Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Ивановский государственный химико–технологический университет

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Методические указания

Составитель: Т.А. Баранова

Иваново 2014

Составитель: Т.А. Баранова

УДК 517. 9

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных: методические указания/ Сост. Т.А. Баранова; Иван. гос. хим.–технол. ун–т. – Иваново, 2014. – 24 с.

Методические указания охватывают традиционный курс высшей математики по разделу «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных», написаны в соответствии с действующей рабочей учебной программой дисциплины «Математика». Данные методические указания можно использовать как для самообразования, так и для активной работы на практических занятиях, при подготовке к контрольным работам и экзаменам для студентов дневного и заочного отделений всех факультетов.

Рецензент

доцент кафедры механики и компьютерной графики, кандидат технических наук В.В. Бойцова (Ивановский государственный химико–технологический университет)

Предисловие

Методические указания «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» входят в серию методических разработок кафедры высшей и прикладной математики, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса математики. Они предназначены для студентов 1 курса Ивановского государственного химико-технологического университета. В методических указаниях рассмотрены следующие вопросы теории функций нескольких переменных: функции от двух (или более) переменных, область определения, геометрическое толкование, частные производные и дифференцирование сложных функций, неявные функции и их дифференцирование, полный дифференциал и его применение в приближенных вычислениях. Каждый раздел методических указаний начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, формулы. Затем даются разнообразные примеры и задачи, полностью охватывающие данные темы. В конце методических указаний предлагаются задания для проверки знаний, варианты индивидуальных заданий.

Методические указания «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» могут быть использованы во время практических занятий по дисциплине «Математика», в качестве задачника для самостоятельной работы и контрольных работ для студентов дневного и заочного отделений всех факультетов.

Основные понятия

В различных вопросах естествознания и техники встречаются процессы, в которых одновременно изменяются несколько величин, причем выявляется зависимость одной из этих величин от других переменных. В этих случаях естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

***Определение* 1** Если каждой паре значений x (из множества X) и y (из множества Y) соответствует единственное вполне определенное значение z, то переменную z называют функцией от двух переменных x и y.

Обозначают эту функцию так:

$$z = f(x, y).$$

Аналогично определяются функции многих переменных: $u = f(x, y, z)$ или $\omega = F(x, y, z, t, u)$, где в первом случае имеем три независимых переменных *x*, *y*, *z*, а во втором – их уже пять. Так, например, температура u некоторого тела может зависеть от положения точки измерения, т.е. ее координат *x*, *y*, *z* и времени наблюдения *t*. Тогда температура является функцией четырех переменных, т.е.

$$u = f(x, y, z, t).$$

В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать функции двух переменных.

Чтобы задать функцию $z = f(x, y)$, мы, согласно определению 1, должны указать, какое множество значений могут принимать аргументы *x* и *y*.

***Определение* 2** Множество тех пар чисел (*x*, *y*), которым соответствует определенное числовое значение $z = f(x, y)$, называют областью определения данной функции.

Обычно функция двух и более переменных задается аналитически, например,

$$z = x^2 + 2y + 1, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При этом указание области определения функции зависит лишь от вида формулы, с помощью которой задана функция.

Геометрически область определения функции D обычно представляет собой некоторую часть плоскости *XOY*, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область называется замкнутой, во втором – открытой.

Пример 1. Функция $z = x^2 + 2y + 1$ определена при любых x и y.

Пример 2. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена при условии $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, т. е. при $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом, областью определения данной функции является круг радиусом R=1, включая граничную окружность.

Пример 3. Функция $z = \dfrac{10}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ имеет область определения, удовлетворяющую условию $x^2 + y^2 > 1$. Это будут точки, лежащие вне окружности радиусом R=1, исключая граничную окружность.

Частные производные первого порядка

Определение 3 Частной производной от функции $z = f(x,y)$ по независимой переменной X или Y называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю

т. е. $$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = z'_x$$

или $$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = z'_y \ . \qquad (1)$$

Заметим, что если от функции $z = f(x,y)$ берется производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, то y считается постоянным; если же находится $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, то x считается постоянным.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные постоянны, то все правила и формулы дифференцирования функций по одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Для нахождения частных производных справедливы **обычные правила** и **формулы дифференцирования** (приведены в конце методических указаний в разделе Справочные материалы).

Пример 4. Найти частные производные функции $z = y\ln(x^2 - y^3)$**.**

Решение. Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ при условии, что $y = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \left[\ln(x^2 - y^3)\right]'_x = y\frac{1}{x^2 - y^3} \cdot (x^2 - y^3)'_x = y \cdot \frac{1}{x^2 - y^3} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 - y^3}.$$

(применяем правило $(Cu)' = Cu'$, y как $const$ вынесли за знак производной).

Найдем $\frac{\partial z}{\partial y}$, применяя правило дифференцирования $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, считаем, что $x = const$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y)'_y \cdot \ln(x^2 - y^3) + y(\ln(x^2 - y^3))'_y = 1 \cdot \ln(x^2 - y^3) + y \cdot \frac{1}{x^2 - y^3} \cdot (-3y^2) =$$

$$= \ln(x^2 - y^3) - \frac{3y^3}{x^2 - y^3}.$$

Дифференцирование сложной функции

***Определение* 4** Функция z называется **сложной функцией** от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана через промежуточные аргументы u и v, где $u=f(x, y, \ldots, t)$, $v=f(x, y, \ldots, t)$.

Возможны два случая:

1 *случай*: Если $z = f(x, y)$, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, то z называется сложной функцией от t. При этом

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (2)$$

если функции $f(x, y)$, $f(t)$, $\varphi(t)$ дифференцируемы.

Пример 5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^t$.

Решение. Находим частные производные функции z: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$

и производные функций x и y по переменной t:

$\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = -e^t$, которые подставляем в формулу (2)

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y}{x^2} \cdot e^t + \frac{1}{x} \cdot \left(-e^t\right) = -\frac{e^t}{x} \cdot \left(\frac{y}{x} + 1\right) = -\frac{e^t}{e^t} \cdot \left(\frac{1 - e^t}{e^t} + 1\right) = -\left(\frac{1 - e^t}{e^t} + 1\right).$$

2 _случай_: Если $z = f(x,y)$, где $x = f(u,v)$ и $y = \varphi(u,v)$, и если функции $f(x,y)$, $f(u,v)$, $\varphi(u,v)$ дифференцируемы, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3}$$

Пример 6. **Найти производную функции** $z = \frac{x^2}{y}$, **если** $x = u - 2v$, $y = v + 2u$.

Решение. 1) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1.$$

2) Подставляя найденные частные производные в формулы (3), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y} \cdot 1 - \frac{x^2}{y^2} \cdot 2 = \frac{2x}{y} \cdot \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \frac{2(u-2v)}{v+2u} \cdot \left(1 - \frac{u-2v}{v+2u}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{y} \cdot (-2) - \frac{x^2}{y^2} \cdot 1 = -\frac{x}{y} \cdot \left(4 + \frac{x}{y}\right) = -\frac{u-2v}{v+2u} \cdot \left(4 + \frac{u-2v}{v+2u}\right).$$

Дифференцирование неявной функции

***Определение* 5** Функция вида $F(x,y) = 0$, где $y = y(x)$ является функцией одной переменной, заданной неявно и ее производную можно найти, используя частные производные функции $F(x,y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}. \tag{4}$$

Для функции двух переменных, заданной неявно $F(x,y,z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{5}$$

Пример 7. **Найти** $\frac{dy}{dx}$, **если** $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Решение. Находим $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-4$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+6$ и подставляем в формулу (4) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-4}{2y+6}=-\frac{2(x-2)}{2(y+3)}=\frac{2-x}{y+3}$.

Пример 8. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из уравнения $x^2+y^2+z^2-6x=0$.

Решение. Находим частные производные $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$:

$F'_x(x,y,z)=2x-6$, $F'_y(x,y,z)=2y$, $F'_z(x,y,z)=2z$ и, подставляя их в формулы (5), получаем $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x-6}{2z}=-\frac{2(x-3)}{2z}=\frac{3-x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}$.

Частные производные высших порядков

<u>Определение 6</u> Частными производными второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначаются частные производные 2-го порядка так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx};\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy};\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}.$$

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ называются смешанными частными производными. Можно доказать, а на практике это легко проверить, что

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если они непрерывны.

Пример 9. Дана функция $z=\ln(x^2+y^2)$. Найти все ее частные производные 2-го порядка и убедиться, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Решение. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$;

3)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{(2x)'_x\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)'_x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

4)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{(2y)'_y\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)'_y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2+2y^2-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

5)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y=2x[(x^2+y^2)^{-1}]'_y=2x(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

6)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_x=2y[(x^2+y^2)^{-1}]'_x=2y(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Из последних двух равенств видно, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Пример 10. Показать, что функция $z=y^{\frac{y}{x}}\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ **удовлетворяет уравнению** $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=y\cdot z$**.**

Решение. 1) Находим частные производные функции по переменной ***x*** и ***y***:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\frac{y}{x}}\cdot\ln y\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^{\frac{y}{x}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[y^{\frac{y}{x}}\cdot\ln y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot y^{\frac{y}{x}-1}\right]\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^{\frac{y}{x}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Подставляем найденные производные в левую часть уравнения, выполняем необходимые преобразования:

$$x^2\cdot\left[y^{\frac{y}{x}}\cdot\ln y\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^{\frac{y}{x}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]+$$

$$xy\cdot\left[\left[y^{\frac{y}{x}}\cdot\ln y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot y^{\frac{y}{x}-1}\right]\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^{\frac{y}{x}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\right]=y\cdot z$$

Получаем тождество, следовательно, функция z удовлетворяет данному уравнению.

Полный дифференциал функции нескольких переменных

Определение 7 Пусть $z=f(x,y)$ есть функция двух независимых переменных. Зафиксируем ***y***, а затем ***x***. Тогда по аналогии с дифференциалом первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ и $\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ называют частными дифференциалами, а выражение $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ является полным дифференциалом функции двух переменных. Положив $z=x$, получим, что $dx=\Delta x$, а, положив $z=y$, получим $dy=\Delta y$. Формула для dz примет вид:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \tag{6}$$

Пример 11. Найти полный дифференциал dz функции $z=\sin\left(y^4\right)+e^{5x^3}-xy^2$.

Решение. Используем формулу (6). Для этого:

1) Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{5x^2} \cdot 15x^2 - y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 \cdot \cos\left(y^4\right) - 2xy.$$

2) Подставляем частные производные в формулу (6)

$$dz = (e^{5x^3} \cdot 15x^2 - y^2)dx + (4y^3 \cdot \cos\left(y^4\right) - 2xy)dy.$$

Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы приближенные равенства: $\Delta z \approx dz$, $f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz$, которые применяются для приближенного вычисления значения функции

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y. \qquad (7)$$

Пример 12. Вычислить приближенное значение $1{,}08^{3{,}96}$.

Решение. 1) Полагаем, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^y$ в точке $M_1(1{,}08;\ 3{,}96)$ и, что вспомогательная точка будет $M_0(1;\ 4)$, получим $f(M_0) = 1^4 = 1$.

1) Находим частные производные функции и их значения в точке $M_0(1;\ 4)$:

$f'_x(M_0) = yx^{y-1}(1;4) = 4$.

$f'_y(M_0) = x^y \ln x(1;4) = 0$.

$\Delta x = 1{,}08 - 1 = 0{,}08$, $\Delta y = 3{,}96 - 4 = -0{,}04$.

2) Подставляя найденные величины в формулу (7), найдем:

$$1{,}08^{3{,}96} \approx f(M_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y \approx 1 + 4 \cdot 0{,}08 \approx 1{,}32.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

<u>Определение 8</u> Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через точку M_0.

Определение 9 Нормалью к поверхности называется прямая, проходящая через точку касания M_0 и перпендикулярная касательной плоскости.

Если поверхность задана неявно $F(x,y,z)=0$, тогда уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ к поверхности $F(x,y,z)=0$ имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}\cdot(z-z_0)=0. \qquad (8)$$

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}$ – значения частных производных функций, вычисленных в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а x, y, z – текущие координаты точки касательной плоскости.

Уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ записывается в виде:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}. \qquad (9)$$

Если поверхность задана явно $z=f(x,y)$, то формулы (8) и (9) примут вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot(y-y_0)=(z-z_0). \qquad (10)$$

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (11)$$

Пример 13. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $3xyz-z^3=1$ в точке $M_0(0;1)$.

Решение. 1) Определим третью координату точки касания, подставив $x=0$, $y=1$ в уравнение поверхности. Получим $-z^3=1$, откуда $z=-1$. Таким образом, точка касания имеет координаты $M_0(0;1;-1)$.

2) Перепишем уравнение в виде $F(x,y,z)=3xyz-z^3-1$ и найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3xz, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 3xy - 3z^2.$$

3) Находим значения частных производных в точке $M_0(0;1;-1)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} = -3, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} = -3.$$

4) Применяем формулы (8) и (9) для составления уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной в неявном виде: $-3(x-0)+0(y-1)-3(z+1)=0$ или $-3x-3z-3=0$. Итак, $x+z+1=0$ – уравнение касательной плоскости. $\frac{x-0}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-3}$ – уравнение нормали. Нуль в знаменателе означает, что направляющий вектор нормали, а значит и сама нормаль перпендикулярны оси OY.

Экстремум функции двух независимых переменных

***Определение* 10** Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке максимум (или минимум), равный $f(x_0, y_0)$, если в окрестности этой точки для всех точек M, отличных от M_0, выполняется неравенство $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ или $f(x,y) > f(x_0, y_0)$. Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется точкой экстремума.

Необходимое условие экстремума

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} = 0; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Точки, в которых частные производные обращаются в нуль, называются стационарными (критическими) точками. Следует заметить, что не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Каждая их этих точек должна быть проверена на экстремум с помощью достаточных условий.

Достаточные условия экстремума

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}; \qquad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}; \qquad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0}. \qquad (13)$$

Составим выражение для дискриминанта $\Delta = AC - B^2$. Дискриминант может принимать следующие значения:

1) $\Delta > 0$, то функция имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно ***максимум*** если $A < 0$ (или $C < 0$) и ***минимум*** если $A > 0$ (или $C > 0$);
2) $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;
3) $\Delta = 0$, то требуются дальнейшие исследования.

Последним пунктом нахождения точек экстремума будет нахождение значения самой функции в найденной точке (или точках) экстремума.

Пример 14. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Решение.

1) Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y:

   $z'_x = 3x^2 - 6y$, $z'_y = 24y^2 - 6x$.

2) Используя необходимое условие экстремума (12), приравниваем каждую частную к нулю и записываем систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$.
3) Решая систему, найдем две точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;\frac{1}{2})$. Обе точки являются критическими, т.к. функция z определена на своей плоскости XOY.
4) Используем достаточные условия экстремума функции нескольких переменных (13). Исследуем критические точки M_1 и M_2 по знаку определителя Δ, составленного из значений частных производных второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -6$, $z''_{yy} = 48y$.
5) Для точки $M_1(0;0)$ получим A=0, B=-6, C=0, $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0$. Следовательно, согласно достаточному условию, в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума.

6) Для точки $M_2(1;\frac{1}{2})$ получим A=6, B= –6, C=24,

$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 24 - (-6)^2 = 108 > 0$. Согласно достаточному условию, в точке $M_2(1;\frac{1}{2})$ экстремум есть. Так как A=6>0, то это точка минимума.

7) Находим значение функции в точке минимума $z_{\min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 1^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$.

Градиент и производная функции нескольких переменных по направлению.

***Определение* 11** Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x;y)$ называется вектор, выходящий из точки M и имеющий своими координатами значения частных производных функции z в этой точке:

$$grad_M\ \vec{z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M \cdot \vec{j}\,. \tag{14}$$

Если имеем функцию трех переменных $u = f(x,y,z)$, то

$$grad_M\ \vec{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M \cdot \vec{k}\,. \tag{15}$$

Чтобы ввести понятие о производной по направлению, рассмотрим функцию $z = f(x,y)$ в некоторой области, содержащей точку $M(x;y)$ и единичный вектор $\vec{a} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$ любого направления. Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, тогда производная по направлению вычисляется по следующей формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M \cdot \cos\beta\,. \tag{16}$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x;y)$ в направлении вектора $\vec{a}$. Из векторной алгебры известно, что $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ есть направляющие косинусы вектора $\vec{a}$. Поэтому, если $\vec{a} = \{x, y\}$, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,. \tag{17}$$

Пример 15. Найти $grad_M \vec{z}$ в точке A(3;4) **и производную в точке A в направлении вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.**

Решение. Найдем частные производные функции $z = f(x, y)$ и подсчитаем их значения в точке A(3;4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5};$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}.$$

По формуле (14) $grad_A \vec{z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A \cdot \vec{j} = \frac{3}{5} \cdot \vec{i} + \frac{4}{5} \cdot \vec{j}$.

Чтобы найти производную по направлению, используем формулу (16). Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, используя формулы (17):
$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{36+64}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{-8}{\sqrt{36+64}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$.
Найдем производную по направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A \cdot \cos\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{25}.$$

Задачи для самостоятельного решения

<u>Задача 1.</u> Дана функция $z = f(x, y)$. Проверить, удовлетворяет ли она данному уравнению:

1.1. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.2. $z = e^{xy}$; $\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.2. $z = e^{-(\cos(ax+y))}$; $\quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.4. $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2y + 1\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.5. $z = \sin^2(y - ax)$; $\quad a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.6. $z = \dfrac{y}{x}$; $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.7. $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.8. $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.9. $z = \dfrac{\sin(x - y)}{x}$; $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.10. $z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$; $\quad \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

1.11. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2 \dfrac{\partial z}{\partial y}) = 0$.

1.12. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $\quad x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

1.13. $z = e^{xy}$; $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.14. $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

1.15. $z=\frac{x}{y}$; $\quad x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1.16. $z=x^y$; $\quad y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$.

1.17. $z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}$; $\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

1.18. $z=\sin(x+ay)$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.19. $z=\cos y+(y-x)\cdot\sin y$; $\quad 2(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

1.20. $z=\cos^3(3x-5y)$; $\quad \frac{5}{3}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1.21. $z=arctg\frac{x}{2y}$; $\quad x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1.22. $z=y\cdot\ln(x^2-y^2)$; $\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

1.23. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$; $\quad x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

1.24. $z=xy+x\cdot e^{\frac{y}{x}}$; $\quad x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

1.25. $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$; $\quad x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

1.26. $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$; $\quad x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$.

1.27. $z = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$; $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.28. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$; $2x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.29. $z = e^{\frac{y}{x}}$; $x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

<u>Задача 2.</u> Исследовать функцию на экстремум:

2.1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

2.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

2.3. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

2.4. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. .

2.5. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

2.6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2.7. $z = x^3 \cdot y^2 (6 - x - y)$, $x > 0, y > 0$.

2.8. $z = \dfrac{1}{2}xy + (47 + x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$.

2.9. $z = (x-1)^2 + 4y^2$.

2.10. $z = x^2 \cdot y(2 - x - y)$, $x > 0, y > 0$.

2.11 $z = y^2(1 - x - y)$, $x > 0, y > 0$.

2.12. $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$, $x > 0, y > 0$.

2.13. $z = e^{(x-y)} \cdot \left(x^2 - 2y^2\right)$.

2.14. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

2.15. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, \quad x > 0, y > 0$.

2.16. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y, \quad x > 0, y > 0$.

2.17. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2.18. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

2.19. $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2$.

2.20. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

2.21. $z = x\sqrt{y} - x^2 + 6x - y + 3$.

2.22. $z = 2xy - 2x - 4y$.

2.23. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

2.24. $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$.

2.25. $z = 3\ln\dfrac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

2.26. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

2.27. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$.

2.28. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

2.29. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

<u>Задача 3.</u> Дана функция $z = f(x, y)$**, точка A(**x_0**;**y_0**) и вектор** $\vec{a}$**. Найти:** 1) $grad_A \vec{z}$ **в точке A(**x_0**;**y_0**);** 2) **производную в точке A(**x_0**;**y_0**) по направлению вектора** $\vec{a}$**.**

3.1. $z = \ln(5x + 3y)$; A (2; 2); $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

3.2. $z = arctg\,\dfrac{y^2}{x}$; A (2; 1); $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

3.3. $z = \dfrac{xy}{x - y}$; A (2; 1); $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$

3.4. $z = 2x^4 + 8x^2y^3$; A (2; –1); $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

3.5. $z = \ln(2x^2 + y^3)$; A (3; –1); $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$

3.6. $z = arctg\,\dfrac{x}{y^2}$; A (3; 1); $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$

3.7. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; A (2; –2); $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$

3.8. $z = \ln(3x^2 + 5y^3)$; A (2; 3); $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

3.9. $z = 2x^3y + 3x^2y^2$; A (1; –2); $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$

3.10. $z = \ln(5x + 3y)$; A (2; 2); $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$

3.11. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$; A (1; 1); $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$

3.12. $z = 3x^2 + 2x^2y^3$; A (–1; 2); $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

3.13. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; A (1; 3); $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$

3.14. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$; A (1; 2); $\vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$

3.15. $z = arctg(xy^2)$; A (2; 3); $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

3.16. $z = 5x^2 + 6xy$; A (2; 1); $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$

3.17. $z = \ln\left(5x^2 + 4y^2\right)$; A (1; 1); $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$

3.18. $z = \ln\left(x^2 + 3y^2\right)$; A (1; 1); $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

3.19. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; A (2; 1); $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

3.20. $z = x^2 + xy + y^2$; A (1; 1); $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$

3.21. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$; A (1; 1); $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$

3.22. $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$; A (1; –2); $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$

3.23. $z = \ln\left(2x^2 + y^3\right)$; A (1; 2); $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

3.24. $z = arctg(xy)$; A (2; 3); $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

3.25. $z = \dfrac{3x}{y^2}$; A (3; 4); $\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$

Справочный материал

1. Таблица производных элементарных функций

1. $\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$

2. $(\cos x)' = -\sin x$

3. $(\sin x)' = \cos x$

4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

9. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

12. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

2. Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $C' = 0, C = const.$.

Список литературы

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: Интеграл–Пресс, 2002. – 415с.
2. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – 14-е изд. – М.: Физматлитиздат, 2005. – 336с.
3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 : [учеб. пособие для вузов] .- 7-е изд., испр. .– М.: ОНИКС [и др.], 2008 . – 448 с.