Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Раскрытие неопределённостей

при вычислении пределов

Методические указания по математике

Составитель Е.М. Михайлов

Иваново 2015

Составитель Е.М.Михайлов

УДК 517.17

Методические указания по математике. Введение в анализ. Раскрытие неопределённостей при вычислении пределов / Сост. Е.М.Михайлов; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2015. - 16с.

Данные указания по курсу математики предназначены для самостоятельной работы студентов, изучающих методы вычисления пределов при раскрытии некоторых неопределённостей в разделе «Введение в анализ» в курсе математики. Включают большое количество примеров с подробным решением. Могут использоваться студентами всех специальностей, изучающими данный курс.

Рецензент

доцент кафедры информационных технологий Ивановского государственного химико-технологического университета В.А. Таланова

Предисловие

Раздел «Введение в анализ» является одним из многих в курсе математики. Для студентов усвоение материала только на лекционных и практических занятиях может оказаться неполным в силу недостатка времени. Поэтому существенно возрастает роль самостоятельной работы. Для её организации в дополнение к сборнику тестовых и контрольных заданий по высшей математике: «Введение в анализ» предлагаются данные указания, в которых рассматриваются методы вычисления пределов различных функций при раскрытии неопределённостей типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞} без применения правила Лопиталя. Приведено большое количество примеров, как простых типовых, так и более сложных. Решения задач изложены достаточно подробно. Автор надеется, что указания помогут студентам усвоить данный раздел математики, дополнят имеющуюся литературу и материал, предлагаемый на лекциях и практических занятиях, а также окажутся полезными преподавателям при проведении практических занятий.

Предел функции - одно из основных понятий математики. Говорят, что функция $f(x)$, принимающая действительные значения, имеет в конечной или бесконечно удалённой точке x_0 конечный или бесконечный предел, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $x_0 (x_n \neq x_0)$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу А. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{A}$. Если последовательность соответствующих значений функции неограниченно возрастает, то функция имеет бесконечный предел: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Если точка x_0 принадлежит области задания (определения) функции и существует конечный предел А, то он равен $f(x_0)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае функция называется непрерывной в точке x_0. Изучаемые в нашем курсе элементарные функции (заданные аналитическим выражением) непрерывны во всех точках, где они определены. Следовательно, при вычислении их предела надо в выражение функции подставить предельное значение аргумента. Вместе с этим применяются свойства пределов.

Пусть существуют конечные пределы $\lim u$ и $\lim v$. Тогда:

$$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v, \quad \lim(uv) = \lim u \cdot \lim v, \quad \lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} (\lim v \neq 0),$$

$$\lim u^v = (\lim u)^{\lim v}, \quad \lim C = C, \quad \lim Cu = C \lim u, \quad \lim f(u) = f(\lim u).$$

Пусть $\lim \beta_1 = \infty, \lim \beta_2 = \infty.$ Тогда:

$\lim \beta_1 \beta_2 = \lim \beta_1 \cdot \lim \beta_2 = \infty,$

$\lim \beta_1 + \lim \beta_2 = \lim \beta_1 + \lim \beta_2 = \infty,$ если β_1 и β_2 имеют одинаковый знак.

Пусть $\lim \beta = \infty, |u| > A, A \neq 0,$ тогда $\lim \beta u = \infty.$

Пусть $\lim \alpha = 0, |u| < A,$ тогда $\lim \alpha u = 0.$

$\lim u = A \Leftrightarrow u = A + \alpha, \alpha \to 0.$

При подстановке предельного значения аргумента справедливы символические равенства:

$$\frac{A}{0} = \infty (A \neq 0), \quad \frac{A}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{0}{\infty} = 0,$$

$$A^{+\infty} = 0, \quad A^{-\infty} = \infty (0 < A < 1), \quad A^{+\infty} = \infty, \quad A^{-\infty} = 0 (A > 1).$$

Неопределённости представляют символические выражения

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^{\infty}.$$

Если две функции равны и одна из них имеет предел, тогда другая имеет тот же предел. Для раскрытия неопределённостей данная функция приводится к равной ей с помощью алгебраических или тригонометрических преобразований. Например:

$$u=\frac{u}{v}v,\quad \frac{uv}{v}=u,\quad u^{vw}=(u^v)^w,\quad u^v=(u^w)^{\frac{v}{w}}.$$

Полезно использовать первый и второй замечательные пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,$ а также их следствия

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{arc\sin\alpha}{\alpha}=\left| arc\sin\alpha=t,\alpha=\sin t,t\to 0\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}=1\cdot 1=1,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=\left| arctg\alpha=t,\alpha=tgt,t\to 0\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e..$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+2x-8}$. Здесь неопределённость $\dfrac{0}{0}$.

Разложим многочлены на множители, решив соответствующие квадратные уравнения.

В числителе $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=2$, в знаменателе $x_1=-4$, $x_2=2$.

Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x+\frac{1}{3})(x-2)}{(x+4)(x-2)}=\left|\begin{array}{l}\text{так как } x\neq 2, \text{ то дробь}\\ \text{можно сократить на } (x-2\,)\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{x+4}=\dfrac{7}{6}.$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x-\sqrt{x}-2}=\left|\dfrac{0}{0}\right.$, для разложения знаменателя на множители, сделав замену $x=t^2$,

решим уравнение $t^2-t-2=0$,
$t_1=-1, t_2=2.\ t^2-t-2=(t+1)(t-2)\Big|=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+5)(x-4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+5)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+5)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{36}{5}.$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{5x-1}-3}=\left|\dfrac{0}{0}\right.$, избавимся от иррациональности в знаменателе $\Big|=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x-8)(\sqrt{5x-1}+3)}{(\sqrt{5x-1}-3)(\sqrt{5x-1}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{5x-1-9}\cdot\lim_{x\to 2}(\sqrt{5x-1}+3)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{5(x-2)}(3+3)=6\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{5}=\frac{36}{5}.$$

4. $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{tgx}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}\,\sqrt{1+\cos x}}{tgx}\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos x}}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}\times$

$$\times\lim_{x\to -0}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to -0}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to -0}\frac{|\sin x|}{\sin x}=\big|\sin x<0\big|=\frac{1}{2}\lim_{x\to -0}\frac{-\sin x}{\sin x}=-\frac{1}{2}.$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+3x^2-2x}{2x^3-7x^2+5x}=\Big|$ имем отношение многочленов; при $x\to\infty$ поведение многочлена (а также алгебраической суммы степеней x) определяется слагаемым с x в старшей степени. $6x^3+3x^2-2x=x^3\left(6+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)\to\infty,$ слагаемые в скобках, кроме первого, являются бесконечно малыми. Неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$ создают старшие степени x. Для её раскрытия выносим x в старшей степени в числителе и в знаменателе$\Big|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{6+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{6}{2}=3.$$

Проведённые преобразования сводятся к делению числителя и знаменателя на x в старшей степени. Этого бывает достаточно, когда старшие степени x одинаковые.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)(x+4)^2(3x-5)^3}{(7-5x)(3x^2+1)(x^3-4)}=\left|\dfrac{\infty\cdot\infty\cdot\infty}{\infty\cdot\infty\cdot\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}\right.$, вынесем в каждом множителе x в соответствующей степени$\Bigg|$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\,x^2x^3}{x\,x^2x^3}\cdot\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^2\left(3-\dfrac{5}{x}\right)^3}{\left(\dfrac{7}{x}-5\right)\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{3}{x^3}\right)}=\Big|$сокращаем$\Big|=\dfrac{2\cdot1^2\cdot3^3}{(-5)\cdot3\cdot1}=-\dfrac{18}{5}.$

7. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x^4-x^2-1}{4x^7+5x^3-3x+8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^7}\cdot\frac{3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}{4+\dfrac{5}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{8}{x^7}}=\Big|\text{ сокращаем }\Big|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}{4+\dfrac{5}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{8}{x^7}}=0\cdot\frac{3}{4}=0.$$

8. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6+4x^2-7x+3}{11x^3+5x^2+2x-4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{x^3}\cdot\frac{5+\dfrac{4}{x^4}-\dfrac{7}{x^5}+\dfrac{3}{x^6}}{11+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}=\Big|\text{ сокращаем }\Big|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{4}{x^4}-\dfrac{7}{x^5}+\dfrac{3}{x^6}}{11+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}=\infty\cdot\frac{5}{11}=\infty.$$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7^x-2^x}{4^x+3^x}=\Big|\, a^x\to\infty$ при $x\to+\infty,$ если $a>1;$ в числителе старший член $7^x,$ в знаменателе 4^x, имеем неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$. Вынесем старшие члены и воспользуемся свойством степени: $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\Big| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7}{4}\right)^x\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{7}\right)^x}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}=\Big|\, a^x\to 0$ при $x\to+\infty,$ если $0<a<1\Big|=\infty\cdot\dfrac{1}{1}=\infty.$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7^x-2^x}{4^x+3^x}=\Big|\, a^x\to 0$ при $x\to-\infty,$ если $a>1;$ имеем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. В числителе старший член 2^x $(2<7)$, он медленнее стремится к нулю, в знаменателе старший член 3^x. $\Big|=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{4}{3}\right)^x+1}=\Big|\, a^x\to\infty \text{ при } x\to-\infty, \text{ если } 0<a<1\Big|=\infty\cdot\frac{-1}{1}=-\infty.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(5x+4)}{\ln(3x^2-1)}=\left|\dfrac{\ln(\infty)}{\ln(\infty)}=\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x\left(5+\dfrac{4}{x}\right)}{\ln x^2\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\Big|\ln ab=\ln a\cdot\ln b,\ \ln a^b=b\ln a\Big|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+\ln\left(5+\frac{4}{x}\right)}{2\ln x+\ln\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln x}\cdot\frac{1+\dfrac{\ln\left(5+\frac{4}{x}\right)}{\ln x}}{2+\dfrac{\ln\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}=\frac{1+\dfrac{\ln 5}{\infty}}{2+\dfrac{\ln 3}{\infty}}=\frac{1}{2}.$$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 5x\cdot\ln^3 4x}{\ln 2x\cdot\ln^4 6x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln 5+\ln x)^2\cdot(\ln 4+\ln x)^3}{(\ln 2+\ln x)\cdot(\ln 6+\ln x)^4}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x\cdot\ln^3 x}{\ln x\cdot\ln^4 x}\cdot\frac{\left(\frac{\ln 5}{\ln x}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\ln 4}{\ln x}+1\right)^3}{\left(\frac{\ln 2}{\ln x}+1\right)\cdot\left(\frac{\ln 6}{\ln x}+1\right)^4}=\frac{1^2\cdot 1^3}{1\cdot 1^4}=1.$$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)=\Big|\,\infty-\infty$, разность бесконечно больших с эквивалентными

старшими членами, $\sqrt{4x^2+3x-1}=\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=x\cdot\sqrt{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$.

Для устранения неопределённости надо убрать старшие члены. Этому мешает знак корня.

Перейдём к $\infty^2-\infty^2$ с помощью преобразования: $a-b=\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b}=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\Bigg|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.$$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+2}+x)=\Big|\,\infty-\infty,$ здесь разность бесконечно больших, т.к. $x<0\,\Big|=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-5x+2}+x)(\sqrt{x^2-5x+2}-x)}{\sqrt{x^2-5x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+2}{\sqrt{x^2-5x+2}-x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+2}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{x}{|x|}\right)}=\Big|x<0,\ |x|=-x\,\Big|=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}\cdot\frac{-5+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=-1\cdot\frac{-5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x-1}-5x)=\Big|\,\infty-\infty$, у бесконечно больших одинаковые степени

старших членов: $\sqrt{4x^2+3x-1}=\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=x\cdot\sqrt{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$.

Но при них разные коэффициенты: $2\neq 5$. Вынесем $x\,\Big|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}-5x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-5x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-5\right)=+\infty\cdot(2-5)=-\infty.$$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)=\left|\dfrac{1}{0}-\dfrac{3}{0}=\infty-\infty\right.$, разность? Складываем дроби. Знаменатель будет стремиться к нулю; посмотрим, к чему стремится числитель $\Big|=$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{(x-2)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-3}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

В примерах 17-31 используем 1-й замечательный предел и его следствия.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}=1\cdot 0=0.$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\left|1\cdot\dfrac{1}{0}\right|=1\cdot\infty=\infty=+\infty\,(x>0).$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 3x)\cdot(1+\cos 3x)}{x^2}\cdot\dfrac{1}{(1+\cos 3x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=\frac{9}{2}\cdot 1=\frac{9}{2}.$$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin 2x}{arctg 3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{arc\sin 2x}{x}}{\dfrac{arctg 3x}{x}}=\dfrac{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin 2x}{2x}}{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{3x}}=\dfrac{2\cdot 1}{3\cdot 1}=\dfrac{2}{3}.$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}+\dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin 2x}{x}+\dfrac{\sin 4x}{x}+\dfrac{\sin 6x}{x}}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}}=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot a=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a\cdot 1=a\right|=$$

$$=\frac{1+3+5}{2+4+6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

23. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin^2 3x}{\sin 2x-\sin^3 4x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x+\sin^2 3x}{x}}{\dfrac{\sin 2x-\sin^3 4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin^2 3x}{x}}{\dfrac{\sin 2x}{x}+\dfrac{\sin^3 4x}{x}}=$$

$$=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}\cdot\sin^{n-1}x=a\cdot 0=0\right|=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

24. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-2x-3}=\left|\frac{0}{0},x^2-2x-3=0,x_1=3,x_2=-1\right|=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

25. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2+x-6)}{x^2-3x+2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2+x-6)}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2+x-6)}{x^2+x-6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\left|\begin{matrix}x^2+x-6=0,x_1=2,x_2=-3,\\ x^2-3x+2=0,x_1=2,x_2=1\end{matrix}\right|=1\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1}=5.$$

26. $$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{\sqrt{1-4x}-3}=\left|\frac{0}{0},\text{избавимся от иррациональности}\right|=\lim_{x\to -2}\left(\frac{\sin(x+2)}{(\sqrt{1-4x}-3)(\sqrt{1-4x}+3)}\times\right.$$

$$\left.\times(\sqrt{1-4x}+3)\right)=\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{1-4x-9}\cdot\lim_{x\to -2}(\sqrt{1-4x}+3)=-\frac{1}{4}\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x+2}\cdot 6=-\frac{3}{2}.$$

27. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}=\left|\frac{\ln 0}{\ln 0}=\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x\right)}{\ln\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin 3x}{3x}+\ln 3x}{\ln\dfrac{\sin 5x}{5x}+\ln 5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin 3x}{3x}+\ln 3+\ln x}{\ln\dfrac{\sin 5x}{5x}+\ln 5+\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln x}\,\frac{\dfrac{\ln\dfrac{\sin 3x}{3x}+\ln 3}{\ln x}+1}{\dfrac{\ln\dfrac{\sin 5x}{5x}+\ln 5}{\ln x}+1}=\left|\frac{\dfrac{\ln 1+\ln 3}{\infty}+1}{\dfrac{\ln 1+\ln 5}{\infty}+1}\right|=\frac{0+1}{0+1}=1.$$

28. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\frac{x}{2}=\left|\,0\cdot\infty\,\right|=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{\pi-x}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)=\left|\frac{0}{0}\cdot 1,\right.$ сделаем замену: $\pi-x=t, t\to 0,$

$x=\pi-t, \cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)=\sin\frac{t}{2}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}=2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=2\cdot 1=2.$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos^2 x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-1+1-\cos^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin^2 2x+\sin^2 x}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2 2x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=-4\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2+\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-4\cdot 1+1=-3.$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 5x-\cos x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 2x-1+1-\cos x}{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\cos 5x-1)(\cos^2 5x+\cos 5x+1)}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos 5x-1)(\cos^2 5x+\cos 5x+1)}{x^2}+$

$+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}+\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos 5x-1)(\cos^2 5x+\cos 5x+1)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\cos 5x-1)(\cos 5x+1)}{x^2}\cdot\frac{\cos^2 5x+\cos 5x+1}{\cos 5x+1}\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)=$

$=-25\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot\frac{1+1+1}{1+1}+\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+1}=-\frac{75}{2}+\frac{1}{2}=-37.$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+2x-4}\,\sin\frac{1}{x}=\left|\,\infty\cdot 0\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+2x-4}}{x}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+2x-4}}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=$

$=\left|\frac{\infty}{\infty}\cdot 1\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{x}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}=\infty.$

В примерах 32-45 используем 2-й замечательный предел и его следствия.

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{2x} = \Bigg|$ неопределённость 1^{∞}; применим свойство степени: $a^{bc}=\left(a^{b}\right)^{c}$,

$$a^{b}=a^{c\cdot\frac{b}{c}}=\left(a^{c}\right)^{\frac{b}{c}}\Bigg| = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{x+4}\right)^{-\frac{x+4}{3}}\right)^{-\frac{6x}{x+4}} = \left|\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{x+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-6\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x}}=-6\right| = e^{-6}.$$

33. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{3x+1} = \left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}, \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1,\ 1^{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2)-7}{x+2}\right)^{3x+1} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x+2}\right)^{3x+1} == \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{7}{x+2}\right)^{-\frac{x+2}{7}}\right)^{-\frac{7(3x^{2}+1)}{x+2}} = \left|-7\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{2}+1}{x+2}=\right.$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-7\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}}{x}\cdot\frac{3+\frac{1}{x^{2}}}{1+\frac{2}{x}} == -7\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3}{1}=\left[\begin{array}{l}-\infty,\ x\to+\infty,\\ +\infty,\ x\to-\infty\end{array}\right.\Bigg| = \left[\begin{array}{l}e^{-\infty}=0,\ x\to+\infty,\\ e^{+\infty}=\infty,\ x\to-\infty.\end{array}\right.$$

В примерах 34 и 35 неопределённости, приводимой к 2-му замечательному пределу, нет.

34. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{4x+1}\right)^{x-5} = \left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}, \lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{3}{4}\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^{\infty} = \left[\begin{array}{l}0,x\to+\infty,\\ \infty,x\to-\infty.\end{array}\right.$$

35. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{2x+3}\right)^{6x+2} = \left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}, \lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}\right| = \left(\frac{5}{2}\right)^{\infty} = \left[\begin{array}{l}\infty,x\to+\infty,\\ 0,x\to-\infty.\end{array}\right.$$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+x-3}{x^{2}-4x+1}\right)^{3x+1} = \left|\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}+x-3}{x^{2}-4x+1}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^{2}}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^{2}}}=1\right.$, неопределённость 1^{∞},

выделим в основании степени единицу: $\dfrac{x^{2}+x-3}{x^{2}-4x+1}=1+\dfrac{x^{2}+x-3}{x^{2}-4x+1}-1=1+\dfrac{5x-4}{x^{2}-4x+1}\Bigg| =$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-4}{x^2-4x+1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5x-4}{x^2-4x+1}\right)^{\frac{x^2-4x+1}{5x-4}}\right)^{\frac{(5x-4)(3x+1)}{x^2-4x+1}}=\left|\lim_{x\to\infty}\frac{(5x-4)(3x+1)}{x^2-4x+1}=\right.$$

$$\left.=\lim_{x\to\infty}\frac{xx}{x^2}\frac{\left(5-\frac{4}{x}\right)\left(3+\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=15\right|=e^{15}.$$

37. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

38. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{\ln(1+2x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{-3x\frac{\ln(1-3x)}{-3x}}{2x\frac{\ln(1+2x)}{2x}}=-\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}}{\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{3}{2}.$

39. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{3x+2x^2+x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x(3+2x+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}\cdot\frac{1}{3+2x+x^2}=$

$=-\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3+2x+x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\ln(1-x)^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{3}=-1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$

40. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}-1\right)}{\frac{x}{e}-1}=$

$=\left|\text{положим }\frac{x}{e}-1=t,\ t\to0\right|==\frac{1}{e}\lim\limits_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{e}\cdot1=\frac{1}{e}.$

41. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\left|\frac{0}{0},\text{ сделаем замену: }e^x-1=t, t\to0,\ e^x=t+1, x=\ln(1+t)\right|=$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{1}=1$

42. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+3)(e^{\frac{1}{x}}-1)=|\infty\cdot0|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left|\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{3}{x}\right)=\infty,\right.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left|\frac{0}{0}, e^{\frac{1}{x}}-1=t, t\to0, \frac{1}{x}=\ln(1+t)\right|=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\left|=\infty\cdot1=\left[\begin{array}{l}+\infty, x\to+\infty,\\-\infty, x\to-\infty.\end{array}\right.\right.$

$$\textbf{43.}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\ln(1+\cos 5x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)\dfrac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\cos 2x-1}}{(\cos 5x-1)\dfrac{\ln(1+\cos 5x-1)}{\cos 5x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)}{(\cos 5x-1)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 2x-1)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}}{\ln(1+\cos 5x-1)^{\frac{1}{\cos 5x-1}}}=\left|\frac{0}{0}\cdot\frac{1}{1}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)(\cos 2x+1)}{(\cos 5x-1)(\cos 5x+1)}\cdot\frac{\cos 5x+1}{\cos 2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 2x}{-\sin^2 5x}\cdot\frac{2}{2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 5x}{5x}}\right)^2\cdot\frac{(2x)^2}{(5x)^2}=\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}\right)^2=\frac{4}{25}.$$

$$\textbf{44.}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x+8}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(2x-2))}{2x-2}\cdot\frac{2x-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to 1}\ln(1+(2x-2))^{2x-2}\times$$

$$\times\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}\cdot(\sqrt{x+8}+3)=1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1}\cdot(3+3)=12.$$

$$\textbf{45.}\ \lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{ctg^2 x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right)^{(\cos 2x-1)ctg^2 x}=\left|\lim_{x\to 0}(\cos 2x-1)ctg^2 x=\right.$$

$$=\left|\,0\cdot\infty\,\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x=\left|\frac{0}{0}\cdot 1\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)(\cos 2x+1)}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos 2x+1}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(2\cos x)^2=-\frac{1}{2}\cdot 4=-2\left|=e^{-2}.\right.$$

Составитель
Михайлов
Евгений Михайлович

Введение в анализ

Раскрытие неопределённостей
при вычислении пределов

Методические указания по математике

Подписано в печать --.--.2015. Формат $60 \times 84\ ^{1}\!/_{16}$.
Бумага писчая. Усл.. печ. л. ---. Уч.-изд. л. ---.

Тираж 100 экз. Заказ ----.

ГОУ ВПО Ивановский государственный
химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
кафедры экономики и финансов ГОУВПО «ИГХТУ»
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7