Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Ивановский государственный химико-технологический университет

СОЛОН Б.Я.

КОНЕЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Учебное пособие

Иваново 2010

УДК 519.21

Солон Б.Я. Конечные стохастические процессы: Учеб. пособие / Иван.гос.хим.-технол.ун-т – Иваново, 2010. – 136 с. ISBN

В учебном пособии приведены основные понятия элементарной теории вероятностей, описаны основные виды стохастических процессов. Более подробно рассмотрены процессы, описываемые с помощью Марковских цепей и теории игр. Теоретические положения проиллюстрированы большим количеством примеров, имеющих практическое содержание. В пособии каждый раздел содержит большое количество заданий для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения ИГХТУ, а также для организации самостоятельной и научной работы студентов.

Табл. 5. Ил.7. Библиогр.: 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета

Рецензенты: кафедра вычислительной математики Ивановского государственного университета; заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматики, доктор технических наук, профессор А.Н. Лабутин (Ивановский государственный химико-технологический университет)

© Ивановский государственный
химико-технологический
университет, 2010

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Понятие вероятностной меры. Многим интуитивно понятно, что случайным событиям можно приписать некую числовую меру, которая выражает нашу веру в исполнение предсказания об их появлении или не появлении. Именно поэтому в обиходной речи можно услышать такие высказывания относительно различных событий, происходящих в нашей жизни: «пятьдесят на пятьдесят», т.е. появление данного случайного события или его не появление *равновероятны*, или «спортсмен *X* имеет больше шансов на победу, чем спортсмен *Y*», т.е. победа *X более вероятна*, чем победа *Y*.

Однако, использование в разговорной речи слов «вероятно», «маловероятно», «равновероятно» и т.д. применительно к различным событиям либо несет какую-то положительную информацию, либо совершенно бессмысленно. Например, часто говорят: «Завтра будет дождь с вероятностью 30%». Но если завтра действительно будет дождь, то это событие произошло и, следовательно, его вероятность равна 100%, а если завтра не будет дождя, то это событие не произошло, и тогда его вероятность равна 0%. Итак, наша фраза о предсказании погоды на завтра не несет никакой положительной информации, т.е. бессмысленна.

Почему же нельзя формулировать предсказание погоды в таком виде? Дело даже не в том, что вероятность дождя указана конкретным числом. Фраза вида «Вероятно (или маловероятно), что завтра будет дождь» также не несет никакой положительной информации о погоде на завтра по той же причине. Здесь существенно то, что день, погоду которого мы предсказываем, уникален, единственен. У нас нет возможности на эксперимент, позволяющий в неизменных условиях воспроизводить этот день и фиксировать исходы этого эксперимента.

Именно поэтому мы будем приписывать *вероятность* случайным событиям, связанным с исходами любого эксперимента, который можно проводить в неизменных условиях неограниченное число раз. Наложим пока еще одно существенное ограничение на эксперименты - они могут иметь только конечное число исходов. Если процесс проведения такого эксперимента изобразить графически с помощью дерева логических возможностей, то каждый исход представляет собой какую-либо ветвь этого дерева.

Наиболее наглядной иллюстрацией вышесказанного является проведение таких экспериментов, как бросание монеты, бросание игральной кости, извлечение карты (или нескольких карт) из колоды и т.д.

Пример 1.1. Пусть брошена монета, при этом возможны только два исхода. Свяжем с этим экспериментом два *случайных события*, связанных с возможными исходами этого эксперимента: «выпадение орла» и «выпадение решки». Нет никаких объективных причин считать, что одно из этих *случайных событий* имеет больше шансов произойти, чем другое независимо от того, сколько раз производится этот эксперимент, т.е. можно считать, что эти случайные события *равновероятны*.

Пусть теперь брошены две монеты (или одна монеты – два раза, что безразлично в данном контексте). Этот эксперимент имеет уже четыре исхода: ОО, ОР, РО, РР[1]. Перебор логических возможностей показывает, что в этом случае *шансов*, что выпадет «орел» на обеих монетах (или два раза) меньше (количество таких исходов равно 1), чем выпадет «орел» в точности один раз (количество таких исходов равно 2). Другими словами, *случайное событие* «орел выпадает на двух монетах» имеет *вероятность* меньшую, чем *случайное событие* «орел выпадает только на одной монете». ■

Перейдем теперь к описанию процесса приписывания *вероятностной меры* или *вероятности* случайного события. В дальнейшем, случайные события будем обозначать большими латинскими буквами из начала алфавита A, B, C (с индексами или без). Случайное событие, которое происходит всегда, называется *достоверным*. Более точно, достоверное событие происходит независимо от того, какой исход имеет эксперимент, в связи с которым мы рассматриваем это случайное событие. Достоверные события будем обозначать через T. Случайное событие, которое никогда не происходит, называется *невозможным*. Невозможные события будем обозначать через F.

Пусть проводится (или может быть проведен) некоторый эксперимент[2], и X - случайное событие, которое связано с этим экспериментом. Если дано случайное событие, которое не имеет в словесной формулировке явного указания на эксперимент, с которым оно связано, то все равно придется по формулировке восстановить и зафиксировать подходящий по смыслу эксперимент. Проиллюстрируем вышесказанное на примере.

Пример 1.2. Рассмотри случайное событие A: «Вынуты две карты красной масти». Описание этого случайного события подразумевает, что оно может произойти при проведении следующего эксперимента: из колоды (тщательно перемешанной, чтобы соблюсти наше требование о неизменности условий, в которых он проводится) взяты две карты. Однако здесь имеется некоторая неопределенность, так как, во-первых, не сказано, сколько карт в колоде[3], и, во-вторых, не сказано, каким способом взяты две карты: сразу две, одна за другой без возвращения или, наконец, одна, которая затем возвращается в колоду, и потом вторая. ■

Этот пример показывает, что одно и то же случайное событие может произойти в связи с проведением различных экспериментов, которые имеют, как правило, неодинаковое число исходов. Это имеет существенное значение для определения вероятностной меры. Поэтому необходимо зафиксировать один и только эксперимент для определения вероятности данного случайного события, или других случайных событий, связанных с этим экспериментом.

Итак, мы зафиксировали эксперимент, с которым связано появление (или не появление) данного случайного события X. Проведем анализ логических

---

[1] О= «орел», Р= «решка»

[2] Мы не определяем точно смысл термина *эксперимент*, но считаем, что в данном контексте его синонимами являются термины *опыт* или *испытание*.

[3] Например, колода для преферанса содержит 32 карты, колода для «дурачка» - 36 карт, колода для покера – 52 карты, или 54 карты с двумя джокерами.

возможностей, имеющих место (практически или теоретически) после проведения нашего эксперимента. Множество всех таких логических возможностей будем называть *пространством логических возможностей данного эксперимента.* Дополнительно к тем требованиям, которые мы накладывали на анализ логических возможностей (см. п.1 гл.), потребуем, чтобы каждая из них объективно имела столько же шансов осуществиться, сколько и любая другая. Каждую из таких логических возможностей будем называть *исходом* нашего эксперимента. Обозначим через *U пространство* всех исходов. Будем говорить, что некоторый исход *реализует* случайное событие *X*, если оно происходит вместе с осуществлением этого исхода. Каждый исход реализует некоторое *элементарное случайное событие*, которое происходит тогда и только тогда, когда осуществляется этот исход. Из тех требований, которые мы предъявили к анализу логических возможностей, следует, что

(1) никакие два элементарных случайных события не могут произойти одновременно, т.е. никакой исход не реализует любые два элементарных события;

(2) для любого случайного события (кроме, невозможного) существует реализующий его исход;

(3) элементарные случайные события *равновероятны*.

Пример 1.3. Пусть брошена игральная кость (в этом и состоит наш эксперимент, причем его можно провести чисто умозрительно). Множество *U* исходов этого эксперимента образуют следующие логические возможности: выпадение грани, на которой нанесена одна «точка» или для краткости, выпадение 1; выпадение 2; выпадение 3; выпадение 4; выпадение 5 и выпадение 6. Это следует, в частности, из того, что нет никаких объективных причин считать, что какая-либо грань имеет больше шансов выпасть, чем остальные, и тем, что любое случайное событие, связанное с проведением этого эксперимента, формулируется в терминах количества очков на выпавших гранях. Совсем кратко обозначим $U = \{1,2,3,4,5,6\}$. Элементарными случайными событиями будут шесть следующих случайных событий: H_i: «*выпала грань, содержащая i*» для $i = 1,\ldots,6$. ■

Обозначим через $|U|$ общее число исходов и через $|X|$ число исходов, реализующих случайное событие *X*. Теперь можно дать определение *вероятностной меры* или *вероятности случайного события X.*

Определение вероятностной меры[4]**.** Вероятностной мерой или вероятностью случайного события X называется число

$$\mathbf{P}(X) = \frac{|X|}{|U|}.$$

[4] В учебной литературе по теории вероятностей такое определение называется *классическим определением вероятности.*

Поясним это определение на примере, продолжающем пример 1.3.

Пример 1.4. Сначала найдем вероятности элементарных случайных событий H_i. Ясно, что $|U| = 6$ и $|H_i| = 1$ для всех $i = 1,\ldots,6$. Из определения следует, что в этом случае $\boldsymbol{P}(H_i) = \frac{|H_i|}{|U|} = \frac{1}{6}$ для всех $i = 1,\ldots,6$.

Рассмотрим случайное событие *A*: «Выпало число очков, кратное 3». Сначала подсчитаем число исходов, реализующих случайное событие *A*. Это событие реализует множество исходов $\{3,6\}$, поэтому $|A| = 2$. Теперь найдем вероятность случайного события *A* в соответствие с определением:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{|A|}{|U|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим теперь случайное событие *B*: «Выпало четное число очков». Ясно, что это событие реализует множество исходов $\{2,4,6\}$, поэтому $|B| = 3$. Теперь найдем вероятность случайного события *B* в соответствие с определением: $\boldsymbol{P}(B) = \frac{|B|}{|U|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пусть *C*: «Выпало более, чем одно очко». Это событие реализует множество исходов $\{2,3,4,5,6\}$, поэтому $|C| = 5$. Теперь найдем вероятность случайного события *C* в соответствие с определением: $\boldsymbol{P}(C) = \frac{|C|}{|U|} = \frac{5}{6}$. ■

Сформулируем и докажем основные свойства вероятности.

1. $\mathbf{P}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = F$.
2. $\mathbf{P}(X) = 1$ тогда и только тогда, когда $X = T$.
3. $0 \le \mathbf{P}(X) \le 1$ для любого случайного события X.

Доказательство. Пусть случайные события связаны с экспериментом, который имеет множество исходов *U*. Ясно, что $|F| = 0$, $|T| = |U|$ и $0 \le X \le 1$ для любого случайного события X. Из этого замечания и определения непосредственно следует, что

$$\boldsymbol{P}(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{|X|}{|U|} = 0 \Leftrightarrow |X| = 0 \Leftrightarrow X = F,$$

$$\boldsymbol{P}(X) = 1 \Leftrightarrow \frac{|X|}{|U|} = 1 \Leftrightarrow |X| = |U| \Leftrightarrow X = T \text{ и}$$

$$0 \le \boldsymbol{P}(X) \le 1 \textit{ для любого случайного события } X. \quad ■$$

Приведем еще один пример, в котором мы будем иметь дело с экспериментом, логические возможности которого не равновероятны. Однако эта ситуация сводится к описанной выше, когда логические возможности (они же – исходы) равновероятны (см. пример 1.4).

Пример 1.5. Некто, играя в тотализатор, оценивает шансы на победу лошадей *A*, *B* и *C* в отношении 2:2:1 в забеге, в котором участвуют только три эти лошади. Какая вероятность случайного события *A*: «Выигрывает в забеге лошадь *A*» и случайного события *C*: «Выигрывает в забеге лошадь *C*»?

Для решения этой задачи возьмем в качестве множества логических возможностей $U = \{A, B, C\}$. Припишем случайному событию *C* вероятность *p*, тогда вероятности случайных событий *A* и *B* равны 2*p*. Так как должна победить одна из этих лошадей, то $2p + 2p + p = 1$, откуда $p = 0{,}2$. Теперь можно ответить на поставленные вопросы: $\boldsymbol{P}(A) = 0{,}4$ и $\boldsymbol{P}(C) = 0{,}2$. ■

Пусть *U* – пространство исходов данного эксперимента и *f* – произвольная числовая функция, определенная на *U*. Равенство $f(x) = a$, где *a* – произвольное фиксированное число, для одних значений $x \in U$ является верным (*истинным*), а для других значений $x \in U$ - неверным (*ложным*). Таким образом, это равенство определяет на множестве *U* некоторую функцию $F_a(x)$, значениями которой являются числа 0 или 1, причем $F_a(x) = 0$, если равенство $f(x) = a$ ложное, и $F_a(x) = 1$, если равенство $f(x) = a$ истинное. Обычно функции такого вида называются *предикатами*. Дадим теперь определение вероятности предиката, определенного на множестве исходов *U*. Обозначим через *V* множество исходов $x \in U$, для которых равенство $f(x) = a$ является верным или, что то же самое, для которых предикат $F_a(x) = 1$. Множество *V* называется *областью истинности* данного предиката. Очевидно, что $V \subseteq U$, причем $V = U$ тогда и только тогда, когда предикат является *тождественно истинным*.

Определение вероятности предиката. Вероятностью предиката $F_a(x)$ (происходящего из равенства $f(x) = a$) называется число $\boldsymbol{P}[f = a] = \dfrac{|V|}{|U|}$.

Пример 1.6. Вернемся ко второй части примера 1.1. На множестве исходов *U*={*OO, OP, PO, PP*} определим функцию *f*, значениями которой является число выпавших «орлов». Поэтому *f(OO)*=2, *f(PP)*=0 и *f(OP)*= *f(PO)*=1. Найдем вероятности предикатов $F_k(x)$ для $k = 0,1,2,\ldots$: $\boldsymbol{P}[f = 0] = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$, $\boldsymbol{P}[f = 1] = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$ и $\boldsymbol{P}[f = 2] = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$. Ясно, что для любых других значений *k* вероятность предиката $F_k(x)$ равна нулю: $\boldsymbol{P}[f = k] = \dfrac{0}{4} = 0$ для всех $k \neq 0,1,2$.
■

1.2. Операции над случайными событиями. Пусть *A* и *B* – два случайных события, которые могут произойти в связи с проведением одного и того же эксперимента, имеющего пространство исходов *U*. Говорят, что случайные события *A* и *B* *равны* (обозначение: $A = B$), если они происходят или не происходят одновременно при любом исходе данного эксперимента. Определим операции над случайными событиями, которые позволяют из данных случайных событий получать новые, имеющие более сложную структуру. Две из этих операций назовем *сложением* и *умножением*, так как они обладают свойствами обычных операций сложения и умножения.

Определение суммы двух случайных событий. Случайное событие C называется *суммой* случайных событий A и B (обозначение: $C = A + B$), если C происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из случайных событий A или B*. Операция нахождения суммы случайных событий называется *сложением*.

Если мы имеем словесные формулировки для случайных событий A и B, то их сумму можно выразить с помощью словесной формулировки, которая возникает автоматически, если соединить словесные формулировки для A и B союзом или.

Пример 2.1. Пусть брошена игральная кость, $A =$«выпало четное число очков» и $B =$«выпало число очков, кратное трем», тогда $A + B =$«выпало четное число очков или число очков, кратное трем». Заметим, что пространство исходов, реализующих $A + B$, состоит из следующих натуральных чисел $\{2,3,4,6\}$. ■

Определение суммы двух случайных событий может быть распространено на сумму любого конечного числа случайных событий.

Определение суммы нескольких случайных событий. Случайное событие C называется *суммой* случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (обозначение: $C = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$), если C происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Перечислим основные свойства операции сложения случайных событий. Для этого нам понадобится следующее определение.

Определение несовместных случайных событий. Случайные события A и B называются *несовместными*, если они не могут быть реализованы оба одним и тем же исходом.

Теперь сформулируем и докажем теорему о свойствах операции сложения случайных событий.

Теорема 2.1. *Для любых случайных событий A, B и C, которые могут произойти в связи с проведением одного и того же эксперимента, выполнено*

(1) $A + B = B + A$;

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(3) $A + T = T$;

(4) $A + F = A$.

* В том числе C происходит, когда происходят оба A и B.

Доказательство. (1) и (2) следуют непосредственно из определения. Так как достоверное случайное событие T происходит при любом исходе эксперимента, то $A+T$ является достоверным случайным событием, т.е. $A+T=T$. Так как невозможное случайное событие F не происходит ни при каком исходе, то $A+F=A$. ■

Теорема о вероятности суммы несовместных случайных событий. Случайные события A и B несовместны, тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$.

Доказательство. Случайные события A и B несовместны, тогда и только тогда, когда $|A+B|=|A|+|B|$, поэтому

$$\boldsymbol{P}(A+B)=\frac{|A+B|}{|U|}=\frac{|A|+|B|}{|U|}=\frac{|A|}{|U|}+\frac{|B|}{|U|}=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B).$$ ■

Определение произведения двух случайных событий. Случайное событие C называется *произведением* случайных событий A и B (обозначение: $C=AB$), если C происходит тогда и только тогда, когда происходят оба случайных события A и B одновременно*. Операция нахождения произведения случайных событий называется *умножением*.

Если мы имеем словесные формулировки для случайных событий A и B, то их произведение можно выразить с помощью словесной формулировки, которая возникает автоматически, если соединить словесные формулировки для A и B союзом и.

Пример 2.2. Пусть брошена игральная кость, A и B те же, что и в примере 2.1, тогда произведение $AB=$«выпало четное число очков и число очков, кратное трем». Заметим, что пространство исходов, реализующих AB, состоит из одного элемента $\{6\}$. Это позволяет утверждать, что случайное событие $C=$«выпало шесть очков» равно AB. Для решения некоторых задач необходимо выразить данное случайное событие через другие с помощью операций над случайными событиями, но сделать это бывает нелегко*.

Сформулируем и докажем основные свойства операции умножения случайных событий. Для этого нам понадобится следующее определение.

Определение независимых случайных событий. Случайные события A и B называются *независимыми*, если появление или не появление одного из них не изменяет вероятности другого случайного события.

Доказать, что два данных случайных события являются независимыми, с помощью только этого определения бывает нелегко. Когда в самом описании эксперимента заложена независимость случайных событий или явно сказано, что данные случайные события независимы, тогда вопрос о независимости не обсуждается. В остальных случаях для доказательства независимости можно

* Другими словами, если какой-либо исход реализует A, то он же реализует B, и наоборот.
* В самом деле, заметить, что $C = AB$, если дана формулировка случайного события C, непросто.

пользоваться теоремой о вероятности произведения независимых случайных событий (см. ниже).

Теорема 2.2. Для любых случайных событий A, B и C, которые могут произойти в связи с проведением одного и того же эксперимента, выполнено

(1) $AB = BA$;

(2) $(AB)C = A(BC)$;

(3) $AT = A$;

(4) $AF = F$;

(5) если A *и* B несовместны, то $AB = F$;

(6) $(A+B)C = AC + BC$.

Доказательство. (1) и (2) следуют непосредственно из определения. Так как достоверное случайное событие T происходит при любом исходе эксперимента, то $AT = A$. Так как невозможное случайное событие F не происходит ни при каком исходе, то AF - невозможное случайное событие, т.е. $AF = F$.

Несовместные случайные события не могут быть реализованы никаким одним исходом, следовательно, AB – невозможное случайное событие.

Доказательство свойства (6) состоит в переборе различных комбинаций появления или не появления случайных событий A, B и C при данном исходе нашего эксперимента. Пусть A и C происходят, тогда независимо от случайного события B происходит $A+B$ и происходит $(A+B)C$. Одновременно, происходит AC и независимо от случайного события BC происходит $AC+BC$. Далее, аналогичные рассуждения доказывают равенство $(A+B)C = AC + BC$ для других комбинаций: B и C происходят, A и B не происходят и т.д.

■

Теорема о вероятности произведения независимых случайных событий. Случайные события A и B независимы, тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

Доказательство. Сначала докажем, что **с**лучайные события A и B независимы, тогда и только тогда, когда $|AB| = |A| \cdot |B|$. В самом деле, вместе с каждым исходом, который реализует случайное событие A, может произойти $|B|$ исходов, которые реализуют случайное событие B. Поэтому A и B независимы, тогда и только тогда, когда число исходов, реализующих AB равно произведению $|A| \cdot |B|$, т.е. $|AB| = |A| \cdot |B|$. Очевидно, что пространство исходов для AB представляет собой множество упорядоченных пар, составленных из элементов пространства U. Это множество упорядоченных пар представляет собой декартов квадрат U^2 множества U. Легко понять, что $\left|U^2\right| = |U|^2$.

Теперь перейдем к вероятностям

$$\boldsymbol{P}(AB) = \frac{|AB|}{|U|^2} = \frac{|A| \cdot |B|}{|U|^2} = \frac{|A|}{|U|} \cdot \frac{|B|}{|U|} = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B).$$

■

Пример 2.3. Пусть A, B и C – случайные события из примера 2.2. Докажем, что они независимые, т.к. непосредственно из описания эксперимента это не следует. Мы заметили, что $C = AB$, перейдем к вероятностям

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(C) = \frac{|C|}{|U|} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B).$$

Итак, выполнено равенство $\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B)$, следовательно, A и B – независимые случайные события. ■

Следствие. Если А и В – несовместные случайные события, то $\boldsymbol{P}(AB) = 0$.

Теорема о вероятности суммы двух случайных событий. Для любых двух случайных событий А и В

$$\boldsymbol{P}(A+B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Доказательство. Сумму $A+B$ можно представить в виде суммы следующих трех несовместных случайных событий: A'=«происходит A и не происходит B», AB и B'=«происходит B и не происходит A»*. Ясно, что $|A'| = |A| - |AB|$ и $|B'| = |B| - |AB|$, потому

$$\boldsymbol{P}(A+B) = \boldsymbol{P}(A'+B'+AB) = \frac{|A'| + |B'| + |AB|}{|U|} = \frac{(|A| - |AB|) + (|B| - |AB|) + |AB|}{|U|} = \frac{|A|}{|U|} + \frac{|B|}{|U|} - \frac{|AB|}{|U|} =$$

$$= \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$ ■

Если случайные события A и B несовместные, то $\boldsymbol{P}(AB) = 0$, поэтому теорема о вероятности суммы несовместных случайных событий является следствием доказанной выше теоремы.

Следствие. Если $\boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) > 1$, то случайные события А и В совместные.

Доказательство. Так как $0 \le \boldsymbol{P}(A+B) \le 1$ для любых A и B, то из данного условия $\boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) > 1$ и равенства $\boldsymbol{P}(A+B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB)$ следует, что $\boldsymbol{P}(AB) > 0$. Это означает, что случайные события A и B совместные. ■

Рассмотрим пример использования теорема о вероятности суммы двух случайных событий.

Пример 2.4. Студент предполагает, что в предстоящей экзаменационной сессии вероятность успешной сдачи математики равна 0,4, хотя бы одного предмета (математики или химии) равна 0,6 и успешной сдачи обоих предметов равна 0,1. Какова вероятность успешной сдачи экзамена по химии?

Решение. Введем обозначения для первичных (не обязательно – элементарных) случайных событий, через которые удобно выразить более сложные случайные события, фигурирующие в условии задачи. Итак, пусть A= «успешная сдача экзамена по математике» и В= «успешная сдача экзамена по химии»,

---

* A' и B' являются случайными событиями, образованными из A и B с помощью операции умножения (используется союз и) и еще одной операции (соответствующей отрицательной частице не), о которой пойдет речь ниже.

тогда $A+B$=«успешная сдача хотя бы одного экзамена» и AB=«успешная сдача обоих экзаменов». Из условия задачи находим, что $\boldsymbol{P}(A)=0{,}4$, $\boldsymbol{P}(A+B)=0{,}6$ и $\boldsymbol{P}(AB)=0{,}1$. Искомую вероятность $\boldsymbol{P}(B)$ мы сможем найти из равенства $\boldsymbol{P}(A+B)=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B)-\boldsymbol{P}(AB)$:

$$\boldsymbol{P}(B)=\boldsymbol{P}(A+B)-\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(AB)=0{,}6-0{,}4+0{,}1=0{,}3.$$

Заметим, кстати, что случайные события A и B не являются независимыми, так как

$$\boldsymbol{P}(AB)=0{,}1\neq 0{,}12=\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B).$$ ■

Определение операции нахождения отрицания случайного события. Случайное событие B называется *отрицанием* случайного события A (обозначение: $B=\overline{A}$), если B происходит тогда и только тогда, когда не происходит случайное событие A*. Случайное событие $\overline{A}$ называется *противоположным к* A.

Если мы имеем словесную формулировку для случайного события A, то его отрицание можно выразить с помощью словесной формулировки, которая возникает автоматически, если присоединить к словесной формулировке для A отрицательную частицу не или словосочетание неверно, что ….

Пример 2.5. Пусть брошена игральная кость, A то же, что и в примере 1, тогда $\overline{A}=$«неверно, что выпало четное число очков». Заметим, что пространство исходов, реализующих $\overline{A}$, равно $\{1,3,5\}$. Это позволяет утверждать, что случайное событие $D=$«выпало нечетное число очков» равно $\overline{A}$. ■

Сформулируем и докажем основные свойства операции нахождения отрицания случайного события.

Теорема 2.3. Для любых случайных событий A и B, которые могут произойти в связи с проведением одного и того же эксперимента, выполнено

(1) $A+\overline{A}=T$;

(2) $A\cdot\overline{A}=F$;

(3) $\overline{\overline{A}}=A$;

(4) $\overline{T}=F$;

(5) $\overline{F}=T$;

(6) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;

(7) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

Доказательство. Так как данный эксперимент приводит к появлению одного и только одного из случайных событий A или $\overline{A}$, то свойства (1) и (2) доказаны. Свойства (3), (4) и (5) непосредственно следуют из определения. Докажем (6), пусть $C=\overline{A+B}$. Случайное событие C происходит тогда и только тогда, когда не происходит $A+B$, т.е. когда не появляется ни A, ни B. Это означает, что одновременно произошли случайные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$, т.е. произошло слу-

* Другими словами, каждый исход реализует либо A, либо B, но ни один исход не реализует оба этих случайных события.

чайное событие $\overline{A}\cdot\overline{B}$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается свойство (7). ■

Теорема о вероятности противоположного случайного события. Для любого случайного события A

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A).$$

Доказательство. Очевидно, что $|\overline{A}| = |U| - |A|$, отсюда следует, что

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = \frac{|\overline{A}|}{|U|} = \frac{|U| - |A|}{|U|} = 1 - \frac{|A|}{|U|} = 1 - \boldsymbol{P}(A). \qquad ■$$

Эта простая теорема позволяет доказать очень важную для решения многих задач следующую общую теорему, частным случаем которой является теорема о вероятности суммы двух случайных событий. Напомним, что, по определению, $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из случайных событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$

Теорема о вероятности появления хотя бы одного случайного события. Для любых случайных событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}).$$

Доказательство. Докажем индукцией по *n*. Если $n = 2$, то из теоремы 3(6) следует, что $\boldsymbol{P}(A_1 + A_2) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{A_1 + A_2}) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$. Предположим, что теорема доказана для всех $k < n$, т.е. $\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_k})$ и докажем ее для *n*. Обозначим через $B = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$, тогда $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = B + A_n$. По доказанному выше имеем $\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \boldsymbol{P}(B + A_n) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{B}\cdot\overline{A_n}) = \boldsymbol{P}(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n})$, что и требовалось доказать. ■

Если случайные события $A_1, A_2, \cdots, A_n$ попарно независимые, то доказанное равенство приобретает следующий вид:

$$\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{A_1})\cdot\boldsymbol{P}(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{P}(\overline{A_n}). \qquad (1)$$

Пример 2.6. Практика показала, что при стрельбе вероятность попадания в мишень после n-го выстрела равна $\frac{n}{n+1}$. Найдем вероятность хотя бы одного попадания по мишени в результате 3-х выстрелов.

Пусть A_k = «попадание в мишень в результате k-го выстрела», где $k = 1,2,3$, тогда $A_1 + A_2 + A_3 =$ «хотя бы одно попадание в мишень в результате 3-х выстрелов». Естественно предположить, что случайные события A_1, A_2, A_3 попарно независимые, поэтому для вычисления вероятности хотя бы одного попадания по мишени применим формулу (1). Найдем вероятности случайных событий A_1, A_2, A_3, затем - $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$. Из условия задачи следует, что $\boldsymbol{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(A_2) = \frac{2}{3}$ и $\boldsymbol{P}(A_3) = \frac{3}{4}$, тогда $\boldsymbol{P}(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(\overline{A_2}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ и $\boldsymbol{P}(\overline{A_1}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Теперь найдем искомую вероятность

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{23}{24}$$ ■

1.3. Интерпретации вероятностей. Обсудим несколько интуитивных идей, которые лежат в основе понятия вероятности, и которые могут использоваться на неформальном уровне для решения тех или иных вероятностных задач.

Предположим, что случайное событие A происходит в связи с проведением некоторого эксперимента, и ему приписана вероятность p. Одна из идей состоит в том, что если последовательность таких экспериментов проведена в неизменных условиях, то *относительная частота**, которую будем обозначать p^*, появления случайного события A приблизительно равна p, причем при увеличении числа проведенных экспериментов $|p^* - p| \to 0$. Математическим аналогом этой идеи является *закон больших чисел*, который рассматривается в классической теории вероятностей. Практическое использование закона больших чисел состоит в том, что когда нет естественного способа (через подсчет исходов проводимого эксперимента) определить вероятность случайного события, его вероятность оценивается с помощью относительной частоты.

Вторая идея имеет отношение к пари. Пусть случайное событие A появляется* с вероятностью p. Мы хотим предложить пари, что это событие A произойдет в действительности. При этом мы предлагаем следующие условия пари: мы согласны заплатить r рублей, если A не произойдет, но нам должны заплатить s рублей, если A произойдет. Какими должны быть суммы r и s, чтобы было *честным*?

Считается, что при большом числе таких пари относительная частота выигрышей в s рублей приблизительно равна p, а относительная частота проигрышей в r рублей приблизительно равна $1 - p$. Ясно, что при этом средний «выигрыш»**, приходящийся на одно пари, равен $sp - r(1 - p)$. Чтобы пари было честным, средняя величина выигрышей должна равняться нулю. Это будет иметь место, когда $sp - r(1 - p) = 0$. Отсюда получаем

$$\frac{r}{s} = \frac{p}{1 - p}. \qquad (2)$$

Таким образом, необходимым условием того, чтобы пари было честным, является выполнение равенства (2). Про отношение $r : s$ говорят, что оно определяет *шансы сторон* или *условия*, при которых пари будет честным.

Нарушение равенства (2) в ту или иную сторону делает пари нечестным. Многие азартные игры (особенно те, которые культивируются в казано) имеют в своей основе что-то вроде пари, поэтому, прежде чем принять участие в такой игре, следует проверить выполнимость равенства (2). Очевидно, что благосос-

* то есть отношение числа экспериментов, в которых появилось случайное событие A, к общему числу проведенных экспериментов.

* Точнее будет сказать, что случайному событию A приписана вероятность p

** Кавычки поставлены потому, что в зависимости от параметров p, s и r выигрыш может быть отрицательным, что уже называется проигрышем.

тояние любого казино основано на том, что вместо равенства (2) выполняется неравенство $\frac{r}{s} > \frac{p}{1-p}$, которое обеспечивает отрицательное значение среднего «выигрыша» (т.е. проигрыш) для человека, играющего в казино.

Пример 3.1. Пусть заключается пари о том, что при бросании игральной кости выпадает число очков, кратное трем, т.е. выпадает 3 или 6. Вероятность того, что выпадает 3 или 6 равна $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Тогда шансы сторон в пари относятся как $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$. Это отношение можно записать также в виде $1:2$ или $2:4$, или $3:6$ и т.д.

Для того чтобы пари было честным, надо условиться платить 1 рубль, если выпадает число очков, которое не делится на три, и 2 рубля, если выпадает 3 или 6 очков. Другой вариант честного пари: платить 2 рубля, если выпадает число очков, которое не делится на три, и 4 рубля, если выпадает 3 или 6 очков.

Если пари заключить на условиях: *платить 2 рубля* ($r = 2$)*, если выпадает число очков, которое не делится на три, и 3 рубля* ($s = 3$)*, если выпадает 3 или 6 очков*, то пари будет нечестным, при этом $\frac{r}{s} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Это означает, что пари для человека, который соглашается на эти условия, в целом проигрышное при большом числе его повторений. ■

Наше определение вероятности предполагает, что каждая из логических возможностей эксперимента, в связи с которым происходит данное случайное событие, объективно имеет столько же шансов осуществиться, сколько и любая другая. Любую из таких логических возможностей мы называем *исходом* нашего эксперимента, причем каждый исход реализует некоторое элементарное случайное событие, которое происходит тогда и только тогда, когда осуществляется этот исход. Таким образом, все элементарные случайные события равновероятны. Если их число равно *n*, то вероятность каждого из них равна $1/n$.

Следующая идея, лежащая в основе теории вероятностей, состоит в привязывании вероятностей элементарных случайных событий к пространству логических возможностей. Наиболее простая ситуация тогда, когда пространство логических возможностей представляет собой множество исходов, о чем было сказано выше. Однако для одного и того же случайного события выбор пространства не однозначен, и выбранное для вычисления вероятности пространство логических возможностей само требует анализа. Необходимо установить, будут ли элементарные случайные события, связанные с элементами этого пространства, равновероятными. Приведем наглядный

Пример 3.2. Пусть монета брошена два раза. Нас интересует вероятность предиката $f = a$, где значение функции *f* равно числу выпадений «орла» и a – какое-либо фиксированное натуральное число.

Решение. Если в качестве пространства логических возможностей взять множество $U = \{OO, OP, PO, PP\}$, то естественно считать его множеством исходов и приписать элементарным случайным событиям, связанным с элементами этого пространства, вероятность равную числу $1/4$. Однако, в качестве пространства логических возможностей можно рассматривать множество высказываний $V = \{$[*не выпало «орлов»*], [*выпал один «орел»*],[*выпало два «орла»*]$\}$. Анализ логических возможностей из пространства V показывает, что элементарные случайные события, связанные с элементами этого пространства, не являются равновероятными. Ясно, что логическая возможность [*выпал один «орел»*] имеет больше шансов появиться, чем две остальные. Поэтому в этом случае мы не имеем права приписать элементарным случайным событиям, связанным с элементами пространства V, одну и ту же вероятность.

■

Пример 3.3. Пусть из колоды в 52 карты вынимаются последовательно две карты. Найдем вероятность случайного события A= «вынутые карты имеют масть пики».

Решение. Выбор первой карты можно осуществить 52-мя способами, и после каждого выбора первой карты для второй карты остается 51 возможность для выбора. Следовательно, для выбора двух карт в виде упорядоченной пары, в которой мы различаем, какая карта взята первой и какая – второй, имеется $52 \cdot 51 = 2652$ возможности[*]. Естественно считать, что пространство логических возможностей U представляет собой множество исходов,[**] т.е. элементарные случайные события, связанные с элементами пространства U, равновероятны. Подсчитаем число исходов, реализующих случайное событие A, учитывая, что в нашей колоде 13 карт имеет масть пики: их $13 \cdot 12 = 156$. Теперь найдем вероятность случайного события $\boldsymbol{P}(A) = \dfrac{156}{2652} = \dfrac{1}{17}$.

■

Пример 3.4. Предположим, что мы имеем метод, позволяющий по некоторым признакам судить о будущих экономических успехах предприятий. Эта метод, примененный к предприятиям A, B и C, позволил сделать следующий прогноз: по экономическим показателям в порядке убывания предприятия можно расположить в следующую последовательность АСВ[***]. Оказалось, что предсказание в точности сбылось. Можно ли утверждать, что данный метод имеет действительную ценность, не сводится лишь к простому угадыванию?

Решение. Если предсказания, использующие данный метод, равнозначны простому угадыванию, то чему равна вероятность того, что такое предсказание окажется правильным? Ясно, что число всевозможных последовательностей, составленных из A, B и C, равно $3! = 6$. Если предсказания действительно равнозначны угадыванию, то пространство логических возможностей представляет собой множество исходов, а каждое элементарное случайное событие имеет вероятность $1/6$. Таким образом, в этом случае вероятность правильности нашего прогноза ACB равна $1/6$. Это число достаточно велико, поэтому судить о полезности данного метода с полной уверенностью нельзя, так как хотя предсказание и сбылось, но с достаточно большой вероятностью оно могло сбыться случай-

[*] Если карты в паре не упорядочивать, то всего имеется возможностей для выбора ровно вдвое меньше.
[**] В таких случаях предполагается, что карты в колоде тщательно перемешаны.
[***] Такая последовательность называется *рейтинг-лист*

но. В этом случае необходим эксперимент с большим числом предприятий. Применим данный метод к пяти предприятиям, тогда вероятность случайно угадать предсказанный рейтинг-лист равна $1/5! = 1/120$. Следовательно, здесь мы можем сделать вывод, что предложенный метод не лишен ценности.

■

Несмотря на то, что основные понятия теории вероятностей подкреплены нашей интуицией, в некоторых конкретных случаях результаты, полученные с использованием теории вероятностей, мы воспринимаем как парадоксальные. Приведем один поучительный

Пример 3.5. На большой автостоянке запарковано r автомобилей. Один из двух мужчин предлагает пари другому о том, что два автомобиля на этой автостоянке имеют один и тот же номер, состоящий из трех цифр.* Будем считать, что всего таких номеров может быть 1000, от 000 до 999. Мы хотим определить значение r, для которого пари будет честным (см. пример 3.1).

Решение. Интуиция нам подсказывает, что если на автостоянке менее 100 автомобилей, то заключать пари на равных условиях (т.е. в отношении 1:1) не выгодно. Кажется, что приемлемое количество автомобилей, при котором есть шансы не проиграть, равно пятистам. Ниже проведем расчеты, которые покажут, в какой степени интуиция может нас подвести.

Найдем сначала вероятность того, что никакие два из r автомобилей не имеют одного и того же номера. Ясно, что для r автомобилей имеется 1000^r комбинаций их номеров. Будем считать каждую такую комбинацию исходом пространства логических возможностей нашего эксперимента. Для нахождения вероятности того, что никакие два автомобиля не имеют одного и того же номера, подсчитаем число комбинаций, в которых один и тот же номер не фигурирует дважды. Рассуждения из примера 3, примененные для подсчета числа комбинаций из двух карт, но распространенные в данном случае на комбинации из r номеров, дают число $1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot (1000 - r + 1)$. Таким образом, вероятность того, что никакие два из r автомобилей не имеют одного и того же номера, равна

$$q_r = \frac{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot (1000 - r + 1)}{1000^r}.$$

Теперь находим вероятность того, что по крайней мере два автомобиля имеют один и тот же номер: $p_r = 1 - q_r$. В следующей таблице приведем для ряда значений r величины p_r и условия $p_r/(1 - p_r)$.

Число автомобилей на автостоянке	Вероятность совпадения номеров по крайней мере двух автомобилей	Приблизительное условие честного пари
r	p_r	$p_r/(1 - p_r)$
5	0,010	1:100
10	0,045	47:1000
15	0,101	112:1000

* Цифры в номере могут повторяться, например, 001, 333, …. Как известно, кроме цифр номер содержит буквы, которые мы в этом примере не учитываем.

20	0,175	212:1000
25	0,261	353:1000
30	0,356	552:1000
35	0,453	828:1000
36	0,472	893:1000
37	0,491	964:1000
38	0,510	1040:1000
39	0,528	1118:1000
40	0,547	1207:1000
45	0,634	1732:1000
50	0,713	2484:1000
60	0,835	5:1
70	0,916	10:1
80	0,962	25:1
90	0,984	61:1
100	0,993	165:1

Таблица 3.1

Из таблицы 3.1 видно, что уже при $r=38$ пари следует держать на равных условиях, а при $r=100$ имеется 165 шансов против 1, что по крайней мере у двух автомобилей будут одинаковые номера.

1.4. Условная вероятность. Пусть *A* и *B* – два случайных события, которые могут произойти в связи с проведением одного и того же эксперимента, имеющего пространство исходов *U*. Выше мы уже определили, что *A* и *B* – независимые случайные события, если появление или не появление одного из них не изменяет вероятности другого случайного события. Для доказательства независимости можно пользоваться теоремой о вероятности произведения независимых случайных событий: *случайные события A и B независимы, тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{P}(AB)=\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B)$.

Если же вероятность одного из них изменяется в зависимости от того произошло или не произошло другое случайное событие, то такие случайные события мы будем называть (*взаимно*) *зависимыми*. Ясно, что в этом случае мы выполняется неравенство $\boldsymbol{P}(AB)\neq\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B)$. Обозначим через $\boldsymbol{P}_B(A)$ *условную вероятность* случайного события *A* при условии, что случайное событие *B* произошло.

Предположим нам известно, что случайное событие *B* произошло, тогда первоначальное пространство *U* исходов, реализующих случайные события *A* и *B*, сводится к некоторому пространству *V* исходов*, реализующих случайное событие *A*. Следовательно, для того, чтобы определить вероятность случайного события *A*, необходимо подсчитать число исходов из *V*, которые реализуют это случайное событие. Поскольку известно, что случайное событие *B* произошло, то вероятность не только *A*, но и любого другого случайного события *X*, (взаимно) зависимого от *B*, изменится. Будем при этом предполагать**, что условные вероятности всех случайных событий *X* (взаимно) зависимых от *B* (при ус-

* Ясно, что в общем случае $V\subseteq U$, причем при $V=U$ случайные события *A* и *B* независимые.

** Можно сказать, что это предположение является одной из аксиом теории вероятностей.

ловии, что B произошло), пропорциональны с одним и тем же коэффициентом вероятностям случайных событий BX.

Определим этот коэффициент пропорциональности k. Пусть T' – случайное событие, которое реализуется любой логической возможностью из V. Заметим, что в этом случае, как следует из определения произведения двух случайных событий, $BT' = B$. Тогда имеем $1 = \boldsymbol{P}_B(T') = k \cdot \boldsymbol{P}(BT') = k \cdot \boldsymbol{P}(B)$, откуда получаем $k = 1/\boldsymbol{P}(B)$. Теперь можно записать формулу, которая позволяет вычислять условную вероятность $\boldsymbol{P}_B(A)$ случайного события A при условии, что случайное событие B произошло:

$$\boldsymbol{P}_B(A) = k \cdot \boldsymbol{P}(AB) = \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(B)} \qquad (3)$$

Естественно потребовать, чтобы в формуле (3) знаменатель $\boldsymbol{P}(B) \neq 0$. Заметим, что $\boldsymbol{P}(B) = 0$ тогда и только тогда, когда B – невозможное событие, поэтому условная вероятность $\boldsymbol{P}_B(A)$ определена только в случае, когда случайное событие B не является невозможным. Непосредственным следствием формулы (1) является

Теорема о вероятности произведения зависимых случайных событий. Если случайное событие B не является невозможным, то $\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}_B(A)\boldsymbol{P}(B)$. Если, дополнительно, случайное событие A не является невозможны, то $\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}_A(B)\boldsymbol{P}(A)$ и при этом

$$\boldsymbol{P}_B(A)\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}_A(B)\boldsymbol{P}(A)$$

Рассмотрим ряд примеров, показывающих как предыдущие общие рассуждения можно применить к нахождению условной вероятности.

Пример 4.1. Предполагается, что вероятности победить в шахматном турнире для участников *A, B, C* и *D* равны *0,6; 0,2; 0,15* и *0,05,* соответственно. Перед началом турнира участник *A* снялся с соревнования. Каковы стали шансы трех других участников?

Решение. Так как $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, то при условии, что участник A снялся с соревнования (т.е. при условии, что произошло случайное событие $\overline{A}$), все другие вероятности должны возрасти в $k = 1/0{,}4 = 2{,}5$ раза. Теперь вероятности победить в шахматном турнире для участника B равна $0{,}2 \cdot 2{,}5 = 0{,}5$, для участника C равна $0{,}15 \cdot 2{,}5 = 0{,}375$ и для D равна $0{,}05 \cdot 2{,}5 = 0{,}125$. ■

Пример 4.2. Пусть W – множество семей, имеющих в точности двух детей. Найдем вероятность того, что в наугад выбранной семьи из множества W имеются два мальчика, если известно, что в ней есть хотя бы один мальчик.

Решение. Для каждой семьи из W (с точки зрения пола детей) множество логических возможностей состоит из четырех элементов $U = \{ММ, МД, ДМ, ДД\}$, где первая буква пары указывает пол старшего ребенка, а вторая – пол младшего ребенка. Если не привлекать тонкие исследования о частоте появления на свет мальчиков и девочек, можно предполагать, что все логические возможности имеют одинаковые шансы для осуществления, т.е. в нашей терминологии они являются исходами. В этом случае вероятность любого элементарного случайного события равна $0{,}25$. Информация о наличии в семье одного мальчика сокращает множество логических возможностей до $V = \{ММ, МД, ДМ\}$. Ясно из постановки задачи, что элементы из V остаются равновозможными, поэтому условная вероятность того, что имеется два мальчика при условии, что в семье есть один мальчик, равна $1/3$. Если еще известно, что мальчик – старший ребенок, то условная вероятность равна $1/2$.

■

Теорема о вероятности произведения зависимых случайных событий может быть обобщена на случай нескольких (более двух) случайных событий.

Теорема о вероятности произведения нескольких зависимых случайных событий. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, X$ - данные случайные события, такие, что случайные события $A_1, A_1A_2, \ldots, A_1A_2 \cdots A_n$ не являются невозможным, тогда

$$\boldsymbol{P}(A_1A_2 \cdots A_nX) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(A_2)\boldsymbol{P}_{A_1A_2}(A_3)\cdots \boldsymbol{P}_{A_1A_2\cdots A_n}(X)$$

В следующей теореме перечислим основные свойства условной вероятности. Заметим сначала, что если $\boldsymbol{P}_B(A) = \boldsymbol{P}(A)$, то случайные события A и B независимые. В самом деле, в равенстве (1) заменим $\boldsymbol{P}_B(A)$ на $\boldsymbol{P}(A)$ и умножим обе части на $\boldsymbol{P}(B)$, в результате получим $\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B)$. В силу теоремы о вероятности произведения это равенство гарантирует независимость случайных событий A и B.

Будем говорить, что случайное событие B является *причиной для* случайного события A, а A является *следствием* B и писать $B \subset A$, если при любом появлении B обязательно происходит случайное событие A.

Теорема об условной вероятности. Для любых случайных событий A и B, которые могут произойти в связи с проведением одного и того же эксперимента, выполнено

(1) если $B \subset A$ и $B \neq F$, то $\boldsymbol{P}_B(A) = 1$;

(2) если A и B несовместные, то $\boldsymbol{P}_B(A) = \boldsymbol{P}_A(B) = 0$.

От понятия независимости случайных событий нетрудно перейти к понятию вероятностной независимости функций. Сначала напомним некоторые определения. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - числовые функции, определенные на пространстве логических возможностей U данного эксперимента. Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *описывают пространство* U, если их значения однозначно определяют каждый элемент U. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - функции, определенные на U, и каждая комбинация значений этих функций является возможной, то говорят, что функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *логически независимы*. И наконец, если функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ логически независимы и описывают пространство U, то эти функции образуют *базис пространства* U.

Определение вероятностной независимости функций. Пусть U – пространство логических возможностей с заданной на нем вероятностной мерой случайных событий $\boldsymbol{P}(X)$ и предикатов $\boldsymbol{P}[f = a]$, и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – числовые функции, определенные на U. Эти функции называются *вероятностно независимыми*, если

$\boldsymbol{P}[(f_1 = a_1)\,\&\,(f_2 = a_2)\,\&\ldots\&\,(f_n = a_n)] = \boldsymbol{P}[f_1 = a_1]\cdot \boldsymbol{P}[f_2 = a_2]\cdot\ldots\cdot \boldsymbol{P}[f_n = a_n]$ (4)
для любых значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Рассмотрим пример, показывающий, что вероятностная независимость данной системы функций далеко не очевидна без использования формулы (4).

Пример 4.3. Монету подбросили три раза. тогда пространство исходов можно представить в виде $U = \{OOO, OOP, OPO, OPP, POO, POP, PPO, PPP\}$. Определим на U три функции $\boldsymbol{f}_i(x) = \begin{cases} 0, \text{если результат i-го бросания } \boldsymbol{-P,} \\ 1, \text{если результат i-го бросания } \boldsymbol{-O,} \end{cases}$ для всех $i = 1,2,3$. Выясним, являются ли функции вероятностно независимыми или нет.

Для этого проверим, выполнено ли равенство

$$\boldsymbol{P}[(f_1 = a_1)\,\&\,(f_2 = a_2)\,\&\,(f_3 = a_3)] = \boldsymbol{P}[f_1 = a_1]\cdot \boldsymbol{P}[f_2 = a_2]\cdot \boldsymbol{P}[f_3 = a_3] \quad (5)$$

для любых значений a_1, a_2, a_3. Ясно, что если хотя бы одно из значений a_1, a_2, a_3 не равно 0 или 1, то равенство (5), очевидно, выполнено, так как обе его части равны 0. Рассмотрим, например, случай, когда $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1$. Область истинности предиката в левой части равенства (4) в данном случае состоит только из одного элемента: $V = \{OPO\}$, поэтому вероятность этого предиката равна $\boldsymbol{P}[(f_1 = 1)\,\&\,(f_2 = 0)\,\&\,(f_3 = 1)] = \dfrac{|V|}{|U|} = \dfrac{1}{8}$. Очевидно, что вероятность каждого из трех предикатов в правой части равна $1/2$, следовательно, их произведение также равно $1/8$. Аналогичные вычисления в общем случае показывают, что равенство (5) выполняется (обе его части равны одновременно либо 0, либо $1/8$). Это означает, что функции f_1, f_2, f_3 вероятностно независимые.

Очевидно, что любое непустое подмножество множества вероятностно независимых функций является вероятностно независимым. Поэтому, любые две функции из множества f_1, f_2, f_3 вероятностно независимы. ■

Выясним теперь, как связаны между собой понятия вероятностной и логической независимости.

Теорема о связи между логической и вероятностной независимостью множества функций. Логическая независимость множества функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ является необходимым и достаточным условием существования такой вероятностной меры, что множество $f_1, f_2, \ldots, f_n$ оказывается независимым относительно этой вероятностной меры.

Доказательство. Рассмотрим множество, состоящее из двух функций f и g, определенных на множестве *U*. Докажем, что условие логической независимости функций f и g является необходимым для их вероятностной независимости (относительно любой вероятностной меры на *U*). Предположим, что f и g не являются логически независимыми, тогда существуют такие *a* и *b*, что оба высказывания $f(x) = a$ и $g(x) = b$ не являются ложными для всех $x \in U$, но высказывание $(f(x) = a)\,\&\,(g(x) = b)$ является ложным для всех $x \in U$. Так как вероятность предиката, происходящего из равенства $f(x) = a$, равна 0 тогда и только тогда, когда $f(x)=a$ ложно для всех $x\in U$, то независимо от характера выбранной вероятностной меры мы имеем одновременно $\boldsymbol{P}[f=a]\cdot\boldsymbol{P}[g=b]\neq 0$ и $\boldsymbol{P}[(f=a)\,\&\,(g=b)]=0$. Это означает, что f и g не являются вероятностно независимыми. Таким образом, логическая независимость функций является необходимым условием для их вероятностной независимости.

Покажем теперь, что для любой пары логически независимых функций существует хотя бы одна вероятностная мера на *U*, относительно которой эти функции становятся вероятностно независимыми. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ - возможные значения функции f и $b_1,b_2,\ldots,b_l$ - возможные значения функции g. Введем теперь на множестве логических возможностей такую вероятностную меру, чтобы вероятность $\boldsymbol{P}[(f=a_i)\,\&\,(g=b_j)]=\dfrac{1}{kl}$ для всех $i=1,2,\ldots,k$ и $j=1,2,\ldots,l$. Это можно сделать следующим образом: из логической независимости функций f и g следует, что область истинности каждого из предикатов $F_{ij}(x,y)=\begin{cases}1, \text{если } (f(x)=a_i)\,\&\,(g(y)=b_j)\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$ состоит в точности из одного элемента и что эти области попарно не пересекаются. Ясно, что имеется kl предикатов указанного вида. Если определить вероятность предиката $F_{ij}(x,y)$ равной числу $1/kl$, то суммарная вероятность всех таких предикатов равна $kl\cdot\dfrac{1}{kl}=1$. Потому построенная таким образом мера является вероятностной, причем $\boldsymbol{P}[(f=a_i)\,\&\,(g=b_j)]=\dfrac{1}{kl}$.

Теперь заметим, что

$$\boldsymbol{P}[f=a_i]=\boldsymbol{P}[(f=a_i)\,\&\,(g=b_1)]+\boldsymbol{P}[(f=a_i)\,\&\,(g=b_2)]+\cdots+\boldsymbol{P}[(f=a_i)\,\&\,(g=b_l)]=\frac{l}{kl}=\frac{1}{k}$$

Аналогично, $\boldsymbol{P}[g=b_j]=\dfrac{1}{l}$, и, следовательно,

$$\boldsymbol{P}[(f=a_i)\,\&\,(g=b_j)]=\frac{1}{kl}=\boldsymbol{P}[f=a_i]\cdot\boldsymbol{P}[g=b_j].$$

Поэтому относительно определенной таким образом вероятностной меры функции f и g оказываются вероятностно независимыми. ■

Пример 4.4. В условиях примера 3 определим две функции на U

$$g_1(x)=\begin{cases}1, \text{если при 1-ом бросании выпадает } \boldsymbol{O},\\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$$

и $g_2(x)=$[число выпадений O при 3-х бросаниях].

Выясним, являются ли функции вероятностно независимыми или нет.

Из определения функций ясно, что g_1 может принять значение 1 ($\boldsymbol{P}[g_1=1]=1/2$), а функция g_2 может принять значение 0 ($\boldsymbol{P}[g_2=0]=1/8$), но обе функции не могут принять эти значения одновременно ($\boldsymbol{P}[(g_1=1)\,\&\,(g_2=0)]=0$). Следовательно, функции g_1 и g_2 логически зависимые. Поэтому независимо от выбранной вероятностной меры на *U* эти функции не могут оказаться вероятностно независимыми. ■

1.5. Деревья, вероятности путей и вероятности ветвей. В этом параграфе мы построим вероятностную меру на множестве всевозможных путей дерева логических возможностей.

Сначала введем необходимую терминологию. Рассмотрим *дерево* логических возможностей для данной последовательности экспериментов. Каждой конкретной последовательности возможных исходов этих экспериментов соответствует определенный *путь* на этом дереве, который представляет собой совокупность отрезков и вершин дерева. Отрезки, составляющие каждый путь, называются *ветвями*. Дерево начинается из начальной *вершины*, и ветви, выходящие из начальной вершины, образуют первый *ряд дерева*. Концы ветвей первого ряда соответствуют возможным исходам первого эксперимента. Из вершин, отвечающих исходам первого эксперимента, выходят ветви, концы которых соответствуют возможным исходам второго эксперимента. Эти ветви образуют второй ряд дерева. Таким образом, мы строим дерево ряд за рядом до тех пор, пока не будут исчерпаны все эксперименты данной последовательности. Вершины дерева, из которых выходят ветви, называются вершинами *ветвления*. Каждой вершине ветвления в i-ом ряду дерева соответствует единственная последовательность исходов первых i экспериментов.

Если исход каждого отдельного эксперимента случаен, то последовательность таких экспериментов называется *стохастическим процессом*[*]. Будем предполагать, что данная последовательность экспериментов конечна, и что каждый эксперимент имеет конечное число возможных исходов. Будем предполагать также, что если известны исходы всех экспериментов, предшествующих данному, то для этого данного эксперимента можно определить и как возможные исходы, так и вероятности появления каждого из них.

Поставим задачу описать весь процесс в целом, т.е. дать вероятностную оценку того или иного (в идеале – любого!) конечного результата данной последовательности экспериментов. Это возможно только в том случае, когда всему процессу в целом приписана некоторая *вероятностная мера*. Формализация теории стохастических процессов потребует ряд определений.

Определение вероятностной меры путей дерева. Вероятностная мера, определенная на множество всех путей U некоторого дерева называется *вероятностной мерой* или *вероятностью путей* для данного дерева.

Для каждой совокупности ветвей, выходящих из любой вершины ветвления, задается своя вероятностная мера, причем сумма вероятностей появления исходов (ветвей) эксперимента, изображенного этой точкой, равна 1. Эта вероятностная мера называется *вероятностью исходов (ветвей)*. Пусть $\alpha \ldots \lambda\mu$ - одна из возможных последовательность исходов (или изображающих их ветвей) первых j экспериментов. Обозначим через $p^{\mu}_{\alpha\ldots\lambda}$ вероятность исхода μ j-го эксперимента при условии, что исходы первых $j-1$ экспериментов описывают-

[*] Греческое слово σтωχωσ (стохос) означает «догадка».

ся последовательностью $\alpha\ldots\lambda$. Вероятность исхода α первого эксперимента будем обозначать по аналогии через p^{α}.

В любом дереве ветви, выходящие из вершины ветвления в *j*-ом ряду, описывают возможные исходы *j*-го эксперимента при условии, что исходы первых $j-1$ экспериментов уже известны. Вероятности, которые приписываются этим ветвям, подсказываются самим экспериментом, который проводится в момент достижения этой вершины дерева.

Проиллюстрируем вышесказанное следующим примером.

Пример 5.1. Имеется два склада, на первом из которых хранится два станка «Гигант» и один станок «Колосс», а на втором – один «Гигант» и два «Колосса». Наугад выбирается один склад и из него последовательно (без возвращения) выбираются два станка. Изобразим дерево логических возможностей и припишем (вычислим) ветвям этого дерева их вероятности.

Вершины первого ряда обозначим через 1 и 2 (номера складов), вершины второго и третьего рядов обозначим через 3 и 4 (3 – это «Гигант» и 4 – это «Колосс»). Начинаем с вершины 0 нулевого ряда, которая изображает эксперимент по выбору склада. Так как выбор происходит случайно, то из этой вершины выходит две ветви, каждой из которых мы приписываем вероятность $1/2$. Поскольку первый склад содержит два станка «Гигант» и один станок «Колосс», то из вершины 1 выходят две ветви, из которых одной (соответствующей выбору «Гиганта») приписываем* вероятность $2/3$, а второй (соответствующей выбору «Колосса») - $1/3$. Поскольку второй склад содержит два станка «Колосс» и один станок «Гигант», то из вершины 2 выходят две ветви, из которых одной (соответствующей выбору ;Гиганта») приписываем вероятность $1/3$, а второй (соответствующей выбору «Колосса») - $2/3$. В результате получим четыре вершины 2-го ряда. Далее, если выбран первый склад и первый взятый из него станок оказался «Гигантом», то вероятности выбрать «Гигант» или «Колосс» будут равны между собой, т.е равны $1/2$. В результате из вершины 3, которая завершает последовательность вершин 013, выходят две ветви с приписанными им вероятностями $1/2$. Если выбран первый склад и первый взятый из него станок оказался «Колоссом», то вероятности выбрать «Гигант» будет равна 1, а «Колосс» - 0. В результате из вершины 4, которая завершает последовательность вершин 014, выходит одна ветвь с приписанной ей вероятностью 1. Аналогично строятся остальные ветви и вычисляются их вероятности.

Построенное таким образом дерево логических возможностей имеет 6 различных путей, которые мы обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_6$ (см. рис.5.1)

3 x_1

* Это - вероятность случайного события X: «*Из первого склада взят станок «Гигант»*», которая легко вычисляется с помощью классического определения вероятности.

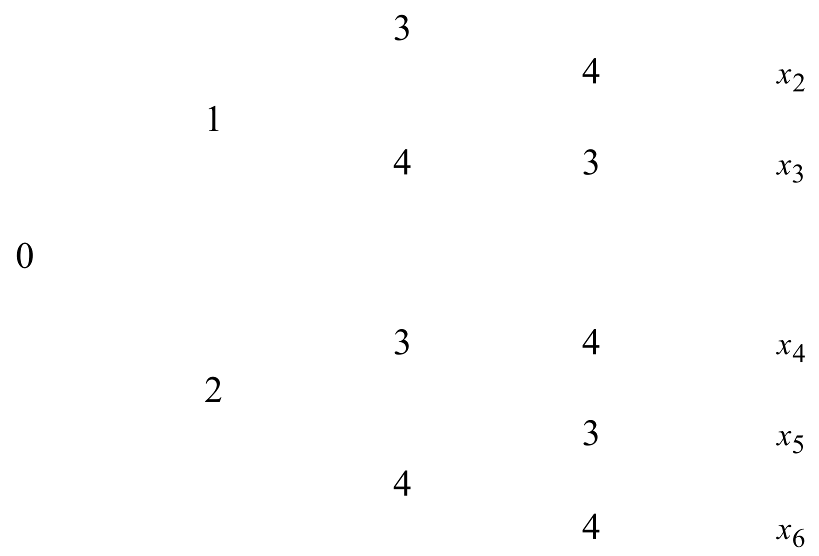

Рис. 5.1

Используя введенные выше обозначения для вероятностей ветвей, можно записать полученные вероятности для пути x_1 следующим образом: $p^1 = 1/2$, $p_1^3 = 2/3$, $p_{13}^3 = 1/2$; для пути x_2 : $p^1 = 1/2$, $p_1^3 = 2/3$, $p_{14}^4 = 1/2$; для пути x_3 : $p^1 = 1/2$, $p_1^4 = 1/3$, $p_{14}^3 = 1$ и т.д. ■

Теперь будем рассматривать высказывания, относящиеся ко всей последовательности экспериментов, и поставим задачу нахождения вероятностей случайных событий, которые могут произойти (или не произойти) только после завершения всей последовательности экспериментов. Для того чтобы определить вероятности таких случайных событий, необходимо задать вероятностную меру на множестве путей данного дерева, которое и будет для этого исходным пространством логических возможностей *U*. При этом вероятностную меру на *U* зададим так, чтобы вероятности отдельных ветвей были равны соответствующим условным вероятностям.

Рассмотрим последовательность из *n* экспериментов, пусть *U* – множество всевозможных путей на соответствующем дереве логических возможностей и $x \in U$ - произвольный путь на этом дереве. Обозначим через $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функции исходов, известно, что эти функции описывают пространство *U* таким образом, что *x* является единственным элементом, содержащимся во множестве истинности подходящего предиката вида $[f_1(x) = a_1] \& [f_2(x) = a_2] \& \ldots \& [f_n(x) = a_n]$. Поэтому вероятность элементарного случайного события, которое происходит тогда и только тогда, когда осуществляется логическая возможность *x*, т.е. когда последовательность экспериментов описала путь *x*, равна

$$\boldsymbol{w}(x) = \boldsymbol{P}[(f_1(x) = a_1) \& (f_2(x) = a_2) \& \ldots \& (f_n(x) = a_n)].$$

Используя теорему о вероятности произведения случайных событий, отсюда получаем

$$\boldsymbol{w}(x) = \boldsymbol{P}[f_1 = a_1] \cdot \boldsymbol{P}_{f_1 = a_1}[f_2 = a_2] \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{P}_{(f_1 = a_1) \& (f_2 = a_2) \& \ldots \& (f_{n-1} = a_{n-1})}[f_n = a_n].$$

Из самого определения вероятностей ветвей ясно, что следует положить

$$\boldsymbol{P}[f_1 = a_1] = p^{a_1};$$

$$\boldsymbol{P}_{f_1=a_1}[f_2 = a_2] = p_{a_1}^{a_2};$$

$$\ldots$$

$$\boldsymbol{P}_{(f_1=a_1)\&(f_2=a_2)\&\ldots\&(f_{n-1}=a_{n-1})}[f_n = a_n] = p_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}^{a_n}.$$

Чтобы обеспечить справедливость всех этих равенств, необходимо положить

$$\boldsymbol{w}(x) = p^{a_1} p_{a_1}^{a_2} \cdots p_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}^{a_n}.$$

Другими словами, каждому пути необходимо приписать вероятностную меру, равную произведению вероятностей ветвей, составляющих этот путь. При этом вероятности ветвей оказываются равными соответствующим условным вероятностям.

Пример 5.1 (продолжение). Пусть вероятности ветвей выбраны так, как вычислено в примере 5.1 (см. выше), тогда произведение вероятностей ветвей, составляющих каждый путь на дереве логических возможностей (см. рис.1), и, следовательно, вероятность самого пути, равно $1/6$. Кстати, заметим, что всего на дереве логических возможностей имеется 6 различных путей, следовательно, сумма вероятностей всех путей равна 1, что подтверждает корректность введенной таким образом вероятностной меры на пространстве путей.

Вычислим теперь для проверки с помощью формулы Байеса условные вероятности вдоль пути x_1:

$$p^1 = \boldsymbol{P}[f_1 = 1] = \boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_2) + \boldsymbol{w}(x_3) = 1/2;$$

$$p_1^3 = \boldsymbol{P}_{f_1=1}[f_2 = 3] = \frac{\boldsymbol{P}[(f_2 = 3)\,\&\,(f_1 = 1)]}{\boldsymbol{P}[f_1 = 1]} = \frac{\boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_2)}{\boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_2) + \boldsymbol{w}(x_3)} = \frac{2}{3};$$

$$p_{13}^3 = \boldsymbol{P}_{(f_1=1)\&(f_2=3)}[f_3 = 3] = \frac{\boldsymbol{P}[(f_3 = 3)\,\&\,(f_2 = 3)\,\&\,(f_1 = 1)]}{\boldsymbol{P}[(f_2 = 3)\,\&\,(f_1 = 1)]} = \frac{\boldsymbol{w}(x_1)}{\boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_2)} = \frac{1}{2}$$

Вычисляя подобным образом вероятности других ветвей, убедимся в том, что они совпадают с вероятностями, приписанными ветвям в начале примера 5.1 (см. след. рис.5.2):

				x	$\boldsymbol{w}(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
			3	x_1	1/6	1	3	3
		3						
			4	x_2	1/6	1	3	4
	1							
		4	3	x_3	1/6	1	4	3
0								
		3	4	x_4	1/6	2	3	4
	2							
			3	x_5	1/6	2	4	3
		4						
			4	x_6	1/6	2	4	4

Рис. 5.2 ■

Пусть имеется n-ярусное дерево логических возможностей и вероятностная мера на нем для последовательности из n экспериментов. Если рассматривается случайное событие, относящееся к первым m экспериментам, где $m < n$, то найти его вероятность можно по более простому дереву, состоящему из первых m рядов данного n-ярусного дерева. Оказывается, что любая вероятность, вычисленная по этому дереву, равна соответствующей вероятности, вычисленной по полному n-ярусному дереву.

Пример 5.2. Рассмотрим в примере 5.1 случайное событие A: «Первый выбранный станок –«Гигант»» и найдем его вероятность.

Очевидно, что $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}[f_2 = 3]$. Множество истинности соответствующего предиката состоит из путей $\{x_1, x_2, x_4\}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}[f_2 = 3] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Однако, это случайное событие имеет отношение только к первым двум экспериментам, и, следовательно, для него можно построить более простое *2*-х ярусное дерево:

			x	$\boldsymbol{w}(x)$
		3	x_1	1/3
	1			
		4	x_2	1/6
0				
		3	x_3	1/6
	2			
		4	x_3	1/3

Рис. 5.3

Рассматривая случайное событие A уже на этом дереве, видно (см. рис. 5.3), что $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}[f_2 = 3]$ и область истинности соответствующего предиката состоит из путей $\{x_1, x_3\}$, поэтому $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}[f_2 = 3] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ■

В рассмотренных выше примерах сначала определялась вероятность ветвей, а затем высчитывалась вероятностная мера путей. Однако в некоторых задачах можно действовать и в противоположном направлении: сначала определить вероятностную меру на множестве путей дерева логических возможностей, а затем вычислить вероятности отдельных ветвей. Рассмотрим этот вариант на примере.

Пример 5.3. Вероятность того, что на остановку общественного транспорта прибудет автобус №1, равна 0,4, автобус №2 – 0,3, автобус №3 – 0,2 и автобус №4 – 0,1. Известно, что на каждом маршруте может возникнуть автомобильная пробка, причем вероятность этого для автобуса №1 равна 0,1, для автобуса №2 – 0,2, для автобуса №3 – 0,3 и для автобуса №4 – 0,9. Построим дерево логических возможностей и найдем вероятность того, что пассажир прибудет на конечную остановку точно по расписанию.

x $\boldsymbol{w}(x)$

		5	x_1	0,04
	1			
		6	x_2	0,36
		5	x_3	0,06
	2			
		6	x_4	0,24
0				
		5	x_5	0,06
	3			
		6	x_6	0,14
		5	x_7	0,09
	4			
		6	x_8	0,01

Рис. 5.4

На рис.4 начальная вершина обозначена 0, вершины первого ряда обозначены тем же числом, что и номер соответствующего автобуса, обозначение вершин второго ряда означают: 5 – пассажир прибыл на конечную остановку по расписанию, 6 – прибыл с опозданием.

Пусть A: «*Пассажир прибыл на конечную остановку точно по расписанию*» - случайное событие, вероятность которого исходя из дерева логических возможностей, можно найти по формуле $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_3) + \boldsymbol{w}(x_5) + \boldsymbol{w}(x_7) = 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}09 = 0{,}25$.

Предположим теперь, что пассажир пытается оценить вероятность случайного события A, не зная еще, какой автобус подойдет на остановку. Это равносильно исследованию логических возможностей в обратном порядке, когда сначала рассматривается прибытие на конечную остановку, а затем уже – выбранный автобус. На следующем рисунке изобразим новое дерево логических возможностей, сохраняя предыдущую систему обозначений для вершин. Ясно, что одинаковые пути (с точностью до перестановки ветвей) на этих двух деревьях должны иметь равные вероятности. Это позволяет найти вероятности отдельных ветвей, эти вероятности указаны на рис.5.

Например, определим вероятности вервей, составляющих путь x_1, т.е. вычислим p^5 и p_5^1. Имеем, $p^5 = \boldsymbol{P}[f_1 = 5] = 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}09 = 0{,}25$. Так как $p^5 \cdot p_5^1 = 0{,}04$, то $p_5^1 = 0{,}16$.

На этом примере видно, как информация о факте прибытия пассажира на конечную остановку (точно по расписанию или с опозданием) влияет на результат предсказания выбранного им автобуса. Не принимая во внимание эту информацию, мы полагали, что пассажир сядет в автобус №1 с вероятностью 0,4. Однако известие о том, что он прибыл на конечную остановку точно по расписанию, заставляет нас понизить эту вероятность до 0,16. Наоборот, известие о том, что пассажир прибыл на конечную остановку с опозданием, мы повышаем вероятность выбора автобуса №1 до 0,48.

			x	$w(x)$
0	5	1	x_1	0,04
		2	x_2	0,36
		3	x_3	0,06
		4	x_4	0,24
	6	1	x_5	0,06
		2	x_6	0,14
		3	x_7	0,09
		4	x_8	0,01

Рис. 5.5

■

Итак, любой конечный стохастический процесс полностью описывается деревом логических возможностей и заданием вероятностей его ветвей (или вероятностной меры на его путях). Накладывая определенные ограничения на функции исходов этого процесса, можно выделить отдельные типы стохастических процессов. Дадим необходимые определения для трех важнейших типов стохастических процессов: *процессов с независимыми значениями, процессов независимых испытаний и марковских цепей*.

Определение процесса с независимыми значениями. Конечный стохастический процесс с функциями исхода $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ называется *процессом с независимыми значениями*, если для любого *n* и произвольных исходов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ выполнено

$$\boldsymbol{P}_{(f_1=a_1)\&(f_2=a_2)\&\cdots\&(f_{n-1}=a_{n-1})}[f_n = a_n] = \boldsymbol{P}[f_n = a_n] .$$

Другими словами, для процесса с независимыми значениями вероятность любого исхода n-го эксперимента не зависит от исходов предшествующих экспериментов. Для того чтобы выяснить, является ли данный стохастический процесс процессом с независимыми значениями или нет, стоит посмотреть на *пучок* ветвей, выходящих из каждой вершины ветвления дерева логических возможностей. Два пучка называются *эквивалентными*, если они состоят из ветвей, соответствующим одним и тем же исходам (но различных экспериментов), причем в обоих пучках одинаковым исходам соответствуют ветви с равными вероятностями. Процессы с независимыми значениями характеризуются тем, что в каждом ряду дерева все пучки ветвей эквивалентны между собой.

Важнейшее свойство процессов с независимыми значениями состоит в том, что функции исхода $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ (вся совокупность или любое ее подмножество) процесса с независимыми значениями вероятностно независимы относительно вероятностной меры путей дерева его логических возможностей. В самом деле, пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ - некоторое множество функций исхода и

$a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ - некоторое множество исходов произвольного конечного стохастического процесса, тогда должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{P}[(f_1 = a_1)\,\&\,(f_2 = a_2)\,\&\cdots\&\,(f_{m-1} = a_{m-1})\,\&\,(f_m = a_m)] = \boldsymbol{P}[f_1 = a_1]\cdot \boldsymbol{P}_{f_1 = a_1}[f_2 = a_2]\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot \boldsymbol{P}_{(f_1 = a_1)\&(f_2 = a_2)\&\cdots\&(f_{m-1} = a_{m-1})}[f_m = a_m].$$

Если этот процесс является процессом с независимыми значениями, то, очевидно, должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{P}[(f_1 = a_1)\,\&\,(f_2 = a_2)\,\&\ldots\&\,(f_m = a_m)] = \boldsymbol{P}[f_1 = a_1]\cdot \boldsymbol{P}[f_2 = a_2]\cdot\ldots\cdot \boldsymbol{P}[f_m = a_m].$$

Это и означает, что функции исхода $f_1, f_2, \dots, f_m$ процесса с независимыми значениями вероятностно независимы относительно вероятностной меры путей дерева его логических возможностей.

Пример 5.4. Подбрасывается монета, затем игральная кость и затем еще раз монета, причем после бросания кости нас интересует только факт выпадения 3 очков или не 3 очков. Построим дерево логических возможностей, определим вероятностную меру на этом дереве и убедимся, что данная последовательность экспериментов дает стохастический процесс с независимыми значениями.

На рис.5.6 начальная вершина дерева логических возможностей обозначена через 0, вершина, соответствующая выпадению «орла» - через 1, «решки» - через 2, трех очков на игральной кости – через 3, не трех очков – через 4.

				x	$\boldsymbol{w}(x)$
0	1	3	1	x_1	1/24
			2	x_2	1/24
		4	1	x_3	5/24
			2	x_4	5/24
	2	3	1	x_5	1/24
			2	x_6	1/24
		4	1	x_7	5/24
			2	x_8	5/24

Рис. 5.6 ■

Важнейшим частным случаем процессов с независимыми значениями является процесс независимых испытаний.

Определение процесса независимых испытаний. Конечный стохастический процесс с функциями исхода $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ называется *процессом независимых испытаний*, если он является процессом с независимыми значениями и

$$\boldsymbol{P}[f_n = a] = \boldsymbol{P}[f_m = a]$$

для любых m, n и a.

Из этого определения следует, что все пучки ветвей дерева логических возможностей процесса независимых испытаний должны быть эквивалентными, в отличие от дерева процесса с независимыми значениями, на котором требуется лишь эквивалентность пучков, принадлежащих одному и тому же ряду дерева.

Пример 5.5. Пусть эксперимент состоит в бросании игральной кости, исходами которого является выпадение одного очка с вероятностью $1/6$ или числа очков, большего 1, с вероятностью $5/6$. Для любого числа бросаний можно построить дерево логических возможностей и соответствующую ему вероятностную меру, которые покажут, что этот процесс является процессом независимых испытаний.

На следующем рисунке построено дерево для $n=3$, начальная вершина которого обозначена через 0, вершина, соответствующая выпадению 1 обозначена через 1, а выпадению не 1 – через 2. Все три функции исхода f_1, f_2, f_3 имеют одну и ту же область изменения $\{1,2\}$ и для каждой из трех функций исхода $\boldsymbol{P}[f_i = 1] = 1/6$ и $\boldsymbol{P}[f_i = 2] = 5/6$.

				x	$\boldsymbol{w}(x)$
0	1	1	1	x_1	1/216
			2	x_2	5/216
		2	1	x_3	5/216
			2	x_4	25/216
	2	1	1	x_5	5/216
			2	x_6	25/216
		2	1	x_7	25/216
			2	x_8	125/216

Рис. 5.7

■

Заметим, что вероятности всех ветвей каждого из рядов дерева логических возможностей процесса независимых испытаний одни и те же, т.е не зависят от исходов предыдущих экспериментов. Теперь рассмотрим процесс, для которого вероятности всех ветвей одного ряда соответствующего дерева зависят лишь от исхода предшествующего эксперимента. Такой процесс называется марковской цепью.

Определение марковской цепи. Конечный стохастический процесс с функциями исхода $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ называется *марковской цепью*, если его исходное состояние f_0 фиксировано,

$$\boldsymbol{P}_{(f_1 = a_1) \& (f_2 = a_2) \& \cdots \& (f_{n-1} = a_{n-1})}[f_n = a_n] = \boldsymbol{P}_{f_{n-1} = a_{n-1}}[f_n = a_n]$$

и

$$\boldsymbol{P}_{f_{n-1} = a}[f_n = u] = \boldsymbol{P}_{f_{m-1} = a}[f_m = u]$$

для всех $m \geq 1$, $n \geq 2$ и любых исходов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a, b$.

Другими словами, исход данного эксперимента зависит только от исхода предшествующего эксперимента, и, более того, характер этой зависимости одинаков для всех этапов последовательности экспериментов. Отсюда следует, что если две вершины ветвления дерева марковского процесса характеризуются одинаковыми исходами, то независимо от того, принадлежат эти вершины одному или разным рядам дерева, выходящие из этих вершин пучки ветвей должны быть эквивалентными. Эти особые свойства марковских цепей позволяют дать их эквивалентное определение на языке состояний системы.

Определение состояния системы. Пусть $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ – множество возможных состояний некоторой системы, которая характеризуется одним и только одним из этих состояний в каждый момент времени. Каждый переход из одного состояния в другое называется *шагом* процесса. Предполагается, что вероятность p_{ij} того, что система переходит из состояния s_i в состояние s_j, зависит только от состояния s_i. *Марковская цепь* характеризуется тем, что *вероятности перехода* p_{ij} определены для всех упорядоченных пар состояний (s_i, s_j). Предполагается также, что задано *исходное состояние*, в котором находится система в начальный момент времени.

Приведенное выше описание марковской цепи позволяет построить для любого конечного числа шагов дерево логических возможностей и вероятностную меру на нем.

Пример 5.6. У заправочного пистолета никогда не бывает двух подряд идущих промежутков времени, чтобы к нему подъехал только один автомобиль. Если в данный момент стоит для заправки только один автомобиль, то в следующий промежуток времени с одинаковой вероятностью к нему либо не подъезжает ни одного автомобиля, или подъезжают сразу более одного автомобиля. Если в данный момент времени нет ни одного автомобиля (или сразу два или более), то с вероятностью $1/2$ данное состояние сохранится в следующий промежуток времени. Если все же состояние изменится, то в половине случаев на пустующую заправку приедет более одного автомобиля или наоборот, и лишь в половине случаев в следующий промежуток времени приедет только один автомобиль.

Предположим, что в данный момент времени у заправочного пистолета находится только один автомобиль. Используя всю имеющуюся в наличии информацию, построим марковскую цепь. *Системой* является заправочный пистолет и множество автомобилей (возможно, пустое) около него для заправки в данный промежуток времени. *Состояния* этой системы обозначим через 0, 1 и 2 по числу автомобилей в данный промежуток времени (2 обозначает состояние, когда автомобилей 2 или более).

Теперь мы должны подсчитать вероятности перехода из одного состояния в другое. Удобнее всего записать эти вероятности в виде матрицы 3-го порядка, в которой элемент p_{ij} *i*-ой строки ($i=1,2,3$) и *j*-го столбца ($j=1,2,3$) представляет собой вероятность того, что после того, как на заправку прибыло автомобилей в количестве $(i-1)$, в следующий промежуток времени прибыло автомобилей в количестве $(j-1)$. Вот эта матрица *вероятностных переходов*:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно построить дерево логических возможностей для состояния заправочного пистолета на три последовательных промежутков времени и определить вероятностную меру на его путях.

С помощью этого дерева можно сделать прогноз о вероятности того, сколько автомобилей будет у заправочного пистолета в каждый из трех следующих промежутков времени. Например, $\boldsymbol{P}[f_1=0]=1/2$; $\boldsymbol{P}[f_2=0]=5/8$; $\boldsymbol{P}[f_3=0]=13/32$.

				x	$\boldsymbol{w}(x)$
			0	x_1	4/32
		0	1	x_2	2/32
			2	x_3	2/32
			0	x_4	2/32
	0	1			
			2	x_5	2/32
			0	x_6	1/32
		2	1	x_7	1/32
			2	x_8	2/32
1					
			0	x_9	2/32
		0	1	x_{10}	1/32
			2	x_{11}	1/32
			0	x_{12}	2/32
	2	1			
			2	x_{13}	2/32
			0	x_{14}	2/32
		2	1	x_{15}	2/32
			2	x_{16}	4/32

Рис. 5.8

1.6. Независимые испытания с двумя исходами. Пусть проводится друг за другом один и тот же эксперимент в неизменных условиях, причем результат каждого следующего не зависит от любого предыдущего и не влияет на все последующие. Обозначим возможные исходы отдельного эксперимента через $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и вероятности их появления через $p_1, p_2, \ldots, p_r$, соответственно. Ясно, что любая конечная последовательность таких экспериментов образует процесс независимых испытаний, дерево логических возможностей которого в каждой вершине ветвление будет иметь эквивалентные пучки ветвей.

Рассмотрим важный частный случай процессов независимых испытаний, когда число исходов каждого эксперимента равно двум ($r = 2$). В этом случае принято один исход называть *успехом*, а другой – *неудачей*. Процесс независимых испытаний с двумя случайными исходами, вероятности которых не меняются от испытания к испытанию, называется *схемой Бернулли**.

Например, при бросании монеты возможны два исхода – выпадение «орла» (успех) или «решки» (неудача). Пусть p обозначает вероятность успеха и $q = p - 1$ - вероятность неудачи. Дерево логических возможностей для последовательности из трех таких экспериментов и вероятности его путей представлены на следующем рисунке:

				x	$\boldsymbol{w}(x)$
			1	x_1	p^3
		1			
			0	x_2	p^2q
	1				
			1	x_3	p^2q
		0			
			0	x_4	pq^2
•					
			1	x_5	p^2q
		1			
			0	x_6	pq^2
	0				
			1	x_7	pq^2
		0			
			0	x_8	q^3

Рис. 6.1

На этом рисунке начальная вершина обозначена через •, вершина, соответствующая успеху – через 1, неуспеху – через 0. Обозначим через $\boldsymbol{P}_n[k]$ веро-

* Бернулли (Bernoulli) – семья швейцарских ученых, родоначальник которой Якоб (ум. 1583) был выходцем из Голландии: Якоб (27.12.1654, Базель – 16.8.1705, Базель), Иоганн (27.7.1667, Базель – 1.1.1748, Базель) – младший брат Якоба, Николай (21.10.1687, Базель – 29.11.1759, Базель) – племянник Якоба и Иоганна, Николай (27.1.1695, Базель – 29.7.1726,Петербург) – сын Иоганна, Даниил (29.1.1700, Гронинген – 17.3.1782, Базель) – сын Иоганна, Иоганн (4.11.1744, Базель – 13.7.1807, Берлин) – внук Иоганна, Якоб (17.10.1759, Базель – 3.7.1789, Петербург) – внук Иоганна.

ятность в точности k успехов при n экспериментах. Для вычисления $\boldsymbol{P}_n[k]$ в теории вероятностей используется, так называемая *формула Бернулли*[*]

$$\boldsymbol{P}_n[k] = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Пример 6.1. Предположим, что у пяти человек, выбранных наугад, спросили, поддерживают ли они правящую партию. Социологические опросы показывают, что правящую партию поддерживают 30% населения. Чему равна вероятность того, что большинство из пяти выбранных человек поддерживают правящую партию?

По условию задачи вероятность того, что отдельный человек поддерживает правящую партию $p = 0{,}3$, отсюда $q = 0{,}7$. Опрос пяти человек представляет собой схему Бернулли с $n = 5$. Вероятность того, что большинство из пяти человек поддерживают правящую партию, выражается формулой $r = \boldsymbol{P}_5[3] + \boldsymbol{P}_5[4] + \boldsymbol{P}_5[5]$. Осталось сделать нетрудные вычисления:

$$r = \frac{5!}{3!\cdot 2!}0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}0{,}3^4 \cdot 0{,}7 + \frac{5!}{5!\cdot 0!}0{,}3^5 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}1323 + 0{,}02835 + 0{,}00243 = 0{,}16308$$

■

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ - функции исхода процесса независимых n испытаний, значения которых принадлежат множеству $\{0{,}1\}$. Тогда функция $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ определяет число повторений исхода 1 (или число «успехов»). Из формулы Бернулли следует, что

$$\boldsymbol{P}[s_n = j] = C_n^k p^j q^{n-j},$$

где p – вероятность исхода 1 в одном, отдельно взятом испытании, и $q = p - 1$ - вероятность исхода 0.

Определение биномиального распределения. Функция $\boldsymbol{b}(n, j; p) = \boldsymbol{P}[s_n = j]$ называется *биномиальным распределением вероятностей*.

Пример 6.2. Продолжая пример 6.1, составим таблицу значений функции $\boldsymbol{b}(n, j; p)$ для $n = 5$ и $n = 6$ и построим полигоны этих биномиальных распределений.

j	$\boldsymbol{b}(5, j; 0{,}3)$	$\boldsymbol{b}(6, j; 0{,}3)$
0	0,16807	0,117649
1	0,36015	0, 302526
2	0,3087	0,324135
3	0,1323	0,18522
4	0,02835	0,059535
5	0,00243	0,010206
6		0,000729

Табл.6.1

[*] Схему Бернулли и формулу Бернулли доказал Якоб Бернулли (27.12.1654, Базель – 16.8.1705, Базель) в труде «Искусство предположений», 1713 г.

Рис.6.1

■

Из таблицы 1 видно, что функция $\boldsymbol{b}(5,j;0{,}3)$ достигает максимума (равного 0,36015) в точке $j^*=1$, а функция $\boldsymbol{b}(6,j;0{,}3)$ достигает максимума (равного 0,324135) в точке $j^*=2$, и после этого обе функции начинают монотонно убывать. Этот факт можно интерпретировать следующим образом: 1 – *наивероятнейшее число успеха* при биномиальном распределении $\boldsymbol{b}(5,j;0{,}3)$, а 2 – *наивероятнейшее число успеха* при биномиальном распределении $\boldsymbol{b}(6,j;0{,}3)$. Если вспомнить задачу, приведшую к этим биномиальным распределениям, то можно констатировать, что вероятнее всего из пяти опрошенных человек, только один поддерживает правящую партию, а из шести – только два.

В случае биномиального распределения общего вида $\boldsymbol{b}(n,j;p)$ также существует наивероятнейшее число j^* появлений успеха. В курсе теории вероятностей доказано, что если $np-q$ - не целое число, то $j^*=[np-q]+1$, а если $np-q$ - целое число, то наивероятнейших чисел два: $j^*=np-q$ и $j^*=np-q+1$. Здесь мы использовали функцию целая часть x или антье x (обозначение: $[x]$), значением которой в точке x является *наименьшее целое число, не превосходящее x*.

Если рассматривать $\boldsymbol{b}(n,j;p)$ как функцию от j при фиксированных n и p, определенную на множестве $U=\{0,1,2,\ldots,n\}$, то она обладает всеми свойствами вероятностной меры на U. В частности легко проверить, что $\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{b}(n,j;p)=1$. Обычно определенная таким образом вероятностная мера называется *биномиальной.* Биномиальная мера пригодна для грубого анализа логических возможностей, связанных лишь с числом повторений успеха.

Вычисление значений функции $\boldsymbol{b}(n,j;p)=C_n^k p^j q^{n-j}$ при больших n требуют много времени, поэтому существует несколько приближенных методов для вычисления значений $\boldsymbol{b}(n,j;p)$. Один из них основан на связи между биномиальным распределением и *распределением Пуассона*, которая устанавливается в следующей теореме.

Теорема об аппроксимации биномиальной вероятности пуассоновской вероятностью. Предположим, что биномиальное распределение $\boldsymbol{b}(n,j;p)$ таково, что при фиксированном j и $n\to\infty$ значение $p\to 0$, а произведение np остается постоянным и равным числу λ. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{b}(n,j;p)=\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!},$$

где $e \approx 2{,}7$ - основание системы натуральных логарифмов*.

Значение этой теоремы в том, что при большом числе n испытаний с малой вероятностью p одного из их исходов можно использовать приближенное равенство

$$\boldsymbol{b}(n, j; p) \approx \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!},$$

где $\lambda = np$.

Пример 6.3. Типографский наборщик допускает в среднем одну ошибку на 1000 слов. Обозначим через s число ошибок, допущенных наборщиком на одной странице, содержащей 100 слов. Найдем вероятности того, что наборщик допустил s ошибок для $s = 0,1,2,3,4$.

Каждое набранное слово можно рассматривать как отдельный эксперимент с двумя исходами: ошибка допущена или нет. Из условия задачи следует, что вероятность ошибки $p = 0{,}001$ и постоянна во всех таких экспериментах. Поэтому можно рассматривать набор страницы как процесс независимых испытаний с биномиальным распределением вероятностей $\boldsymbol{b}(100, j; 0{,}001)$. Отсюда получаем, что

$$\boldsymbol{P}[s = j] = \boldsymbol{b}(100, j; 0{,}001) = \frac{100!}{j! (100 - j)!} \cdot 0{,}001^j \cdot 0{,}999^{100-j}.$$

Ясно, что по этой формуле не реально вычислить требуемые вероятности. Воспользуемся приближенным равенством при $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}001 = 0{,}1$ и вычислим вероятности с точность до 10^{-5} по формуле $\boldsymbol{P}[s = j] \approx \frac{0{,}1^j \cdot e^{-0{,}1}}{j!}$. Результаты представим в таблице 6.2:

j	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{P}[s = j]$	0,90484	0,09048	0,00452	0/00015	0,00000

Табл.6.2

■

Рассмотрим теперь воображаемый процесс независимых испытаний, состоящий из бесконечного числа экспериментов с двумя исходами. Тогда число $\boldsymbol{s}$ испытаний, в которых происходит один из исходов с некоторой постоянной вероятностью, может принимать любое значение из множества $U = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$. По аналогии с биномиальной вероятностью можно определить на U вероятностную меру. На основании теоремы об аппроксимации биномиальной вероятности, можно предположить, что

$$\boldsymbol{P}[s = j] = \boldsymbol{p}(j; \lambda) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}.$$

* Число e определяется в курсе математического анализа: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}1718281828459045\ldots$

Докажем, что $\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{p}(j;\lambda) = 1$. Из курса математического анализа известно, что $e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$, поэтому

$$\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{p}(j;\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j \cdot e^{-\lambda}}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Это означает, что действительно функция $\boldsymbol{p}(j;\lambda) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$ задает вероятностную меру на множестве *U*. Эта мера называется *пуассоновской вероятностью** с параметром λ. Смысл параметра λ обсудим ниже.

Пусть биномиальная вероятность *x* успехов при *n* испытаниях дает функция

$$\boldsymbol{b}(n,x;p) = C_n^x p^x q^{n-x}.$$

Вычислим отношение вероятности $(x+1)$-го успехов при *n* испытаниях к вероятности *x* успехов при *n* испытаниях:

$$\frac{\boldsymbol{b}(n,x+1;p)}{\boldsymbol{b}(n,x;p)} = \frac{C_n^{x+1} p^{x+1} q^{n-x-1}}{C_n^x p^x q^{n-x}} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Легко проверить, что $\frac{\boldsymbol{b}(n,x+1;p)}{\boldsymbol{b}(n,x;p)} > 1$ при $x < np - q$, а затем становится меньше единицы. Таким образом, наибольшая вероятность соответствует числам *x*, близким к *np*. Это не означает, что для отдельного *x*, близкого к *np*, вероятность *x* успехов велика, а означает, что лишь то, что она велика по сравнению с вероятностью для чисел *x*, более удаленных от *np*.

Более ценную информацию дает изучение вероятности отклонения доли успехов x/n от вероятности *p* на заданное $\varepsilon > 0$

$$\boldsymbol{P}[p - \varepsilon < \frac{x}{n} < p + \varepsilon] = \boldsymbol{P}[\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon].$$

В курсе теории вероятностей доказывается, что для всех $n \in \boldsymbol{N}, 0 \le p \le 1$ и $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\boldsymbol{P}[p - \varepsilon < \frac{x}{n} < p + \varepsilon] \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (6)$$

Поэтому ясно, что каким бы малым ни было *ε*, можно подобрать такое *n*, чтобы величина $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ стала как угодно близкой к 1. Таким образом, *вероятность отклонения доли успехов от p менее чем на ε можно сделать сколь угодно близкой к 1 с помощью повторения достаточно большого числа n испытаний.*

Это утверждение является частным случаем одного из основных принципов теории вероятностей, называемого *законом больших чисел.* Он состоит в том, что *совместное действие случайных факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая.* Сближе-

---

* Пуассон Симеон Дени (Poisson Simeon Denis) (21.6.1781, Питивьн, деп. Луара – 25.4.1840, Париж) - французский механик, физик, математик, иностранный почетный член Петербургской АН.

ние доли успехов с его вероятностью при возрастании числа испытаний (подмеченное, скорее всего игроками в азартные игры) может служить первым примером проявления этого принципа. Впервые термин «закон больших чисел» появился в работе С. Пуассона, где так он назвал свою теорему о том, что доля успехов близка к величине $\overline{p} = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$, где p_k - вероятность успеха для k-го испытания, при возрастании числа n проведенных испытаний.

В равенстве (6) положим $\varepsilon = k\sqrt{\frac{pq}{n}}$, тогда

$$\boldsymbol{P}[p - k\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{x}{n} < p + k\sqrt{\frac{pq}{n}}] \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

или

$$\boldsymbol{P}[np - k\sqrt{npq} < x < np + k\sqrt{npq}] \ge 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Запишем последнее неравенство в виде

$$\boldsymbol{P}[|x - np| < k\sqrt{npq}] = \boldsymbol{P}[-k\sqrt{npq} < x - np < k\sqrt{npq}] \ge 1 - \frac{1}{k^2}. \qquad (7)$$

Величина np называется *средним значением* или *математическим ожиданием* числа успехов, а величина $\sqrt{npq}$ - *дисперсией* числа успехов. Вероятностный смысл дисперсии состоит в том, что она показывает, на сколько в среднем отклоняются значения случайной величины (в данном случае – число успехов в n испытаниях) от среднего значения этой случайной величины.

Из (7) следует, что вероятность отклонения числа успехов при биномиальном распределении от его среднего значения на величину, большую дисперсии, умноженной на число k, не превосходит $1/k^2$. Следовательно, чем больше k, тем меньше эта вероятность, и при $k \to \infty$ эта вероятность становится бесконечно малой величиной.

В классическом курсе теории вероятностей доказывается, что

$$\boldsymbol{P}[|x - np| < k\sqrt{npq}] \approx z_k, \qquad (8)$$

где значения z_k для любого $k > 0$ (не обязательно, целого) можно найти в специальной таблице, и они не зависят ни от n, ни от p. Очень удобно представлять дисперсию как единицу измерения. В таком случае z_k дает приближенную вероятность отклонения менее чем на k единиц. Значения z_k для $k = 1, 2$ и 3 равны $z_1 = 0{,}683\ldots$, $z_2 = 0{,}956\ldots$ и $z_3 = 0{,}997\ldots$. Таким образом, при большом числе испытаний маловероятно получить отклонение от среднего значение на величину, большую трех дисперсий. С другой стороны, $z_{0,1} = 0{,}080\ldots$. Это показывает, что также маловероятно, что отклонение от среднего значения будет меньше одной десятой дисперсии.

Заметим, что приближение (8) можно интерпретировать как вероятность того, что $x - np$ больше, чем $k\sqrt{npq}$ или меньше, чем $-k\sqrt{npq}$ приближенно равна $1 - z_k$. Известно, что

$$\boldsymbol{P}[x - np > k\sqrt{npq}] = \boldsymbol{P}[x - np < -k\sqrt{npq}] = \frac{1 - z_k}{2}.$$

Пример 6.4. При бросании монеты *1000000* раз среднее значение числа выпавших «орлов» равно *500000*, а дисперсия равна $\sqrt{1000000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 500$. Следовательно, вероятность того, что число x выпавших «орлов» отклонится от среднего значения *500000* менее чем на одну дисперсию, т.е. на *500*, равна приближенно *0,683*.

Это же можно записать в виде формулы $\boldsymbol{P}[|x - 500000| < 500] \approx 0{,}683$. Далее,

$$\boldsymbol{P}[|x - 500000| < 2 \cdot 500] = \boldsymbol{P}[|x - 500000| < 1000] \approx 0{,}954,$$

$$\boldsymbol{P}[|x - 500000| < 0{,}1 \cdot 500] = \boldsymbol{P}[|x - 500000| < 50] \approx 0{,}08.$$

■

Пример 6.5. В результате социологического опроса *10 000* наугад отобранных людей выяснилось, что *4 400* человек поддерживают президента и *5 600* человек не поддерживают президента. Будет ли маловероятным (или не маловероятным), что такое меньшинство получено в выборке *10 000* человек, если население разделяется поровну на тех, кто поддерживает президента, и тех, кто не поддерживает президента?

Так как население разделяется поровну, то можно предположить, что 10 000 опрошенных образуют процесс независимых испытаний с вероятностью 0,5 «за» и 0,5 «против». Тогда дисперсия для числа ответов «за» равна $\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 50$. Поэтому маловероятно, чтобы было бы получено отклонение от среднего значения 5000 (ответов «за» в нашей выборке из 10000 человек) более чем $3 \cdot 50 = 150$. Тот факт, что в данной выборке отклонение от среднего значения равняется 600, свидетельствует о неправильности гипотезы о разделении мнений населения поровну. Предположение о том, что фактическая доля тех, кто поддерживает президента, превышает половину населения, тем более привело бы к заключению, что в выборке из 10 000 человек наличие 4 400 человек, поддерживающих президента, весьма маловероятно (отклонение более трех дисперсий!). Это заставляет нас думать, что истинная доля населения, поддерживающих президента мерее 50%.

С другой стороны, если бы отклонение от среднего значения 5 000, тех, кто поддерживает президента, было менее одной дисперсии, т.е. принадлежало числовому промежутку [4950;5050], то в силу достаточно большой вероятности такого отклонения нельзя исключать возможности разделения мнений поровну.

■

1.7. Проблема выбора решения. В теории вероятностей при рассмотрении задачи на определение вероятности того или иного случайного события предполагается, что пространство логических возможностей и вероятностная мера анна нем заданы. В практике часто приходится принимать решение в условиях, когда выбор этого решения был бы довольно прост, если бы удалось определить вероятности случайных событий, от которых оно зависит. Однако определить достоверно вероятности часто бывает невозможно. Например, предложено для оздоровления экономики некоторая реформа. Решение воспользоваться этой реформой было бы более обоснованным, если бы можно было сравнить вероятность того, что экономика оздоровиться, при условии, что реформа проведена, с вероятностью того, что экономика оздоровиться без проведения этой реформы. Статистическая теория разработала методы получения на основании экспериментов некоторой информации, которая помогает оценить эти вероятности или выбрать нужное решение.

Проиллюстрируем эту процедуру на конкретном примере. Сергей утверждает, что он искусный стрелок и может сбить летающую тарелочку (раньше Сергею не приходилось стрелять по летающим тарелочкам). По этому поводу он предлагает пари Дмитрию на 1 рубль (роль рефери в этом пари играют читатели). Сергей не уверен на 100%, что способен сбить тарелочку, но полагает, что в серии выстрелов доля сбитых тарелочек будет заметно превышать половину.

Пусть p – вероятность того, что одним выстрелом Сергей сбивает тарелочку. Будем считать, что если $p = 0{,}5$, то Сергей не является искусным стрелком (т.е. попадание или промах не зависят от его умения стрелять), если $p > 0{,}5$, то он является искусным стрелком, и если $p < 0{,}5$, то он даже не способен направить ружье в нужную сторону. Если бы мы знали p, то мы могли бы сразу присудить Дмитрию 1 рубль при $p \le 0{,}5$, и Сергею – при $p > 0{,}5$. Но пока мы ничего не знаем о p и поэтому не можем определить кто же выиграл пари. Чтобы принять решение, мы проведем следующий эксперимент.

Мы предлагаем Сергею произвести 10 выстрелов (по десяти летающим тарелочкам), и если число разбитых тарелочек не менее 8, то присуждаем 1 рубль Сергею, а если оно менее 8, то – Дмитрию. Исследуем описанную процедуру. Ее пространство логических возможностей задается деревом, соответствующим десятикратному повторению одного и того же эксперимента – выстрелу по летающей тарелочке. Пусть $f_j, j = 1,2,\ldots,10$ - функции исхода, определенные на дереве логических возможностей, значения которых 0 и 1, причем $f_j = 1$, если после j-го выстрела тарелочка разбита, и $f_j = 0$, если – не разбита. Рассмотрим функцию $s_{10} = f_1 + f_2 + \cdots + f_{10}$. Если исход нашего эксперимента таков, что $s_{10} < 8$, то пари выигрывает Дмитрий, а если $s_{10} \ge 8$, то – Сергей. Будем предполагать, что наш процесс образован независимыми испытаниями и выбрана соответствующая вероятностная мера на пространстве логических возможностей. Ясно, что вероятностная мера зависит от величины вероятности p успеха при одном выстреле. Обозначим через $\boldsymbol{P}_p[s_{10} = x]$ вероятность x разбитых тарелочек (из десяти) в предположении, что вероятность успеха при одном выстреле равна p.

Рассмотрим теперь нашу процедуру, как с точки зрения Дмитрия, так и с точки зрения Сергея. Мы можем допустить ошибку двух родов. *Ошибка 1-го рода* состоит в том, что мы можем присудить 1 рубль Сергею, хотя истинное значение вероятности успеха при одном выстреле $p \le 0{,}5$, и *ошибка 2-го рода* состоит в том, что мы можем присудить 1 рубль Дмитрию, хотя $p > 0{,}5$. К сожалению, у нас нет средств, гарантирующих того, что мы не допустим одну из этих ошибок. Однако мы надеемся, что наша процедура убедит каждого из участников пари, что если он прав, то вероятность того, что он выиграет пари, велика.

Дмитрий полагает, что истинное значение $p = 0{,}5$. Вычислим вероятность того, что Дмитрий выиграет пари, если это действительно так. Эта вероятность (в предположении о независимости исходов отдельных выстрелов) равна $\boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} < 8]$. Для этого сначала вычислим сумму

$$\boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 8] + \boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 9] + \boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 10] = 0{,}055$$

с помощью следующей таблицы значений $\boldsymbol{P}_p[s_{10} = x]$:

x\p	0,10	0,25	0,5	0,75	0,90
0	0,349	0,056	0,001	0,000	0,000
1	0,387	0,188	0,010	0,000	0,000
2	0,194	0,282	0,044	0,000	0,000
3	0,057	0,250	0,0117	0,003	0,000
4	0,011	0,014	0,205	0,016	0,000
5	0,001	0,058	0,246	0,058	0,001
6	0,000	0,016	0,205	0,146	0,011
7	0,000	0,003	0,117	0,250	0,057
8	0,000	0,000	0,044	0,282	0,194
9	0,000	0,000	0,010	0,188	0,387
10	0,000	0,000	0,001	0,056	0,349

Табл.7.1

Следовательно, интересующая на с вероятность равна 1-0,055=0,945. Итак, Дмитрий уверен, что если он прав, то с большой вероятностью он выиграет пари.

Сергей, со своей стороны, считает, что p значительно больше 0,5. Если он предполагает, что $p = 0{,}9$, то как видно из таблицы

$$\boldsymbol{P}_{0,9}[s_{10} \geq 8] = \boldsymbol{P}_{0,9}[s_{10} = 8] + \boldsymbol{P}_{0,9}[s_{10} = 9] + \boldsymbol{P}_{0,9}[s_{10} = 10] = 0{,}194 + 0{,}387 + 0{,}349 = 0{,}930\,.$$

Таким образом, обе стороны должны быть удовлетворены условием пари.

Предположим, что Сергей сомневается в своих силах, и предполагает, что вероятность попадания при одном выстреле $p = 0{,}75$. Тогда расчет показывает, что

$\boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} \geq 8] = \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 8] + \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 9] + \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 10] = 0{,}282 + 0{,}188 + 0{,}056 = 0{,}526$ В таком случае наш эксперимент выявит способность Сергея стрелять искусно лишь с вероятностью, близкой к 0,5, что, конечно, не удовлетворит Сергея, и он может потребовать изменить эксперимент или условия, определяющие победителя пари.

Если, в самом деле, Сергей уверен, что $p = 0{,}75$, то мы можем предложить выявить победителя пари на следующих условиях: 1 рубль присуждается Сергею, если он разобьет не менее 7 тарелочек, и Дмитрию – если менее семи. Рассмотрим эту ситуацию с обеих сторон. Если, как думает Дмитрий, $p = 0{,}5$, то его вероятность выиграть пари равна

$$\boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} < 7] = 1 - (\boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 7] + \boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 8] + \boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 9] + \boldsymbol{P}_{0,5}[s_{10} = 10]) = 0{,}828\,,$$

а если, как думает Сергей, $p = 0{,}75$, то его вероятность выиграть пари равна

$$\boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} > 7] = \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 7] + \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 8] + \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 9] + \boldsymbol{P}_{0,75}[s_{10} = 10] = 0{,}776\,.$$

Для Дмитрия, таким образом, шансы уменьшились, а у Сергея увеличились. Теперь необходимо уговорить Дмитрия, что новые условия эксперимента справедливы.

Мы уже говорили выше, что в подобных экспериментах можно допустить ошибки двух родов. Так как в нашем эксперименте любая из этих ошибок не имеет фатального значения, то мы не подсчитывали вероятности этих ошибок, и не думали об их уменьшении. Большая или меньшая возможность ошибки зависит от самого эксперимента и от метода принятия нужного решения. Поэтому в тех случаях, когда нельзя пренебречь возможностью существенной ошибки, например, 1-го рода, следует изменить эксперимент с учетом этого факта.

Проиллюстрируем эту ситуацию на следующем показательном примере. В ответ на активную рекламу моторного масла «XXX», способного обеспечить, по словам рекламодателя, надежную работу двигателя более продолжительное время, чем масла других марок, общество по защите прав потребителей решило оценить правдоподобность этого заявления. За помощью обратились к математикам для составления методики проведения эксперимента и принятия нужного решения. Пусть p – вероятность того, что двигатель не проработает обещанный рекламодателями срок, если не использовать моторное масло «XXX», и r - вероятность того, что двигатель не проработает обещанный рекламодателями срок, если использовать моторное масло «XXX».

Если мы имеем некоторое представление о значении вероятности p, то необходимо построить такой эксперимент, чтобы решить будет ли $r > p$, $r = p$ или $r < p$. В первом случае мы делаем вывод, что масло «XXX» хуже остальных марок и реклама лжива, во втором случае – что никаких преимуществ масло «XXX» по сравнению с другими не имеет, а если оно к тому же и дороже, то опять имеем дело с лживой рекламой, и, наконец, только в третьем случае можно поверить рекламе.

В процессе принятия решения мы можем допустить ошибки трех видов. Мы можем порекомендовать масло «XXX», хотя на самом деле оно уменьшает продолжительность работы двигателя или ведет себя так же, как и другие масла, и мы можем сказать, что масло «XXX» хуже других, хотя оно обладает рекламируемым эффектом. Первая и третья ошибки могут фатальным образом сказаться на работе большого числа двигателей (т.е. привести к уменьшению срока надежной работы), а вторая – к потере времени и денег тех, кто разрабатывает новое масло. Здесь, разумеется, очень важно сделать как можно меньше вероятность первой и третьей ошибки. Чтобы показать, каким образом можно уменьшить вероятности этих ошибок, снова рассмотрим пари Сергея и Дмитрия.

Изменим критерий, по которому мы принимаем решение о победителе этого пари. Пусть теперь Сергей выигрывает пари, если он разбивает не менее 60 тарелочек из 100 возможных. Рассмотрим сначала случай, когда $p = 0{,}5$. В этом случае среднее число разбитых тарелочек равно 50, а дисперсия равна $\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$. Для того, чтобы Сергей разбил не менее 60 тарелочек, надо чтобы истинное значение s_{100} отклонялось от своего среднего значения не менее чем на удвоенную дисперсию. В п.6 мы установили, что вероятность такого события равна $0{,}5 \cdot (1 - z_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}044 = 0{,}022$. Поэтому весьма маловероятно, что пари выиграет Сергей, когда его должен выиграть Дмитрий.

Если Сергей считает, что $p = 0{,}75$, то среднее значение величины s_{100} равно 75, а дисперсия равна $\sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} \approx 4{,}3$. Значение 60 меньше среднего значения на 15, что составляет примерно 3,5 дисперсий. В этом случае вероятность того, что истинное значение s_{100} будет настолько меньше среднего значения, очень мала ($\approx 0{,}0002$). Поэтому Сергей может смело идти на пари в таких условиях.

Рис.7.1

На рис.7.1 изображен сплошной линией график функции $\boldsymbol{P}_p[s_{100} \ge 60]$, зависящей от *p* (т.е. вероятность того, что пари выиграет Сергей при различных значениях *p*), а пунктирной линией изображен график функции $\boldsymbol{P}_p[s_{10} \ge 8]$.

Заметим, что при 100 выстрелах, если $p = 0{,}75$, то вероятность выиграть пари у Сергея почти 1, тогда как при 10 выстрелах она чуть более 0,5. Таким образом, в случае 100 испытаний больше шансов выиграть пари тому, кто прав. Это означает, что вероятность ошибки каждого вида может быть сделана очень маленькой за счет увеличения числа испытаний.

1.8. Независимые испытания с произвольным числом исходов.

Рассмотрим теперь процесс независимых испытаний, в котором каждый эксперимент имеет некоторое конечное множество исходов $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_r$ вероятности их появления, соответственно. Пусть значением функции $\boldsymbol{b}(n_1, n_2, \ldots, n_r; p_1, p_2, \ldots, p_r)$ является вероятность того, что при $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ таких испытаний исход a_1 будет иметь место ровно n_1 раз, исход a_2 будет иметь место ровно n_2 раз, и т.д., исход a_r будет иметь место ровно n_r раз. Заметим, что при этом все значения $\boldsymbol{b}(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_r}; p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$, где $i_1, i_2, \ldots, i_r$ - произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, r$, равны между собой. Если $r = 2$, то $\boldsymbol{b}(n_1, n_2; p_1, p_2) = \boldsymbol{b}(n, n_1; p_1)$ (см. п.6), так как $n_2 = n - n_1$ и $p_2 = 1 - p_1$.

Ясно, что любая конечная последовательность таких экспериментов образует процесс независимых испытаний, дерево логических возможностей которого в каждой вершине ветвление будет иметь эквивалентные пучки ветвей.

Например, пусть при бросании тетраэдра возможны четыре исхода – выпадение граней с номерами 1, 2, 3 или 4 с соответствующими вероятностями p_1, p_2, p_3 и p_4. Дерево логических возможностей для последовательности из двух таких экспериментов и вероятности его путей представлены на следующем рисунке:

			x	$\boldsymbol{w}(x)$
•	1	1	x_1	p_1^2
		2	x_2	$p_1 p_2$
		3	x_3	$p_1 p_3$
		4	x_4	$p_1 p_4$
	2	1	x_5	$p_2 p_1$
		2	x_6	p_2^2
		3	x_7	$p_2 p_3$
		4	x_8	$p_2 p_4$
	3	1	x_9	$p_3 p_1$
		2	x_{10}	$p_3 p_2$
		3	x_{11}	p_3^2
		4	x_{12}	$p_3 p_4$
	4	1	x_{13}	$p_4 p_1$
		2	x_{14}	$p_4 p_2$
		3	x_{15}	$p_4 p_3$
		4	x_{16}	p_4^2

Рис. 8.1

На этом рисунке начальная вершина обозначена через •, а вершина, соответствующая выпавшей грани, обозначена тем же числом. Согласно введенной на деревьях вероятностной мере, каждому пути приписывается вероятность равная произведению вероятностей ветвей, составляющих этот путь. Поэтому, например $\boldsymbol{b}(1,1; p_1, p_1) = \boldsymbol{w}(x_1) = p_1^2$. Чтобы найти $\boldsymbol{b}(1,2; p_1, p_2)$ заметим, что существует два пути на дереве, соответствующие осуществлению одного исхода 1 и одного исхода 2 – это пути x_2 и x_5. Потому $\boldsymbol{b}(1,2; p_1, p_2) = \boldsymbol{w}(x_2) + \boldsymbol{w}(x_5) = 2p_1p_2$ и т.д.

Для вычисления $\boldsymbol{b}(n_1, n_2, \ldots, n_r; p_1, p_2, \ldots, p_r)$ в теории вероятностей используется следующая формула, обобщающая формулу Бернулли,

$$\boldsymbol{b}(n_1, n_2, \ldots, n_r; p_1, p_2, \ldots, p_r) = C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r},$$

где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

Эта формула имеет еще одну интерпретацию. Рассмотрим процесс независимых испытаний с возможными исходами из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$; вероятности этих исходов обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Пусть $g_i(x), i = 1, \ldots, r,$ - функция, определенная на множестве путей дерева логических возможностей этого процесса, значение которой для $x = x_j$ равно числу повторений исхода a_i. Тогда

$$\boldsymbol{P}[(g_1 = k_1) \,\&\, (g_2 = k_2) \,\&\cdots\&\, (g_r = k_r)] = C_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} =$$
$$= \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r},$$

для любых неотрицательных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_r$, таких, что $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$.

Пример 8.1. Предположим, что у пяти человек, выбранных наугад, спросили, поддерживают ли они правящую партию. Социологические опросы показывают, что правящую партию поддерживают 30% населения, не поддерживают 20% и не имеют определенного мнения 50%. Каковы вероятности различных комбинаций мнений могут быть у пяти выбранных человек?

Этот опрос можно рассматривать как процесс, состоящий из пяти независимых испытаний с возможными исходами a_1: *данный человек поддерживает правящую партию*, a_2: *данный человек не поддерживает правящую партию* и a_3: *данный человек не имеет определенного мнения*, вероятности которых соответственно равны 0,3; 0,2 и 0,5. Тогда для любых $k_1, k_2, k_3 \geq 0$, таких, что $k_1 + k_2 + k_3 = 5$ имеем при $r = 3$ и $n = 5$

$$\boldsymbol{P}[(g_1 = k_1) \,\&\, (g_2 = k_2) \,\&\, (g_3 = k_3)] = C_3^{k_1, k_2, k_3} 0{,}3^{k_1} 0{,}2^{k_2} 0{,}5^{k_3} = \frac{5!}{k_1! k_2! k_3!} 0{,}3^{k_1} 0{,}2^{k_2} 0{,}5^{k_3}.$$

В следующей таблице приведем вероятности всевозможных комбинаций мнений у пяти опрошенных человек.

k_1	k_2	k_3	$\boldsymbol{P}[(g_1 = k_1) \,\&\, (g_2 = k_2) \,\&\, (g_3 = k_3)]$
5	0	0	0,00243
4	1	0	0,0081
4	0	1	0,02025
3	2	0	0,0108
3	1	1	0,054
3	0	2	0,0675
2	3	0	0,0072
2	2	1	0,054

2	1	2	0,135
2	0	3	0,1125
1	4	0	0,0024
1	3	1	0,024
1	2	2	0,09
1	1	3	0,15
1	0	4	0,09375
0	5	0	0,00032
0	4	1	0,004
0	3	2	0,02
0	2	3	0,05
0	1	4	0,0625
0	0	5	0,03125

Табл.8.1

Из этой таблицы можно найти также вероятности других случайных событий. Например, вероятность того, что правящую партию поддерживают ровно 3 человека, равна $0{,}0108+0{,}054+0{,}0675=0{,}1323$; вероятность того, что правящую партию поддерживает не менее трех, равна $0{,}00243+0{,}0081+0{,}02025+0{,}0108+0{,}054+0{,}0675=0{,}16308$; вероятность того, что правящую партию не поддерживают ровно два человека, равна $0{,}0108+0{,}054+0{,}09+0{,}05=0{,}2048$ и т.д. ■

Рассмотрим процесс, состоящий из n независимых испытаний с исходами $a_1,a_2,\ldots,a_r$, вероятности которых $p_1,p_2,\ldots,p_r$, соответственно. Пусть необходимо найти вероятность появления только k_{i_1} раз исхода a_{i_1}, k_{i_2} раз исхода a_{i_2} и т.д., и, наконец, k_{i_s} раз исхода a_{i_s} безотносительно к числу осуществлений каждого из остальных исходов. Без потери общности рассуждений можно предполагать, что эти исходы суть $a_1,a_2,\ldots,a_s$, где $s\le r$. Тогда рассмотрим новый процесс, состоящий n независимых испытаний с исходами $a_1,a_2,\ldots,a_s,b$, где исход b появляется в том случае, когда появляется один из исходов $a_{s+1},\ldots,a_r$. Соответствующие вероятности появления этих исходов равны $p_1,p_2,\ldots,p_s,p_{s+1}+\cdots+p_r$, соответственно. Ясно, что исход b появляется в n испытаниях $n-(k_1+k_2+\cdots+k_s)=k_{s+1}+\cdots+k_s$ раз, поэтому искомая вероятность может быть найдена по следующей формуле:

$$\boldsymbol{P}[(g_1=k_1)\,\&\,(g_2=k_2)\,\&\cdots\&\,(g_s=k_s)]=$$
$$=C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s,k_{s+1}+\cdots+k_r}\,p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}(p_{s+1}+\cdots+p_r)^{k_{s+1}+\cdots+k_r}=$$
$$=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!(k_{s+1}+\cdots+k_r)!}\,p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}(p_{s+1}+\cdots+p_r)^{k_{s+1}+\cdots+k_r},$$

для любых неотрицательных чисел $k_1,k_2,\ldots,k_s$, таких, что $n\ge k_1+k_2+\cdots+k_s$.

Вернемся к примеру 8.1 и с помощью этой формулы вычислим еще раз вероятность того, что правящую партию поддерживают ровно 3 человека. Мы имеем $n=5,\ s=1,\ k_1=3,\ k_2+k_3=2,\ p_1=0{,}3,\ p_2+p_3=0{,}7$, следовательно,

$$\boldsymbol{P}[g_1=3]=\frac{5!}{3!2!}0{,}3^3 0{,}7^2=10\cdot0{,}027\cdot0{,}49=0{,}1323.$$

Найдем вероятность того, что не имеют определенного мнения ровно четыре человека. Мы имеем в этом случае $n=5,\ s=1,\ k_1=4,\ \ k_2+k_3=1,\quad p_1=0{,}5,\ p_2+p_3=0{,}5$, следовательно, $\boldsymbol{P}[g_3=4]=\frac{5!}{4!1!}0{,}5^4 0{,}5^1=5\cdot 0{,}03125=0{,}15625$.

1. 9. Задачи.

1. Чему равна вероятность элементарных случайных событий, если эксперимент имеет *n* исходов, и нет оснований считать, что один из исходов более вероятен, чем другой?
2. В соревновании участвуют спортсмены *A*, *B* и *C*, причем вероятность победы *A* равна $1/2$, вероятность победы *B* равна $1/3$ и вероятность победы *C* равна $1/6$. Можно ли считать, что $U=\{A,B,C\}$ является пространством логических возможностей? Можно ли считать, что $U=\{A,B,C\}$ является пространством логических возможностей, если вероятность победы *C* равна $1/4$?
3. Укажите пространство логических возможностей для каждого из следующих экспериментов:
   (a) играется шахматная партия;
   (b) выбирается наугад натуральное число, лежащее между 1 и 7;
   (c) бросается монета 3 раза;
   (d) бросается игральная кость 2 раза;
   (e) задается вопрос о дне рождения;
   (f) производится выстрел по мишени, представляющую собой «яблочко», радиус которого *r*, и 3 кольца, разделенные концентрическими окружностями, радиусы которых, соответственно, 2*r*, 3*r* и 4*r*.

4. В каких экспериментах из задачи 3 естественно считать логические возможности равновероятными? Какие вероятности могут иметь элементарные случайные события, которые реализуются с помощью логических возможностей каждого из экспериментов в этой задаче?
5. Игральная кость сделана таким образом, что вероятность выпадения каждой грани пропорциональна числу очков на ней. Какова вероятность следующих случайных событий:
   A: «выпало четное число очков»;
   B: «выпало число очков, кратное 3»;
   C: «выпало не менее 3-х очков».
6. Монету подбрасывают три раза. Пусть *U* – пространство исходов и *f* – функция, определенная на *U*, значение которой для исхода $x\in U$ равно числу выпавших «орлов».

(a) Выпишите все элементы пространства исходов U, используя обозначения из примера 1.
(b) Определите области истинности предикатов $f=i$, где $i=0,1,2,3$.
(c) Найдите вероятности этих предикатов.

7. Обычная игральная кость бросается дважды. Пусть U – пространство исходов и f – функция, определенная на U, значение которой для исхода $x \in U$ равно сумме выпавших очков.
(a) Выпишите все элементы пространства исходов U, используя обозначения из примера 3.
(b) Определите области истинности предикатов $f=a$, где $a=2,3,\ldots,12$.
(c) Найдите вероятности этих предикатов.

8. Пусть A и B такие случайные события, что $\boldsymbol{P}(AB)=\frac{1}{4}$, $\boldsymbol{P}(\overline{A})=\frac{1}{3}$ и $\boldsymbol{P}(B)=\frac{1}{2}$. Найти $\boldsymbol{P}(A+B)$.

9. Известно, что студент имеет вероятность 0,9 сдать некоторый экзамен и вероятность 0,6 сдать его ниже, чем на «отлично». Какова вероятность того, что студент получит оценку «хорошо» или «удовлетворительно»?

10. Игральная кость сделана таким образом, что вероятность выпадения каждой грани пропорциональна числу очков на ней (см. задачу 5 из п.1). Пусть f – функция, определенная на пространстве логических возможностей бросания такой кости один раз, значениями которой являются элементы множества $\{1,2,3,4,5,6\}$. Найти вероятности следующих предикатов:

a. $f=2$ *или* $f=4$ *или* $f=6$;
b. $f=1$ *или* $f=2$ *или* $f=5$;
c. $f\neq 3$;
d. $f\leq 3$;
e. $f=1$ *или* $f>3$;
f. *неверно, что* $f=2$ *или* $f=5$;
g. *неверно, что* $f\geq 1$;
h. $f>3$ *и* $f\leq 5$.

11. Дважды бросается обычная игральная кость. Пусть f_1 и f_2 – функции, определенные на пространстве исход первого и второго экспериментов, значениями которых являются элементы множества $\{1,2,3,4,5,6\}$. Найти вероятности следующих предикатов:

a. $f_1=2$ *и* $f_2<5$;
b. $f_1\neq 2$ *и* $f_2\leq 3$;
c. $f_1<2$ *или* $f_2\geq 5$;
d. $f_1=0$ *и* $f_2\neq 1$;
e. *неверно, что* $f_1>3$ *или* $f_2\geq 5$;
f. *неверно, что* $(f_1>3$ *или* $f_2\geq 5)$;
g. *неверно, что* $f_1\neq 2$ *и* $f_2<5$;

h. неверно, что($f_1 \neq 2$ и $f_2 < 5$).

12. Из колоды в 52 карты выбирается случайно одна карта. Какова вероятность того, что это будет дама при условии, что эта карта имеет масть пики?

13. Игральная кость бросается два раза. Какова вероятность того, что

(a) сумма выпавших очков больше 10, при условии, что один раз выпадает шестерка?

(b) сумма выпавших очков больше 10, при условии, что при первом бросании выпадает шестерка?

(c) сумма выпавших очков меньше 7, при условии, что один раз выпадает тройка?

(d) сумма выпавших очков равна 10, при условии, что один раз выпадает меньше чем четыре очка?

14. Игральная кость сделана таким образом, что вероятность выпадения грани пропорциональна количеству очков на ней. Какова вероятность

(a) выпадения трех очков, если известно, что выпало нечетное число очков?

(b) выпадения четного числа очков, если известно, что выпало больше, чем три очка?

(c) выпадения более двух очков, если известно, что выпало нечетное число очков?

(d) выпадения одного или трех очков, если известно, что шесть очков не выпало?

15. Тест состоит из 5 вопросов, на которые нужно отвечать «да» или «нет». Какова вероятность того, что студент правильно ответит на все вопросы, если

(a) он просто угадывает?

(b) известно, что правильных ответов «да» больше, чем «нет»?

(c) никакие три правильных подряд идущих ответа не могут одинаковыми?

(d) известно, что всего два правильных ответа «да»?

(e) известно, то ответ на третий вопрос «нет»?

(f) известно, что ответы на первый и пятый вопросы одинаковые?

16. Пусть U – множество перестановок из чисел 1, 2 и 3. Говорят, что в перестановке $k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_n$ числа k_i и k_j образуют *инверсию*, если $i < j$ и $k_i > k_j$. Определим на U три функции:

$$f_i(\alpha) = [\text{количество инверсий в перестановке } \alpha\text{, образованных числом } i,]$$

для $i = 1,2,3$.

(a) Выяснить, зависимы или нет (в обоих смыслах) функции f_1, f_2, f_3?

(b) Найти вероятность $\boldsymbol{P}[f_1 = 1]$.

(c) Найти вероятность $\boldsymbol{P}[f_3 = 0]$.

(d) Найти вероятность $\boldsymbol{P}[(f_1 = 0) \& (f_2 = 1)]$.

17. Бросаются две кости, описанные в задаче 3. Пусть f принимает значение, равное сумме выпавших очков. Найдите $\boldsymbol{P}[f = a]$ для всех a.

18. Студент утверждает, что он умеет отличить пиво «Балтика» от пива «Толстяк». Его подвергают трем испытаниям. При каждом испытании ему дают две кружки с «Балтикой» и одну с «Толстяком» и просят указать «Толстяк». Если он дает два или более правильных ответов, его утверждение считается доказанным. Нарисуйте дерево возможных исходов для такого эксперимента, причем студент на каждой его стадии может дать правильный или неправильный ответ. Постройте вероятностную меру на путях этого дерева, отвечающую случаю простого угадывания. Найдите вероятность того, что утверждение студента доказано, если при каждом испытании он просто угадывает.

19. Внутри ящика находятся три лампочки на 75 ватт и семь на 100 ватт (внешне они неотличимы). Вынимаются одна за другой наугад три лампочки (без возвращения). Постройте дерево логических возможностей, вероятностную меру на путях этого дерева и найдите вероятность того, что будет вынута хотя бы одна лампочка на 100 ватт. Найдите вероятность того, что будут вынуты все три лампочки на 100 ватт, если первая вынутая лампочка была на 100 ватт.

20. Шахматист играет подряд четыре партии. Замечено, что он выигрывает данную партию с вероятностью $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, где k – число предыдущих выигранных им партий. Какова вероятность того, что из этих трех партий он выиграет, по меньшей мере, две?

21. Численность бактерий растет следующим образом: в каждом поколении каждая бактерия производит с вероятностью 0,2 ни одной, с вероятностью 0,5 – одну и с вероятностью 0,3 – две новых бактерии и затем гибнет. Предполагается, что способность каждой бактерии производить новых бактерий не влияет на плодовитость остальных (в том числе и на ее потомство). Пусть в начальный момент имеется одна бактерия и начинается процесс размножения. Постройте дерево логических возможностей и вероятностную меру на путях этого дерева для двух поколений бактерий. Исходом каждого отдельного этапа является число вновь созданных в каждом поколении бактерий. Таким образом, исходы – это числа 0, 1 или 2, с помощью которых мы обозначим соответствующие вершины дерева. Начальную вершину обозначим через 1 (- первоначальная численность бактерий). Пусть f_1 и f_2 - функции исходов, определите следующие вероятности:

(a) $\boldsymbol{P}[f_1 > 0]$;

(b) $\boldsymbol{P}[f_2 > 0]$;

(c) $\boldsymbol{P}_{f_1=1}[f_2 \geq 1]$;

(d) $\boldsymbol{P}_{f_1=1}[f_2 = 1]$;

(e) вероятность того, что в третьем поколении не будет ни одной живой бактерии.

22. Предположим, что в первенстве России по хоккею вероятность выигрыша на своем поле у команды-хозяйки равна $2/3$. Каждая команда проводит две игры подряд на своем поле, а затем отправляется в гости к другой команде. Постройте дерево логических возможностей, введите вероятностную меру на путях этого дерева и найдите следующие вероятности:

(a) Вероятность того, что произвольная команда выиграет 5 игр подряд, 6 игр подряд.

(b) Вероятность того, что произвольная команда в серии из 10 игр выиграет 5 игр, 6 игр.

(c) Вероятность того, что произвольная команда в любой серии игр набирает более 50% очков (за победу начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко и за поражение – 9 очков).

23. Для каждого описанного процесса определите, является ли он:

(a) процессом с независимыми значениями;

(b) процессом независимых испытаний;

(c) марковской цепью;

(d) ни одним из вышеперечисленного.

I. Несколько раз бросается кость. [Отв.:(b)]

II. Первенство России по хоккею с шайбой, в котором (в отличие от задачи 5) каждая команда имеет равные шансы на выигрыш любой игры.

III. Проводится матч между двумя шахматистами, в котором победитель предыдущей партии выигрывает следующую с вероятностью 0,4 и делает ничью с вероятностью 0,2. [Отв.:(c)]

IV. Проводится серия игр между двумя командами, которые по очереди играют дома или в гостях. Вероятность выигрыша на своем поле равна $2/3$.

24. Постройте дерево логических возможностей для матча между двумя шахматистами из трех партий, в котором играющий белыми выигрывает с вероятностью 0,5 и делает ничью с вероятностью 0,2. Определите на этом дереве вероятностную меру и сделайте прогноз на успех игрока, начинающего матч с черных фигур.

25. Известно, что дети выпускников Ивановского университета с вероятностью 0,8 поступают в Ивановский университет, а остальные поступают в Ивановский химтех. Дети выпускников химтеха с вероятностью 0,6 поступают в химтех, а остальные делятся поровну между университетом медакадемией. Дети выпускников медакадемии с вероятностью 0,7 поступают в медакадемию, а остальные – с вероятностью 0,2 в химтех и с вероятностью 0,1 – университет.

(a) Постройте дерево логических возможностей и убедитесь, что описанный процесс является марковской цепью. Найдите матрицу вероятностных переходов.

(b) Допустим, что поколение родителей состоит на 50% из выпускников университета, на 40% из выпускников химтеха и на 10% из выпускников медакадемии. Какое будет распределение по вузам у следующих двух поколений?

(c) Предположим, что сын выпускника университета обязательно поступит в университет. Как при этом изменится матрица вероятностных переходов?

26. Бросают игральную кость n раз. Чему равны среднее отклонение и дисперсия

(a) числа выпадений одного очка при $n = 50$?

(b) числа выпадений 1 или 2 очков при $n = 450$?

(c) числа выпадений количества очков, не делящегося на три, при $n = 500$?

27. Какое минимальное число бросаний игральной кости необходимо сделать, чтобы с вероятностью 0,95 добиться того, что доля выпадений одного очка не отклониться более чем на 0,01 от значения $1/6$?

28. Пусть проводится n независимых испытаний с вероятностью p успеха в каждом и r и s - данные числа. Что можно сказать (используя закон больших чисел) о $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{P}[r < \frac{x}{n} < s]$, где x – число успехов в n испытаниях,

(a) если $p < r < s$?

(b) если $r < p < s$.

29. Чему равна вероятность того, что число успехов при n независимых испытаниях отклоняется от среднего значения более, чем на одну дисперсию и менее, чем на две дисперсии, если вероятность успеха в каждом испытании равна p, а число испытаний велико?

(*Отв.* 0,271)

30. Два склада конкурируют за возможность их использования для хранения ежедневно прибывающих в порт 1000 контейнеров. Если выбор склада для каждого контейнера равновероятен, то по сколько мест должны предусмотреть владельцы складов, если они хотят быть уверенными, что вместимость их складов окажется достаточной с вероятностью 0,99? (*Отв.* 547)

31. Статистика утверждает, что 20% людей пенсионного возраста болеет раком. Чему равно среднее значение числа больных раком среди 1600 выбранных наугад пенсионеров? Чему равна дисперсия? Чему равна вероятность того, что более чем 352 пенсионера из этих 1600 больны раком? (*Отв.* 320, 32, 0,023)

32. Предположим, что в условиях задачи 6 выборка взята курящих пенсионеров. Оказалось, что из них более чем 400 человек больны раком.

Что можно тогда сказать относительно гипотезы об отсутствии связи между курением и заболеваемостью раком?

33. Пусть для n бросаний монеты t_n таково, что $\boldsymbol{P}[-t_n < \frac{x}{n} - \frac{1}{2} < t_n] = 0{,}956$, где x – число выпадений «орла». Найдите значение t_n для $n = 10000, n = 1000000$ и $n = 10^{20}$.

34. ЭВМ при расчете некоторой величины производит m операций. Пусть в каждой операции с вероятностью 0,5 машина допускает абсолютную погрешность (погрешность округления) $+10^{-5}$ или -10^{-5}, причем эти округления не зависят друг от друга. Какую точность имеет расчетная величина для $m = 10000, m = 1000000$ и $m = 10$.

35. В примере 4 опрос был произведен среди 10 000 наугад отобранных граждан. В вычислениях мы предполагали, что если фактическая доля населения, поддерживающих президента, равна p (в примере $p = 0{,}5$), то выборка образует процесс независимых испытаний с вероятностью p голосующих «за» и вероятностью $1 - p$ голосующих «нет». Укажите способ выбора контингента граждан для социологического опроса, при котором такое предположение оправдано. В чем неправильность приведенных ниже способов?

(a) Выбираются члены партии «Единая Россия»?

(b) Выбираются наугад фамилии из телефонной книги?

(c) Выбираются первые встречные на улице прохожие?

36. Допустим, что в пари между Сергеем и Дмитрием, последний согласен уплатить 1 рубль, если Сергей разобьет не менее девяти тарелочек из десяти.

(a) Какова вероятность того, что Дмитрий уплатит Сергею, хотя Сергей может разбить тарелочку случайно с вероятностью 0,5?

(b) Предположим, что Сергей способен разбивать тарелочки с вероятностью 0,9. Какова вероятность, что он не выиграет пари?

37. Дмитрий, зная, что Сергей разбивает тарелочки случайно с вероятностью 0,5, хочет добиться, чтобы вероятность выигрыша пари Сергеем стала меньше 0,1. Сколько разбитых тарелочек он должен потребовать от Сергея?

38. Предположим, что Сергей до первого выстрела не очень уверен в своих силах и предполагает, что вероятность попадания в тарелочку равна 0,5. Однако, после каждого попадания его уверенность возрастает и вероятность разбить следующую тарелочку возрастает на 0,05. Однако, как только он промахивается, вероятность разбить следующую тарелочку становится равной снова 0,5. Таким образом, здесь отдельные испытания не являются независимыми. С какой вероятностью выиграет пари Сергей, если Дмитрий потребует разбить 7 тарелочек?

39. Стандартный метод лечения глаукомы приводит к излечению 20% больных. Предполагается, что новый метод позволит излечить 80% больных. Для эксперимента решено испробовать новый метод на 10 больных, страдающих глаукомой. При этом решено, что если он излечит не менее 7 больных, то его можно рекомендовать для использования, если излечит менее 3 больных, то он не должен применяться для лечения, и, наконец, если излечит от 3 до 6 больных, то необходимо произвести дополнительные исследования. Найдите вероятность каждой из перечисленных альтернатив в предположении, что

(a) новый метод позволил излечить 3-х больных;

(b) новый метод оправдает возлагаемые на него надежды?

40. Студент-математик считает, что 90% студентов математического факультета умеют играть в преферанс, студент-филолог - что только 10% студентов математического факультета умеют играть в преферанс, а студент-химик – что 50% студентов математического факультета умеют играть в преферанс, как и студенты любого другого факультета. Решили проверить 10 наугад отобранных студентов математического факультета и договорились, что математик выиграет пари, если не менее 8-ми из них умеют играть в преферанс, филолог – если 2 или менее и химик – во всех остальных случаях. Для каждого из студентов найдите вероятность того, что он выиграет пари, если он прав.

41. Десять курсантов автошколы сдают тест на знание правил дорожного движения, состоящий из 10 вопросов. Преподаватель считает, что каждый курсант правильно отвечает на 1 вопрос с вероятностью 0,5, если он не пользуется подсказкой. Для контроля чистоты проведенного экзамена преподаватель подсчитал количество правильных ответов на каждый вопрос. Он считает, что тестирование прошло чисто (т.е. без такого количества подсказок, которое повлияло на общий результат), если на четыре или более вопросов дано правильных ответов от 3-х до 7-ми включительно. Какова вероятность того, что тестирование прошло чисто, если использовать методику этого преподавателя?

42. Бросают игральную кость 10 раз. Чему равны вероятности следующих случайных событий:

(a) число выпадений одного очка равно четырем, двух очков – двум и остальных очков – по одному?

(b) число выпадений одного очка равно четырем и двух – трем?

(c) числа выпадений количества очков, не делящегося на три, равно четырем, а делящихся на три - шести?

(d) в точности двух выпадений одного очка и в точности трех выпадений двух очков?

43. В одном маленьком университете процент студентов, успевающих по всем предметам, равен 80%, из них 10% - студенты-отличники, остальные студенты имеют задолженности по одному или более предметам. Какова вероятность того, что среди трех выбранных наугад студентов окажется

(a) в точности по одному студенту каждой из трех категорий?

(b) хотя бы один отличник?

(c) хотя бы один не отличник?

44. В одном маленьком университете 30% всех обучающихся составляют студенты – первокурсники, по 20% - студенты второго и третьего курсов, 15% - студенты 4-го курса, 10% - студенты 5-го курса и 5% - аспиранты. Для поездки на фестиваль отбираются случайным образом делегация из 12 человек. Какова вероятность того, что в делегацию попадут

(a) по два студента с каждого курса и два аспиранта?
(b) хотя бы один аспирант и хотя бы один первокурсник?
(c) не только студенты?

45. Один шахматист выигрывает партию с вероятностью 0,5, проигрывает с вероятностью 0,2 и делает ничью с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что после пяти партий он

(a) выиграет партий больше, чем проиграет?
(b) наберет 50% возможных очков?
(c) две партии выиграет, две – проиграет и одну сведет к ничьей?
(d) выиграет две партии подряд?
(e) не проиграет ни одной партии?

46. Статистика утверждает, что 20% людей пенсионного возраста болеет раком, 40% - ишемической болезнью сердца, 30% - полиартритом и 10% - абсолютно здоровы. Какова вероятность того, что среди четырех случайных пенсионеров

(a) все имеют одинаковый диагноз?
(b) все имеют разные диагнозы?
(c) нет здоровых?
(d) Здоровых больше, чем больных?

47. Предположим, что в условиях задачи 5 выборка взята из курящих пенсионеров. Оказалось, что из них 40% больны раком и 40% больны ишемической болезнью сердца. Чему равны вероятности случайных событий из этой задачи?

II. МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

2.1. Матрицы вероятностей перехода и графы перехода марковских цепей. В предыдущей главе мы описали основные типы конечных стохастических процессов. Один из них был назван марковской цепью. Напомним, что процесс независимых экспериментов является *марковской цепью*, если исход данного эксперимента зависит только от исхода предшествующего эксперимента, и, более того, характер этой зависимости одинаков для всех этапов последовательности экспериментов. Отсюда следует, что если две вершины ветвления дерева марковского процесса характеризуются одинаковыми исходами, то независимо от того, принадлежат эти вершины одному или разным рядам дерева, выходящие из этих вершин пучки ветвей должны быть эквивалентными. Процессы этого типа можно описать также следующим образом

Рассмотрим последовательность экспериментов, исходом каждого из которых является один из возможных исходов $a_1, a_2, \ldots, a_r$, причем в каждом эксперименте вероятность появления исхода a_j либо не зависит ни от чего, либо зависит только от исхода непосредственно предшествующего ему эксперимента. Если при появлении исхода a_j непосредственно предшествующий эксперимент закончился исходом a_i, то вероятность исхода a_j обозначим через p_{ij}. Исходы $a_1, a_2, \ldots, a_r$ называются *состояниями*, а числа p_{ij} - *вероятностями перехода.*

Основной способ представить вероятности перехода – это записать их в виде квадратной матрицы *r*-го порядка

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix},$$

в которой элементы *i*-ой строки – вероятности всех исходов данного эксперимента, если он проведен при условии нахождения процесса в состоянии a_i. Заметим, что характеристическим свойством матриц перехода является равенство 1 суммы элементов каждой ее строки.

Графический способ представления вероятностей перехода – *граф перехода*, вершинами которого являются возможные состояния, а ребрами – стрелки, выходящие из каждой вершины, и указывающие на состояния, в которые это состояние может переходить в рассматриваемом процессе. Ясно, что для данной марковской цепи матрица перехода и граф перехода взаимно обусловлены.

Пример 1.1. Пусть матрица перехода имеет вид $P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\end{pmatrix}$. Нули в матрице перехода означают, что невозможность соответствующего перехода из одного состояния в другое. Обозначим через a_1, a_2, a_3 возможные состояния, тогда $p_{11}=0{,}5$ означает вероятность перехода из состояния a_1 в состояние a_1, $p_{12}=0$ - невозможность перехода из состояния a_1 в состояние a_2 и $p_{13}=0{,}5$ - вероятность перехода из состояния a_1 в состояние a_3 и т.д. На рис.1 построен соответствующий граф перехода:

Рис.1.1

Основной вопрос, возникающий при изучении марковских цепей, состоит в следующем: *какова вероятность того, что процесс, начинающийся из состояния* a_i*, через n шагов перейдет в состояние* a_j*?* Обозначим эту вероятность через $p_{ij}^{(n)}$ и найдем ее для всех $i, j=1,\dots,r$. Результаты расчетов будем представлять в виде матриц

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix}p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1r}^{(n)}\\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2r}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ p_{r1}^{(n)} & p_{r2}^{(n)} & \cdots & p_{rr}^{(n)}\end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Для марковской цепи с матрицей перехода из примера 1.1 найдем вероятности всевозможных состояний через $n=3$ шагов, то есть рассчитаем элементы матрицы $P^{(3)}$. Чтобы найти элементы ее первой строки $p_{11}^{(3)}$, $p_{12}^{(3)}$ и $p_{13}^{(3)}$, которые означают вероятности перехода из состояния a_1 после трех шагов в состояния a_1, a_2, a_3, соответственно, построим дерево логических возможностей, начальной вершиной которого является a_1, и припишем его ветвям соответствующие вероятности из матрицы перехода. Вероятности путей этого дерева мы вычислим обычным образом как произведения вероятностей ветвей, составляющих эти пути.

				x	$\boldsymbol{w}(x)$
			a_1	x_1	0,125
		a_1			
			a_3	x_2	0,125
	a_1				
			a_1	x_3	0,05
		a_3	a_2	x_4	0,1
			a_3	x_5	0,1
			a_1	x_6	0,05
a_1		a_1			
			a_3	x_7	0,05
			a_2	x_8	0,06
	a_3	a_2			
			a_3	x_9	0,14
			a_1	x_{10}	0,04
		a_3	a_2	x_{11}	0,08
			a_3	x_{12}	0,08

Рис.1.2

Ясно, что $p_{11}^{(3)}$ - это вероятность того, что из начальной вершины a_1 путь на дереве (см. рис.1.2) заканчивается в вершине a_1, т.е.

$$p_{11}^{(3)} = \boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_3) + \boldsymbol{w}(x_6) + \boldsymbol{w}(x_{10}) = 0{,}125 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}04 = 0{,}265 .$$

Аналогично, $p_{12}^{(3)} = \boldsymbol{w}(x_4) + \boldsymbol{w}(x_8) + \boldsymbol{w}(x_{11}) = 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}24$ и

$$p_{13}^{(3)} = \boldsymbol{w}(x_2) + \boldsymbol{w}(x_5) + \boldsymbol{w}(x_7) + \boldsymbol{w}(x_9) + \boldsymbol{w}(x_{12}) = 0{,}125 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}14 + 0{,}08 = 0{,}495 .$$

Далее, чтобы найти элементы второй строки $p_{21}^{(3)}$, $p_{22}^{(3)}$ и $p_{23}^{(3)}$, построим дерево логических возможностей, начальной вершиной которого является a_2.

				x	$\boldsymbol{w}(x)$
			a_2	x_1	0,027
		a_2			
			a_3	x_2	0,063
	a_2				
			a_1	x_3	0,042

		a_3	a_2	x_4	0,084
			a_3	x_5	0,084
			a_1	x_6	0,07
a_2		a_1			
			a_3	x_7	0,07
			a_2	x_8	0,084
	a_3	a_2			
			a_3	x_9	0,196
			a_1	x_{10}	0,056
		a_3	a_2	x_{11}	0,112
			a_3	x_{12}	0,112

Рис.1.3

Теперь находим $p_{21}^{(3)} = \boldsymbol{w}(x_3) + \boldsymbol{w}(x_6) + \boldsymbol{w}(x_{10}) = 0{,}042 + 0{,}07 + 0{,}056 = 0{,}168$, $p_{22}^{(3)} = \boldsymbol{w}(x_1) + \boldsymbol{w}(x_4) + \boldsymbol{w}(x_8) + \boldsymbol{w}(x_{11}) = 0{,}307$ и $p_{23}^{(3)} = 0{,}525$.

Аналогично находим $p_{31}^{(3)} = 0{,}198$, $p_{32}^{(3)} = 0{,}3$ и $p_{33}^{(3)} = 0{,}502$. Теперь запишем результат в виде матрицы:

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}265 & 0{,}24 & 0{,}495 \\ 0{,}168 & 0{,}307 & 0{,}525 \\ 0{,}198 & 0{,}3 & 0{,}502 \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов каждой строки по-прежнему равна 1. Это вполне интуитивно объяснимо, так как из любого начального состояния через три (или любое) число шагов мы обязательно достигнем одного из состояний a_1, a_2, a_3. Заметим еще, что все элементы матрицы $P^{(3)}$ строго больше нуля. Это означает, что из любого состояния достижимо (с ненулевой вероятностью) любое состояние (см. для сравнения исходную матрицу перехода). ■

Пусть $P = (p_{ij})$ – матрица вероятностей перехода некоторой марковской цепи, тогда, как уже отмечалось выше, $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{r} p_{ik}$ для всех $i, j = 1, \ldots, r$. Назовем такие матрицы стохастическими.

Определение стохастической матрицы. Квадратная матрица называется *стохастической*, если все ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна единице.

Определение вероятностного вектора. Последовательность, состоящая из r неотрицательных чисел, называется *вероятностным вектором*, если сумма ее элементов равна единице.

Ясно из определения, что каждая строка стохастической матрицы образует вероятностный вектор. Будем обозначать вероятностные векторы, как это принято в линейной алгебре, следующим образом $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ и при необходимости считать $1 \times r$-матрицей.

Чтобы определить марковскую цепь с r возможными состояниями $a_1, a_2, \ldots, a_r$, достаточно задать некоторую стохастическую матрицу P r-го порядка, которая будет играть роль матрицы вероятностей переходов, и некоторый вероятностный r-мерный вектор $\overline{p^{(0)}} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_r^{(0)})$, который дает вероятности начального состояния цепи (если последнее выбирается посредством некоторого случайного выбора, дающего состояние a_j с вероятностью $p_j^{(0)}$ для всех $j = 1, \ldots, r$). Если начальное состояние цепи фиксировано, то одна из компонент вектора $\overline{p^{(0)}}$ равна 1, а остальные равны 0. Далее можно построить дерево, задающее пространство логических возможностей для первых n шагов цепи, которое будет иметь в этом случае n уровней. Обозначим через $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - функции исхода, которые описывают это дерево.

Обозначим через $\boldsymbol{P}[f_n = a_j] = p_j^{(n)}$ и $\overline{p^{(n)}} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_r^{(n)})$. Используя вероятностную меру, определенную, как и в п.5, на нашем n-уровневом дереве, можно показать, что для всех $j = 1, \ldots, r$ имеют место следующие равенства для вычисления вероятностей состояний $a_1, a_2, \ldots, a_r$ после n шагов цепи:

$$p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)} p_{11} + p_2^{(n-1)} p_{21} + \cdots + p_r^{(n-1)} p_{r1} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n-1)} p_{i1}$$

$$p_2^{(n)} = p_1^{(n-1)} p_{12} + p_2^{(n-1)} p_{22} + \cdots + p_r^{(n-1)} p_{r2} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n-1)} p_{i2}$$

$$\vdots$$

$$p_r^{(n)} = p_1^{(n-1)} p_{1r} + p_2^{(n-1)} p_{2r} + \cdots + p_r^{(n-1)} p_{rr} = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(n-1)} p_{ir}$$

В самом деле, например, первое равенство выражает тот факт, что вероятность перехода в состояние a_1 через n шагов является суммой вероятностей перехода в каждое из возможных состояний $a_1, a_2, \ldots, a_r$ через $n-1$ шагов и последующего перехода в состояние a_1 на следующем шаге.

Непосредственно из определения произведения матриц следует, что записанные выше равенства можно выразить в виде следующего матричного равенства:

$$\overline{p^{(n)}} = \overline{p^{(n-1)}} P.$$

Рассмотрим его для $n = 1,2,3,\ldots$, и получим $\overline{p^{(1)}} = \overline{p^{(0)}} P$; $\overline{p^{(2)}} = \overline{p^{(1)}} P = \overline{p^{(0)}} P^2$; $\overline{p^{(3)}} = \overline{p^{(2)}} P = \overline{p^{(0)}} P^3$ и т.д. Отсюда следует, что в общем случае имеет место равенство

$$\overline{p^{(n)}} = \overline{p^{(0)}} P^n$$

Пример 1.3. Продолжим примеры 1.1 и 1.2 и вычислим элементы матрицы $P^{(3)}$. Элементы ее первой строки $p_{11}^{(3)}$, $p_{12}^{(3)}$ и $p_{13}^{(3)}$ являются компонентами вероятностного вектора $\overline{p_1^{(3)}}$ которые равны вероятностям перехода из состояния a_1 после трех шагов в состояния a_1, a_2, a_3, соответственно. В этом случае начальное состояние цепи описывается вероятностным вектором $\overline{p_1^{(0)}} = (1,0,0)$. Проверим, что $\overline{p_1^{(3)}} = \overline{p_1^{(0)}} P^3$. Для этого вычислим

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,35 & 0,2 & 0,45 \\ 0,14 & 0,37 & 0,49 \\ 0,18 & 0,28 & 0,54 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,265 & 0,24 & 0,495 \\ 0,168 & 0,307 & 0,525 \\ 0,198 & 0,3 & 0,502 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим $\overline{p_1^{(3)}} = (1 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,265 & 0,24 & 0,495 \\ 0,168 & 0,307 & 0,525 \\ 0,198 & 0,3 & 0,502 \end{pmatrix} = (0,265 \quad 0,24 \quad 0,495)$, что совпадает (вполне естественно) с результатами расчетов в примере 1.2.

Аналогично,

$$\overline{p_2^{(3)}} = (p_{21}^{(3)} \quad p_{22}^{(3)} \quad p_{23}^{(3)}) = \overline{p_2^{(0)}} P^3 = (0 \quad 1 \quad 0) \cdot P^3 = (0{,}186 \quad 0{,}307 \quad 0{,}525)$$

и $\overline{p_3^{(3)}} = (p_{31}^{(3)} \quad p_{32}^{(3)} \quad p_{33}^{(3)}) = \overline{p_3^{(0)}} P^3 = (0 \quad 0 \quad 1) \cdot P^3 = (0{,}198 \quad 0{,}3 \quad 0{,}502)$. ■

2.2. Эргодические марковские цепи. Пусть $\boldsymbol{R}^r$ - r-мерное арифметическое пространство, состоящее из r-мерных векторов $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$. Если P – произвольная квадратная матрица r-го порядка, то, очевидно, отображение $\pi : \boldsymbol{R}^r \to \boldsymbol{R}^r : \pi(\overline{p}) = \overline{p} \cdot P$ является линейным преобразованием пространства $\boldsymbol{R}^r$. Легко также проверить, что если $\overline{p}$ - вероятностный вектор и P - стохастическая матрица, то $\overline{p} \cdot P$ является вероятностным вектором.

Определение неподвижного вектора. Вероятностный вектор $\overline{q}$ называется *неподвижным вектором преобразования* π, если $\pi(\overline{q}) = \overline{q} \cdot P = \overline{q}$.

Пример 2.1. Возьмем стохастическую матрицу $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ и вероятностный вектор $\overline{q} = (0{,}6;0{,}4)$. Вычислим $\overline{q} \cdot P = (0{,}6;0{,}4) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (0{,}6;0{,}4) = \overline{q}$, поэтому $\overline{q}$ является неподвижным вектором преобразования $\pi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2 : \pi(\overline{p}) = \overline{p} \cdot P$. ■

Если выбрать неподвижный вектор $\overline{q}$ в качестве вектора начальных вероятностей $\overline{p^{(0)}}$, то будем иметь $\overline{p^{(n)}} = \overline{p^{(0)}} \cdot P^n = \overline{q} \cdot P^n = \overline{q} = \overline{p^{(0)}}$. В этом случае вероятность перехода в любое состояние одной и та же на всех этапах данного процесса. Такой процесс называется *стационарным марковским процессом.*

Мы уже видели п.2.1, что вероятностный вектор состояния марковской цепи после n шагов определяется через начальный вероятностный вектор и n-ую степень матрицы вероятностей перехода: $\overline{p^{(n)}} = \overline{p^{(0)}} P^n$. Посмотрим, что происходит со степенями стохастической матрицы.

Пример 2.2. Возьмем матрицу $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ из предыдущего примера и будем вычислять ее степени (для удобства, удваивая показатель). Мы получим

$$P^2 = \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix},\ P^4 = \begin{pmatrix} 389/648 & 259/648 \\ 259/432 & 173/432 \end{pmatrix},$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} 503885/839808 & 335923/839808 \\ 335923/559872 & 223949/559872 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}6000002 & 0{,}3999998 \\ 0{,}5999996 & 0{,}4000004 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы P^8 очень мало отличаются от соответствующих элементов матрицы $Q = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Можно предположить, что с ростом n элементы матрицы P^n будут еще ближе к соответствующим элементам матрицы Q. Мы докажем, что это действительно так*. Отметим, что каждая строка матрицы Q является неподвижным вектором преобразования $\pi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2 : \pi(\overline{p}) = \overline{p} \cdot P$. ■

Определение регулярной марковской цепи. Марковская цепь называется *регулярной*, если какая-либо степень ее матрицы вероятностей перехода не содержит нулевых элементов.

Из определения следует, что если сама матрица вероятностей перехода не содержит нулевых элементов, то она определяет регулярную марковскую цепь. Можно привести примеры, когда матрица вероятностей перехода содержит нулевых элементов, но она все-таки определяет регулярную марковскую цепь.

Пример 2.3. Возьмем матрицу вероятностей перехода из примера 5.6 в предыдущей главе, определяющую марковскую цепь состояний системы «заправочный пистолет - автомобили»

* Фактически, можно доказать, что $Q = \lim\limits_{n\to\infty} P^n$, то есть, если $Q = (q_{ij})$ и $P^n = (p_{ij}^{(n)})$, то $q_{ij} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ для всех $i, j = 1,\ldots,k$ (здесь $p_{ij}^{(n)}$ - элемент матрицы P^n, а не n-ая степень элемента p_{ij} матрицы P).

$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/4 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$. Она содержит нулевой элемент $p_{22}=0$, вычислим теперь

$P^2=\begin{pmatrix}7/16 & 3/16 & 3/8\\ 3/8 & 1/4 & 3/8\\ 3/8 & 3/16 & 7/16\end{pmatrix}$. Мы видим, что уже вторая степень P^2 не содержит нулевых элементов, так что рассматривавшийся в этом примере процесс является регулярной марковской цепью. ■

Однако существуют стохастические матрицы, любая степень которых содержит нулевые элементы. Например, матрица $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$ определяет *нерегулярную марковскую цепь*, так как $P^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{2^n-1}{2^n} & \dfrac{1}{2^n}\end{pmatrix}$ для всех $n=1,2,\ldots$.

Вероятностный смысл свойства марковской цепи быть *регулярной* состоит в том, что в какой-то момент времени (т.е. на каком-то этапе процесса независимых испытаний) она обязательно будет иметь состояние, из которого возможен переход в любое из состояний этой системы независимо от начального состояния процесса. Другими словами, для любой регулярной марковской цепи существует такое m, для которого вероятностный вектор состояния после m шагов состоит только из строго положительных компонентов. Заметим, что если какая-либо квадратная матрица имеет только положительные элементы, то любая ее степень также имеет только положительные элементы. Отсюда следует, что начиная с некоторого шага m все вероятностные вектора состояний регулярной марковской цепи состоит только из строго положительных компонентов.

Чтобы проверить, является ли данная марковская цепь регулярной, достаточно убедиться, что все элементы какой-либо степени (все равно какой) ее матрицы вероятностей перехода строго положительными (при этом точные значения элементов не нужны). Поэтому вместо истинной матрицы P вероятностей перехода берем матрицу того же порядка, в которой элементы, соответствующие положительным элементам матрицы P, равны 1, а элементы, соответствующие нулевым элементам матрицы P, равны 0. Обозначим полученную матрицу через P_s, далее вычисляем степени этой матрицы, возводя в квадрат каждую вновь полученную и преобразуя ее точно также как и P. Как только возникнет матрица, состоящая только из 1, можно сделать вывод о регулярности данной марковской цепи.

Пример 2.4. Исследуем на регулярность марковскую цепь, определяемую следующей матрицей вероятностей перехода $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$. Заменим P на $P_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и найдем $P_s{}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Заменим P_s^2 на $(P_s^2)_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, найдем $(P_s^2)_s{}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Мы получили матрицу без нулей, следовательно, данная марковскую цепь является регулярной. ■

Приведем без доказательства две важные теоремы о регулярных марковских цепях.

Теорема о матрице вероятностей перехода регулярной цепи. Если P – матрица вероятностей перехода регулярной марковской цепи,

(1) то существует матрица Q, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = Q$;

(2) строки матрицы Q образуют одинаковый вероятностный вектор $\bar{q}$;

(3) все компоненты вектора $\bar{q}$ строго положительны.

Напомним, что элемент $p_{ij}^{(n)}$ матрицы P^n равен вероятности того, что процесс окажется в состоянии a_j после n шагов, если его начальное состояние a_i. Таким образом, (1) утверждает, что регулярный марковский процесс начиная с некоторого шага n становится абсолютно предсказуемым (в смысле компонент вероятностного вектора перехода на следующий этап) независимо от n.

Другими словами, $p_{ij}^{(n)} \approx q_{ij}$ для всех достаточно больших *n*. Утверждение (2) констатирует тот факт, что этот прогноз (из п.(1)) не зависит и от начального состояния, который задается начальным вероятностным вектором $\overline{p^{(0)}}$. Другими словами, $q_{ij} = q_j$ зависит только от рассматриваемого состояния a_j, а не от начального состояния a_i. Поэтому вероятность оказаться в состоянии a_j после большого числа шагов близка к q_j независимо от начального состояния, с которого стартовал данный процесс.

Эти закономерности были проиллюстрированы в примере 2, в котором мы видели, что уже элементы восьмой степени матрицы $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ образуют строки, которые отличаются соответствующими элементами только в 7-ом знаке после запятой. Поэтому, независимо от того, с какого начального состояния (из двух возможных a_1 или a_2) стартовал процесс, через восемь его шагов вероятность того, что система перейдет в состояние a_1 равна числу 0,6, а вероятность того, что система перейдет в состояние a_2 равна числу 0,4 с точностью 10^{-6}.

Теорема о вероятностных векторах регулярной цепи. Если P – матрица вероятностей перехода регулярной марковской цепи, а Q и $\overline{q}$ определены как в предыдущей теореме, то

(1) если $\overline{p}$ – любой вероятностный вектор, то $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p}P^n = \overline{q}$;

(2) вектор $\overline{q}$ является единственным вероятностным вектором, удовлетворяющим равенству $\overline{q}P = \overline{q}$, т.е. $\overline{q}$ является единственным неподвижным вектором преобразования $\pi : \boldsymbol{R}^r \to \boldsymbol{R}^r : \pi(\overline{p}) = \overline{p} \cdot P$

Отметим одно важное следствие этой теоремы. Если принять за $\overline{p}$ начальный вероятностный вектор $\overline{p^{(0)}}$, то вектор $\overline{p^{(0)}}P^n = \overline{p^{(n)}}$ определяет распределение вероятностей всех состояний на *n*-ом этапе процесса, а этот вектор в силу (1) покомпонентно стремится к $\overline{q}$ с ростом *n*. Следовательно, если матрица *P* регулярная, то независимо от того, каковы были начальные вероятности, после достаточно большого числа шагов процесса вероятность того, что процесс перейдет в состояние a_j будет близка к q_j.*

Пример 2.5. Вновь вернемся к примеру 2.1, возьмем начальный вероятностный вектор $\overline{p^{(0)}} = (0{,}2;\, 0{,}8)$ и посмотрим, как этот вектор изменяется при последовательных преобразованиях пространства $\boldsymbol{R}^2$, определяемых матрицей $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Для этого воспользуемся степенями матрицы *P*, вычисленными нами в примере 2.2. Итак, имеем

$$\overline{p^{(1)}} = \overline{p^{(0)}}P = \left(0{,}2\ 0{,}8\right)\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (8/15\ 7/15) = (0{,}5333\ 0{,}4667)$$

$$\overline{p^{(2)}} = \overline{p^{(0)}}P^2 = \left(0{,}2\ 0{,}8\right)\begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/12 & 5/12 \end{pmatrix} = (53/90\ 37/90) = (0{,}5888\ 0{,}4112)$$

$$\overline{p^{(4)}} = \overline{p^{(0)}}P^4 = \left(0{,}2\ 0{,}8\right)\begin{pmatrix} 389/648 & 259/648 \\ 259/432 & 173/432 \end{pmatrix} = (1943/3240\ 1297/3240) = (0{,}5997\ 0{,}4003)$$

Мы видим, что $\overline{p^{(1)}} = (0{,}5333;\, 0{,}4667)$, $\overline{p^{(2)}} = (0{,}5888;\, 0{,}4112)$, $\overline{p^{(4)}} = (0{,}5997;\, 0{,}4003)$ покомпонентно приближаются к вектору $\overline{q} = (0{,}6; 0{,}4)$. Если бы мы начали этот процесс с любого другого вероятностного вектора $\overline{p}$, то получили бы тот же самый результат: $\overline{p}P^n \to (0{,}6;\, 0{,}4)$ при $n \to \infty$. Изобразим эти вектора на координатной плоскости

---

* После теоремы о матрице вероятностей перехода регулярной цепи было замечено, что вероятность оказаться в состоянии a_j после большого числа шагов близка к q_j независимо от начального состояния, с которого стартовал данный процесс.

Рис.2.1 ■

Теорема о неподвижном векторе стохастической матрицы 2-го порядка с положительными элементами. Если $S = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ - стохастическая матрица с положительными элементами (т.е. $0 < a < 1, 0 < b < 1$), то она имеет единственный неподвижный вероятностный вектор $\bar{s} = (b/(a+b); a/(a+b))$.

Доказательство. Так элементы матрицы S не равны нулю, то S она является матрицей вероятностей перехода некоторой регулярной цепи. В этом случае она имеет единственный неподвижный вероятностный вектор $\bar{s} = (s_1; s_2)$. Его компоненты должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} s_1(1-a) + s_2 b = s_1 \\ s_1 a + s_2(1-b) = s_2 \\ s_1 + s_s = 1. \end{cases}$$

Эта система уравнений сводится к системе

$$\begin{cases} as_1 - bs_2 = 0 \\ s_1 + s_2 = 1. \end{cases}$$

Ее определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a + b$, по условию $a > 0$ и $b > 0$, поэтому $a + b > 0$ и, следовательно, данная система имеет и притом единственное решение

$$\bar{s} = (b/(a+b); a/(a+b)).$$ ■

Достаточно много интересных свойств имеют марковские цепи, обладающие единственным вероятностным неподвижным вектором с положительными компонентами. Мы уже видели выше, что таковыми являются регулярные цепи. Введем более широкий класс марковских цепей с единственным вероятностным неподвижным вектором.

Определение эргодической марковской цепи. Марковская цепь называется *эргодической*, если из каждого ее состояния можно попасть (через некоторое конечное число шагов) в любое другое состояние.

Очевидно, что регулярная цепь всегда является эргодической, так как по ее определению существует такое n, что все элементы n-ой степени матрицы вероятностей перехода становятся строго положительными числами и, следовательно, на $(n+1)$-ом шаге возможен переход в любое состояние цепи. Это означает, что для любой регулярной цепи существует такое n, для которого возможен переход из любого состояния в любое не более чем за n шагов.

С другой стороны, эргодическая цепь не обязана быть регулярной. Например, представим процесс, имеющий на каждом шаге два возможных состояния a_1 или a_2, причем на всех нечетных шагах он принимает состояние a_1, а на всех четных шагах - a_2. Очевидно, что этот процесс является марковской цепью с матрицей вероятностей перехода $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислим степени этой матрицы: $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и т.д. Для произвольного натурального числа n будем, очевидно, иметь $P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. никакая степень матрицы вероятностей перехода не состоит только из нулевых элементов. Это означает, что данный процесс не является регулярной марковской цепью, но является эргодической, так как из любого состояния a_1 или a_2 можно попасть в любое из этих состояний.

Приведем без доказательства теорему, описывающую эргодические цепи.

Теорема об эргодических цепях. Пусть P – матрица вероятностей перехода эргодической цепи. Тогда:

(1) существует единственный вероятностный вектор $\bar{q}$, такой что $\bar{q}P = \bar{q}$;

(2) все компоненты вектора $\bar{q}$ положительны;

(3) пусть средняя доля времени, в течении которого процесс находится в состоянии a_j для n шагов равна

$h_j^{(n)}$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ независимо от начального состояния имеем

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}[| h_j^{(n)} - q_j | > \varepsilon] = 0 .$$

То, что мы говорили о векторе $\overline{q}$ после теоремы о вероятностных векторах регулярной цепи, имеет место только для частных случаев эргодических цепей. В общем случае на любом фиксированном этапе процесса вероятность оказаться в определенном состоянии для эргодической цепи может быть равна 0. Однако утверждение (3) теоремы об эргодических цепях дает некоторый аналог «закона больших чисел» для всех эргодических цепей.

Пример 2.6 (продолжение примера 2.3). Воспользуемся теоремой о вероятностных векторах регулярной цепи для построения предельной матрицы Q. Теперь мы знаем, что строки матрицы Q должны представлять собой неподвижный вероятностной вектор $\overline{q} = (q_1, q_2, q_3)$, т.е должны быть выполнены следующие равенства:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

и

$$(q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3) .$$

Расписывая эти равенства покомпонентно, получим в результате следующую систему линейных уравнений относительно компонент вектора $\overline{q} = (q_1, q_2, q_3)$:

$$\begin{cases} q_1 + \quad q_2 + \quad q_3 = 1 \\ 1/2\, q_1 + 1/2\, q_2 + 1/4\, q_3 = q_1 \\ 1/4\, q_1 + \qquad + 1/4\, q_3 = q_2 \\ 1/4\, q_1 + 1/2\, q_2 + 1/2\, q_3 = q_3 \end{cases} .$$

Преобразуем эту систему к стандартному виду:

$$\begin{cases} q_1 + \quad q_2 + \quad q_3 = 1 \\ -1/2\, q_1 + 1/2\, q_2 + 1/4\, q_3 = 0 \\ 1/4\, q_1 \quad - q_2 \quad + 1/4\, q_3 = 0 \\ 1/4\, q_1 + 1/2\, q_2 \quad - 1/2\, q_3 = 0 \end{cases} .$$

Очевидно, что второе уравнение, умноженное на (-1), является суммой третьего и четвертого, поэтому его можно исключить из системы и получить равносильную систему:

$$\begin{cases} q_1 + \quad q_2 + \quad q_3 = 1 \\ 1/4\,q_1 \quad - q_2 \quad + 1/4\,q_3 = 0 \\ 1/4\,q_1 + 1/2\,q_2 \quad - 1/2\,q_3 = 0 \end{cases}.$$

Определитель этой $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & -1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{15}{16}$, поэтому система имеет и притом единственное решение $\overline{q} = (0{,}4;\, 0{,}2;\, 0{,}4)$.

Таким образом, предельной матрицей является $Q = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = Q$ независимо от начального вероятностного вектора $\overline{p^{(0)}}$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p^{(n)}} = \overline{p^{(0)}}$. Это означает, что около заправочного пистолета в среднем 40% времени не будет ни одного автомобиля, 20% - один автомобиль и 40% - два или более автомобилей. ■

Пример 2.7 (продолжение примера 2.6). Провели подсчет числа машин, находящихся около заправочного пистолета в течение 300 последовательных промежутков времени, и записали эти данные в виде последовательности, состоящих из 0, 1 и 2 (причем 2 обозначает число машин 2 или более):

22022221000210000002122122001222102101221222220012101000010012001210
02112222010201222210001221212002001000000222220001002222222010221000
02012221000202200012012200000000002102100121000000000000002201212212
2201001200001002212212122201010102212222211101220010220222000002200 10
10100021222221111012200102220

Это наблюдение дало, что около заправочного пистолета 121 раз не было автомобилей, 65 раз был один автомобиль и 114 раз – два автомобиля. Отношение числа моментов этих трех типов к общему числу наблюдаемых моментов дает вектор (0,403; 0,216; 0,381), который мало отличается от своего теоретического прототипа $\overline{q} = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}4)$. ■

Если матрица вероятностей перехода регулярной цепи имеет порядок *n*, то для нахождения неподвижного вероятностного вектора необходимо решить систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными, что для больших *n* требует определенных расчетных затрат. Однако часто удается предсказать значения компонент этого вектора, основываясь на смысле рассматриваемой задачи.

Пример 2.8. На автодроме построена сеть дорог, изображенная на следующем рисунке

Рис. 2.2

Перекрестки пронумерованы так, как показано на этом рисунке. Курсант заезжает на автомобиле в эту сеть и на каждом перекрестке случайным образом делает поворот (не нарушая, конечно, правил дорожного движения). Другими словами, если курсант попадает на некоторый перекресток *n* дорог (здесь $n = 2,3,4$), то на любой близлежащий перекресток он попадает с вероятностью. Движение автомобиля может быть описано марковской цепью со следующей матрицей вероятностей перехода

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Эта цепь не является регулярной, так из перекрестка с нечетным номером можно попасть только на перекресток с четным номером и наоборот. Поэтому все степени матрицы вероятностей перехода будут содержать нулевые элементы, которые выражают невозможность попадания из перекрестка на перекресток с номерами одинаковой четности. С другой стороны, очевидно, что из любого перекрестка можно попасть на любой другой перекресток, т.е. марковская цепь, описывающая движения автомобиля, является эргодической.

Для того чтобы найти неподвижный вероятностный вектор $\overline{q}$ для такой матрицы, необходимо составить и решить систему из десяти уравнений с девятью неизвестными. Сделаем по-другому, предположим, что $\overline{q}=t\overline{x}$, где компоненты вектора $\overline{x}=(2,3,2,3,4,3,2,3,2)$ в правой части представляют собой количество дорог, образующих перекресток с соответствующим номером, а *t* – некоторый параметр. Это предположение мы можем сделать на основе утверждения (3) теоремы об эргодических цепях, которое в нашем случае интерпретируется следующим образом: *компоненты неподвижного вектора должны быть пропорциональны той доли общего времени, которую автомобиль проведет на каждом из перекрестков.*

Легко проверить, что $\overline{x}P=\overline{x}$, следовательно, единственный неподвижный вероятностный вектор $\overline{q}=t\overline{x}$ получается подбором такого параметра *t*, для которого

$$t(2+3+2+3+4+3+2+3+2)=1\,.$$

Ясно, что $t=1/24$, поэтому $\overline{q}=(\frac{1}{12},\frac{1}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{8},\frac{1}{12})$. ■

2.3. Примеры марковских цепей. Приведем примеры использования теории марковских цепей для решения разнообразных задач экономики, физики, социологии, биологии и пр.

2.3.1. Процесс независимых испытаний. Любой процесс независимых испытаний, в котором каждый эксперимент имеет некоторое конечное множество исходов $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ с соответствующими вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_r$ их появления, можно рассматривать как марковскую цепь, матрица вероятностей перехода которой имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{pmatrix}.$$

2.3.2. Отцы и дети. Если дети выпускников классического университета с вероятностью 0,8 поступают в Ивановский университет, а остальные поступают в Ивановский химтех, если дети выпускников химтеха с вероятностью 0,6 поступают в химтех, а остальные делятся поровну между университетом медакадемией и если дети выпускников медакадемии с вероятностью 0,7 поступают в медакадемию, а остальные – с вероятностью 0,2 в химтех и с вероятностью 0,1 – университет, то матрица вероятностей перехода имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что ребенок выпускника классического университета всегда поступает в университет, то матрица вероятностей перехода будет иметь следующий вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

2.3.3. Диффузия газов. Рассмотрим частный вид модели, которая используется для объяснения явления диффузии газов. Предположим, что в ящике, который имеет два отделения, находятся три шара. Каждую секунду выбирается один из трех шаров случайным образом и перекладывается из одного отделения в другое. В качестве состояния марковской цепи будет рассматривать число шаров в первом отделении. В этом случае матрица вероятностей перехода имеет следующий вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3.4. Генетика. Пусть наследуемый признак определяется парой генов, каждый из которых может быть типа G или типа g. Каждый индивидуум может обладать генами в одной из следующих возможных комбинаций GG, gg или Gg (считается, что комбинация gG эквивалентна комбинации Gg). Если признаки, определяемые комбинациями GG и Gg внешне неразличимы, то говорят, что ген G *доминирует* над геном g. В этом случае индивидуум с генами GG называется *доминантным*, индивидуум с генами gg называется *рецессивным*, а индивидуум с генами Gg – *гибридом*.

При скрещивании двух животных их потомство наследует по одному гену от каждого из родителей. Современная генетика основана на предположении, что эти гены образуют пару случайным образом, причем гены получены от каждого из родителей независимо друг от друга. Это предположение позволяет вычислять вероятность появления у потомства той или иной комбинации генов, определяющей тип вновь появляющихся индивидуумов. Ситуация будет тривиальной, если скрещиваются два животных доминантного типа (с набором генов GG) или рецессивного типа (с набором генов gg). В этом случае все потомство будет того же типа, что и их прародители. Если скрещивается одно животное доминантного типа и одно животное рецессивного типа, то все потомство будет иметь гибридный тип. Если скрещивать доминанта и гибрида, то любой потомок получит от первого родителя ген G, а от второго - ген G с вероятностью $1/2$ или ген g с той же вероятностью $1/2$. В этом случае с равной вероятностью $1/2$ каждый индивидуум потомства первого поколения будет иметь доминантный или гибридный вид. Аналогично, при скрещивании рецессивного родителя и гибрида с равной вероятностью $1/2$ каждый индивидуум потомства первого поколения будет иметь рецессивный или гибридный тип. Наконец, при скрещивании двух гибридов каждый индивидуум их потомства первого поколения получит от родителей с вероятностью $1/2$ гены каждого вида, поэтому он может обладать набором GG с вероятностью $1/4$, набором gg – с вероятностью $1/4$ и набором Gg – с вероятностью $1/2$.

Пусть один из родителей вначале имеет доминантный тип, а второй - произвольный тип, появившееся потомство вновь скрещиваем с индивидуумом доминантного типа и т.д. Ясно, что возникает марковская цепь, состояниями которой являются доминантные, рецессивные индивидуумы и гибриды. Обозначим эти состояния соответственно числами 1, 2 и 3, тогда матрица вероятностей перехода будет иметь следующий вид

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Если один из родителей вначале имеет рецессивный тип, а второй - произвольный, а появившееся потомство вновь скрещиваем с индивидуумом рецессивного типа и т.д., то матрица вероятностей перехода будет иметь следующий вид

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, если всегда брать в качестве одного из родителей гибрида, то матрица вероятностей перехода будет такой

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2.3.5. Генетика (продолжение 2.3.4). Пусть мы имеем пару животных противоположного пола, мы скрещиваем их, выбираем из их потомства двух животных противоположного пола, вновь скрещиваем и т.д. Если рассматриваемый признак не зависит от пола, то каждое состояние такого процесса размножения определяется парой животных. Поэтому состояниями* процесса будут $a_1 = 11; a_2 = 12; a_3 = 13; a_4 = 22; a_5 = 23; a_6 = 33$.

Покажем, как вычисляются элементы матрицы вероятностей перехода. Пусть начальное состояние системы $a_1 = 11$. Это означает, что оба родителя имеют гены GG, поэтому все потомство обладает генами GG и вероятность перейти в каждое из состояний a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 равна нулю, а в состояние a_1 равна 1. Пусть начальное состояние системы $a_2 = 12$, тогда один из родителей имеет гены GG, а второй – gg. Это означает, сто потомство этих родителей состоит только из гибридов, потому система принимает состояние a_6 с вероятностью 1, все остальные состояния – с вероятностью 0. Пусть теперь начальное состояние системы $a_3 = 13$, тогда один из родителей имеет гены GG, а второй – Gg. В этом случае вероятность появления доминантного или гибридного потомства равна $1/2$ для каждого из потомков (и, соответственно, вероятность появления рецессивного потомка с набором генов gg равна 0). Поэтому вероятность перехода в состояние a_1 (т.е. вероятность выбора двух потомков с наборами генов GG) равна $1/4$, в состояния a_2, a_4 и a_5- 0, в состояние a_3 - $1/2$ и в состояние a_6- $1/4$. Далее, при начальном состоянии $a_4 = 22$ оба родителя имеют гены gg, поэтому все потомство обладает генами gg, и вероятность перейти в каждое из состояний a_1, a_2, a_3, a_5 и a_6 равна нулю, а в состояние a_4 равна 1. При начальном состоянии $a_5 = 23$ один из родителей имеет гены Gg, а второй – gg. В этом случае вероятность появления рецессивного или гибридного потомства равна $1/2$ для каждого из потомков. Поэтому вероятность перехода в состояние a_4 (т.е. вероятность выбора двух потомков с наборами генов gg) равна $1/4$, в состояния a_1, a_2 и a_3- 0, в состояние a_5 - $1/2$ и в состояние a_6- $1/4$. Наконец, пусть начальное состояние системы $a_6 = 33$, тогда оба родителя – гибриды с набором генов Gg. Потому вероятность перехода в состояние a_1 (как и в со-

* Напомним, что комбинация gG эквивалентна комбинации Gg

стояние a_4) равна $1/16$, в состояние a_2 - $1/8$ и в каждое из остальных состояний a_3, a_5 и a_6 равна $1/4$. Полная матрица вероятностей перехода в этом случае выглядит так:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/16 & 1/8 & 1/4 & 1/16 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2.3.6. Слухи. Предположим, что из некоторого банка произошла утечка информации о том, что он на грани банкротства, но истинное положение банка никому не известно. Эта информация, т.е. решение банка объявить себя банкротом или наоборот, подтвердить свою устойчивость, стала известна лицу G_1, который передал ее лицу G_2, который, в свою очередь, передал ее лицу G_3 и т.д., причем каждый раз эта информация передавалась новому лицу. Пусть для каждого лица, получившего сообщение, имеется некоторая вероятность $0 < p < 1$ того, что это сообщение будет передано следующему лицу с изменением смысла на противоположный. Какова вероятность того, что G_n получит известие о том, что банк устоит?

Можно рассматривать этот процесс как марковскую цепь с двумя состояниями: 0 – банк банкрот, и 1 – банк устойчив. Процесс будет находится в состоянии 1 на *n*-ом шаге, если лицо G_n получит известие о том, что банк устоит, и в состоянии 0, если его известили, что банк – банкрот. Очевидно, что матрица вероятностей перехода этого процесса имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица P^n определяет вероятность того, что G_n передаст ту или иную информацию о банке в предположении, что банк все-таки объявит себя банкротом (первая строка матрицы $\overline{p^{(0)}} \cdot P^n$) или в предположении, что банк устойчив (вторая строка матрицы $\overline{p^{(0)}} \cdot P^n$).

Мы знаем, что по теореме о неподвижном векторе стохастической матрицы 2-го порядка с положительными элементами существует единственный неподвижный вероятностный вектор $\bar{s} = (p/(p+p);\, p/(p+p)) = (1/2;1/2)$ этого процесса. Так как строки предельной матрицы $S = \lim\limits_{n\to\infty} P^n$ состоят из компонент вектора $\bar{s} = (1/2;1/2)$, то для лица G_n вероятность услышать, что банк устоит мало отличается от $1/2$ (и эта вероятность стремится к G_n при $n \to \infty$) независимо от начального состояния, т.е независимо от того, каково истинное положение банка. Следовательно, для большого числа людей сложится такая ситуация, что половина услышала о банкротстве банка, а другая половина услышала об устойчивости банка.

Теперь предположим, что при передаче информации перемену сообщения на противоположное в направлении «банкрот – устойчив» каждое лицо осуществляет с вероятностью a и в направлении «устойчив – банкрот» - с вероятностью b. Тогда матирицв вероятностей перехода примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\bar{s} = (b/(a+b);\, a/(a+b))$. Таким образом, вероятность того, что G_n услышит об устойчивости банка, приблизительно равна $\dfrac{b}{a+b}$. При больших значениях n эта вероятность также не зависит от истинного положения банка, а мы можем ожидать, что доля людей, услышавших, что положение банка остается устойчивым, приблизительно составляет $\dfrac{b}{a+b}$, доля услышавших, что банк будет объявлен банкротом, составляет $\dfrac{a}{a+b}$. Важно отметить, что не банк, а сами люди определяют вероятность того, какое-либо лицо услышит о положении банка, а также долю людей, которые получат ту или иную информацию.

2.3.7. Мода. Как известно, мода изменчива, причем принципиально она имеет два направления: назовем их условно «ретро» и «модерн». Нас интересует следующий вопрос: «Какое направление будет модным в следующем году?», т.е. что предпочтет население носить в следующем году и, следовательно, одежду какого направления будут покупать модники. Мы хотим сделать предсказание, рассчитанное на длительное время. Наши предсказания будут основаны на истории моды, которая каждый раз выбирает направление «ретро» или «модерн». Ясно, что знание предшествующих зигзагов моды должно влиять на наши предсказания, относящиеся к будущему времени. В качестве первого приближения мы принимаем, что при оценке вероятности того или иного поворота моды играет роль лишь знание направления моды, непосредственно предшествующего рассматриваемому. В результате мы приходим к марковской цепи с двумя состояниями 1= «ретро» и 2= «модерн» и матрицей вероятностей перехода:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

где a – доля тех прошлых лет, когда моды имела направление «ретро», но на следующий год выбрала направление «модерн», и b – доля прошлых лет, когда произошли противоположные перемены.

Можно получить несколько лучшее приближение, если учитывать результат не одного, а двух последовательных предшествующих годов. В этом случае состояниями системы будут пары чисел $a_1 = 11, a_2 = 21, a_3 = 12$ и $a_4 = 22$, указывающих исходы двух последовательных предшествующих годов. Например, состояние 11 означает, что последние два года мода имела направление «ретро». Если на следующий год после доминирования «ретро» мода выбрала направление «модерн», то мы будем иметь состояние 12. Допустим, что в течение десяти последовательных лет мода имела направления 1112112122, тогда наш процесс имел состояния 11, 11, 12, 21, 11, 12, 21, 12, 22, 22 переходя последовательно от одного к другому. Отметим, что первая цифра состояния, к которому мы переходим, совпадает со второй цифрой состояния, от которого мы исходим, так эти цифры относятся к одному т рому же году.

Можно предположить, что матрица вероятностей перехода этого процесса будет иметь вид:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 1-d \end{pmatrix},$$

однако здесь необходимо разумным образом оценить параметры a, b, c, d, чтобы они имели ясный вероятностный смысл (см. задачу 9).

Если значения всех параметров a, b, c, d отличны от 0 и 1, то матрица $P_2{}^2$ не содержит нулевых элементов (см. задачу 10). Следовательно, матрица P_2 определяет регулярную марковскую цепь. В этом случае она имеет единственный неподвижный вероятностный вектор, который мы можем найти обычным образом с помощью системы линейных уравнений (как, скажем, в примере 6 из п.2). Этот вектор будет

$$\bar{q} = \left(\frac{bd}{bd+2ad+ca}; \frac{ad}{bd+2ad+ca}; \frac{ad}{bd+2ad+ca}; \frac{ca}{bd+2ad+ca}\right).$$

Заметим, что вторая и третья компоненты вектора $\bar{q}$ равны, поэтому в долгосрочном прогнозе доля состояния 12 равна доле состояния 21, т.е. одинаково часто (или редко) происходит в моде смена стиля «ретро» на «модерн» или смена «модерн» на «ретро».

Неподвижный вектор $\bar{q}$ позволяет найти вероятность того, что в отдаленном будущем в моде будет преобладать, например, стиль «ретро». Для этого нужно сложить вероятности появления состояний 11 и 21 в прогнозируемом периоде. Эти вероятности приблизительно равны первой и второй компонентам вектора, соответственно. Следовательно, вероятность того, что в отдаленном будущем в моде будет преобладать стиль «ретро», равна

$$\frac{bd}{bd+2ad+ca} + \frac{ad}{bd+2ad+ca} = \frac{bd+ad}{bd+2ad+ca}.$$

Заметим, что вероятность появления в моде стиля «ретро» в году, предшествующем некоторому году в отдаленном будущем равна сумме вероятностей состояний 11 и 12. То, что при этом мы получаем тот же самый результат $\frac{bd+ad}{bd+2ad+ca}$, соответствует тому факту, что предсказания на отдаленное будущее существенно не зависят от индивидуального года, в отношении которого делается это предсказание.

2.3.8. Миграция населения. Рассмотрим достаточно типичную демографическую картину, когда каждый год из мегаполиса переселяется в пригород *a%* его жителей, и одновременно *b%* жителей его пригородов переселяется в мегаполис. Для простоты будем считать, что общее число жителей в мегаполисе и в его пригородах остается постоянным. Найдем распределение жителей между мегаполисом и пригородами в отдаленном будущем.

Пусть начальное состояние для жителей региона (это – население мегаполиса вместе с пригородами) описывается вероятностным вектором $\overline{p^{(0)}} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$, где $p_1^{(0)}$ - доля жителей мегаполиса и $p_2^{(0)}$ - доля жителей пригородов в общем количестве жителей региона, и $\overline{p^{(n)}} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)})$ - вероятностный вектор, дающий соответствующие доли спустя *n* лет. Изменений вероятностного вектора определяет следующая матрица вероятностей перехода $S = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, поэтому, как нам известно, $\overline{p^{(n)}} = \overline{p^{(0)}} \cdot S$.

Если *a* и *b* отличны от 0 и 1, то марковская цепь с матрицей перехода *S* является регулярной. По теореме о неподвижном векторе стохастической матрицы 2-го порядка вектор $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p^{(n)}} = \bar{s} = \left(\frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b} \right)$, где $\bar{s}$ - единственный неподвижный вероятностный вектор матрицы *S*. Следовательно, можно сделать вывод, что через достаточно большой промежуток времени в мегаполисе останется приблизительно $\frac{b}{a+b} \cdot 100\%$ жителей от их первоначального числа, а в пригородах - $\frac{a}{a+b} \cdot 100\%$ жителей от их первоначального числа независимо от первоначального распределения населения в регионе. Отметим, что по истечении длительного времени из мегаполиса в пригороды будет ежегодно переселяться доля населения, равная $\frac{b}{a+b} \cdot a = \frac{ab}{a+b}$, а из пригородов в мегаполис – доля, равная

$\frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}$. Другими словами, через большой промежуток времени наступит «равновесие», при котором из мегаполиса в пригороды будет переселяться ровно столько же людей, сколько из пригородов в мегаполис, причем это число не зависит от первоначального распределения населения в регионе.

2.3.9. Перемешивание газов. Одна из простых моделей молекулярного механизма перемешивания двух газов может быть представлена в виде марковской цепи. Она называется *моделью Эренфеста* и достаточно точно объясняет экспериментально наблюдаемые явления.

Пусть имеется $2n$ шаров, n белых и n черных, помещенных в две урны по n шаров в каждой. Единичный эксперимент заключается в том, что из каждой урны случайным образом выбирается по одному шару, который и перекладывается в другую урну. Пусть состояние процесса характеризуется числом j черных шаров в первой урне? (где j может принимать значения $0,1,2,\ldots, n$); при этом первая урна содержит $n-j$ белых шаров, а вторая урна содержит $n-j$ черных шаров и j белых шаров. Пусть процесс находится в состоянии j, после обмена шаров он может перейти в состояние $j-1$ (когда из первой урны вынут черный шар, а из второй – белый), может остаться в состоянии j (если вынуты из обеих урн шары одного цвета) и может перейти в состояние $j+1$ (когда из первой урны вынут белый шар, а из второй – черный). Обозначим через $p_{j,k}$ вероятность перехода из состояния j в состояние k, где $j,k = 0,1,\ldots,n$. Простые комбинаторные рассуждения показывают, что:

$p_{j,j-1} = \left(\frac{j}{n}\right)^2$ для всех $j = 1,\ldots,n$;

$p_{j,j} = \frac{2j(n-j)}{n^2}$ для всех $j = 0,1,\ldots,n$;

$p_{j,j+1} = \left(\frac{n-j}{n}\right)^2$ для всех $j = 0,1,\ldots,n-1$;

$p_{j,k} = 0$ для всех $j = 0,1,\ldots,n$ и $k \neq j-1, j, j+1$.

Ясно, что матрица вероятностей перехода имеет размер $(n+1)\times(n+1)$ и имеет следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ (1/n)^2 & 2(n-1)/n^2 & (n-1/n)^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2/n)^2 & 4(n-1)/n^2 & (n-2/n)^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1/n)^2 & 2(n-1)/n^2 & (1/n)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Физик хотел бы предсказать состав каждой урны после того, как было произведено некоторое число обменов, так как этот процесс моделирует перемешивание двух газов (шары черного цвета играют роль молекул одного газа, а белого – другого). Очевидно, что любое предсказание, относящееся к небольшому числу начальных обменов, должно зависеть от первоначального состава урн. Например, если в первой урне в начальный момент находились только черные шары, то естественно ожидать, что в течение продолжительного времени в ней будет черных шаров больше, чем во второй урне. Каков будет состав каждой урны после большого числа обменов, и будет ли он зависеть от первоначального распределения шаров?

На этот вопрос мы сможем ответить, если этот процесс является эргодической марковской цепью. Можно доказать, что (см. задачу 13) мы имеем дело с регулярной марковской цепью для всех $n \geq 2$. Например, для $n=2$ мы имеем

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ P^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 01/4 \end{pmatrix},$$

и уже квадрат матрицы P имеет только ненулевые элементы.

Итак, данная марковская цепь является регулярной и поэтому имеет и при том единственный неподвижный вероятностный вектор. Это факт и сам вектор позволят нам ответить на поставленный вопрос. В частности, процентный состав шаров каждого типа в каждой из урн после большого числа обменов дает с любой точностью этот самый единственный вероятностный вектор. Этот вектор можно вычислить обычным образом с помощью подходящей системы линейных уравнений относительно его компонент (см. задача 14). Однако, для нахождения неподвижного вектора воспользуемся некоторыми особенностями процесса обмена шарами между урнами и предугадаем ответ.

Видимо, разумно предположить, что после большого числа обменов шарами, произошло достаточно хорошее перемешивание шаров обоих типов в каждой из урн, независимо от первоначального состава шаров в них. Это должно означать, что вероятность обнаружить какие-то определенные *n* шаров в первой урне равна вероятности взять эти *n* шаров из хорошо перемешанных всех наших 2*n* шаров. Если допустить, что такое предположение верно, то вероятность того, что в первой урне окажется *j* черных шаров может быть найдена с помощью обычных комбинаторных формул и она равна

$$q_j = \frac{C_n^j \cdot C_n^{n-j}}{C_{2n}^n} = \frac{\left(C_n^j\right)^2}{C_{2n}^n} = \frac{(n!)^4}{(j!)^2((n-j)!)^2(2n)!} \qquad (*)$$

для всех $j = 0,1,\ldots,n$. Эти вероятности и будут компонентами неподвижного вероятностного вектора $\bar{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ матрицы *P*, определяющей нашу марковскую цепь.

Проверим справедливость этого утверждения для случая $n = 2$. Вычислим компоненты вектора $\bar{q} = (q_0, q_1, q_2)$ с помощью формулы (*): $q_0 = \frac{1}{6}; q_1 = \frac{2}{3}; q_2 = \frac{1}{6}$.

Теперь непосредственно проверим, что $\bar{q} = (1/6;\, 2/3;\, 1/6)$ является неподвижным вектором матрицы *P*:

$$(1/6;\, 2/3;\, 1/6)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2/3\cdot 1/4;\, 1/6\cdot 1 + 2/3\cdot 1/2 + 1/6\cdot 1;\, 2/3\cdot 1/4) = (1/6;\, 2/3;\, 1/6).$$

Итак, независимо от первоначального состава двух шаров (из 2-х черных и 2-х белых) в каждой из урн, через большое число обменов шарами в первой/второй урне будет с вероятностью $5/6 \approx 83\%$ хотя бы один черный/белый шар и с вероятностью $2/3 \approx 66\%$ два шара разного цвета.

2.3.10. «Однорукие бандиты». Имеется два игральных автомата, каждый из которых дает один и тот размер выигрыша. Известно, что вероятность выигрыша на первом автомате равна $1/3$, а на втором автомате - $1/4$. Игроку не известно, на каком из этих двух автоматов он играет. Какие системы игры может применить игрок, чтобы средний выигрыш был наибольшим?

Сначала рассмотрим систему игры, при которой решение играть на том же самом автомате в следующий раз или переменить автомат игрок принимает по результату только последней игры. Пусть при первой игре автомат выбран наугад. Далее, если игрок выигрывает, то в следующей игре он играет на том же самом автомате, а если проигрывает, то играет на другом автомате.

Чтобы узнать, к чему может привести эта система игры, образуем марковскую цепь, состояниями которой будут 1, когда игра идет на первом автомате, и 2, когда игра идет на втором автомате. Найдем матрицу вероятностей перехода. Если игра идет на первом автомате, то вероятность продолжить игру на нем же равна вероятности выигрыша, т.е. равна $1/3$, а вероятность продолжить игру на втором автомате равна вероятности проигрыша, т.е равна $2/3$. Аналогично, если игра идет на втором автомате, то вероятность продолжить игру на нем же $1/4$, а вероятность продолжить игру на первом автомате равна $3/4$. В результате получаем следующую матрицу вероятностей перехода $P=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Неподвижный вероятностный вектор $\overline{q}=(q_1,q_2)$ этой матрицы найдем с помощью системы

$$\begin{cases} (q_1\ q_2)\cdot\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}=(q_1\ q_2) \\ q_1+q_2=1 \end{cases}$$

В результате получаем неподвижный вероятностный вектор $\overline{q}=(9/17;8/17)$, который показывает вероятность того, что игра будет продолжена на том же самом автомате, на котором происходила предыдущая игра, при большом числе игр. Определим вероятность выигрыша в каждой игре, если использовать данную систему:

$$p^{(1)}=\frac{9}{17}\cdot\frac{1}{3}+\frac{8}{17}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{17}\approx 0{,}294\,.$$

Теперь применим вторую систему, которая предполагает, что в принятии решения – менять или не менять игровой автомат – игрок учитывает исходы двух последних игр. Другими словами, после выбора автомата для очередной игры, игрок играет два раза подряд на выбранном автомате и на основании исхода этих двух игр принимает определенное очередное решение о выборе для игры следующего автомата. Для того чтобы обосновать это решение, вычислим условные вероятности того, что игрок имел дело с первым автоматом, при условии, что исходами двух последних игр были ВВ=«выигрыш-выигрыш», ВП=«выигрыш-проигрыш, ПВ=«проигрыш-выигрыш» и ПП=«проигрыш-проигрыш». Будем предполагать, что в начальный момент времени игрок выбирает один из двух автоматов наугад, т.е. с вероятностью $1/2$. Обозначим через A_1 случайное событие, состоящее в том, что игрок два раза подряд сыграл на первом автомате, и через A_2 случайное событие, состоящее в том, что игрок два раза подряд сыграл на втором автомате. В начальный момент $\boldsymbol{P}(A_1) = \boldsymbol{P}(A_2) = 1/2$.

Так как $\boldsymbol{P}_{BB}(A_1) = \dfrac{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(BB)}{\boldsymbol{P}(BB)} = \dfrac{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(BB)}{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(BB) + \boldsymbol{P}(A_2)\boldsymbol{P}_{A_2}(BB)}$, то условная вероятность того, что игрок имел дело с первым автоматом, при условии, что исходом двух последних игр был «выигрыш-выигрыш», равна $\boldsymbol{P}_{BB}(A_1) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{16}{25}$. Далее, так как $\boldsymbol{P}_{B\Pi}(A_1) = \dfrac{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(B\Pi)}{\boldsymbol{P}(B\Pi)} = \dfrac{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(B\Pi)}{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(B\Pi) + \boldsymbol{P}(A_2)\boldsymbol{P}_{A_2}(B\Pi)}$, то условная вероятность того, что игрок имел дело с первым автоматом, при условии, что исходом двух последних игр был «выигрыш-проигрыш», равна $\boldsymbol{P}_{B\Pi}(A_1) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \dfrac{32}{59}$.

Ясно, что $\boldsymbol{P}_{\Pi B}(A_1) = \boldsymbol{P}_{B\Pi}(A_1) = \dfrac{32}{59}$. Наконец, вычислим условную вероятность того, что игрок имел дело с первым автоматом, при условии, что исходом двух последних игр был «проигрыш-проигрыш»

$$\boldsymbol{P}_{ПП}(A_1)=\frac{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(ПП)}{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}_{A_1}(ПП)+\boldsymbol{P}(A_2)\boldsymbol{P}_{A_2}(ПП)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{64}{145}.$$

Эти расчеты показывают, что исходы ВВ, ВП и ПВ дают условную вероятность того, что игрок выбрал первый автомат, больше, чем 0,5. Следовательно, в каждом из этих случаев имеет смысл не менять автомат и при следующих двух играх. В случае ПП вероятность того, что игрок использовал первый автомат, меньше 0,5, поэтому следует поменять игровой автомат. Отсюда следует, что, находясь в состоянии 1, когда две последние игры проходили на первом автомате, в состояние 1 цепь перейдет с вероятностью $3/4$ и в состояние 2 – с вероятностью $1/4$. Если игрок выбрал второй автомат, то при двух проигрышах (а это произойдет с вероятностью $\boldsymbol{P}_{ПП}(A_2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$), он должен в соответствии с данной системой игры поменять игральный автомат. В остальных случаях игрок продолжит игру на том же самом втором игральном автомате.

Дальнейшая игра по такой системе образует марковскую цепь с двумя исходами: 1 – двукратная игра на первом автомате и 2 – двукратная игра на втором автомате, матрица вероятностей перехода которой имеет вид:

$$P=\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 9/16 & 7/16\end{pmatrix}.$$

Неподвижный вероятностный вектор для этой матрицы мы можем найти обычным способом, и он будет $\overline{q}=(9/13,\,4/13)$. Таким образом, при такой системе доля игры на первом автомате составляет примерно $\frac{9}{13}$ всех игр, и вероятность выигрыша в каждой игре приблизительно равна $\frac{9}{13}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{13}\cdot\frac{1}{4}=\frac{12}{39}\approx 0{,}308$.

Итак, более сложная система игры увеличила вероятность выигрыша и, следовательно, средний выигрыш на 0,014. При этом надо учитывать, что любая система игры не может дать вероятность выигрыша более чем $\frac{1}{3}$, т.е. более, чем наибольшая вероятность выигрыша на каждом из этих «одноруких бандитах».

2.4. Задачи.

1. Докажите или опровергните утверждение, что множество вероятностных r-мерных векторов образует подпространство линейного пространства $\boldsymbol{R}^r$.
2. Докажите, что π - линейное преобразование $\boldsymbol{R}^r$.
3. Докажите, что если $\overline{p}$ - вероятностный вектор и P - стохастическая матрица, то $\overline{p}\cdot P$ является вероятностным вектором.
4. Докажите, что $\pi : \boldsymbol{R}^r \to \boldsymbol{R}^r : \pi(\overline{p}) = \overline{p}\cdot P$ - линейное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^r$.
5. Докажите, что если $\overline{p}$ - вероятностный вектор и P - стохастическая матрица, то $\overline{p}\cdot P$ является вероятностным вектором.
6. Докажите, что $P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2^n-1}{2^n} & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ для всех $n = 1,2,\ldots$.
7. Докажите, что если P – матрица k-го порядка с положительными элементами, то P^n также матрица k-го порядка с положительными элементами для всех $n = 1,2,\ldots$.
8. Докажите, что для любой стохастической матрицы P, P^n и $((P_S)^n)_S$ имеют нули только на одних и тех же местах в своих матрицах.
9. Какие из следующих матриц определяют регулярную марковскую цепь?

(a) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (g) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; (h) $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$; (i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

10. Определите неподвижный вероятностный вектор $\bar{q}$ для каждой из следующих матриц (предварительно необходимо убедиться, что эти матрицы определяют регулярные цепи):

(a) $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

11. Предполагая, что $\overline{p^{(0)}} = (1;0)$, вычислите $\overline{p^{(1)}}$, $\overline{p^{(2)}}$, $\overline{p^{(3)}}$ и $\overline{p^{(4)}}$ для каждой из матриц (a) и (b) задачи 7. Сравните полученные векторы с соответствующим неподвижным вероятностным вектором.

12. Пусть $\overline{p^{(0)}} = (0{,}5;0{,}5)$, вычислите $\overline{p^{(1)}}$, $\overline{p^{(2)}}$, $\overline{p^{(3)}}$ и $\overline{p^{(4)}}$ для каждой из матриц (a) и (b) задачи 7. Приближаются ли эти векторы к соответствующим неподвижным вероятностным векторам?

13. Рассмотрим марковскую цепь с двумя состояниями a_1 и a_2 и матрицей вероятностей перехода $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Какова вероятность того, что после n шагов цепь перейдет в состояние a_2, если процесс начался из состояния a_1?

(b) Будет ли эта вероятность зависеть от того, какое было начальное состояние a_1 или a_2?

(c) Является ли данная цепь эргодической?

14. Приведите пример не эргодической марковской цепи, имеющей единственный неподвижный вероятностный вектор.

15. Покажите, что следующие матрицы

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и (b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

имеют более чем один неподвижный вероятностный вектор. Найдите матрицу, к которой стремятся P^n и T^n при неограниченном увеличении n. Убедитесь, что не все строки у этих матриц будут одинаковыми.

16. Докажите, что действительно вероятности перехода такие, какие приведены в п 2.3. Постройте дерево логических возможностей для состояний этой цепи на четыре последовательных секунд и определите вероятностную меру на его путях.

17. В условиях п. 2.2 определите вероятность, с которой внук выпускника классического университета будет поступать (a) в университет; (b) в химтех.

18. Докажите, что в примере «Отцы и дети» марковская цепь, определяемая матрицей *P* является регулярной, а определяемая матрицей *R* не является эргодической. Найдите неподвижный вероятностный вектор марковской цепи, определяемой матрицей *P*.

19. Определите, какие из марковских цепей, рассмотренных в примере «Генетика», являются эргодическими?

20. Докажите, что марковская цепь в п. 2.5 не является эргодической.

21. Каким окажется неподвижный вероятностный вектор процесса независимых испытаний, если этот процесс рассматривать как марковскую цепь с матрицей вероятностей перехода $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{pmatrix}$, где p_1, $p_2, \ldots$, p_r - вероятности появления исходов $a_1, a_2, \ldots, a_r$ каждого эксперимента, соответственно? Всегда ли такая цепь должна быть регулярной?

22. Покажите, что цепь из п. 2.3 является эргодической, но не регулярной. Определите ее неподвижный вероятностный вектор.

23. Покажите, что в примере «Генетика» цепь, определяемая матрицей вероятностей перехода P_3, является регулярной и найдите ее неподвижный вероятностный вектор (используйте для этого эмпирический подход). Докажите, что цепи, определяемые матрицами P_1 и P_2 не являются эргодическими.

24. Рассмотрим пример «Мода». Можно предложить следующую оценку параметров a,b,c,d. Рассмотрим произвольную последовательность, состоящую из 1 и 2, например, 1112112122. Любую часть это последовательности, состоящую из идущих подряд k символов 1 или 2, будем называть *k-словом*. Пусть a – отношение числа 3-слов 112 к общему числу 3-слов, начинающихся с символов 11, b - отношение числа 3-слов 211 к общему числу 3-слов, начинающихся с символов 21, c - отношение числа 3-слов 122 к общему числу 3-слов, начинающихся с символов 12 и, наконец, d - отношение числа 3-слов 221 к общему числу 3-слов, начинающихся с символов 22. В нашем примере $a = 2/3; b = 1/2; c = 1/3; d = 0$. Докажите, что такая оценка имеет вероятностный смысл.

25. Пусть в примере «Мода» даны значения $a = 2/3; b = 1/2; c = 1/3; d = 1/4$. Составьте матрицу вероятностей перехода и найдите ее неподвижный вероятностный вектор. Дайте интерпретацию полученного результата.

26. Докажите, что квадрат матрицы P_2 из примера «Мода» не содержат нулевых элементов при условии, что параметры a,b,c,d отличны от 0 и от 1.

27. Допустим, что ежегодно из города Иванова в пригороды переселяется 3% жителей, а из пригородов в Иваново переселяется 5% жителей. Найти окончательное распределение жителей между городом Иваново и его пригородами в предположении, что общее число жителей остается неизменным. Сколько человек будет переселяться из города в пригороды и наоборот, когда наступит «равновесие»?

28. Докажите, что вероятности перехода в модели смешивания двух газов равны $p_{j,j-1} = \left(\frac{j}{n}\right)^2$ для всех $j > 0$; $p_{j,j} = \frac{2j(n-j)}{n^2}$; $p_{j,j+1} = \left(\frac{n-j}{n}\right)^2$ для всех $j < n$.

29. Докажите, что в примере «Перемешивание газов» для $n = 2,3,4$ матрица P является регулярной. Докажите, что это верно для всех $n \ge 2$.

30. Найдите неподвижный вектор $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)$ матрицы P для $n = 2$ из предыдущей задачи с помощью системы линейных уравнений относительно q_1, q_2, q_3 так, как это было сделано в примере 2.6 из п.2.2.

31. Предполагая в примере «Однорукие бандиты», что игра ведется по второй системе, найдите вероятность того, что игрок выбирает второй автомат при условии, что первые два исхода были «выигрыш-выигрыш». То же самое в случае каждой из трех остальных возможностей для первых двух исходов.

32. Пусть в примере «Однорукие бандиты» после каждых трех игр игрок принимает решение, на каком автомате он будет играть следующие три раза. Он меняет автомат в том и только в том случае, когда вероятность того, что он играл на первом автомате при условии трех последних исходов будет меньше, чем 0,5. Чему равна вероятность выигрыша в каждой игре при такой системе игры? Лучше ли эта система двух других, описанных в примере «Однорукие бандиты»?

33. Некий профессор старается не слишком часто опаздывать на лекции. Если он однажды опоздал, то с вероятностью 0,9 в следующий раз он проходит вовремя. Если он пришел на лекцию вовремя, то в следующий раз он с вероятностью 0,3 опаздывает. Какова вероятность того, что он опаздывает на любую данную лекцию?

III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

3.1. Основные понятия и определения. Теория игр рассматривает ситуации, в которых два (а иногда и более) игрока находятся в состоянии *конфликта*, то есть ситуации, в которых участвуют различные стороны, наделенные несовпадающими (а чаще всего антагонистическими) интересами. При этом теория игр изучает математические модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Точное описание конфликта в виде игры состоит в указании того, кто и как участвует в конфликте, каковы его возможные исходы, а также, кто и в какой форме заинтересован в этих исходах.

Такое понимание конфликта позволяет применять методы теории игр ко многим явлениям экономического, социального, военного содержания, а также к так называемым *салонным играм*, которым относятся разнообразные карточные игры, кости, шахматы, шашки, нарды, го и т.д.

В условиях конфликта каждый из противников стремиться породить максимальную неопределенность для противоборствующей стороны, чтобы скрыть свои дальнейшие действия и затруднить принятие им правильного решения. Наоборот, неопределенность при принятии решений, например, на основе недостоверных данных, можно интерпретировать как конфликт принимающего решение субъекта с *природой*. Поэтому теорию игр можно рассматривать как теорию принятия оптимальных решений в условиях неопределенности.

Математическая теория игр была разработана Дж. Нейманом* и О. Моргенштерном** как математическая модель конкурентной экономики. В дальнейшем идеи, положенные в основание теории игр, были использованы для решения других проблем естествознания и послужили мощным инструментом для внутреннего развития математики.

Исходными понятиями теории игр являются понятие *игры* как формального представления о конфликте и соответствующее ему понятие оптимальности. При этом как содержания так и формальные выражения критериев оптимальности даже для одного и того же класса игр могут быть весьма разнообразными и даже противоречащим друг другу. Формулировка критериев оптимальности осуществляется на основе интуитивных представлений о целесообразности, выгодности, устойчивости и справедливости. Обычно критерии оптимальности в теории игр формализуются в рамках аксиоматической теории, в которой аксиомы отражают различные интуитивные аспекты оптимальности.

В современной теории игр базовым классом игр являются *бескоалиционные игры с выигрышами*. Каждая такая характеризуется конечным множеством своих игроков $I=\{1,\dots,n\}$, семейством множеств стратегий $\{X_i\}_{i\in I}$ и семейством функций выигрыша $\{H_i\}_{i\in I}$, задаваемых на множестве всех ситуаций $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i\in I} X_i$ и принимающих действительные значения. Содержательно каждая бескоалиционная игра сводится к выбору каждому из игроков $i \in I$ некоторой своей стратегии $x_i \in X_i$ с последующим получением выигрыша $H_i(x_1,\dots,x_n)$.

Отказ от условия конечности множества I приводит к понятию *игры с бесконечным множеством игроков*. Такие игры могут служить математическими моделями массового поведения.

---

* Нейман Джон (Янош) фон [Neumann john (Janos) von] (28.12.1903, Будапешт – 08.02.1957, Вашингтон) – американский математик, член Национальной АН США (1937). Основные труды по фундаментальному анализу и его приложениям к вопросам классической и квантовой математики. Основатель теории игр и теории автоматов (1944 г.), внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения. Принимал участие в работах по созданию первой атомной бомбы (1937 г.)

** Моргенштерн Оскар [Morgenstern Oscar] (24.01.1902, Герлиц, Германия - ?) – американский математик и экономист. Основные труды по применению математики к экономическим проблемам. Совместно с Дж. Нейманом в 1944 г. систематически изложил теорию игр.

Обобщение в другом направлении получается, если поведение игрока определяет не чистый выигрыш, а отношение предпочтительности, которое может задаваться как количественно, так и качественно.

Если считать ситуациями не произвольные комбинации стратегий игроков, а лишь некоторые, принадлежащие заданному заранее множеству, описание которого входит в список правил игры, то возникают так называемые *игры с запрещенными ситуациями*.

Наложение на компоненты бескоалиционной игры тех или иных ограничений приводит к разнообразным частным классам таких игр. Если все множества X_i конечны, то игра называется *конечной*. Если $n = 2$ и $H_1 = H = -H_2$, игра называется *антагонистической* или *игрой двух лиц с нулевой суммой*. Конечная антагонистическая игра называется *матричной игрой.* Антагонистическая игра с $X_1 = X_2 = [0, 1]$ называется *игрой на единичном квадрате*. Конечные бескоалиционные игры двух лиц называются *биматричными играми*.

Можно допускать объединение некоторых игроков в *коалиции*, в которых они могут выбирать свои стратегии согласованно. Формально такое объединение K не увеличивает для игроков множество стратегий, так как для любого подмножества $K \subseteq I$ выполнено включение $X_K = \prod_{i \in K} X_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i = X$. В этом случае все стратегии из X_K будут реализованы и при независимых выборах игроками своих стратегий. Однако возможность образования коалиций влияет на определение оптимального поведения игроков и это является существенной особенностью *коалиционных игр*.

Основой большинства критериев оптимальности является *принцип приемлемости*. Ситуация x в некоторой игре называется *приемлемой для коалиции* $K \subseteq I$ (или, как еще говорят, K*-оптимальной*), если одновременное отклонение игроков из K от их стратегий, входящих в x, не улучшит ситуации с точки зрения коалиции K. При этом возможны различные варианты такого неулучшения: выигрыш каждого из игроков коалиции K не увеличивается; суммарный выигрыш игроков из K не увеличивается; появление возможности увеличение выигрышей одних игроков из K лишь за счет уменьшения выигрышей других игроков из K*.

Игры, в которых происходит однократный и независимый выбор каждым из игроков своей стратегии, в которых игроки реализуют свои решения (или свой выбор) поочередно, в которых каждый из игроков имеет возможность осуществить выбранную стратегию в виде последовательности частичных, уточняющих друг друга решений, называются *позиционными играми*.

В качестве примера позиционной игры можно привести шахматы. В этой игре участвуют два игрока: *белые* и *черные*. Стратегия каждого игрока состоит в выборе, учитывающем возникшую позицию и шахматных правил, очередного хода. Число стратегий каждого игрока в шахматах очень большое, но все-таки – конечное. Как и во многих позиционных играх, в шахматах стратегии не выбираются игроками неизменными от начала и до конца игры, а реализуются постепенно, ход за ходом. Шахматы относятся к числу антагонистических, и притом матричных, игр.

В бескоалиционной игре любая коалиция K состоит только из одного игрока I, поэтому все варианты приемлемости в этом случае совпадают. Если данная ситуация является приемлемой для всех игроков бескоалиционной игры, то она называется *равновесной по Нэшу**.

В частном случае антагонистической игры каждый из перечисленных выше вариантов критерия оптимальности, основанного на понятии приемлемости ситуаций, превращается в *принцип максимина* или в *принцип гарантированного результата*. Суть этого принципа в том, что игрок выбирает стратегию, позволяющую ему максимизировать свой выигрыш в наименее благоприятных условиях, то есть в предположении, что противник выбирает самую не-

---

* Обладающая таким свойством ситуация называется *оптимальной по Парето для коалиции* K.

* Нэш Джон Форбс [Nash John Forbs] (13.06.1928, Блюфилд, штат Вирджиния, США) – американский математик. Основные труды в области теории игр и дифференциальной геометрии, лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года «За анализ равновесия в теории некоалиционных игр» (вместе с Р. Зелтеном и Дж. Харсани). Известен по биографической драме Рона Ховарда «Игра разума» (A Beautiful Mind) о его математическом гении и борьбой с шизофренией.

выгодную для него стратегию. Стратегии, выбранные с использованием принципа максимина, называются *максиминными*.

Принцип максимина применим и к суммарному выигрышу любой коалиции в предположении, что противодействующая коалиция состоит из всех остальных участников игры. Жесткая фиксация принципа максимина задает для каждой коалиции $K \subseteq I$ некоторый ее максимальный выигрыш $v(K)$. Это сводит игру к распределению общего возможного выигрыша $v(I)$ между игроками. Проблема распределения выигрыша порождает разнообразные критерии оптимальности и связанные с ними задачи, составляющие так называемые *теорию кооперативных игр*.

Критерий оптимальности, сформулированный для того или иного класса игр, должен быть реализуем для данной игры, т.е. в этой игре должны быть исходы, удовлетворяющие этому критерию. Именно поэтому первый вопрос, который требует ответа при рассмотрении той или иной игры – это вопрос о принадлежности этой игры к определенному классу и о реализуемости критерия оптимальности в этом классе игр. Если критерий оптимальности не реализуем, то следует подумать о том, какие дополнительные условия следует наложить, чтобы реализуемость все-таки имела место.

Доказательства существования реализаций критериев оптимальности - *решений игр* в теории игр осуществляются с помощью методов и результатов различных разделов математики: теории моделей, математического анализа, теории вероятностей, комбинаторики и т.д. Например, теорему о существовании в шахматах максиминных стратегий доказал Э. Цермело[*]. Из этой теоремы следует, что в начальной позиции шахматной партии уже имеется или способ выигрыша за белых, или способ выигрыша за черных, или способ, с помощью которого любая сторона может форсировать ничью. В то же время упомянутая выше теорема существования Цермело не указывает, какая из перечисленных возможностей имеет место на самом деле. Многовековая практика игры в шах-

[*] Цермело Эрнст [Zermelo Ernst] (27.07.1871, Берлин – 21.05.1953, Фрайбург) – немецкий математик. Основные труды по теории множеств, в которой он ввел общую аксиоматику, включающую аксиому свободного выбора, известную как аксиома Цермело.

маты также не дала ни однозначно выигрышной стратегии, ни форсированной ничейной стратегии для любой стороны.

Если все-таки данный критерий оптимальности не реализуем для некоторой игры (т.е. игра в смысле этого критерия неразрешима), то следует поставить вопрос об обобщении понятия стратегии. В качестве обобщенных стратегий бескоалиционных игр рассматриваются *смешанные стратегии*, *сверхстратегии*[*] и *метастратегии*[**]. Можно заметить, что факт реализации критерия оптимальности для той или иной игры позволяет выявить особенности конфликтов. Например, все ситуации равновесия в смешанных стратегиях для биматричных игр описываются через значения функции выигрыша рационально, т.е. только с помощью обычных арифметических действий. В то же время ниже мы приведем пример бескоалиционной игры трех лиц, когда характеризация ситуации равновесия содержит иррациональные числа.

Фактически решение некоторых классов антагонистических игр сводится к решению дифференциальных и интегральных уравнений, а решение матричных игр – к решению задач линейного программирования.

Бескоалиционная игра, в которой игроки совместно управляют движением точки в некотором множестве X, называется *динамической игрой*, при этом X называется *пространством состояний игры*. Динамические игры можно рассматривать как разновидность позиционных игр, которые подчинены специфическим законам перехода от состояния к состоянию и выигрышей игроками.

В динамической игре переход от одного состояния в другое зависит от выбора управляющих воздействий всеми игроками, а выигрыши игроков определяются всей последовательностью состояний и управлений. Типичным примером динамической игры является игра *на выживание* (*разорение*), в которой игроки, обладая некоторыми начальными капиталами, последовательно разыгрывают одну и ту же бескоалиционную игру до момента разорения одного из них.

---

[*] Последовательности стратегий, связанных с повторяющимся разыгрыванием игр.
[**] Ответы игроков на стратегии других игроков и коалиций.

Важной разновидностью динамических игр являются *дифференциальные игры*, в которых стратегиями игроков являются некоторые допустимые уравнения данной динамической системы. Дифференциальные игры являются составной частью математической теории управления.

3.2.Матричные игры. Как уже было сказано выше, *матричной* мы называем любую конечную антагонистическую игру. Это название связано с возможностью описать возможности участников конечной антагонистической игры, а также их выигрыши (проигрыши), соответствующие выбранным стратегиям, в виде матрицы. В этом разделе мы рассмотрим некоторые виды матричных игр.

3.2.1. Строго детерминированные игры. Сначала рассмотрим пример, на котором выявим особенности строго детерминированной игры.

Пример (игра «дифференс»). Игрок I имеет на руках семерку пик и семерку черва, а игрок II имеет на руках семерку треф и десятку бубна. Игра состоит в следующем: игроки одновременно показывают одну из своих карт; если эти карты одного цвета, то игрок I выигрывает положительную разность числа очков на показанных картах, если эти карты различного цвета, то игрок II выигрывает положительную разность числа очков на показанных картах. Очевидно, что выигрыш (проигрыш) игрока зависит от того, какую карту он покажет, т.е. от его стратегического решения.

Представим эту игру в виде матрицы*, в которой строки представляют возможные выборы игрока I (пика – первая строка, черва – вторая строка), а столбцы – возможные выборы игрока II (трефа – первый столбец, бубна – второй столбец). Число, находящееся в строке с номером i и столбце с номером j, равно выигрышу (если оно положительное) или проигрышу (если оно отрицательное) игрока I при выборе им i-ой строки, а игроком II – j-го столбца.

0	-3
0	3

* В теории игр принято записывать матрицы в виде разграфленных таблиц.

Табл.1

Проанализируем интересы игроков. Игрок II хотел бы получить в качестве результата элемент (-3) матрицы, для этого он должен показать карту десятка бубна (т.е. выбрать второй столбец матрицы), но у игрока I при этом есть возможность показать карту семерка черва (т.е. выбрать вторую строку матрицы), и тогда игрок II будет иметь вместо выигрыша проигрыш. С другой стороны, если игрок II выберет первый столбец матрицы, то он при любом ходе игрока I обеспечит себе ничейный результат. Именно так он и будет поступать с целью оптимизации своей стратегии. У игрока I также есть беспроигрышная стратегия – это выбор второй строки, когда любой ход игрока II либо дает ничью, либо приносит выигрыш 3. Именно так он и будет поступать, и это приведет к тому, что стратегия игрока I будет состоять в том, что он всегда будет показывать свою карту семерка черва, а стратегия игрока II – показывать карту семерка треф. При этом оба игрока будут как без проигрыша, так и без выигрыша.

Заметим, что на пересечении второй строки и первого столбца матрицы из табл.1 стоит число 0, которое одновременно является минимальным в этой строке и максимальным в этом столбце. Содержательно это означает то, что игрок I обеспечил себе *самое меньшее* – нулевой выигрыш, а игрок II обеспечил себе *самое большее* – нулевой проигрыш. ■

Определение строго детерминированной игры. Игра с 2×2- матрицей называется *строго детерминированной*, если эта матрица содержит некоторый элемент *v*, который одновременно является минимальным элементом в содержащей его строке и максимальным элементом в содержащем его столбце.

При этом число *v* называется *ценой* строго детерминированной игры. Игра называется *безобидной*, если ее цена $v=0$.

Итак, *оптимальные стратегии* игроков I и II строго детерминированной игры с ценой *v* состоят в следующем:

для игрока I: «*Выбрать строку матрицы, содержащую v*»,

для игрока II: «*Выбрать столбец матрицы, содержащий v*».

Пример (игра «дифференс», продолжение). Матрица, определяющая игру «дифференс» (см. табл.1), в левом нижнем углу содержит элемент 0, который является минимальным элементом второй строки и максимальным элементом первого столбца. Следовательно, данная игра является строго детерминированной. Ее цена равна 0, поэтому эта игра является безобидной. ■

3.2.2. Не строго детерминированные игры. Одним из простейших примеров не строго детерминированной игры может служить игра «морра» в следующем варианте.

Пример (игра «морра»). Два игрока I и II показывают одновременно один или два пальца каждый. Если оба игрока показывают одно и то же число пальцев, то игрок II платит игроку I сумму, равную числу показанных пальцев каждым из них, а если игроки показывают разное число пальцев, то игрок I платит игроку II сумму, равную произведению чисел показанных пальцев.

Представим эту игру в виде матрицы, в которой строки представляют возможные выборы игрока I (один палец – первая строка, два пальца – вторая строка), а столбцы – возможные выборы игрока II. Число, находящееся в строке с номером i и столбце с номером j, равно выигрышу (если оно положительное) или проигрышу (если оно отрицательное) игрока I при выборе им i-ой строки, а игроком II – j-го столбца.

1	-2
-2	2

Табл.2

Например, если I выбирает первую строку (т.е. выбрасывает один палец), а II выбирает первый столбец (т.е. тоже выбрасывает один палец), то выигрыш I составляет 1, и это число записано на пересечении первой строки и первого столбца матрицы. Если I выбирает первую строку, а II выбирает второй столбец (т.е. выбрасывает два пальца), то I проигрывает 2, поэтому число (-2) записано на пересечении первой строки и второго столбца матрицы.

■

Из приведенного примера видно, что стратегические особенности игры «морра» полностью описываются данной матрицей. Именно поэтому такие игры называются *матричными*. Ясно, что любую 2×2-матрицу можно рассматривать как матрицу, определяющую игру с двумя противниками, если в ней первый игрок распоряжается строками, второй – столбцами, а элементы матрица дает выигрыш (проигрыш) первого игрока.

Зададим вопрос, который является основным в теории игр: «Как играть участникам игры «морра», чтобы выиграть?». Образ действий каждого игрока называется *стратегией*. Итак, каких стратегий должны придерживаться игроки I и II чтобы добиться приемлемого для себя результата?

Из таблицы 2 видно, что игра не является строго детерминированной. Убедимся в том, что ни для какого игрока, ни один выбор не является оптимальным. В самом деле, игрок I хотел бы выиграть 2, для этого он должен выбросить два пальца, но если игрок II узнает об этом, то он выбросит один палец, сведя тем самым желаемый выигрыш к проигрышу -2 игрока I. Если же I выбрасывает один палец, то II может выбросить два пальца, и вновь I проигрывает. Аналогично, если выбор игрока II становится известным игроку I, то I может выиграть 1 или 2. Итак, для придания этой игре интереса, каждый игрок должен каким-то образом скрыть свои замыслы. ■

Вышесказанное приводит нас к мысли, что если эта игра происходит один раз, то между двумя стратегиями нет разницы, пока только стратегия одного игрока не отгадана его противником. Пусть теперь эта игра играется много раз. Как при этом должен действовать игрок I? Очевидно, он не должен все время повторять одну и ту же последовательность своих ходов (например, выбрасывать одно и то же количество пальцев или чередовать один, а затем два выброшенных пальца), так как в противном случае игрок II может заметить, как ведет себя I, и воспользоваться этим. Поэтому наилучшей стратегией для игрока I будет случайное выбрасывание то одного, то двух пальцев. Такой путь игры состоит в *смешении* стратегий, т.е. в выборе иногда одной, иногда другой стратегии. Эти стратегии должны выбираться случайным образом с некоторой фиксированной вероятностью выбора каждой из них. Теперь мы сформулируем ключевой вопрос: «Как часто I должен выбрасывать один палец (или два пальца)?». Исходя из симметрии задачи, можно предположить, что частота выбрасывания одного пальца должна быть равна частоте выбрасывания двух пальцев. Ниже мы докажем, что это действительно так.

Под *смешанной стратегией* для игрока I будем понимать следующую инструкцию: «Выбрасывай один палец с вероятностью p_1 и два пальца с вероятностью p_2», где $p_1 + p_2 = 1$. Аналогично, смешанной стратегией для игрока II будет инструкция: «Выбрасывай один палец с вероятностью q_1 и два пальца с вероятностью q_2», где $q_1 + q_2 = 1$. *Вектором смешанной стратегии* для игрока I является вектор-строка (p_1, p_2), а для игрока II – вектор-столбец $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Чтобы реализовать выбранные смешанные стратегии игрокам необходимо использовать подходящее *случайное устройство*, которое выдавало бы нужные вероятности. Например, реализация смешанной стратегии $(1/2, 1/2)$ сводится к бросанию монеты, реализация смешанной стратегии $(1/3, 2/3)$ сводится к бросанию игральной кости, которое дает выпадение числа очков, кратного 3, с вероятностью $1/3$, и т.д.

В общем случае случайное устройство, реализующее произвольную смешанную стратегию (p_1, p_2), может работать как колесо рулетки, на котором нанесено $p_1 + p_2$ секторов, из которых выигрышными являются, скажем, p_1 секторов.

Рассмотрим не строго детерминированную игру с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о том как в этом случае выбирать *оптимальную смешанную стратегию*.

Определение цены игры. Число v называется *ценой* не строго детерминированной игры, а векторы $\overline{p^0} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$ и $\overline{q^0} = \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \end{pmatrix}$ - *оптимальными стратегиями* игроков I и II, если имеют место следующие неравенства:

(1) $$\overline{p^0} G = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq (v, v) \text{;}$$

(2) $$G\overline{q^0} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix},$$

где неравенство ≥, соединяющее два вектора-строки или два вектора-столбца одной и той же размерности, означает, что каждая компонента первого вектора *не меньше* соответствующей компоненты второго вектора.

Игра называется *безобидной*, если ее цена $v = 0$.

Уточним смысл введенного в определении термина «оптимальная стратегия игрока». Пусть игрок I выбирает смешанную стратегию $\overline{p} = (p_1, p_2)$, а игрок II (независимо) – смешанную стратегию $\overline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Тогда в не строго детерминированной игре с матрицей G игрок I выигрывает сумму a с вероятностью $p_1 q_1$, сумму b с вероятностью $p_1 q_2$, сумму c с вероятностью $p_2 q_1$ и сумму d с вероятностью $p_2 q_2$. Следовательно, среднее значение его выигрыша (в достаточно продолжительной серии игр) равно

$$ap_1 q_1 + bp_1 q_2 + cp_2 q_1 + dp_2 q_2 = \overline{p} G \overline{q}.$$

Очевидно, что среднее значение выигрыша игрока II имеет то же самое значение, но противоположно по знаку.

Покажем, что если для матрицы G существуют v, $\overline{p^0}, \overline{q^0}$ с указанными в определении свойствами, то игрок I может сделать среднее значение своего выигрыша не менее v, а игрок II – не более v. Пусть $\overline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ - произвольная стратегия для II, умножая обе части (1) справа на $\overline{q}$, получим соотношение $\overline{p^0} G \overline{q} \ge (v, v)\overline{q} = vq_1 + vq_2 = v(q_1 + q_2) = v \cdot 1 = v$, которое показывает, что при любой игре игрока II игрок I может обеспечить себе выигрыш, среднее значение которого не меньше чем v. Аналогично, пусть $\overline{p}$ - любая стратегия для I, умножая обе части (2) слева на $\overline{p}$, получим соотношение $\overline{p} G \overline{q^0} \le \overline{p} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = v$, которое показывает, что при любой игре игрока I игрок II может обеспечить себе выигрыш, среднее значение которого не больше чем *v*. Именно в этом смысле стратегии $\overline{p^0}$ и $\overline{q^0}$ являются *оптимальными.*

Так как $\overline{p^0}G\overline{q} \geq v$ для любого вероятностного вектора $\overline{q}$ и $\overline{p}G\overline{q^0} \leq v$ для любого вероятностного вектора $\overline{p}$, то при $\overline{p} = \overline{p^0}$ и $\overline{q} = \overline{q^0}$ получим одновременное выполнение двух неравенств $\overline{p^0}G\overline{q^0} \geq v$ и $\overline{p^0}G\overline{q^0} \leq v$, откуда следует равенство $\overline{p^0}G\overline{q^0} = v$. Это означает, что если оба игроки придерживаются оптимальной для каждого стратегии, то для I среднее значение выигрыша равно *v*, а для II – равно (–*v*).

Теперь решим вопрос о существовании стратегий $\overline{p^0}$ и $\overline{q^0}$ в произвольной не строго детерминированной игре. Для случая игры с двумя участниками и матрицей *G* вопрос о существовании оптимальных стратегий решает следующая теорема.

Теорема об оптимальных стратегиях игроков не строго детерминированной игры. Пусть $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - матрица не строго детерминированной игры и

(3) $$p_1^{(0)} = \frac{d-c}{a+d-b-c}$$

(4) $$p_2^{(0)} = \frac{a-b}{a+d-b-c}$$

(5) $$q_1^{(0)} = \frac{d-b}{a+d-b-c}$$

(6) $$q_2^{(0)} = \frac{a-c}{a+d-b-c}$$

(7) $$v = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}.$$

Тогда $\overline{p^0} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$ является оптимальной стратегией для игрока I и $\overline{q^0} = \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \end{pmatrix}$ - оптимальной стратегией для II.

Доказательство. Проверим, что векторы $\overline{p^0}, \overline{q^0}$ и число *v* удовлетворяют неравенствам (1) и (2) определения. Фактически, как мы убедимся ниже, эти неравенства переходят в равенства. Имеем

$$\overline{p^0}G = (\frac{d-c}{a+d-b-c}; \frac{a-b}{a+d-b-c})\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= (\frac{ad-ac}{a+d-b-c} + \frac{ca-cb}{a+d-b-c}; \frac{bd-bc}{a+d-b-c} + \frac{da-db}{a+d-b-c}) = (\frac{ad-cb}{a+d-b-c}; \frac{ad-cb}{a+d-b-c}) = (v, v)$$

Аналогично,

$$G\overline{q^0} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{d-b}{a+d-b-c} \\ \dfrac{a-c}{a+d-b-c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ad-ab}{a+d-b-c} + \dfrac{ab-cb}{a+d-b-c} \\ \dfrac{cd-cb}{a+d-b-c} + \dfrac{ad-cd}{a+d-b-c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ad-cb}{a+d-b-c} \\ \dfrac{ad-cb}{a+d-b-c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если игра не является строго детерминированной, то сумма элементов по одной из диагоналей матрицы G должна быть не равной сумме элементов по другой диагонали. Это дает определенность для формул (3) – (7) для любой не строго детерминированной игры, так как знаменатель в этих формулах не может обратиться в нуль. ■

Пример (игра «морра», продолжение). Найдем с помощью теоремы оптимальные стратегии и цену игры «морра» для двух игроков I и II. Подставим значения из матрицы

1	-2
-2	2

в формулы (3) – (7) и найдем, что оптимальную стратегию для игрока I определяет вероятностный вектор $\overline{p^{(0)}} = (4/7; 3/7)$, оптимальную стратегию для игрока II определяет вероятностный вектор $\overline{q^{(0)}} = (4/7; 3/7)$ и цена игры равна $v = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{7} = -\dfrac{1}{7}$. Следовательно, для получения оптимальных результатов оба игрока должны пользоваться случайным устройством, которое выдавало бы нужные вероятности $4/7$ и $3/7$. Цена игры отрицательная и равна $-\dfrac{1}{7}$, это означает, что ее условия не благоприятны для игрока I (и благоприятны для игрока II), при этом средний проигрыш игрока I (и, соответственно, средний выигрыш игрока II) равен $\dfrac{1}{7}$. ■

3.3. Задачи.

1. Определите, какие из игр, задаваемых следующими матрицами, являются строго детерминированными. В тех случаях, когда игра является строго детерминированной, определите ее цену и найдите оптимальные стратегии игроков.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Покажите, что игра с матрицей, какая-либо строка которой состоит из одинаковых элементов, является строго детерминированной. То же для матрицы, какой-либо столбец которой состоит из одинаковых элементов.

3. Докажите, что игра с матрицей $G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ является строго детерминированной тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $b = 0$.

4. Игроки I и II показывают одновременно один или два пальца, в результате выигрывает I сумму, равную числу показанных им пальцев, если оно не больше числа пальцев, показанных игроком II. Составьте матрицу этой игры и докажите, что она является строго детерминированной. Найдите цену этой игры.

5. Игроки I и II показывают одновременно один или два пальца, в результате выигрывает I у II сумму, равную произведению чисел показанных игроками пальцев, а II выигрывает у I сумму чисел пальцев, показанных игроками.

СОДЕРЖАНИЕ

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ