Численные методы в MathCad и MS Excel

Системы линейных уравнений

и нелинейные уравнения

Методические указания

Иваново 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Численные методы в MathCad и MS Excel

Системы линейных уравнений и нелинейные уравнения

Методические указания

Составитель М.А. Лысова

Иваново 2016

УДК 519.6 (076)

Составитель М.А. Лысова

Численные методы в MathCad и MS Excel. Системы линейных уравнений и нелинейные уравнения: метод. указания / сост. М.А. Лысова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2016. – 32 с.

Методические указания содержат изложенный в краткой форме теоретический материал, относящийся к основам численных методов решения систем линейных уравнений и нелинейных уравнений. Представлены примеры решения типовых задач с применением табличного процессора MS Excel и компьютерного пакета MathCad. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены студентам, изучающим дисциплину «Численные методы», а также всем желающим пополнить, укрепить и систематизировать свои знания при самостоятельном изучении численных методов.

Рецензент

доктор технических наук, профессор А.Н. Лабутин

(Ивановский государственный химико-технологический университет)

Введение

Многие инженерные и научные задачи приводят к необходимости решения линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений, приближенного вычисления, дифференцирования и интегрирования функций, решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений и т.д. При этом для многих задач известно только о сосуществовании решения, но не существует конкретного аналитического метода, представляющего ее решение.

В этом случае используются методы численного решения указанной задачи. Решение задач с использованием численных методов проводится либо на базе алгоритмических языков программирования, либо на основе специализированных пакетов прикладных программ (MathCad, Mathematica, MatLab и др.) и табличных процессоров (Microsoft Excel, LibreOffice Calc, OpenOffice Calc).

Цель данных методических рекомендаций – помочь студентам овладеть численными методами решения систем линейных уравнений и решения нелинейных уравнений с помощью математического пакета MathCad и табличного процессора MS Excel.

1. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации и методом Зейделя

1.1. Методы простой итерации и Зейделя

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

или в матричном виде:

$$AX = B.$$

Для решения системы (1.1) методом простой итерации и методом Зейделя достаточно выполнения условий:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \, i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

то есть в каждой строке матрицы A модуль элемента, стоящего на главной диагонали, больше суммы модулей остальных элементов этой строки.

Если это условие не выполняется, то путем элементарных преобразований над строками матрицы A необходимо привести матрицу к такому виду, чтобы условие (1.2) было выполнено. Под элементарными преобразованиями над строками матрицы понимаются следующие действия: 1) умножение строки на ненулевое число; 2) перестановка двух строк; 3) прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число.

Следующим шагом в решении системы линейных уравнений методами простой итерации и Зейделя является приведение системы (1.1) к итерационному виду. При выполнении условия (1.2) это можно осуществить, выразив из каждой строки системы элемент, стоящий на главной диагонали:

$$\begin{cases} x_1 = \qquad c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n + d_1, \\ x_2 = c_{21}x_1 + \qquad + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n + d_2, \\ \ldots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1} \qquad + d_n, \end{cases} \tag{1.3}$$

или в матричном виде:

$$X = CX + D.$$

В качестве начального приближения можно взять вектор D, то есть $x_1^{(0)} = d_1, x_2^{(0)} = d_2, \ldots, x_n^{(0)} = d_n$.

Тогда каждое последующее приближение, согласно **методу простой итерации,** вычисляется по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + \qquad + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} \qquad + d_n, \end{cases} \tag{1.4}$$

то есть, например, для вычисления первого приближения нужно в систему (1.3) подставить значения нулевого приближения.

Метод Зейделя отличается от метода простых итераций тем, что при вычислении $x_2^{(k+1)}$ используется найденное на этой итерации значение $x_1^{(k+1)}$, при вычислении $x_3^{(k+1)}$ используются найденные на этой итерации значения $x_1^{(k+1)}$ и $x_2^{(k+1)}$ и т.д., при вычислении $x_n^{(k+1)}$ используются $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, …, $x_{n-1}^{(k+1)}$:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \qquad c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\
x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + \qquad + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\
\ldots \\
x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k+1)} + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \qquad + d_n.
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$
\max_{1 \le i \le n} \{\Delta_i\} < \varepsilon , \tag{1.6}
$$

где $\Delta_i = \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|$, $i = \overline{1,n}$.

1.2. Пример выполнения лабораторной работы

Задание. Дана система трех линейных уравнений с тремя с неизвестными:

$$
\begin{cases}
3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, \quad (I) \\
0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5, \quad (II) \\
2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5. \quad (III)
\end{cases}
$$

Требуется:

1. С помощью элементарных преобразований привести систему к итерационному виду.

2. Просчитать два шага вручную:

   2.1) методом простой итерации;

   2.2) методом Зейделя.

3. Найти решение системы с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, используя MS Excel:

   3.1) методом простой итерации;

   3.2) методом Зейделя.

4. Проверить найденное решение, используя MS Excel и Mathcad (или Maxima).

5. Сделать выводы о применяемых методах.

Решение. 1. Преобразуем систему таким образом, чтобы модули элементов главной диагонали были больше суммы модулей остальных элементов в данной строке.

$$\begin{cases} 5{,}6x_1 - 4{,}3x_2 + 2{,}6x_3 = 7{,}3, & (I + III) \\ 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, & (I) \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5. & (II) \end{cases}$$

Первую строку умножаем на 2:

$$\begin{cases} 11{,}2x_1 - 8{,}6x_2 + 5{,}2x_3 = 14{,}6, \\ 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5. \end{cases}$$

Складываем первую и третью строки и результат записываем в первую строку:

$$\begin{cases} 12{,}0x_1 - 7{,}3x_2 - 1{,}2x_3 = 8{,}1, \\ 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5. \end{cases}$$

Теперь запишем систему в итерационном виде. Из первого уравнения выражаем x_1, из второго – x_2 и из третьего – x_3. Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6750 + 0{,}6083x_2 + 0{,}100x_3, \\ x_2 = -0{,}2435 + 0{,}2783x_1 + 0{,}3304x_3, \\ x_3 = 1{,}0156 + 0{,}1250x_1 + 0{,}2031x_2. \end{cases}$$

2.1. Просчитаем два шага вручную методом простой итерации.

В качестве начального приближения выбираем вектор:

$\mathrm{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}6750 \\ -0{,}2435 \\ 1{,}0156 \end{pmatrix}$. Тогда следующее приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \ 0{,}6750 + 0{,}6083x_2^{(0)} + 0{,}100x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = -0{,}243 + 0{,}2783x_1^{(0)} + 0{,}3304x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \ 1{,}0156 + 0{,}1250x_1^{(0)} + 0{,}2031x_2^{(0)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0{,}675 + 0{,}6083 \cdot (-0{,}2435) + 0{,}1 \cdot 1{,}0156 = 0{,}6284, \\ x_2^{(1)} = -0{,}2435 + 0{,}2783 \cdot 0{,}6750 + 0{,}3304 \cdot 1{,}0156 = 0{,}2751, \\ x_3^{(1)} = 1{,}0156 + 0{,}125 \cdot 0{,}6750 + 0{,}2031 \cdot (-0{,}2435) = 1{,}0505. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\{\,|0{,}6750 - 0{,}6284|;\ |-0{,}2435 - 0{,}2751|;\ |1{,}0156 - 1{,}0505|\} = 0{,}5186 > \varepsilon$$

Второе приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}675 + 0{,}6083 \cdot 0{,}2751 + 0{,}1 \cdot 1{,}0505 = 0{,}9474, \\ x_2^{(2)} = -0{,}2435 + 0{,}2783 \cdot 0{,}6284 + 0{,}3304 \cdot 1{,}0505 = 0{,}2785, \\ x_3^{(2)} = 1{,}0156 + 0{,}125 \cdot 0{,}6284 + 0{,}2031 \cdot 0{,}2751 = 1{,}1500. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\{\,|0{,}6284 - 0{,}9474|;\ |0{,}2751 - 0{,}2785|;\ |1{,}1500 - 1{,}0505|\} = 0{,}319 > \varepsilon.$$

2.2. Просчитаем два шага вручную методом Зейделя.

В качестве начального приближения выбираем вектор:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}6750 \\ -0{,}2435 \\ 1{,}0156 \end{pmatrix}.$$

Тогда следующее приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \ 0{,}6750 + 0{,}6083x_2^{(0)} + 0{,}100x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = -0{,}243 + 0{,}2783x_1^{(1)} + 0{,}3304x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \ 1{,}0156 + 0{,}1250x_1^{(1)} + 0{,}2031x_2^{(1)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0{,}675 + 0{,}6083 \cdot (-0{,}2435) + 0{,}1 \cdot 1{,}0156 = 0{,}6284, \\ x_2^{(1)} = -0{,}2435 + 0{,}2783 \cdot 0{,}6284 + 0{,}3304 \cdot 1{,}0156 = 0{,}2669, \\ x_3^{(1)} = 1{,}0156 + 0{,}125 \cdot 0{,}6284 + 0{,}2031 \cdot 0{,}2699 = 1{,}1490. \end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\{\,|0{,}6750-0{,}6284|;\ |-0{,}2435-0{,}2669|;\ |1{,}0156-1{,}1490|\,\}=0{,}5104>\varepsilon$$

Второе приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0{,}675+0{,}6083\cdot 0{,}2669+0{,}1\cdot 1{,}149=0{,}9523,\\ x_2^{(2)}=-0{,}2435+0{,}2783\cdot 0{,}9523+0{,}3304\cdot 1{,}149=0{,}4017,\\ x_3^{(2)}=1{,}0156+0{,}125\cdot 0{,}9523+0{,}2031\cdot 0{,}4017=1{,}2162.\end{cases}$$

Проверим эмпирическое условие окончания итерационного процесса:

$$\max\{|0{,}6284-0{,}9523|;\ |0{,}2699-0{,}4017|;\ |1{,}1490-1{,}2162|\}=0{,}3239>\varepsilon$$

3.1. Используя MS Excel, найдем решение системы методом простой итерации.

А. Располагаем на рабочем листе исходные данные (рис. 1) и вычисляем норму матрицы С.

Буфер обме... | Шрифт | Выравнивание | Число

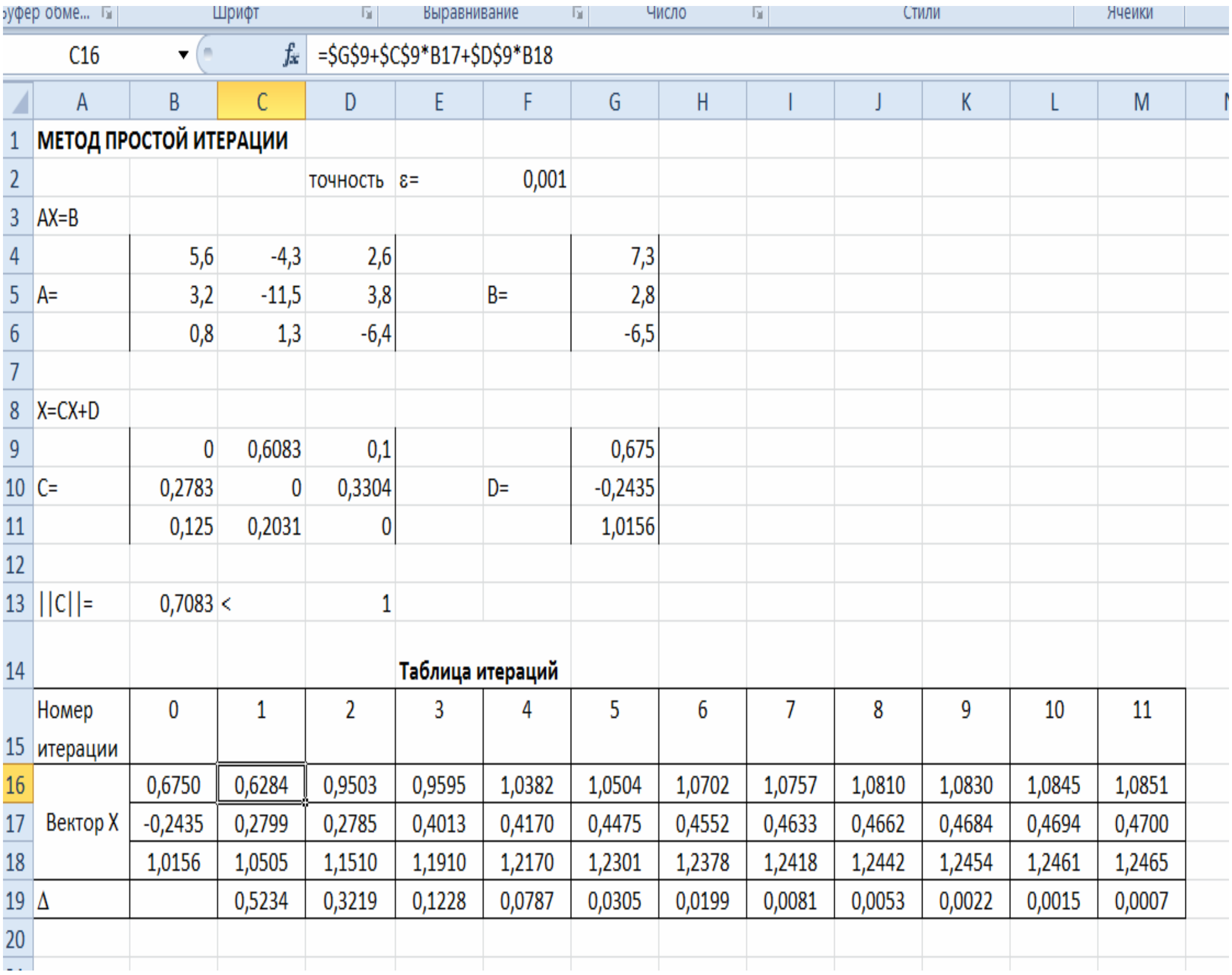
B13 =МАКС(ABS(C9)+ABS(D9); ABS(B10)+ABS(D10); ABS(B11)+ABS(C11))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ**									
2				точность	ε=	0,001				
3	AX=B									
4		5,6	-4,3	2,6			7,3			
5	A=	3,2	-11,5	3,8		B=	2,8			
6		0,8	1,3	-6,4			-6,5			
7										
8	X=CX+D									
9		0	0,6083	0,1			0,675			
10	C=	0,2783	0	0,3304		D=	-0,2435			
11		0,125	0,2031	0			1,0156			
12										
13	||C||=	0,7083	<	1						

Рис.1. Исходные данные для метода простой итерации

Б. Последовательными вычислениями уточняем решение системы линейных уравнений (рис. 2). С этой целью формируем таблицу итераций. В качестве начального приближения выбираем столбец D: $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6750 \\ -0,2435 \\ 1,0156 \end{pmatrix}$.

В столбец **C16:C18** вводим формулу для формирования первого приближения по методу итераций согласно выражениям (1.4). Например, для ячейки **C16** вводим выражение **$G$9+$C$9*B17+$D$9*B18**. Аналогично для ячеек **C17** и **C18**. Знак **$** означает, что при копировании формулы ячейка не будет меняться. В ячейку **C19** вводим выражение согласно формуле (1.6), то есть находим максимум между модулями разности начального и первого приближений: **=МАКС(ABS(C16-B16); ABS(C17-B17); ABS(C18-B18))**.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ												
2				точность	ε=	0,001							
3	AX=B												
4		5,6	-4,3	2,6			7,3						
5	A=	3,2	-11,5	3,8		B=	2,8						
6		0,8	1,3	-6,4			-6,5						
7													
8	X=CX+D												
9		0	0,6083	0,1			0,675						
10	C=	0,2783	0	0,3304		D=	-0,2435						
11		0,125	0,2031	0			1,0156						
12													
13	||C||=	0,7083	<	1									
14					Таблица итераций								
15	Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16	Вектор X	0,6750	0,6284	0,9503	0,9595	1,0382	1,0504	1,0702	1,0757	1,0810	1,0830	1,0845	1,0851
17		-0,2435	0,2799	0,2785	0,4013	0,4170	0,4475	0,4552	0,4633	0,4662	0,4684	0,4694	0,4700
18		1,0156	1,0505	1,1510	1,1910	1,2170	1,2301	1,2378	1,2418	1,2442	1,2454	1,2461	1,2465
19	Δ		0,5234	0,3219	0,1228	0,0787	0,0305	0,0199	0,0081	0,0053	0,0022	0,0015	0,0007
20													

Рис.2. Уточнение решения методом простой итерации

Проверяем условие $\Delta < \varepsilon$. Если оно не выполняется, то копируем столбцы **C16:C19** в столбцы **D16:D19**, то есть вычисляем второе приближение и опять сравниваем значение ячейки **D19** с заданной точностью ε. Продолжаем вычисления до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. В данном примере, как это видно из рис. 2, для достижения заданной точности необходимо 11 итераций. Тогда ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 1{,}085 \\ 0{,}470 \\ 1{,}247 \end{pmatrix} \pm 0{,}001$.

3.2. Используя MS Excel, найдем решение системы методом Зейделя.

А. Располагаем на новом рабочем листе исходные данные.

Б. Последовательными вычислениями уточняем решение системы линейных уравнений методом Зейделя (рис. 3). В ячейку **C16** вводим выражение, аналогичное для метода простой итерации. В ячейки **C17** и **C18** вводим выражения согласно формуле (1.5). Например, для ячейки **C17** получаем: **=$G$10+$B$10*C16+$D$10*B18.**

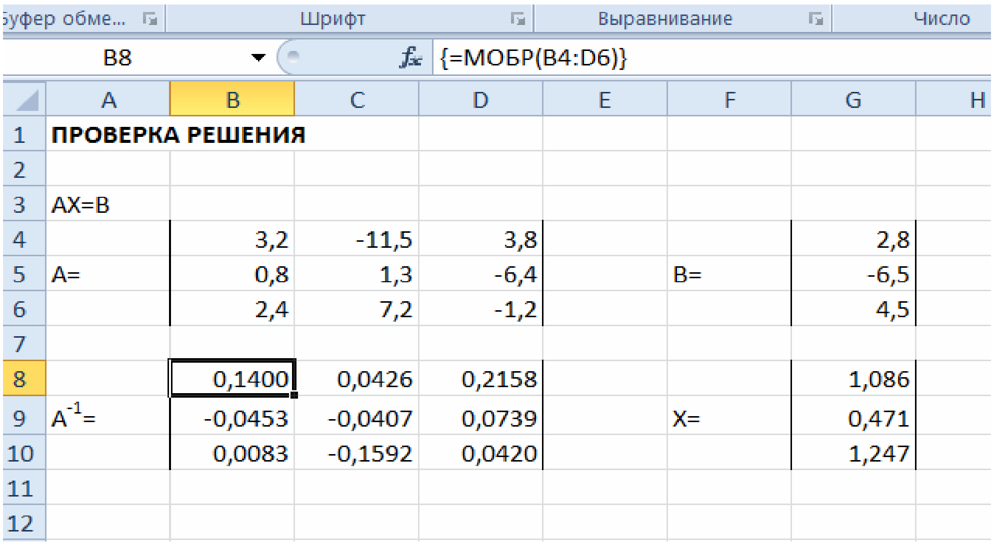
C17 | f_x | =$G$10+$B$10*C16+$D$10*B18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ**										
2				точность	ε=	0,001					
3	AX=B										
4		5,6	-4,3	2,6			7,3				
5	A=	3,2	-11,5	3,8		B=	2,8				
6		0,8	1,3	-6,4			-6,5				
7											
8	X=CX+D										
9		0	0,6083	0,1			0,675				
10	C=	0,2783	0	0,3304		D=	-0,2435				
11		0,125	0,2031	0			1,0156				
12											
13											
14											
15	Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
16	Вектор X	0,6750	0,628439	0,952222	1,040489	1,071091	1,081098	1,084414	1,08551	1,085872	
17		-0,2435	0,266949	0,400926	0,447853	0,463164	0,46824	0,469917	0,470471	0,470655	
18		1,0156	1,148372	1,216056	1,23662	1,243555	1,245837	1,246592	1,246841	1,246924	
19	Δ		0,5104	0,3238	0,0883	0,0306	0,0100	0,0033	0,0011	0,0004	
20											
21											

Рис.3. Уточнение корня методом Зейделя

В ячейку **C19** вводим выражение согласно формуле (1.6). Далее, как и в методе простой итерации, проверяем условие $\Delta < \varepsilon$. Для достижения заданной точности необходимо 8 итераций.

4.1. Проверим найденное решение, используя MS Excel. Вычислим матрицу, обратную матрице А (рис.4). Для этого в ячейку **C8** вводим формулу: **=МОБР(B4:D6)**. Затем, выделив область **B8:D10**, необходимо нажать клавишу **F2** и после этого комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Вектор решения X, вычисляем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Для этого в ячейку G8 вводим формулу: **=МУМНОЖ(B8:D10;G4:G6)**. Для получения вектора X необходимо выполнить те же действия, что и для получения обратной матрицы.



Буфер обме... | Шрифт | Выравнивание | Число

B8 | {=МОБР(B4:D6)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ**							
2								
3	AX=B							
4		3,2	-11,5	3,8			2,8	
5	A=	0,8	1,3	-6,4		B=	-6,5	
6		2,4	7,2	-1,2			4,5	
7								
8		0,1400	0,0426	0,2158			1,086	
9	A^{-1}=	-0,0453	-0,0407	0,0739		X=	0,471	
10		0,0083	-0,1592	0,0420			1,247	
11								
12								

Рис.4. Проверка решения методом обратной матрицы

Таким образом, получили решение исходной системы.

4.2. Воспользуемся средствами MathCad. Для решения систем линейных и нелинейных уравнения можно воспользоваться блоком ***Given Find*** (рис. 5).

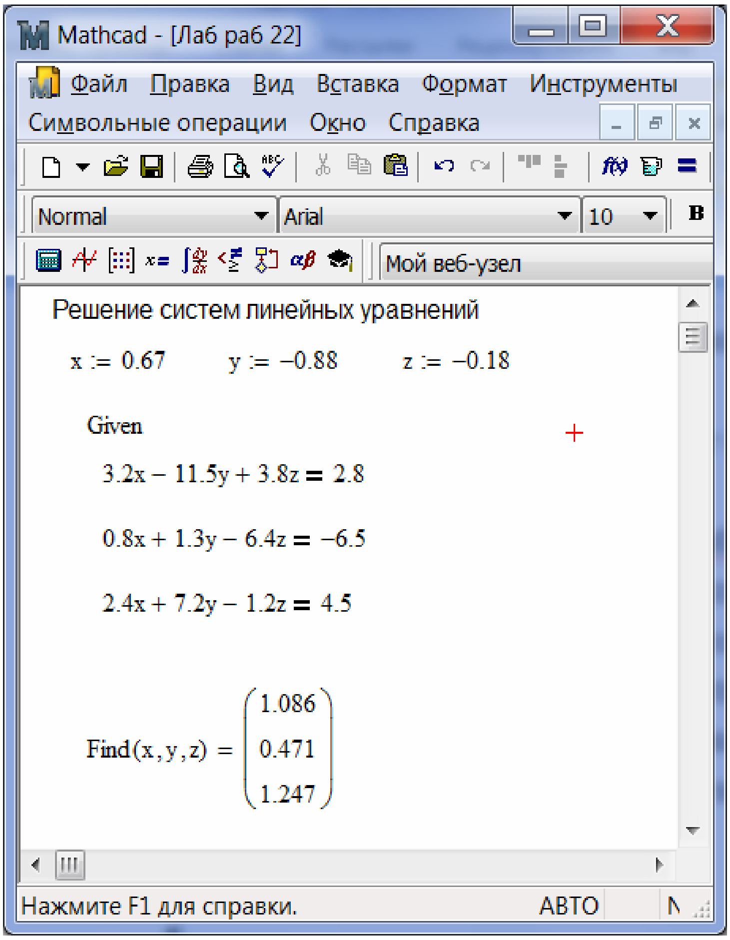


Рис.5. Решение систем линейных уравнений в MathCad

Необходимо только предварительно задать произвольное начальное приближение решения. Кроме того, при записи уравнений системы в блок ***Given…Find***, необходимо сначала набирать **Ctrl+ “=”**, а затем вводить левые и правые части уравнений. Также в этом блоке нельзя пользоваться индексными переменными.

5. Таким образом, систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными привели к итерационному виду, получили её решение двумя итерационными методами (методом простой итерации за 11 итераций и методом Зейделя за 8 итераций) с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, проверили решение методом обратной матрицы и с использованием блока ***Given…Find*** пакета MathCad.

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 1{,}085 \\ 0{,}470 \\ 1{,}247 \end{pmatrix} \pm 0{,}001.$

1.3. Задания для самостоятельной работы

Ход выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретический материал по данной теме.

2. Привести систему к итерационному виду.

3. Просчитать два шага вручную:

3.1) методом простой итерации;

3.2) методом Зейделя.

4. Найти решение системы с заданной точностью ε, используя MS Excel:

4.1) методом простой итерации;

4.2) методом Зейделя.

5. Проверить найденное решение, используя MS Excel и Mathcad (Maxima).

6. Найти «точное» решение системы в MathCad.

Таблица 1

Задания к лабораторной работе № 1

Номер варианта	**Система**	**Номер варианта**	**Система**
1	$\begin{cases} 31x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 2, \\ 1{,}9x_1 + 31x_2 + 2{,}1x_3 = 21, \\ 7{,}5x_1 + 3{,}8x_2 + 48x_3 = 56. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 91x_1 + 5{,}6x_2 + 7{,}8x_3 = 9, \\ 3{,}8x_1 + 51x_2 + 2{,}8x_3 = 67, \\ 4{,}1x_1 + 5{,}7x_2 + 12x_3 = 58. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 33x_1 + 2{,}1x_2 + 2{,}8x_3 = 8, \\ 4{,}1x_1 + 37x_2 + 4{,}8x_3 = 57, \\ 2{,}7x_1 + 1{,}8x_2 + 11x_3 = 32. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 76x_1 + 5{,}8x_2 + 4{,}7x_3 = 101, \\ 3{,}8x_1 + 41x_2 + 2{,}7x_3 = 97, \\ 2{,}9x_1 + 2{,}1x_2 + 38x_3 = 78. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 32x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 65, \\ 0{,}5x_1 + 34x_2 + 1{,}7x_3 = -2{,}4, \\ 1{,}6x_1 + 2{,}3x_2 - 15x_3 = 43. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 54x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = -35, \\ 4{,}2x_1 + 17x_2 - 2{,}3x_3 = 27, \\ 3{,}4x_1 + 2{,}4x_2 + 74x_3 = 19. \end{cases}$

Продолжение таблицы 1

4	$\begin{cases} 36x_1+1{,}8x_2-4{,}7x_3=38, \\ 2{,}7x_1-36x_2+1{,}9x_3=4, \\ 1{,}5x_1+4{,}5x_2+33x_3=-16. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 56x_1+2{,}7x_2-1{,}7x_3=19, \\ 3{,}4x_1-36x_2-6{,}7x_3=-24, \\ 0{,}8x_1+1{,}3x_2+37x_3=12. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 27x_1+0{,}9x_2-1{,}5x_3=35, \\ 4{,}5x_1-28x_2+6{,}7x_3=26, \\ 5{,}1x_1+3{,}7x_2-14x_3=-14. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 45x_1-3{,}5x_2+7{,}4x_3=25, \\ 3{,}1x_1-6x_2-2{,}3x_3=-15, \\ 0{,}8x_1+7{,}4x_2-5x_3=64. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 38x_1+6{,}7x_2-1{,}2x_3=52, \\ 6{,}4x_1+13x_2-2{,}7x_3=38, \\ 2{,}4x_1-4{,}5x_2+35x_3=-6. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 54x_1-6{,}2x_2-0{,}5x_3=5{,}2, \\ 3{,}4x_1+23x_2+0{,}8x_3=-8, \\ 2{,}4x_1-1{,}1x_2+38x_3=18. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 78x_1+5{,}3x_2+4{,}8x_3=18, \\ 3{,}3x_1+11x_2+1{,}8x_3=23, \\ 4{,}5x_1+3{,}3x_2+28x_3=34. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 38x_1+4{,}1x_2-2{,}3x_3=48, \\ -2{,}1x_1+39x_2-5{,}8x_3=33, \\ 1{,}8x_1+1{,}1x_2-21x_3=58. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 17x_1-2{,}2x_2+30x_3=18, \\ 2{,}1x_1+19x_2-2{,}3x_3=28, \\ 4{,}2x_1+3{,}9x_2-31x_3=51. \end{cases}$	22	$\begin{cases} 28x_1+3{,}8x_2-32x_3=45, \\ 2{,}5x_1-28x_2+3{,}3x_3=71, \\ 6{,}5x_1-7{,}1x_2+48x_3=63. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 33x_1+3{,}7x_2+4{,}2x_3=58, \\ 2{,}7x_1+23x_2-2{,}9x_3=61, \\ 4{,}1x_1+4{,}8x_2-50x_3=70. \end{cases}$	23	$\begin{cases} 71x_1+6{,}8x_2+6{,}1x_3=70, \\ 5{,}0x_1+48x_2+5{,}3x_3=61, \\ 8{,}2x_1+7{,}8x_2+71x_3=58. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 37x_1+3{,}1x_2+4{,}0x_3=50, \\ 4{,}1x_1+45x_2-4{,}8x_3=49, \\ -2{,}1x_1-3{,}7x_2+18x_3=27. \end{cases}$	24	$\begin{cases} 41x_1+5{,}2x_2-5{,}8x_3=70, \\ 3{,}8x_1-31x_2+4{,}0x_3=53, \\ 7{,}8x_1+5{,}3x_2-63x_3=58. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 37x_1-2{,}3x_2+4{,}5x_3=24, \\ 2{,}5x_1+47x_2-7{,}8x_3=35, \\ 1{,}6x_1+5{,}3x_2+13x_3=-24. \end{cases}$	25	$\begin{cases} 63x_1+5{,}2x_2-0{,}6x_3=15, \\ 3{,}4x_1-23x_2+3{,}4x_3=27, \\ 0{,}8x_1+1{,}4x_2+35x_3=-23. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 15x_1+2{,}3x_2-3{,}7x_3=45, \\ 2{,}8x_1+34x_2+5{,}8x_3=-32, \\ 1{,}2x_1+7{,}3x_2-23x_3=56. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 17x_1+5{,}8x_2-4{,}1x_3=8, \\ 2{,}8x_1-17x_2+3{,}5x_3=17, \\ 1{,}3x_1+3{,}3x_2+27x_3=21. \end{cases}$

13	$\begin{cases} 13x_1 - 1,7x_2 + 4,2x_3 = 28, \\ 1,8x_1 + 34x_2 + 2,1x_3 = 11, \\ 1,9x_1 2,8x_2 + 17x_3 = 7. \end{cases}$	27	$\begin{cases} 48x_1 + 3,8x_2 + 7,5x_3 = 56, \\ 2,1x_1 + 31x_2 1,9x_3 = 21, \\ 1,9x_1 + 2,8x_2 + 31x_3 = 2. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 12x_1 + 5,7x_2 + 4,1x_3 = 58, \\ 2,8x_1 + 51x_2 + 3,8x_3 = 67, \\ 7,8x_1 + 5,6x_2 + 91x_3 = 98. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 11x_1 + 1,8x_2 + 2,7x_3 = 32, \\ 4,8x_1 + 37x_2 + 4,1x_3 = 57, \\ 2,8x_1 + 2,1x_2 + 33x_3 = 8. \end{cases}$

2. Решение нелинейных уравнений

Пусть требуется решить уравнение вида:

$$f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Значение переменной x, при которой уравнение (2.1) обращается в верное равенство, называется корнем уравнения.

Процесс численного (приближенного) решения уравнения можно условно разбить на два этапа:

1) отделение (локализация) корня, то есть указание границ отрезка, в котором содержится значение корня;

2) уточнение корня с заданной точностью ε.

2.1. Отделение корней

Отделение корней можно осуществлять двумя способами: графическим и аналитическим. На практике удобно совместить эти два способа, а именно, действовать по алгоритму:

1) построить график функции $y = f(x)$ и визуально оценить отрезок $[a; b]$, где находится точка пересечения графика функции с осью Ox.

2) проверить **достаточное условие существования единственного корня на отрезке** $[a; b]$: если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция

$y = f(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков (то есть $f(a)\cdot f(b) < 0$), а производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.

2.2. Метод половинного деления (дихотомии)

Алгоритм.

1. Пусть $[a_0; b_0]$ – один из отрезков, на котором уравнение (2.1) имеет единственный корень.

2. Найденный отрезок делим пополам точкой $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

3. Вычисляем $f(x_0)$.

4. Определить новый отрезок $[a_1; b_1]$ следующим образом:

если $f(a_0)\cdot f(x_0) < 0$, то выбираем отрезок $[a_1; b_1]=[a_0; x_0]$; (2.2)

если $f(x_0)\cdot f(b_0) < 0$, то выбираем отрезок $[a_1; b_1]=[x_0; b_0]$. (2.3)

5. Выбранный отрезок опять делим пополам и проверяем, в каком из полученных находится корень уравнения.

6. Корень считается найденным, когда $|b_i - a_i| < \varepsilon$. (2.4)

2.3. Метод хорд

Алгоритм.

1. Пусть $[a; b]$ – один из отрезков, на котором уравнение (2.1) имеет единственный корень.

2. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a; b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Выбрать

$$x_0 = a, \text{ если } f'(a)\cdot f''(a) > 0; \quad (2.5)$$

$$x_0 = b\text{, если } f'(b)\cdot f''(b) < 0.$$

4. Вычислить следующее приближение к корню:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)};\ x_0 = a; \tag{2.6}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},\ \ x_0 = b. \tag{2.7}$$

5. Оценить погрешность согласно выражению $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$. (2.8)

2.4. Метод касательных (Ньютона)

Алгоритм.

1. Пусть $[a;b]$ – один из отрезков, на котором уравнение (2.1) имеет единственный корень.

2. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Выбрать:

$$\begin{aligned} x_0 &= a\text{, если } f(a)\cdot f''(a) > 0; \\ x_0 &= b\text{, если } f(b)\cdot f''(b) > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

4. Вычислить следующее приближение к корню:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.10}$$

5. Оценить погрешность согласно выражению $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$.

2.5. Комбинированный метод хорд и касательных

Приближение к искомому корню происходит одновременно с двух сторон отрезка, на котором отделен корень уравнения. С одной стороны по методу хорд, а с другой – по методу касательных.

Алгоритм.

1. Пусть $[a;b]$ – один из отрезков, на котором уравнение (2.1) имеет единственный корень.

2. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Пусть $f(a)\cdot f''(a)>0$, тогда приближение по методу касательных будет происходить слева, а по методу хорд – справа. Итерационные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)},\ a_0 = a; \\ b_{n+1} &= b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)},\ b_0 = b. \end{aligned} \tag{2.11}$$

4. Пусть $f(b)\cdot f''(b)>0$, тогда приближение по методу касательных будет происходить справа, а по методу хорд – слева. Итерационные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)},\ b_0 = b; \\ a_{n+1} &= a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)},\ a_0 = a. \end{aligned} \tag{2.12}$$

5. Вычисления прекращаются, когда

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon . \tag{2.13}$$

2.6. Пример выполнения лабораторной работы

Задание. Дано нелинейное уравнение $\arccos x^2 - x = 0$. Необходимо:

1) отделить корни графически;

2) проверить выполнение достаточных условий существования единственного корня на отрезке;

3) исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$ и убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются;

4) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом половинного деления;

5) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом хорд;

6) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом касательных;

7) найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ комбинированным методом;

8) сделать вывод.

Решение. 1. В MathCad построим график кривой $f(x) = \arccos x^2 - x$ (рис. 6).

Для этого предварительно необходимо задать функцию, то есть записать $f(x) := \mathrm{acos}(x^2) - x$.

Затем выбираем пункт меню  – двумерный график. Справа от области построения вводим название функции $f(x)$, внизу – наименование независимой переменной – x.

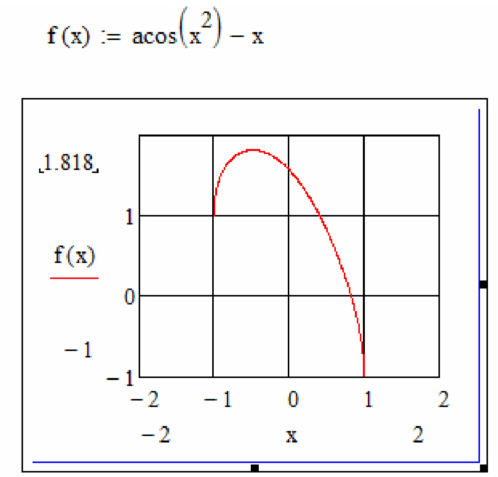


Рис.6. Графическое отделение корней в MathCad

По умолчанию линии сетки на графике не формируются. Чтобы их задать, необходимо правой кнопкой мыши щелкнуть по графику, выбрать меню **Формат…**. В появившемся окне (рис. 7) на вкладке **Оси X,Y** поставить галочку против меню **Линии сетки**. Кроме того, можно изменить цвет линии сетки (по умолчанию он салатовый).

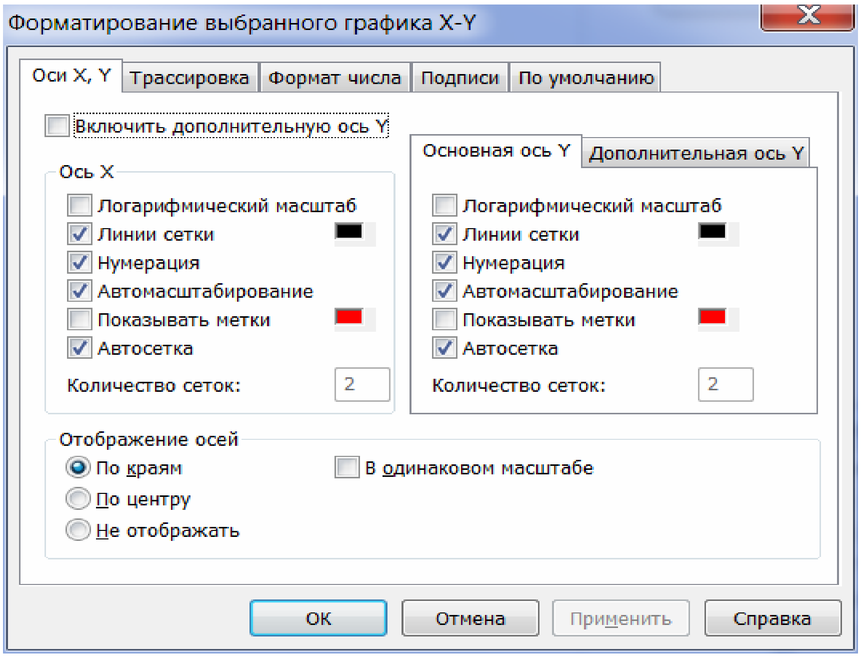


Рис.7. Форматирование графика

Если визуально невозможно определить границы отрезка, где график пересекает ось *Ox*, то можно изменить интервал отображения осей. Для этого необходимо выбрать левое (затем и правое) нижнее число и изменить его.

Из рис. 6 видно, что искомый корень находится в отрезке $[0;1]$.

2. Проверим достаточные условия существования единственного корня на отрезке $[0;1]$ (см. п. 2.1). Из рис. 6 видно, что функция непрерывна, монотонно убывает. Проверим аналитически, что на концах отрезка функция принимает разные знаки. Для этого в MathCad вычислим значения функции в концах отрезка (рис. 8).

$$f(0) = 1.571$$

$$f(1) = -1$$

Рис. 8. Вычисление значений функции на концах отрезка

3. Исследуем первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[0;1]$. В MathCad вычисляем производные, как показано на рис. 9. На панели инструментов **Математические** нажимаем кнопку $\frac{d}{dx}$, вводим название функции и получаем результат. Аналогично вычисляем вторую производную. Затем строим графики производных на исследуемом отрезке, в нашем примере это отрезок $[0;1]$. Обе функции можно изобразить на одном графике, их нужно вводить через запятую.

$$p1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow -\frac{2\cdot x}{\sqrt{1-x^4}} - 1$$

$$p2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow -\frac{4\cdot x^4}{\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$$

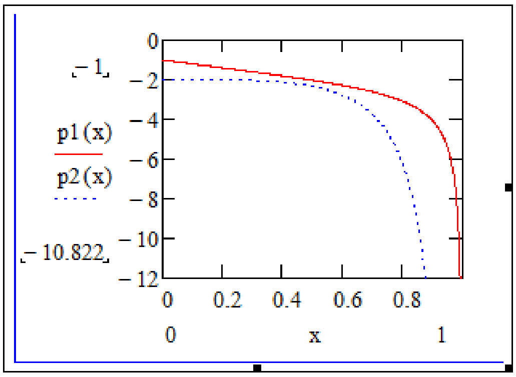
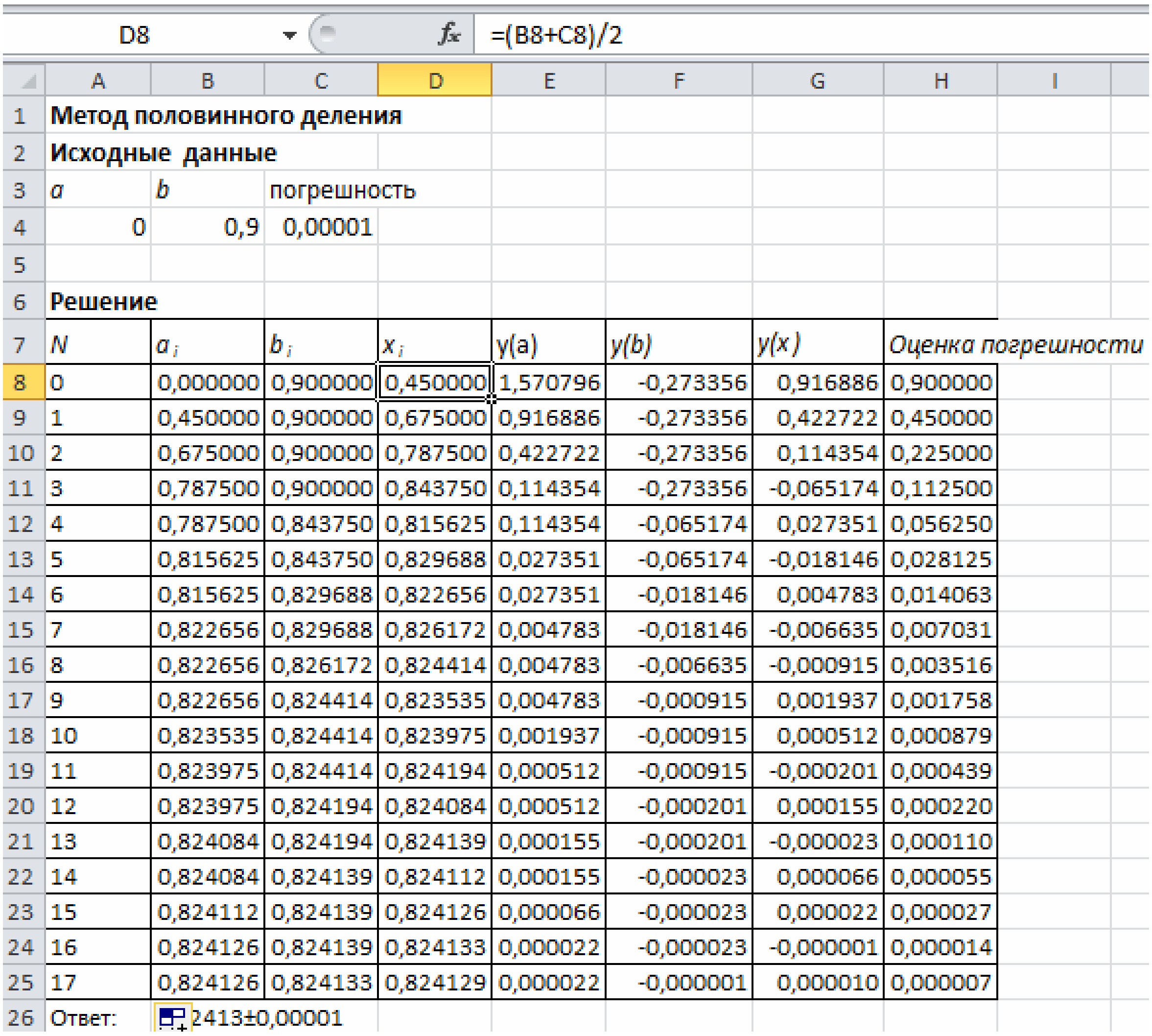


Рис. 9. Исследование первой и второй производной в MathCad

Из выражения производных (рис. 9) очевидно, что они не определены при $x=1$, поэтому в дальнейшем следует рассматривать отрезок $[0;0{,}9]$. Из рис. 9 видно, что на отрезке $[0;0{,}9]$ первая и вторая производная сохраняют свой знак (в нашем примере они обе отрицательны) и не обращаются в ноль. Можно также убедиться, что значения функции в концах отрезка $[0;0{,}9]$ различны.

4. Найдем значение корня с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ методом половинного деления (см. п. 2.2).

В Microsoft Excel в ячейки **B8** и **C8** вводим соответственно начало и конец отрезка. В ячейке **D8** рассчитывается значение середины отрезка. В ячейках **E8:G8** вычисляются значения функции в указанных точках. В нашем примере функция имеет вид $f(x) = \arccos x^2 - x$. В ячейку **H8** записываем формулу оценки погрешности (2.4), то есть модуль разности между концами отрезка: **=ABS(C8-B8)**.



D8 | f_x | =(B8+C8)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Метод половинного деления**								
2	**Исходные данные**								
3	*a*	*b*	погрешность						
4	0	0,9	0,00001						
5									
6	**Решение**								
7	*N*	*a_i*	*b_i*	*x_i*	y(a)	*y(b)*	*y(x)*	*Оценка погрешности*	
8	0	0,000000	0,900000	0,450000	1,570796	-0,273356	0,916886	0,900000	
9	1	0,450000	0,900000	0,675000	0,916886	-0,273356	0,422722	0,450000	
10	2	0,675000	0,900000	0,787500	0,422722	-0,273356	0,114354	0,225000	
11	3	0,787500	0,900000	0,843750	0,114354	-0,273356	-0,065174	0,112500	
12	4	0,787500	0,843750	0,815625	0,114354	-0,065174	0,027351	0,056250	
13	5	0,815625	0,843750	0,829688	0,027351	-0,065174	-0,018146	0,028125	
14	6	0,815625	0,829688	0,822656	0,027351	-0,018146	0,004783	0,014063	
15	7	0,822656	0,829688	0,826172	0,004783	-0,018146	-0,006635	0,007031	
16	8	0,822656	0,826172	0,824414	0,004783	-0,006635	-0,000915	0,003516	
17	9	0,822656	0,824414	0,823535	0,004783	-0,000915	0,001937	0,001758	
18	10	0,823535	0,824414	0,823975	0,001937	-0,000915	0,000512	0,000879	
19	11	0,823975	0,824414	0,824194	0,000512	-0,000915	-0,000201	0,000439	
20	12	0,823975	0,824194	0,824084	0,000512	-0,000201	0,000155	0,000220	
21	13	0,824084	0,824194	0,824139	0,000155	-0,000201	-0,000023	0,000110	
22	14	0,824084	0,824139	0,824112	0,000155	-0,000023	0,000066	0,000055	
23	15	0,824112	0,824139	0,824126	0,000066	-0,000023	0,000022	0,000027	
24	16	0,824126	0,824139	0,824133	0,000022	-0,000023	-0,000001	0,000014	
25	17	0,824126	0,824133	0,824129	0,000022	-0,000001	0,000010	0,000007	
26	Ответ:	2413±0,00001							

Рис. 10. Решение нелинейного уравнения методом половинного деления в Microsoft Excel.

В ячейках B9:C9 из отрезков $[a_0; x_0]$ и $[x_0; b_0]$ согласно условиям (2.2) и (2.3) выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Полученный отрезок обозначается $[a_1; b_1]$. С этой целью можно использовать встроенную логическую функцию **ЕСЛИ**. Например, для ячейки **B9** необходимо ввести условия, представленные на рис. 11. В ячейку **C9** введите формулу самостоятельно.

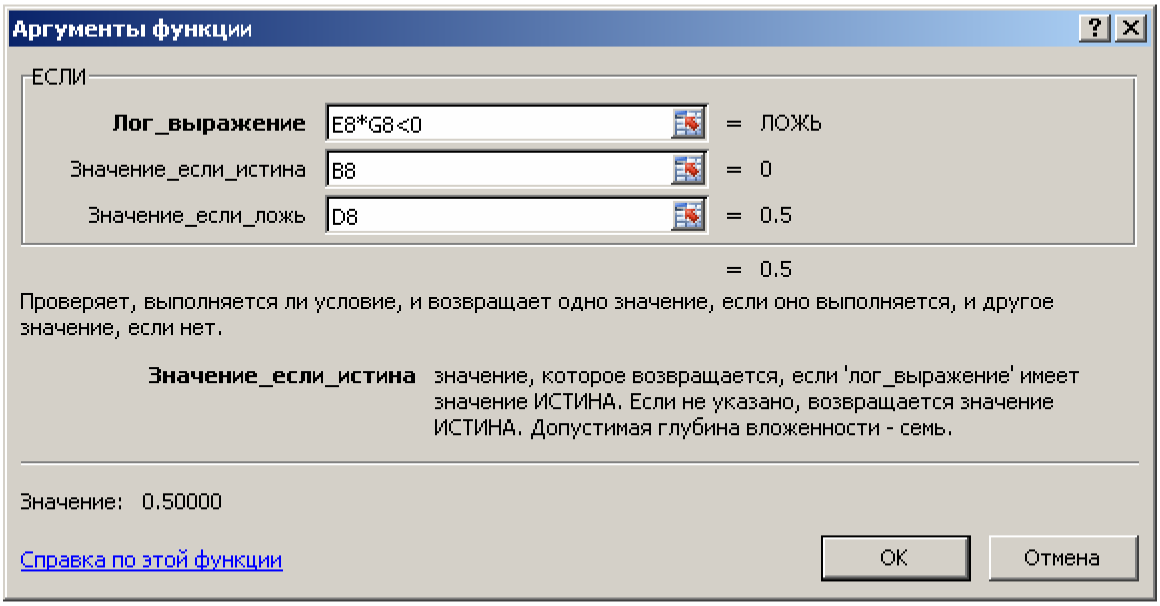


Рис. 11. Формулы уточнения корней по методу половинного деления

Вычисления продолжаются до тех пор, пока погрешность не станет меньше заданной (условие (2.4)).

5. Найдем значение корня методом хорд с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Первую и вторую производную исследовали в п.3 решения данной задачи, убедились, что выполняются условия для применения метода хорд на отрезке $[0; 0{,}9]$.

Используя условия (2.5), выбираем начальное приближение. В MathCad находим значения первой и второй производной в левом и правом концах выделенного отрезка (рис. 12).

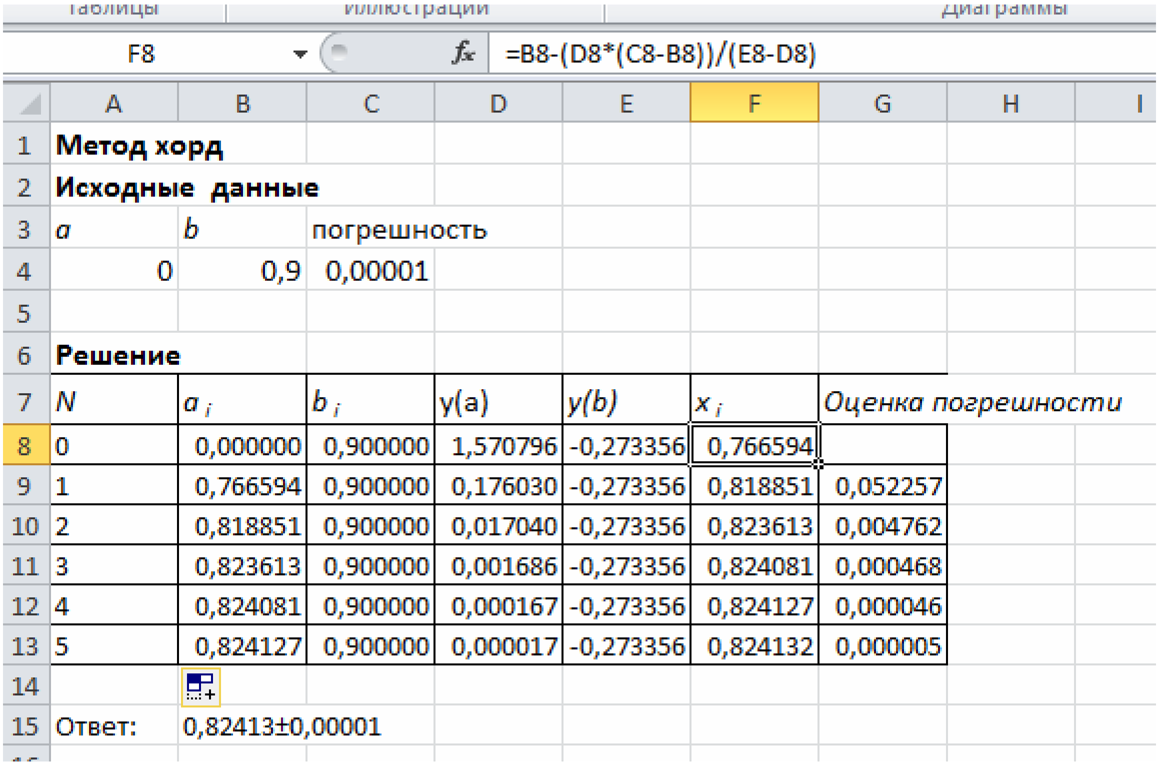
$$p1(0) \cdot p2(0) = 2$$

$$p1(0.9) \cdot p2(0.9) = 66.835$$

Рис. 12. Выбор начального приближения в методе хорд

Так как $f'(a)\cdot f''(a)>0$, то за начальное приближение выбираем левый конец отрезка: $x_0=0$ и вычисления производим по формуле (2.4).

В Microsoft Excel в ячейки **B8:E8** вводим соответственно начало, конец отрезка и значения функции в них. В ячейку F8 вводим выражение согласно формуле (2.6) (или (2.7)). Так как мы вычисляем приближение по формуле (2.6), то правый конец отрезка остается неизменным, а левый равен найденному на предыдущем шаге приближению, то есть ячейке **B9** присваиваем значение ячейки **F8**, а ячейке **C9** – значение ячейки **C8**.



F8 =B8-(D8*(C8-B8))/(E8-D8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Метод хорд**								
2	**Исходные данные**								
3	*a*	*b*	погрешность						
4	0	0,9	0,00001						
5									
6	**Решение**								
7	*N*	*a i*	*b i*	y(a)	*y(b)*	*x i*	*Оценка погрешности*		
8	0	0,000000	0,900000	1,570796	-0,273356	0,766594			
9	1	0,766594	0,900000	0,176030	-0,273356	0,818851	0,052257		
10	2	0,818851	0,900000	0,017040	-0,273356	0,823613	0,004762		
11	3	0,823613	0,900000	0,001686	-0,273356	0,824081	0,000468		
12	4	0,824081	0,900000	0,000167	-0,273356	0,824127	0,000046		
13	5	0,824127	0,900000	0,000017	-0,273356	0,824132	0,000005		
14									
15	Ответ:	0,82413±0,00001							

Рис. 13. Решение нелинейного уравнения методом хорд в Microsoft Excel.

В ячейку **G9** записываем формулу оценки погрешности (2.8). Вычисления продолжаем до тех пор, пока значение в столбце «Оценка погрешности» не станет строго меньше заданной погрешности ε.

6. Найдем значение корня методом касательных с точностью $\varepsilon=10^{-5}$.

Первую и вторую производную исследовали в п.3 решения данной задачи, убедились, что выполняются условия для применения метода хорд на отрезке $[0; 0{,}9]$.

Проверим условия (2.9), используя возможности MathCad.

$$f(0)\cdot p2(0) = -3.142$$

$$f(0.9)\cdot p2(0.9) = 4.489$$

Рис. 14. Выбор начального приближения в методе касательных

Согласно рис. 14, $x_0 = 0{,}9$. В Microsoft Excel (рис. 15) в ячейку **B8** вводим начальное приближение. В ячейки **C8** и **D**8 – соответственно значения функции и производной в точке x_0. В ячейку **B9** вводим выражение для следующего приближения согласно формуле (2.10). Вычисления продолжаем до тех пор, пока погрешность не станет меньше заданной.

B9 fx =B8-C8/D8

	A	B	C	D	E	F
1	**Метод касательных**					
2	**Исходные данные**					
3	*a*	*b*	погрешность			
4	0	0,9	0,00001			
5						
6	**Решение**					
7	*N*	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	*Погрешность*	
8	0	0,900000	-0,273356	-4,069421		
9	1	0,832827	-0,028506	-3,312252	0,067173	
10	2	0,824221	-0,000287	-3,246372	0,008606	
11	3	0,824132	0,000000	-3,245718	0,000088	
12	4	0,824132	0,000000	-3,245718	0,00000001	
13	Ответ:	0,82413±0,00001				
14						

Рис. 15. Решение нелинейного уравнения методом касательных в Microsoft Excel.

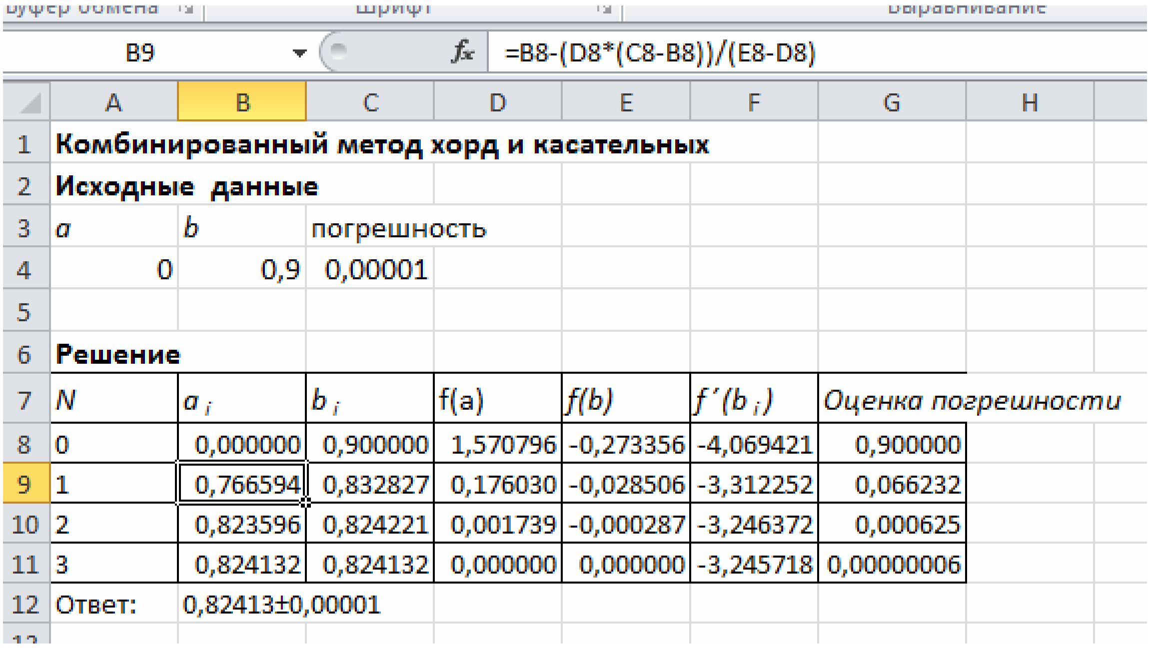
7. Найдем значение корня комбинированным методом хорд и касательных с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Первую и вторую производную исследовали в п.3 решения данной задачи, убедились, что выполняются условия для применения метода хорд на отрезке $[0; 0{,}9]$.

В п. 6 решения данной задачи мы показали, что $f(0{,}9)\cdot f''(0{,}9) > 0$, поэтому согласно условиям, сформулированным в п. 2.5, приближение по методу касательных будет происходить справа, а по методу хорд – слева. С этой целью будем использовать итерационные формулы (2.12).

В ячейки **B8:C8** вводим начало и конец отрезка, в ячейки **D8:E**8 – значения функции в соответствующих точках, в ячейку **F8** – значение производной в правом конце отрезка (напомним, что если бы пришлось использовать итерационные формулы (2.9), то в ячейку **F8** вводили бы значение производной в левом конце отрезка).

В ячейку **B9** вводим выражение для следующего приближения по методу хорд, а в ячейку **C9** – по методу касательных (формулы (2.10)). Оценку погрешности производим по формуле (2.13). Вычисления продолжаем до тех пор, пока значение в столбце «Оценка погрешности» не станет строго меньше заданной погрешности ε.



B9 f_x =B8-(D8*(C8-B8))/(E8-D8)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Комбинированный метод хорд и касательных**						
2	**Исходные данные**						
3	*a*	*b*	погрешность				
4	0	0,9	0,00001				
5							
6	**Решение**						
7	*N*	*a_i*	*b_i*	f(a)	*f(b)*	*$f'(b_i)$*	*Оценка погрешности*
8	0	0,000000	0,900000	1,570796	-0,273356	-4,069421	0,900000
9	1	0,766594	0,832827	0,176030	-0,028506	-3,312252	0,066232
10	2	0,823596	0,824221	0,001739	-0,000287	-3,246372	0,000625
11	3	0,824132	0,824132	0,000000	0,000000	-3,245718	0,00000006
12	Ответ:	0,82413±0,00001					

Рис. 16. Решение нелинейного уравнения комбинированным методом хорд и касательных в Microsoft Excel.

8. Таким образом, в данной задаче мы графически и аналитически отделили корень уравнения $\arccos x^2 - x = 0$ и решили это уравнения четырьмя способами с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Решение искали на отрезке $[0; 0{,}9]$.

Предварительно мы исследовали поведение первой и второй производной на указанном отрезке, убедились, что они не меняют знак и не обращаются в ноль на данном отрезке, что позволяет применять для решения данного уравнения метод хорд, метод касательных и комбинированный метод.

Для достижения заданной точности методом половинного деления понадобилось 17 итераций, методом хорд 5 итерации, методом касательных 4 итерации и комбинированным методом 3 итерации.

Ответ: $0{,}82413 \pm 0{,}00001$.

2.7. Задания для выполнения лабораторной работы

Ход выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретический материал по данной теме.

2. Отделить корни графически, используя пакет MathCad. Выбрать отрезок. Проверить выполнение достаточных условий существования единственного корня на отрезке. Исследовать первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a; b]$. Убедиться, что на данном отрезке производные не обращаются в нуль и их знаки не изменяются.

3. Найти значение корня с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$:

3.1) методом половинного деления;

3.2) методом хорд;

3.3) методом касательных;

3.4) комбинированным методом;

4. Сделать вывод.

Таблица 2

Задания для лабораторной работы № 2

Номер варианта	**Уравнение**	**Номер варианта**	**Уравнение**
1	$x^3 - \cos(\pi x) = 0$	15	$4x^3 - 5\cos(\pi x) = 0$
2	$2\ln x - \cos x = 0$	16	$2x^3 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$
3	$\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 5x^4 = 0$	17	$2x^2 - \sin(\pi x) = 0$
4	$\sin x - \frac{x^3}{3} = 0$	18	$\frac{1}{2}\sin x - \ln x = 0$
5	$\cos(\pi x) - x = 0$	19	$\frac{x^2}{6} - 2\sin(\pi x) = 0$
6	$4\ln x - 2\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0$	20	$3\ln x - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$
7	$2x^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$	21	$4\ln\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x^2}{3} = 0$
8	$3tg(\pi x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$	22	$3\ln x - \frac{x^3}{3} = 0$
9	$\ln\left(\frac{x}{3}\right) + 4x^3 = 0$	23	$2tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 3^x = 0$
10	$tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$	24	$x^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$
11	$\ln x + \frac{x^3}{2} = 0$	25	$\ln\left(\frac{x}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 0$
12	$3\ln x + \frac{x^2}{3} = 0$	26	$2\ln x + 3x^2 = 0$
13	$3x^3 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$	27	$2\ln\left(\frac{x}{3}\right) + x^3 = 0$
14	$\cos x - x^2 = 0$	28	$2\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$

Список литературы

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.

2. Зализняк, В.Е. Численные методы. Основы научных вычислений. [Текст]: учебник и практикум / В.Е. Зализняк. – М.: Юрайт, 2015 – 358 с.

3. Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

4. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах. [Текст]: учебное пособие. / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – М.: Лань, 2015. – 448 с.

5. Панюкова, Т.А. Численные методы [Текст] / Т.А. Панюкова. – М.: Либроком, 2013. – 224 с.

6. Поршнев, С.В. Численные методы на базе MathCad [Текст] / С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 456 с.

7. Самарский, А.А. Задачи и упражнения по численным методам [Текст] / А.А. Самарский, П.В. Вабищевич, Е.А. Самарская. – М.: Либроком, 2009. – 208 с.

8. Срочко, В.А. Численные методы. [Текст]: курс лекций / В.А. Срочко. – М.: Лань, 2010. – 208 с.

9. Шахов, Ю.Н. Численные методы [Текст] / Ю.Н. Шахов, Е.И. Деза. – М.: Либроком, 2012. – 248 с.

10. Шевцов, Г.С. Численные методы линейной алгебры [Текст] / Г.С. Шевцов, О.Г. Крюкова, Б.И. Мызникова. – М.: Лань, 2011. – 496 с.

Оглавление

Составитель
Лысова Марина Александровна

Численные методы в MathCad и MS Excel.
Системы линейных уравнений и нелинейные уравнения

Методические указания

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 25.05.2016. Формат $60 \times 84\, ^1/_{16}$. Бумага писчая.
Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд.л. 2,06. Тираж 100 экз. Заказ.

Ивановский государственный химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры экономики и финансов ИГХТУ
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7