поскольку $\left|T_{набл}\right| = 3{,}254 > 2{,}81 = t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается и коэффициент корреляции $r_{xy} = -0{,}34$ статистически значим.

Следовательно, он существенно отличается от нуля, и между уровнями инфляции (X) и безработицы (Y) существует определенная отрицательная линейная зависимость.

Пример выполнения самостоятельной расчетной работы

На примере реальных статистических данных, полученных при производстве морфолина, важного химического продукта, рассмотрим, как может быть осуществлен анализ статистических данных.

Задание. В результате замера параметров процесса производства морфолина раз в сутки в регистрационном журнале зафиксированы следующие значения рассматриваемой случайной величины X – выхода морфолина (в объемных процентах) в порядке регистрации:

40,5 40,5 43,0 40,0 40,5

43,0 44,0 42,5 43,0 42,0

41,5 44,0 43,5 46,0 44,0

45,5 45,5 43,0 44,0 43,5

43,0 43,5 43,5 44,0 42,5

42,5 42,5 42,5 43,5 44,0

44,0 44,0 45,0 44,5 44,5

44,5 43,5 46,0 42,5 41,0

43,5 42,0 43,5 44,5 42,0

42,0 42,0 42,0 42,0 46,0.

Необходимо:

1. Составить статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X (табл. 1).
2. Построить полигон частот и полигон относительных частот.

3. Составить статистический (вариационный) ряд с непрерывным распределением признака X (табл. 2).
4. Построить гистограмму частот и гистограмму относительных частот и по их виду выдвинуть предположение о законе распределения рассматриваемого признака X.
5. Вычислить числовые характеристики (точечные оценки) параметров статистического распределения признака X: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную дисперсию, исправленное среднее квадратическое отклонение.
6. Найти интервальные оценки параметров M(X), D(X), σ(X) генеральной совокупности в предположении, что случайная величина X имеет нормальное распределение.
7. Проверить параметрическую статистическую гипотезу $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
8. Проверить параметрическую статистическую гипотезу $a = a_0$.
9. Написать вывод к работе.

Решение.

1. Найдем статистическое распределение выборки значений случайной величины X – выхода морфолина. Для этого непосредственным подсчетом находим, что список значений случайной величины представляет собой реализацию выборки объемом n=50. В табл. 1 «Статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X» выписываем неповторяющиеся результаты наблюдения – варианты x_i, их частоты n_i и относительные частоты n_i/n.

Таблица 1. Статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X

X	**40,0**	**40,5**	**41**	**41,5**	**42,0**	**42,5**	**43,0**	**43,5**	**44,0**	**44,5**	**45,0**	**45,5**	**46,0**
n_i	1	3	1	1	7	6	5	8	8	4	1	2	3
$\frac{n_i}{n}$	0,02	0,06	0,02	0,02	0,14	0,12	0,1	0,16	0,16	0,08	0,02	0,04	0,06

Необходимо проверить, что $n = \sum_{i=1}^{m} n_i = 50$, $\sum_{i=1}^{m} n_i / n = 1$. Только в этом случае можно быть уверенным, что табл. 1 составлена верно.

2. Графическим изображением статистического распределения выборки является полигон частот или полигон относительных частот. Построим полигон частот и полигон относительных частот статистического распределения выборки X.

Рис. 5. Полигон частот

Рис. 6. Полигон относительных частот

3. При большом числе наблюдений статистический ряд перестает быть удобной формой записи статистических данных. В этом случае весь диапазон значений случайной величины X (размах выборки) делится на частичные интервалы (разряды), подсчитывают количество n_i вариант, попавших в i-й разряд (частоту разряда), вычисляют относительную частоту разряда n_i/n и оформляют в виде табл. 2 «Статистический (вариационный) ряд с непрерывным распределением признака X». Возьмем число разрядов r=5. Тогда минимальная варианта (по табл. 1) равна 40, максимальная варианта (по табл. 1) равна 46. Размах выборки $[x_{\max} - x_{\min}]$ равен 6. Далее находим длину интервала $h = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{r} = \dfrac{46 - 40}{5} = 1{,}2$. Далее заполняем табл. 2: в первой строке записываем соответствующие интервалы $[40{,}0;\ 41{,}2[$, $[41{,}2;\ 42{,}4[$, $[42{,}4;\ 43{,}6[$, $[43{,}6;\ 44{,}8[$, $[44{,}8;\ 46]$.

Таблица 2. Статистический (вариационный) ряд с непрерывным распределением признака X

X	$[40{,}0;\ 41{,}2[$	$[40{,}0;\ 41{,}2[$	$[40{,}0;\ 41{,}2[$	$[40{,}0;\ 41{,}2[$	$[40{,}0;\ 41{,}2[$
n_i	5	8	19	12	6
$\dfrac{n_i}{n}$	0,1	0,16	0,38	0,24	0,12

4. Построим гистограммы частот и относительных частот полученного статистического ряда. Напомним, что гистограммой частот (относительных частот) статистического ряда с непрерывным распределением признака X называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, основаниями которых служат разряды, а площади равны частотам (относительным частотам) этих разрядов. Используя данные табл. 2, строим гистограмму частот (по оси абсцисс – длина интервала, по оси ординат – частоты n_i, попавшие в заданный интервал). При построении гистограммы относительных частот используем данные таблицы 2 (по оси абсцисс – длина

интервала, по оси ординат – относительные частоты $\frac{n_i}{n}$, попавшие в заданный интервал).

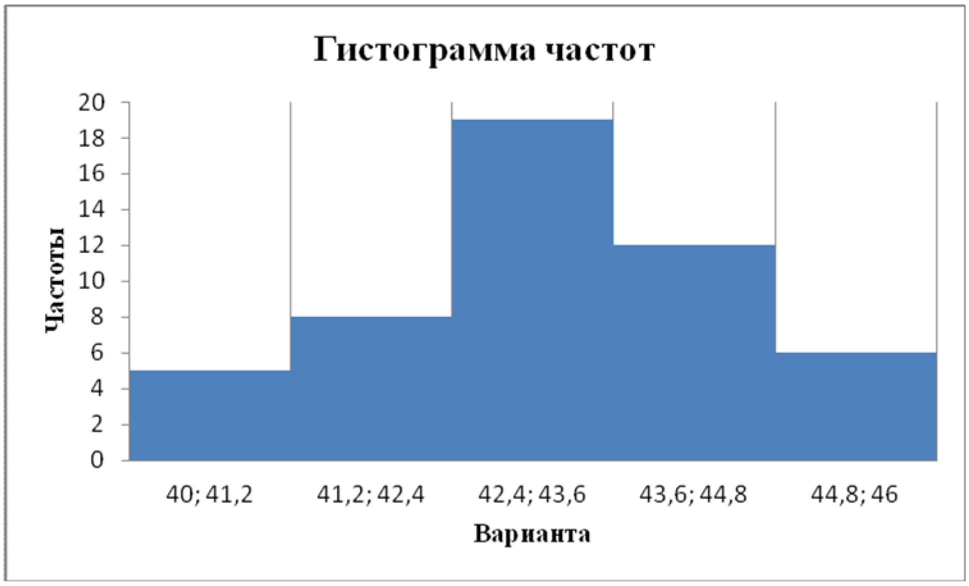

Рис. 7. Гистограмма частот

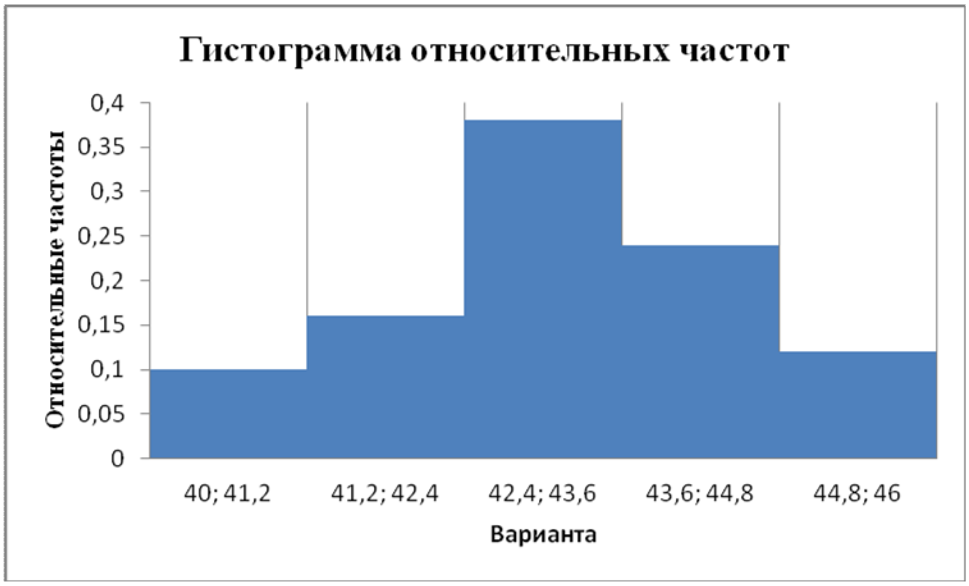

Рис. 8. Гистограмма относительных частот

Сглаженная верхняя граница гистограммы представляет собой статистический аналог функции плотности *f(x)* случайной величины X.

5. Вычисляем числовые характеристики (точечные оценки) параметров статистического распределения. Каждой числовой характеристике случайной величины X соответствует статистический аналог. Для математического ожидания M(X) таким аналогом является среднее выборочное. Вычислим среднее выборочное наиболее целесообразным способом:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{1}{50}(40\cdot 1 + 40{,}5\cdot 3 + 41\cdot 1 + 41{,}5\cdot 1 + 42\cdot 7 + 42{,}5\cdot 6 + 43\cdot 5 + 43{,}5\cdot 8 +$$
$$+ 44\cdot 8 + 44{,}5\cdot 4 + 45\cdot 1 + 45{,}5\cdot 2 + 46\cdot 3) = 43{,}2.$$

Для вычисления выборочной дисперсии используем формулу:

$$D_в = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{13} n_i(x_i)^2 - (\bar{x}_в)^2 = \frac{1}{50}\cdot(40^2\cdot 1 + 40{,}5^2\cdot 3 + 41^2\cdot 1 + 41{,}5^2\cdot 1 + 42^2\cdot 7 +$$
$$+ 42{,}5^2\cdot 6 + 43^2\cdot 5 + +43{,}5^2\cdot 8 + 44^2\cdot 8 + 44{,}5^2\cdot 4 + 45^2\cdot 1 + 45{,}5^2\cdot 2 + 46^2\cdot 3) -$$
$$- 43{,}2^2 = 2{,}06.$$

Вычисляем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{2{,}06} = 1{,}43.$$

Доказано, что выборочное среднее $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 43{,}2$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = 2{,}06$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X) = \sigma^2$, так как доказано, что $D_в = \sigma^2\frac{n-1}{n}$. Таким образом, выборочная дисперсия оценивает генеральную дисперсию с недостатком. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии $D(X)$ удобнее брать исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{50}{49} \cdot 2{,}06 = 2{,}102 .$$

Исправленная дисперсия S^2 является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины X.

Аналогично вводится исправленное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2} = 1{,}45 .$$

Точечная оценка неизвестного параметра не дает информации о точности оценки при замене данного параметра на его приближенное значение. Чтобы иметь представление о точности и надежности оценки, используют так называемые доверительные интервалы и доверительные вероятности.

6. Найдем интервальные оценки параметров M(X), D(X), σ(X) генеральной совокупности в предположении, что случайная величина X имеет нормальное распределение. Зададим надежность γ=0,95. Нам известна выборка значений X объема n=50. Известны точечные оценки параметров распределения $\bar{x}_в = 43{,}2$, S=1,45. Для оценки генерального среднего **a** определим по таблице $t_\gamma = 2{,}009$. Вычислим $\delta = \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}009 \cdot 1{,}43}{\sqrt{50}} = 0{,}4$. Тогда доверительный интервал для генерального среднего имеет вид: $I_\gamma = \left[43{,}2 - 0{,}4; \quad 43{,}2 + 0{,}4 \right] = \left[42{,}8; \quad 43{,}6 \right]$. Итак, с надежностью γ=0,95 параметр **a** накрывается доверительным интервалом $I_\gamma = \left[42{,}8; \quad 43{,}6 \right]$. Этот результат показывает, что среднее значение (математическое ожидание) случайной величины X – выхода морфолина накрывается интервалом $]42{,}8; \quad 43{,}6[$ с вероятностью 0,95.

Для оценки σ^2 находим по таблице критических точек распределения χ^2 a_1 и a_2 (k=50–1, γ=0,95):

$$a_1 = \chi^2(49; \quad \frac{1+0{,}95}{2}) = \chi^2(49; \quad 0{,}975) = 26{,}9$$

$$a_1 = \chi^2(49; \quad \frac{1-0{,}95}{2}) = \chi^2(49; \quad 0{,}025) = 71{,}8 .$$

Вычисляем границы доверительного интервала:

$$I_{0,95}=\left]\frac{1,43^2\cdot(50-1)}{71,8};\quad \frac{1,43^2\cdot(50-1)}{26,9}\right[=\left]1,33;\quad 3,55\right[.$$

Итак, с надежностью γ=0,95 параметр σ^2 накрывается доверительным интервалом $]1,33;\quad 3,55[$. Этот результат означает, что значение X отклоняется от своего среднего значения в среднем на σ, где σ^2 накрыто интервалом $]1,33;\quad 3,55[$ с вероятностью γ=0,95.

7. Выполним проверку параметрической статистической гипотезы $\sigma^2=\sigma_0^2$.

Результаты наблюдений над случайными величинами используются для проверки правильности предположений относительно значений параметров распределения, так называемых параметрических гипотез.

Пример 8. Случайная величина X – выход морфолина имеет нормальное распределение. По данным выборки объема n=50 найдена исправленная дисперсия S^2=2,1. Проверим гипотезу о значении неизвестного параметра σ^2.

<u>Решение.</u> Пусть $H_0:\ \sigma^2=1,4^2$. В качестве конкурирующей гипотезы возьмем $H_1:\ \sigma^2\neq 1,4^2$. Зададим уровень значимости $\alpha=0,05$. С помощью равенства Уилсона–Гилферти находим число степеней свободы k=50–1=49. По табл. 5 (Критические точки распределения χ^2) находим

$$\chi^2_{прав.кр}\left(49;\frac{0,05}{2}\right)=71,42$$

$$\chi^2_{лев.кр}\left(49;1-\frac{0,05}{2}\right)=\chi^2_{лев.кр}\left(49;0,975\right)=32,36.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия проверки $\chi^2_{набл.}=\frac{(50-1)\cdot 2,1}{1,4^2}=52,5$.

Так как 32,36<52,5<71,42, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. Этот результат можно интерпретировать следующим образом: с вероятностью 0,95 предположение $\sigma^2=1,4^2$ верно, т.е. среднее квадратическое отклонение выхода морфолина от своего среднего значения равно $\sigma=1,4$ с вероятностью 0,95.

8. Выполним проверку параметрической статистической гипотезы $a=a_0$.

Пример 9. Случайная величина X – выход морфолина имеет нормальное распределение. По данным выборки объема n=50 найдены $\overline{x}_{в}=43,2$, S=1,45. Проверим гипотезу о значении параметра **a** при неизвестном σ.

<u>Решение.</u> Пусть $H_0:\ a=43$. В качестве конкурирующей гипотезы возьмем $H_1:\ a\neq 43$. Зададим уровень значимости $\alpha=0{,}05$. По табл. 6 (Критические точки распределения Стьюдента) для двусторонней критической области находим $t^{*}_{кр}(0{,}05;49)=2{,}01$. Находим наблюдаемое значение критерия проверки $T_{набл.}=\dfrac{(43{,}2-43)\cdot\sqrt{49}}{1{,}45}=0{,}966$. Так как $T_{набл.}=0{,}966<T_{кр}=2{,}01$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. В частности, этот результат означает, что случайная величина X – выход морфолина с вероятностью 0,95 имеет среднее значение 43.

9. <u>Вывод:</u> в результате проделанной работы были составлены статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X (таблица 1); статистический (вариационный) ряд с непрерывным распределением признака X (таблица 2); построены полигоны частот и относительных частот; гистограммы частот и относительных частот; сделан вывод о виде распределения признака X – выхода морфолина; вычислены числовые характеристики (точечные оценки) параметров статистического распределения признака X: выборочное среднее – 43,2, выборочная дисперсия – 2,06, выборочное среднее квадратическое отклонение – 1,43, исправленная дисперсия – 2,1, исправленное среднее квадратическое отклонение – 1,45; сделаны интервальные оценки параметров M(X), D(X), σ(X) генеральной совокупности в предположении, что случайная величина X имеет нормальное распределение; проведена проверка двух параметрических гипотез. Таким образом, с помощью методов математической статистики на примере выборочной совокупности объемом 50 единиц рассмотрены и проанализированы реальные статистические данные, полученные при производстве морфолина – важного продукта химической промышленности.

Задания для самостоятельной расчетной работы

Необходимо: провести анализ представленной выборочной совокупности по следующему плану:

1. Составить статистический (вариационный) ряд с дискретным распределением признака X (табл. 1).
2. Построить полигон частот и полигон относительных частот.
3. Составить статистический (вариационный) ряд с непрерывным распределением признака X (табл. 2).
4. Построить гистограмму частот и гистограмму относительных частот и по их виду выдвинуть предположение о законе распределения рассматриваемого признака X.
5. Вычислить числовые характеристики (точечные оценки) параметров статистического распределения признака X: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную дисперсию, исправленное среднее квадратическое отклонение.
6. Найти интервальные оценки параметров M(X), D(X), σ(X) генеральной совокупности в предположении, что случайная величина X имеет нормальное распределение.
7. Проверить параметрическую статистическую гипотезу $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
8. Проверить параметрическую статистическую гипотезу $a = a_0$.
9. Написать вывод к работе.

Вариант 1. Анализируются объемы продаж некоторого товара (в килограммах) за 50 дней:

90,5 90,5 93,0 90,0 90,5 93,0 94,0 92,5 93,0 92,0

91,5 94,0 93,5 96,0 94,0 95,5 95,5 93,0 94,0 93,5

93,0	93,5	93,5	94,0	92,5	92,5	92,5	92,5	93,5	94,0
94,0	94,0	95,0	94,5	94,5	94,5	93,5	96,0	92,5	91,0
93,5	92,0	93,5	94,5	92,0	92,0	92,0	92,0	92,0	96,0.

Вариант 2. Анализируется продолжительность телефонных разговоров с клиентами некоторой справочной телефонной службы (в минутах):

0,5	0,5	3,0	0,0	0,5	3,0	4,0	2,5	3,0	2,0
1,5	4,0	3,5	6,0	4,0	5,5	5,5	3,0	4,0	3,5
3,0	3,5	3,5	4,0	2,5	2,5	2,5	2,5	3,5	4,0
4,0	4,0	5,0	4,5	4,5	4,5	3,5	6,0	2,5	1,0
3,5	2,0	3,5	4,5	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	6,0.

Вариант 3. Анализируется цена некоторого товара в 50 магазинах города:

70,5	70,5	73,0	70,0	70,5	73,0	74,0	72,5	73,0	72,0
71,5	74,0	73,5	76,0	74,0	75,5	75,5	73,0	74,0	73,5
73,0	73,5	73,5	74,0	72,5	72,5	72,5	72,5	73,5	74,0
74,0	74,0	75,0	74,5	74,5	74,5	73,5	76,0	72,5	71,0
73,5	72,0	73,5	74,5	72,0	72,0	72,0	72,0	72,0	76,0.

Вариант 4. Анализируется масса детали (в граммах) при 50 измерениях:

50,5	50,5	53,0	50,0	50,5	53,0	54,0	52,5	53,0	52,0
51,5	54,0	53,5	56,0	54,0	55,5	55,5	53,0	54,0	53,5
53,0	53,5	53,5	54,0	52,5	52,5	52,5	52,5	53,5	54,0
54,0	54,0	55,0	54,5	54,5	54,5	53,5	56,0	52,5	51,0
53,5	52,0	53,5	54,5	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	56,0.

Вариант 5. Анализируются данные по температуре (в градусах Цельсия) в некоторой местности за 50 дней (летний сезон):

20,5	20,5	23,0	20,0	20,5	23,0	24,0	22,5	23,0	22,0
21,5	24,0	23,5	26,0	24,0	25,5	25,5	23,0	24,0	23,5
23,0	23,5	23,5	24,0	22,5	22,5	22,5	22,5	23,5	24,0
24,0	24,0	25,0	24,5	24,5	24,5	23,5	26,0	22,5	21,0
23,5	22,0	23,5	24,5	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	26,0.

Вариант 6. Анализируются данные по длительности обработки некоторой детали (в минутах). Выполнено 50 измерений:

10,5	10,5	13,0	10,0	10,5	13,0	14,0	12,5	13,0	12,0
11,5	14,0	13,5	16,0	14,0	15,5	15,5	13,0	14,0	13,5
13,0	13,5	13,5	14,0	12,5	12,5	12,5	12,5	13,5	14,0
14,0	14,0	15,0	14,5	14,5	14,5	13,5	16,0	12,5	11,0
13,5	12,0	13,5	14,5	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	16,0.

Вариант 7. Анализируются данные по длительности (в минутах) нахождения на маршруте автобуса №120 сообщением Железнодорожный вокзал – Богданиха. Данные приведены по 50 транспортным средствам:

60,5	60,5	63,0	60,0	60,5	63,0	64,0	62,5	63,0	62,0
61,5	64,0	63,5	66,0	64,0	65,5	65,5	63,0	64,0	63,5
63,0	63,5	63,5	64,0	62,5	62,5	62,5	62,5	63,5	64,0
64,0	64,0	65,0	64,5	64,5	64,5	63,5	66,0	62,5	61,0
63,5	62,0	63,5	64,5	62,0	62,0	62,0	62,0	62,0	66,0.

Вариант 8. Анализируются результаты измерений количества отходов при раскрое некоторого швейного изделия (в граммах) у 50 раскройщиц швейного производства:

110,5 110,5 113,0 110,0 110,5 113,0 114,0 112,5 113,0 112,0

111,5 114,0 113,5 116,0 114,0 115,5 115,5 113,0 114,0 113,5

113,0 113,5 113,5 114,0 112,5 112,5 112,5 112,5 113,5 114,0

114,0 114,0 115,0 114,5 114,5 114,5 113,5 116,0 112,5 111,0

113,5 112,0 113,5 114,5 112,0 112,0 112,0 112,0 1112,0 116,0.

Вариант 9. Анализируются результаты выхода готового продукта при производстве шоколадных конфет ручной работы (в килограммах) у индивидуального предпринимателя за 50 дней:

30,5 30,5 33,0 30,0 30,5 33,0 34,0 32,5 33,0 32,0

31,5 34,0 33,5 36,0 34,0 35,5 35,5 33,0 34,0 33,5

33,0 33,5 33,5 34,0 32,5 32,5 32,5 32,5 33,5 34,0

34,0 34,0 35,0 34,5 34,5 34,5 33,5 36,0 32,5 31,0

33,5 32,0 33,5 34,5 32,0 32,0 32,0 32,0 32,0 36,0.

Вариант 10. Анализируются данные по производству молока (в литрах) за 50 дней:

80,5 80,5 83,0 80,0 80,5 83,0 84,0 82,5 83,0 82,0

81,5 84,0 83,5 86,0 84,0 85,5 85,5 83,0 84,0 83,5

83,0 83,5 83,5 84,0 82,5 82,5 82,5 82,5 83,5 84,0

84,0 84,0 85,0 84,5 84,5 84,5 83,5 86,0 82,5 81,0

83,5 82,0 83,5 84,5 82,0 82,0 82,0 82,0 82,0 86,0.

Вариант 11. Анализируются данные по производству хлебобулочных изделий (в килограммах) в пекарне за 50 дней:

210,5	210,5	213,0	210,0	210,5	213,0	214,0	212,5	213,0	212,0
211,5	214,0	213,5	216,0	214,0	215,5	215,5	213,0	214,0	213,5
213,0	213,5	213,5	214,0	212,5	212,5	212,5	212,5	213,5	214,0
214,0	214,0	215,0	214,5	214,5	214,5	213,5	216,0	212,5	211,0
213,5	212,0	213,5	214,5	212,0	212,0	212,0	212,0	212,0	216,0.

Вариант 12. Анализируются данные измерений длины детали (в миллиметрах). Выполнено измерение 50 деталей:

120,5	120,5	123,0	120,0	120,5	123,0	124,0	122,5	123,0	122,0
121,5	124,0	123,5	126,0	124,0	125,5	125,5	123,0	124,0	123,5
123,0	123,5	123,5	124,0	122,5	122,5	122,5	122,5	123,5	124,0
124,0	124,0	125,0	124,5	124,5	124,5	123,5	126,0	122,5	121,0
123,5	122,0	123,5	124,5	122,0	122,0	122,0	122,0	122,0	126,0.

Вопросы для самопроверки (при подготовке к коллоквиуму):

1. Что такое генеральная совокупность и выборка?
2. Назовите основные виды выборок и способы отбора элементов в них?
3. Что такое статистический ряд? Что такое интервальный статистический ряд?
4. Дайте определение эмпирической функции распределения, приведите ее аналитическое и графическое представление.
5. Что такое полигон частот и гистограмма? Для чего они используются?
6. Как вычисляются основные числовые характеристики по результатам выборки: выборочное среднее, дисперсия, среднее квадратическое отклонение?

7. Что такое выборочный коэффициент корреляции? Для чего он используется? Назовите его основные свойства. Запишите формулу для выборочного коэффициента корреляции.
8. Что такое точечная оценка и каковы ее желательные свойства?
9. Дайте определение несмещенности, эффективности и состоятельности точечных оценок.
10. Что такое интервальная оценка? Общие принципы построения интервальных оценок.
11. Чем отличаются интервальные оценки для математического ожидания нормальной случайной величины при известной и неизвестной дисперсиях?
12. Как строятся доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения нормальной случайной величины?
13. Что такое статистическая гипотеза?
14. Какова цель проверки статистических гипотез?
15. В чем заключается отличие параметрических и непараметрических гипотез?
16. Что такое нулевая и альтернативная гипотезы? Назовите принципы их построения.
17. Что такое статистический критерий? Приведите конкретные примеры критериев.
18. Что такое критическая область? Приведите примеры критических областей.
19. Приведите общую схему проверки гипотез.
20. Что такое ошибки первого и второго рода? Как можно уменьшить вероятность этих ошибок?
21. Что такое уровень значимости?
22. Что такое мощность критерия?
23. Приведите примеры проверки гипотез. Какими критериями можно воспользоваться при проверке?

Словарь терминов

- **Бесповторная выборка –** это выборка, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.
- **Вероятность** – количественная мера объективной возможности появления события в условиях данного эксперимента.
- **Вероятность доверительная –** вероятность, признаваемая достаточной для суждения о достоверности характеристик, полученных на основе выборочных наблюдений.
- **Вероятность события классическая** – отношение числа исходов эксперимента, благоприятствующих появлению события, к общему числу исходов.
- **Двусторонняя критическая область –** это область, определяемая как $(-\infty; k_{1-\alpha/2}) \cup (k_{\alpha/2}; +\infty)$. Она определяется в случае, когда конкурирующая (альтернативная) гипотеза имеет вид: $\acute{I}_1 : \Theta \neq \Theta_0$.
- **Дисперсия случайной величины –**математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.
- **Интервальная оценка –** числовой интервал, относительно которого с вероятностью, близкой к единице, можно утверждать, что оцениваемый параметр находится внутри него.
- **Конкурирующая (альтернативная) гипотеза** – гипотеза, противоположная нулевой, которая будет верна в том случае, если нулевая гипотеза противоречит опытным данным.
- **Корреляционная зависимость** – зависимость математического ожидания одной случайной величины от вариации других.
- **Критическая область** – подмножество значений выборочной характеристики, составляющей основу статистического критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

- **Критические точки –** это точки, разделяющие критическую область и область принятия гипотезы.
- **Левосторонняя критическая область –** это область, определяемая как $(-\infty; k_{1-\alpha})$. Она используется в том случае, когда альтернативная гипотеза имеет вид: $\acute{I}_1 : \Theta < \Theta_0$.
- **Математическое ожидание –** средняя величина возможных значений случайной величины, взвешенных по их вероятности.
- **Механический отбор –** это отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы выбирают один объект.
- **Мощность критерия –** вероятность не совершить ошибку второго рода (отвергнуть ложную нулевую гипотезу).
- **Несмещенная оценка –** точечная оценка параметра, математическое ожидание которой равно самому параметру.
- **Нулевая гипотеза** – статистическая гипотеза, которую необходимо проверить $\acute{I}_0 : \Theta = \Theta_0$.
- **Правосторонняя критическая область –** это область, определяемая как $(k_\alpha; +\infty)$. Она используется в случае, когда альтернативная гипотеза имеет вид: $\acute{I}_1 : \Theta > \Theta_0$.
- **Повторная выборка –** это выборка, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.
- **Простой случайный отбор –** это отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.
- **Серийный отбор –** это отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.
- **Состоятельная оценка –** точечная оценка, которая сходится по вероятности к оцениваемому параметру.

- **Статистические выводы –** это заключения о генеральной совокупности: о законе распределения случайной величины, его параметрах, о наличии и силе связи между исследуемыми переменными на основе выборки, случайно отобранной из генеральной совокупности.

- **Статистическая гипотеза –** любое предположение либо относительно неизвестного закона распределения, либо относительно неизвестных параметров известного распределения.

- **Статистический критерий –** однозначно определенное правило, устанавливающее условия, при которых проверяемую гипотезу следует отвергнуть, либо не отвергать. Основу критерия составляет выборочная характеристика, точное или приближенное распределение которой известно при справедливости нулевой гипотезы. Правила проверки гипотезы определяют, при каких условиях гипотеза будет принята.

- **Типический отбор –** это отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

- **Точечная оценка –** функция результатов наблюдения, значение которой принимается за приближенное значение параметра генеральной совокупности.

- **Уровень значимости –** вероятность не совершить ошибку первого рода (отвергнуть истинную нулевую гипотезу). С уменьшением вероятности ошибки первого рода увеличивается вероятность ошибки второго рода.

- **Эффективная оценка –** точечная оценка, обладающая наименьшей дисперсией среди всех возможных несмещенных оценок параметра данной генеральной совокупности при фиксированном объеме выборки.

Список литературы

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов/ В.Е. Гмурман. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2005. – 480с.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для втузов/ В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 2005. – 404с.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2ч.: учеб. пособие для вузов/ П.Е. Данко. – М.: ОНИКС 21 век, 2005. – 416с.

4. Вентцель, Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебн. пособие/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Академия, 2006. – 464 с.

5. Вентцель, Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебн. пособие/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Академия, 2006. – 464 с.

6. Боровков, А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез: учеб. пособие для мат. и физ. спец. вузов/ А.А. Боровков. – М.: Наука, 1984. – 472 с.

7. Ивченко, Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: учеб. пособие для втузов/ Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.

8. Ивченко, Г.И. Сборник задач по математической статистике: учеб. пособие для втузов/ Г.И. Ивченко. – М.: Высшая школа, 1989. – 255 с.

Составитель

Баранова Татьяна Анатольевна

Элементы математической статистики

Методические указания

Усл. печ. л. 3,02 Уч.–изд. л. 3,35

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет»

153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7