Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Линейная алгебра

Методические указания

Составители: А.Н.Бумагина
В.А.Таланова

Иваново 2016

Составители: А.Н.Бумагина, В.А.Таланова

УДК 512.64 (078)
Л591

Линейная алгебра: метод. указания /сост. А.Н.Бумагина, В.А.Таланова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т.-Иваново,2016.-32с.

Методические указания содержат теоретические сведения по темам: матрица, определители, системы линейных уравнений. Рассмотрены примеры и представлены задания для проведения практических занятий. С целью закрепления изучаемого материала предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов I курса всех специальностей (дневной и заочной форм обучения).

Рецензент
доктор экономических наук В.В.Шергин
(Ивановский государственный химико-технологический университет)

1.Матрицы

<u>Определение</u>. ***Матрицей*** размера m × n называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Или сокращенно (a_{ij}), $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.
a_{ij}- элементы матрицы.
$m\times n$- размер матрицы.

Пример. Матрица

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

является матрицей размера 2×4.

Если m=n ,то матрица размера $n\times n$ называется ***квадратной,*** а число n –ее ***порядком.*** Элементы $a_{11},a_{12},\dots,a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***.

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют ***диагональной***.

Если элементы диагональной матрицы равны единице, то матрицу называют ***единичной***.

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется ***нулевой*** или ***нуль – матрицей***.

Две матрицы A и B называются ***равными,*** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i=1,2,3,\dots,m$; $j=1,2,3,\dots,n$.

Операции над матрицами

1.*Сложение (вычитание*) матриц одинакового размера осуществляется поэлементно:
$C=A+B$,если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i=1,2,3,\dots,m$; $j=1,2,3,\dots,n$.

Пример. Найти сумму матриц A и B

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.*Умножение матрицы на число* – каждый элемент матрицы умножается на это число:
$B=\lambda A$, если $b_{ij}=\lambda a_{ij}$; $i=1,2,3,\ldots,m$; $j=1,2,3,\ldots,n$.

Пример. Найти 3A, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

$$3A=3\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 24 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.*Умножение матрицы A на матрицу B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц A и B называется такая матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i – й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji};\ i=1,2,3,\ldots,m;$$

Произведение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. $AB\neq BA$.

Пример. Найти произведение матриц A и B

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение матриц существует и матрицу C=AB найдём, пользуясь правилом умножения матриц

$$C=AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\cdot1+1\cdot3 & 0\cdot2+1\cdot4 & 0\cdot0+1\cdot5 \\ 5\cdot1+1\cdot3 & 5\cdot2+1\cdot4 & 5\cdot0+1\cdot5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.*Транспонирование матриц* – переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка

$$a^T_{ij} = a_{ji};\ i=1,2,3,\dots,m;\ j=1,2,3,\dots,n.$$

Пример. Найти A^T, транспонированную к матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению поменяем строки и столбцы местами, получим

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.*Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень* m, (m>1):

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \ \dots\ A}_{m\ \text{раз}}.$$

Пример. Найти A^2, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим матрицу A на матрицу A два раза, получим по правилу умножения матриц A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+3\cdot 2 & (-1)\cdot 3+3\cdot(-4) \\ 2\cdot(-1)+(-4)\cdot 2 & 2\cdot 3+(-4)\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы: 3A, 2B, 3A + 2B, A – B, 3A – 2B.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = (4 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 1), \qquad F = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Указать все произведения матриц, которые имеют смысл и найти эти произведения.

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 14 & -10 \\ 21 & -16 \end{pmatrix}$ $CB = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 17 \\ 12 & 23 \end{pmatrix}$ $DF = \begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$

$$FE = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & 18 & 6 \\ -8 & 0 & 4 & -6 & -2 \\ 28 & 0 & -14 & 21 & 7 \\ 16 & 0 & -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{Ответ. } \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

В задачах 4 – 6 вычислить:

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}^n$ 6. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$

Ответ. 4. $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & n\,a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

4. Варианты проверочных работ

Даны матрицы A, B, C, D. Указать все произведения матриц, которые имеют смысл и найти два из них.

1. $A = (1 \quad 0 \quad 1)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $D = (3 \quad -4)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = (2 \quad 0 \quad 5 \quad 1)$.

4. $A = (2 \quad 8 \quad 7)$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = (5 \quad 0 \quad 7)$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

6. $A = (1 \quad 1)$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = (7 \quad 6 \quad 4)$.

8. $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = (1 \quad 2 \quad 3)$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, C = (-5 0 3), $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, D = (-4 5 6).

2.Определители квадратных матриц.

Определитель – число, характеризующее матрицу.
Определителем квадратной матрицы первого порядка $A=(a_{ij})$ называется элемент a_{11}:

$$\Delta_1 = |A| = a_{ij}$$

Пример: Пусть A = (3),тогда Δ_1 = |A| =3

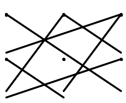
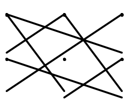
Определителем квадратной матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, называется Число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$ называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Определители третьего порядка вычисляются по правилу «треугольников», где соответствующие произведения элементов берутся со знаком «+» (левая схема), и со знаком «-» (правая схема):

\+  - 

Свойства определителей

Рассмотрим свойства определителей 2-го и 3-го порядков, но они справедливы для определителей любого порядка.

1. При замене строк столбцами величина определителя не меняется.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Поменяем местами первую строку и первый столбец.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13.$$

В определители строки равноправны со столбцами.

2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Поменяем местами строки

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{22} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13.$$

4. Множитель, общий элементам некоторого ряда (столбца или строки), можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 30 & 50 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \cdot 3 & 10 \cdot 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\ (12 - 5) = 70.$$

5. Если все элементы какого-нибудь ряда (столбца или строки) умножить на одно и то же число k, то значение определителя увеличится в k раз.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 63 = -57.$$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\ (2 - 21) = 3 \cdot (-19) = -57.$$

6. Определитель равен нулю, если все элементы некоторого его ряда (столбца или строки) равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0.$$

7. Определитель, у которого элементы двух строк (столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{11}a_{12} = 0.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0.$$

8. Если элементы некоторого ряда (столбца или строки) представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, у которых элементы рассматриваемого ряда равны соответственным слагаемым.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+A \\ a_{21} & a_{22}+B \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+B)-a_{21}(a_{12}+B) = a_{11}a_{22}+a_{11}B-a_{21}a_{12}-a_{21}A = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+$$
$$+(a_{11}B-a_{21}A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & A \\ a_{21} & B \end{vmatrix}.$$

9.Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого ряда (столбца или строки) прибавить (или от них вычесть) элементы параллельного ряда (столбца или строки), предварительно умножив их на один и тот же произвольный множитель k.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \mathrm{k}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

10. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали – нули, равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}.$$

Минор

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель порядка n-1,полученный из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент aij.

Пример. Для определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ минором M_{11} элемента $a_{11}=1$ является определитель первого порядка, который получается из исходного вычеркиванием первой строки и первого столбца, т.е. число 4, $M_{11}=4$. Аналогично $M_{12}=2$, $M_{21}=6$,

Пример. Для $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, \ldots, M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Замечание: В определители столько миноров, сколько элементов.

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A_{ij}}$ элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} - минор элемента a_{ij} .

Пример. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^2 (27 - 8) = 19.$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5 (4 - 10) = -(-6) = 6.$$

Вычисление определителей любого порядка

Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij}\ , \ i=1,\ldots,n \quad \text{или} \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\ , \ j=1,\ldots,m.$$

Пример. Вычислить определитель, разлагая его по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 35 - (28 - 18) + 3 \cdot (-15) = 70 - 10 - 45 = 15.$

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1 – 6 вычислить определители 2-го порядка:

1. $\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Ответ: 1) 2; 2) 10; 3) 18; 4) 0; 5) –50; 6) 1.

В задачах 7 –12 вычислить определители 3-го порядка:

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$

Ответ. 7) 0; 8) –12; 9) 29;
10) –29; 11) 0; 12) $2a^3$.

В задачах 13 – 16 вычислить определители 4-го порядка:

13. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 16. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Ответ. 13) 30; 14) –20;
15) 160; 16) 54.

В задачах 17 – 18 вычислить определители, предварительно упростив их:

17. $\begin{vmatrix} x^2 + a^2 & ax & 1 \\ y^2 + a^2 & ay & 1 \\ z^2 + a^2 & az & 1 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Ответ. 17) $a\,(x-y)\,(y-z)\,(x-z)$; 18) 5.

Варианты проверочных работ

Вычислить определитель 4-го порядка, получив предварительно нули в какой-либо строке (столбце):

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Ответ. –205.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

Ответ. –216.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

Ответ. –1.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Ответ. 244.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Ответ. –61.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Ответ. –144.

7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Ответ. 32.

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

Ответ. 200.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

Ответ. –48.

10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Ответ. 61.

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется ***вырожденной (особенной)***, если её определитель равен нулю и ***невырожденной (неособенной)*** в противном случае. Если A – невырожденная матрица, то существует и притом единственная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, где E- единичная матрица (т.е. такая, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю). Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к матрице А.

Если в квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

заменить каждый её элемент алгебраическим дополнением и транспонировать, то получим матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется ***присоединённой*** для матрицы А.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Каждая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу.

Правила нахождения обратной матрицы

1.Вычислим определитель матрицы А. Если он отличен от нуля, то А- невырожденная матрица, следовательно, обратная матрица существует. Если же $|A|=0$, то А не имеет обратной матрицы.

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к А.

3.Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A^T. Строим присоединённую матрицу A^* .

4.Запишем матрицу $\frac{1}{|A|}A^*$, которая и будет обратной для матрицы А.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Воспользуемся правилом нахождения обратной матрицы и вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 20 + 33 - 22 - 27 - 40 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$,обратной матрицы А не существует.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Воспользуемся правилом нахождения обратной матрицы

1.Вычислим Δ матрицы А:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$ $\Delta \neq 0$, т.е. матрица А – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A^T , транспонированную к А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A^T.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1;$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2;$ $A_{23} = (-1)^{2/+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1;$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Строим присоединённую матрицу A^* .

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.Вычислим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

Ранг прямоугольной матрицы A определяется как порядок r отличного от нуля минора этой матрицы при условии, что все миноры (r + 1) – го порядка матрицы равны нулю. Обозначается ранг матрицы rang A или r (A).

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \vdots & -3 & 4 & \vdots & 5 & \vdots & 2 \\ 4 & \vdots & -6 & 1 & \vdots & 2 & \vdots & 3 \\ & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \\ -2 & \vdots & 5 & 3 & & 1 & \vdots & 0 \\ & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \\ 4 & & -6 & 8 & & 10 & & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Минор второго порядка

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix},$$

стоящий в левом верхнем углу матрицы A, равен нулю. Но, например, минор второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 21,$$

имеющий с минором M_1 одинаковый столбец, отличен от нуля. Окаймляя минор

M_2 как указано пунктиром в записи матрицы A, получаем минор третьего порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Добавляя к M_3 справа 5 –й столбец матрицы A и снизу – три элемента (-6), 8, 10 соответственно второго, третьего, четвёртого столбцов, получаем минор 4-го порядка:

$$M_4 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что окаймлять минор k-го порядка можно не обязательно элементами столбцов, соседних к крайним столбцам, и строк, соседних к крайним строкам.

Окаймляя минор M_3 другими способами, также будем получать миноры 4-го порядка, равные нулю.

Следовательно, ранг матрицы A равен трем, rang A = 3.

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1 – 6 найти обратную матрицу и сделать проверку:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ответ. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ответ. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах 7 – 10 найти неизвестную матрицу X из уравнения:

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

В задачах 11– 13 найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.

11. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ. 11) 2; 12) 3; 13) 3.

В задачах 14 – 19 найти ранг матрицы методом элементарных преобразований.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ. 14) 2; 15) 2; 16) 2;
17) 3; 18) 4; 19) 5.

3.Системы линейных уравнений.

1.Правило Крамера

Пусть задана система *n*-линейных уравнений с *m* неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема. Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы det A = $\Delta \neq 0$ отличен от нуля. Неизвестные системы находятся по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

,

где Δ_i - определитель, получаемый из определителя Δ заменой ***i***-го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 11, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8. \end{cases}$$

Определитель системы

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, поэтому система имеет единственное решение, которое находим по формулам $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, для этого сначала находим определители Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: (4, 2, 1).

2.Матричный метод

Запишем систему (1) в матричной форме, AX = B,где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матричный метод решения систем заключается в решении матричного уравнения $X = A^{-1}B$. Для этого необходимо:

1.найти обратную матрицу.

2.найти произведение обратной матрицы на матрицу-столбец из свободных членов.

3.ответ записать в виде $X = A^{-1}B$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Найдём обратную матрицу.

Вычислим Δ матрицы A:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $\Delta \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

Находим матрицу A^T , транспонированную к A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A^T.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 – 1 = 1;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - (4 – 1) = -3;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 – 1 = 1;$

$A_{23} = (-1)^{2/+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - (1 – 2) = 1;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 – 1 = 1;$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = - (1 + 1) = -2;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =1 + 2 = 3.$

Строим присоединённую матрицу A^* .

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Найдём произведение обратной матрицы на матрицу-столбец из свободных членов.

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & + & 33 & - & 16 \\ -9 & + & 11 & + & 8 \\ 3 & - & 22 & + & 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ запишем в виде: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.Метод Гаусса

Метод Гаусса используется, когда система имеет большое число уравнений и заключается в последовательном исключении неизвестных. Рассмотрим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, & (3) \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_{4.} & (4) \end{cases}$$

Допустим, что $a_{11} \neq 0$.

Первый шаг: делим уравнение (1) на a_{11}, умножим полученное уравнение на a_{21} и вычитаем из 2-го, затем умножим на a_{31} и вычтем из 3-го, наконец умножим на a_{41} и вычтем из 4-го. В результате первого шага приходим к системе:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = c_1, & (5) \\ \quad\;\; b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = c_2, & (6) \\ \quad\;\; b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = c_3, & (7) \\ \quad\;\; b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = c_4, & (8) \end{cases},$$

где $b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$; $b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$; $b_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}$; $c_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$;

$b_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$; $b_{23} = a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}$; $b_{24} = a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{21}$; $c_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}$;

$b_{32} = a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}$; $b_{33} = a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}$; $b_{34} = a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{31}$; $c_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{31}$;

$b_{42} = a_{42} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{41}$; $b_{43} = a_{43} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{41}$; $b_{44} = a_{44} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{41}$; $c_4 = b_4 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{41}$.

Отсюда видим, что введенные нами коэффициенты получаются из коэффициентов системы по следующим формулам:

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}};$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1} = a_{ij} - a_{i1} b_{1j};$$

$$c_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}} a_{i1} = b_i - a_{i1} c_1; \text{ i = 2, 3, 4; j = 2, 3, 4.}$$

<u>Второй шаг</u>: поступаем с уравнениями (6), (7), (8) точно так же, как с уравнениями (1), (2), (3), (4) и т.д. В итоге исходная система преобразуется к «ступенчатому» виду:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = c_1, \\ \quad x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = d_1, \\ \quad\quad x_3 + d_{34}x_4 = e_1, \\ \quad\quad\quad x_4 = f_1. \end{cases}$$

Из преобразованной системы все неизвестные определяются последовательно без труда.

На практике удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Преобразуем матрицу

$$\mathrm{A}_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Первую строку умножим соответственно на -1, 2, 3, вычтем из второй, третьей и четвёртой строк:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Вторую строку прибавим к третьей и четвёртой строкам:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Третью строку, умноженную на $\frac{1}{2}$, вычтем из четвёртой:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Получим rang A = rang A_1, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Исходную систему можно теперь записать через эквивалентную в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \quad 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ \quad\quad 2x_3 - x_4 = 5, \\ \quad\quad\quad -\frac{1}{2}x_4 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Порядок действий при решении этой системы очевиден. Последнее уравнение даёт $x_4 = -5$, подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 0$, второе уравнение даёт $x_2 = 4$, наконец, из первого уравнения найдём $x_1 = 2$. Итак, решением данной системы является $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = -5$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Здесь 6-й, так называемый контрольный столбец, каждым элементом которого является сумма пяти элементов данной строки. Контрольный столбец служит для проверки правильности элементарных преобразований.

Преобразуем матрицу в эквивалентную

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

(Преобразование матрицы проведите самостоятельно).

Запишем эквивалентную системy уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ x_3 + x_4 = 7, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Из 4-го уравнения $x_4 = 4$, из 3-го уравнения находим $x_3 = 3$, из 2-го $x_2 = 2$, из 1-го $x_1 = 1$, т.е. решением данной системы является $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Однородные системы

Система уравнений называется однородной, если свободные члены уравнения равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Или в матричной форме AX = B. Однородная система всегда совместна, так как имеет *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы rang A < n (т.е. ранг матрицы системы меньше числа неизвестных).

Вследствие рассмотренных примеров, можно записать следующие выводы.

Если система имеет ***единственное решение***, то ступенчатая система приведётся к треугольной, т.е. к такой, в которой последнее уравнение содержит одно неизвестное. В случае ***неопределённой системы***, т.е. такой, в которой число неизвестных больше числа линейно независимых уравнений, допускающей поэтому ***бесчисленное множество решений***, треугольной системы не получается, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного.

Когда же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она содержит хотя бы одно уравнение вида 0 = 1, т. е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1 – 7 исследовать систему на совместность и, если она совместна, найти ее общее решение.

1. $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

Ответ. 1) система несовместна; 2) $r = 2$, $x = -1 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = t$;
3) $r = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$;

4) $r = 2, x_1 = \frac{t_1 - 9t_2 - 2}{11}$, $x_2 = \frac{-5t_1 + t_2 + 10}{11}$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$;

5) система несовместна;

6) $r = 2$, $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2, x_3 = \frac{26 - 27t_1 + 9t_2}{13}$, $x_4 = \frac{-13 + 3t_1 - t_2}{13}$;

7) система несовместна.

В задачах 8 – 13 найти общее решение следующих однородных систем:

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

Ответ. 8) $t\,(3, 1, 5)$; 9) $(2t_1 + 3t_2, t_1, t_2)$; 10) $(0, 0, 0)$;

11) $(t_1, t_2, -\frac{5}{2}t_1 + 5t_2, \frac{7}{2}t_1 - 7t_2)$; 12) $(8t_1 - 7t_2, -6t_1 + 5t_2, t_1, t_2)$;

13) $(0, 0, 0)$.

В задачах 14 – 19 решить системы:

14. $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$

Ответ.

14) не имеет решения;

15) имеет бесконечно много решений: x = t, $y = \frac{t-1}{\sqrt{3}}$;

16) x = y = z = 1;

17) x = 1, y = 3,z = 5;

18) имеет бесконечно много решений: x = 2 t – 1, y = t + 1, z = t;

19) не имеет решений.

В задачах 20 - 25 найти все решения однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

20. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$ 25. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Ответ.

20) x = -2 t, y = 7 t, z = 4 t;

21) x = 2 t, y = 3 t, z = 0;
22) x = 0, y = t, z = 3 t;
23) x = 0, y = t, z = 2 t;
24) x = t, y = 5 t, z = 11 t;
25) x = 3 t, y = 4 t, z = 11 t.

Варианты проверочных работ

Исследовать систему на совместность и, если она совместна, найти ее общее решение.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{5+3t}{4}, \frac{17+7t}{8}, t\right)$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

Ответ. $\left(-2 - \frac{3}{2}t, 3 + \frac{1}{2}t, t\right)$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 23 \end{cases}$

Ответ. (-7 + 3 t, 10 t – 29, t).

4. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

Ответ. $\left(2t - 1, t, \frac{5-3t}{2}\right)$.

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{15+3t}{4}, \frac{7t-13}{8}, t\right)$.

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{t-1}{4}, \frac{21-11t}{4}, t\right)$.

7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$

Ответ. (21 + 11 t, 12 + 6 t, t).

8. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{7+2t}{5}, t, \frac{7t-13}{5},\right)$.

9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 10 \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{10+3t}{4}, t, \frac{2+17t}{4}\right)$.

10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -4 \end{cases}$

Ответ. $\left(t, \frac{11}{29} + t, \frac{8}{29}\right)$.

Список литературы

1. Высшая математика: учеб. пособие/ под ред. С. А. Розанова. [Электронный ресурс] - М.: Физматлит, 2009. - 165 с. – Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/book/68379/
2. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия/ И. Р. Шафаревич. [Электронный ресурс] - М.: Физматлит, 2009. - 509 с. – Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/book/68387/
3. Ильин, В. А. Линейная алгебра/ В. А. Ильин, Э. Г. Позняк[Электронный ресурс]. - М.: Физматлит, 2007. - 275 с. – Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/book/68974/
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, - М.: ОНИКС, 2010.- 416 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: Айрис-пресс., 2008.- 608с.
6. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов/ Н.Ш. Кремер.- М.: ЮНИТИ, 2000.
7. Шипачев, В.С. Основы высшей математики/ В.С. Шипачев.- М.: Высшая школа, 1998.
8. Шипачев, В.С. Задачи по высшей математике/ В.С. Шипачев.-М.: Высшая школа, 1998.
9. Кремер, Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов/ Н.Ш. Кремер.- М.: ЮНИТИ, 2003.
10. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, - М.: ОНИКС, 2003.

Оглавление

Составители:

Бумагина Алла Николаевна,

Таланова Валерия Александровна

Линейная алгебра

Методические указания

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 23.06.2016. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага писчая
Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд. л.2,06. Тираж 100 экз. Заказ

Ивановский государственный химико-технологический университет
Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры
экономики и финансов ИГХТУ
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7