Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Ивановский государственный химико-технологический университет»

А.К. Ратыни

ВВЕДЕНИЕ В КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методическое пособие

Иваново 2008

УДК 517.9 (075.8)

А.К. Ратыни Введение в курс математической физики: Методическое пособие / Иван. гос. хим.-технол. ун-т.;- Иваново, 2008.– 85с.

Методическое пособие предназначено для студентов, углублённо изучающих математику в ИГХТУ. В пособии излагаются теоретические основы решения граничных задач для простейших уравнений математической физики методом разделения переменных. Рассматривается тема корректности граничных задач, в связи с чем излагаются некоторые понятия функционального анализа. Приводится большое число примеров, в частности, для самостоятельной работы студентов.

Библиогр.: 11 назв.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Экономики и финансов » В.В. Шергин (Ивановский государственный химико-технологический университет)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Предметом математической физики является исследование физических процессов с помощью математических методов. Это исследование обычно включает в себя следующие три этапа. Первый: на основе экспериментов и общих физических законов составляется математическая модель изучаемого процесса (ею может быть, в частности, дифференциальное уравнение). Второй этап: проводится математический анализ полученной модели (включающий, например, отыскание решения дифференциального уравнения). Третий этап: на основе проведённого анализа делаются некоторые выводы о физическом процессе.

В предлагаемом пособии основное внимание уделено второму из перечисленных этапов. Точнее говоря, пособие знакомит читателей с двумя темами. Первая – метод Фурье (метод разделения переменных) построения решений граничных задач для уравнений теплопроводности и колебаний, уравнений Лапласа и Пуассона. При этом затрагивается и проблема обоснования метода (сформулированы условия, при которых сумма ряда, найденного методом Фурье, действительно будет решением задачи). В учебниках математики для технических вузов эта проблема, как правило, упоминается, но не развивается. Весьма кратко в упомянутых учебниках рассматривается и вторая тема данного пособия – корректность граничных задач, т.е. вопросы существования и единственности их решений, а также непрерывная зависимость решений от заданных величин. Здесь обсуждению этих вопросов отведено значительное место. Материал излагается на уровне, доступном для читателя, знающего математику в объёме курса втуза.

Все разделы, связанные с второй темой и с обоснованием метода разделения переменных (глава 1, § 3 главы 2, § 2 и § 4 главы 4, § 2 главы 5, § 2 главы 6 и некоторые замечания в главах 3 – 6) можно пропустить без ущерба для изучения алгоритма Фурье построения «формальных решений». Тем же, кто, напротив, хочет лучше познакомиться с перечисленным выше кругом проблем, рекомендуются книги [1–11], использованные при подготовке настоящего пособия.

Ещё несколько пояснений, касающихся изложения материала. В каждой из шести глав принята своя нумерация формул и утверждений. При ссылке в тексте на формулу данной главы указывается её номер; при ссылке на формулу другой главы указываются через точку номер формулы и номер главы, в которой формула приведена. Например, (3.2) – формула (3) из главы 2. То же относится и к нумерации теорем, замечаний, определений.

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Функциональный анализ – это раздел математики, изучающий *пространства* и действующие в них *операторы*, или, иначе, *отображения*. Методы функционального анализа позволяют с единой точки зрения подходить к решению различных задач математического анализа, алгебры и геометрии. Такую возможность предоставляет принятая в функциональном анализе трактовка понятия «пространство». Этим термином обозначается любое множество, между элементами которого аксиоматически заданы некоторые соотношения. Важным классом пространств являются метрические пространства – множества, в которых определено расстояние между любыми двумя элементами. Частным случаем метрических пространств являются линейные нормированные пространства. Именно им уделено основное внимание в этой главе.

§ 1. *ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА*

О п р е д е л е н и е 1. Множество E объектов любой природы называется *линейным нормированным пространством* (сокращённо ЛНП), если для этих объектов, называемых *элементами* или *точками* пространства, выполнены аксиомы линейности и аксиомы нормы.

1. *А к с и о м ы л и н е й н о с т и.*

Для любых элементов $x, y \in E$ и любого числа l определены сумма $x+y$ и произведение lx, также являющиеся элементами E. При этом операции сложения и умножения на число обладают обычными свойствами (здесь x, y, z – элементы E, l и m – числа):

1) $x+y=y+x$; 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$; 3) $l(x+y)=lx+ly$; 4) $(l+m)x=lx+mx$; 5) существует единственный элемент $Q\in E$ такой, что $x+Q=x$ для любого $x\in E$ (часто вместо Q пишут 0); 6) для каждого $x\in E$ существует единственный элемент $-x\in E$ такой, что $x+(-x)=Q$ (вместо $x+(-y)$ обычно пишут $x-y$); 7) $1\cdot x=x$, $0\cdot x=Q$ для всех $x\in E$.

2. *А к с и о м ы н о р м ы.*

Каждому элементу $x\in E$ ставится в соответствие вещественное число $\|x\|$, которое называется *нормой* x, причём выполняются следующие условия :

1) $\|x\|>0$, если $x\neq Q$, $\|Q\|=0$;

2) $\|lx\|=|l|\,\|x\|$;

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

З а м е ч а н и е 1. Если в тексте идёт речь о нескольких пространствах, то нормы в них помечают индексами: $\|\bullet\|_E$ – норма в пространстве E, $\|\bullet\|_F$ –

норма в пространстве F и т.п.

З а м е ч а н и е 2. На одном и том же множестве норму можно ввести несколькими различными способами. При этом получаются различные ЛНП.

З а м е ч а н и е 3. В зависимости от того, на какие числа, вещественные или комплексные, допускается умножение элементов E, пространство называется соответственно вещественным или комплексным.

Всюду далее рассматриваются только ***вещественные*** ЛНП.

С помощью нормы в ЛНП можно ввести *расстояние* между любыми точками $x, y \in E$ по формуле $\| x - y \|$ и, следовательно, можно ввести понятие предела последовательности точек $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ (условимся кратко обозначать такую последовательность $\{x_k\}$).

О п р е д е л е н и е 2. Точка $c \in E$ называется пределом последовательности $\{x_k\} \subset E$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \| x_k - c \| = 0$. При этом пишут

$$x_k \to c \quad \text{при} \quad k \to \infty, \qquad \text{или} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = c,$$

и говорят, что последовательность $\{x_k\}$ сходится к c по норме (или в норме) пространства E.

Теорема 1 (о единственности предела). *Последовательность* $\{x_k\} \subset E$ *может сходиться в* E *не более чем к одному пределу.*

Доказательство. Пусть при $k \to \infty$

$$\lim \| x_k - c_1 \| = 0 \quad \text{и} \quad \lim \| x_k - c_2 \| = 0 \;, \text{ где } \; c_1, c_2 \in E .$$

Используя аксиомы нормы 1 и 3, получим

$$0 \le \| c_1 - c_2 \| = \| c_1 - x_k + x_k - c_2 \| \le \| c_1 - x_k \| + \| x_k - c_2 \|.$$

Отсюда следует

$$0 \le \| c_1 - c_2 \| \le \lim \| c_1 - x_k \| + \lim \| x_k - c_2 \| = 0 ,$$

что возможно только при $\| c_1 - c_2 \| = 0$, т.е. при $c_1 = c_2$.

§ 2. *ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА*

1. Пусть заданы число $r > 0$ и точка $x_0 \in E$, где E – ЛНП.

Открытым шаром с центром в точке x_0 и радиусом r называется множество всех точек $x \in E$, удовлетворяющих неравенству $\| x - x_0 \| < r$. Будем обозначать такой шар $P(x_0, r)$ и называть r-*окрестностью* (иногда просто *окрестностью*) точки x_0.

Пусть U – множество точек пространства E. Точка $x \in U$ называется *внутренней точкой* U, если она входит в U вместе с некоторой своей окрестностью. Множество $U \subset E$ называется *открытым*, если все его точки внутренние.

2. Пусть $U \subset E$. Точка $c \in E$ называется *предельной точкой* множества U, если существует последовательность точек $\{x_k\} \subset U$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} x_k = c, \quad x_k \neq c \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Приведённое определение равносильно следующему: точка $c \in E$ называется *предельной точкой* множества U, если любая окрестность c содержит хотя бы одну точку U, *отличную* от c. (Отсюда следует, что любая окрестность c содержит бесконечное множество точек U).

Подчеркнём, что предельная точка U может не принадлежать U.

Множество $U \subset E$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Объединение множества U с множеством всех его предельных точек называется *замыканием* U и обозначается $\overline{U}$. Доказано, что $\overline{U}$ – замкнутое множество.

3. Точка $y \in E$ называется *граничной точкой* множества $U \subset E$, если любая окрестность y содержит и точки U, и точки, не принадлежащие U.

Совокупность всех граничных точек U называется *границей* U.

4. Множество $U \subset E$ называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором шаре.

5. Из сказанного вытекает справедливость следующих **утверждений:**

а) $P(x_0, r)$ – открытое множество;

б) внутренняя точка множества $U \subset E$ является предельной точкой U;

в) множество, состоящее из конечного числа точек E, замкнуто;

г) всё пространство E и пустое множество $\varnothing$ являются одновременно и открытыми и замкнутыми множествами.

Доказательство утверждения а). Пусть $\| y - x_0 \| < r$, т.е. точка y принадлежит $P(x_0, r)$. Требуется показать, что найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что ε - окрестность y лежит в $P(x_0, r)$: $P(y, e) \subset P(x_0, r)$. Действительно, очевидно существование числа $r_1 > 0$ такого, что $\| y - x_0 \| < r_1 < r$. Положим $e = r - r_1$. Возьмем любую точку $x \in P(y, e)$ (т.е. $\| x - y \| < e$), тогда

$$\| x - x_0 \| = \| x - y + y - x_0 \| \le \| x - y \| + \| y - x_0 \| < \varepsilon + r_1 = r - r_1 + r_1 = r.$$

Таким образом, $x \in P(x_0, r)$, что и требовалось показать.

Утверждения б), в), г) предлагаем доказать самостоятельно.

§ 3. *ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ*

Для всех приведённых здесь пространств аксиомы линейности и нормы выполнены. Мы опускаем соответствующие доказательства, предлагая читателю в качестве упражнений провести их самостоятельно для $C[a,b]$ и для $L(a,b)$.

1. ***Пространство R вещественных чисел.***

Элементами этого пространства являются все вещественные числа и только они. Норма определяется равенством

$$\| x \| = | x | \quad (\text{модуль числа } x).$$

Операции сложения и умножения чисел определяются обычным образом.

Иногда пространство R обозначают символом R^1.

Сходимость в R – это обычная сходимость числовых последовательностей. В пространстве R «открытый шар» с центром в точке $x_0 \in R$ и радиусом $r > 0$ – это интервал $(x_0 - r,\ x_0 + r)$, т.е. множество всех x Î R, удовлетворяющих неравенствам $x_0 - r < x < x_0 + r$ или, что равносильно, неравенству $| x - x_0 | < r$. Интервал (a, b) есть открытое множество в R; здесь и далее в этом параграфе $a, b \in R$, $a < b$. Точки отрезка $[a, b]$ (т.е. множества состоящего из тех x Î R, которые удовлетворяют неравенствам a £ x £ b) есть предельные точки (a, b). Отрезок $[a, b]$ – замкнутое множество, являющееся замыканием (a, b) (и, кстати, замыканием $[a, b)$ и $(a, b]$). Множество, состоящее из двух точек a и b, является границей каждого из интервалов: (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$.

2. ***Пространство R^n n-мерных векторов.***

Напомним, что n-мерным вектором (n – натуральное число, $n \geq 2$) называется упорядоченная совокупность n чисел: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) называются компонентами вектора x. Заметим, что в некоторых случаях компоненты вектора удобнее располагать в столбец, а не в строку. Два вектора x и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ считаются равными тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е.

$$x = y \iff x_j = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Суммой векторов x и y называется вектор

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Произведением вектора x на число l называется вектор

$$lx = (lx_1,\ lx_2, \ldots,\ lx_n).$$

Нулевым вектором называется вектор, все компоненты которого равны нулю.

Каждому n-мерному вектору ставится в соответствие число

$$\| x \| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2},$$

называемое нормой вектора (точнее, евклидовой нормой).

Множество всех n-мерных векторов, в котором определены указанным выше образом операции сложения, умножения на число и норма вектора, называется n-мерным векторным пространством и обозначается R^n.

Между элементами $x = (x_1, x_2)$ пространства R^2 и точками (или векторами) плоскости можно обычным образом установить взаимно однозначное соответствие, введя на плоскости систему прямоугольных координат Ox_1x_2. Сказанное относится и к элементам R^3 и точкам (векторам) геометрического трехмерного пространства с введенной в нём системой координат $Ox_1x_2x_3$. Для вектора x из пространства R^2 (или из R^3) $\| x \|$ есть длина x. Неравенство треугольника (см. аксиомы нормы) в R^2 и в R^3 выражает известный геометрический факт: длина любой стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон (сделайте рисунок с изображением векторов x, y и $x + y$).

«Открытый шар» $P(x_0, r)$ в R^2 – это круг с радиусом r и с центром в точке $x_0 = (x_{01}, x_{02})$: $(x - x_{01})^2 + (x - x_{02})^2 < r^2$.

Окружность L: $(x - x_{01})^2 + (x - x_{02})^2 = r^2$ – граница $P(x_0, r)$. Точки L – предельные точки $P(x_0, r)$. Ясно, что $\overline{P}(x_0, r) = P(x_0, r) \cup L$. Соответствующую геометрическую интерпретацию $P(x_0, r)$ и $\overline{P}(x_0, r)$ в R^3 читатель без труда сделает самостоятельно.

Для дальнейших построений важно определить понятие области в R^n.

Множество $D \subset R^n$ называется *областью*, если оно открыто и *связно*. Последнее означает, что любые две точки этого множества

$$c_1 = (c_{11}, ..., c_{1n}) \text{ и } c_2 = (c_{21}, ..., c_{2n})$$

можно соединить непрерывной линией $x = g(t)$, целиком лежащей в D:

$$g(t_1) = c_1,\ g(t_2) = c_2 \text{ и } g(t) \in D \text{ при всех } t \in [t_1, t_2];$$

здесь $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))$ – векторная функция числовой переменной t. (Попробуйте сделать рисунки множеств в R^2, являющихся и не являющихся областями).

3. Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций одной переменной.

Это пространство состоит из всех функций одной независимой переменной, непрерывных на замкнутом интервале $[a, b] \subset R$. Норма любого элемента $y(x)$ определяется равенством

$$\| y \|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,\, b]} | y(x) |. \qquad (1)$$

Операции сложения функций и умножения функции на число определяются обычным образом.

Близость в пространстве $C[a, b]$ двух его элементов $y(x)$ и $z(x)$ означает, что мала величина

$$\delta = \| y - z \|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} | y(x) - z(x) |.$$

Из этого равенства следует, что значения функций $y(x)$ и $z(x)$ во **всех** точках интервала $[a, b]$ отличаются не больше, чем на δ: $| y(x) - z(x) | \le \delta$. Поэтому сходимость в пространстве $C[a, b]$ последовательности его элементов $\{ y_k(x) \}$ есть *равномерная* сходимость.

Напомним, что последовательность $\{ y_k(x) \}$ функций, определённых для $x \in [a, b]$, называется *равномерно сходящейся* на $[a, b]$ к функции $Y(x)$, если для любого числа $e > 0$ найдется такой номер K, что при всех k ³ K

и при всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|\, y_k(x) - Y(x)\, | \le e$.

3. Пространство $C^m[a, b]$ дифференцируемых функций одной переменной.

Это пространство состоит из всех функций $y(x) \in C[a, b]$, которые имеют на интервале $[a, b]$ непрерывные производные до m – го порядка включительно (здесь m – натуральное число). Норма в этом пространстве определяется обычно равенством

$$\| y \|_{C^m[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} \left| y(x) \right| + \max_{x \in [a,b]} \left| y^{/}(x) \right| + \ldots + \max_{x \in [a,b]} \left| y^{(m)}(x) \right|$$

или, что то же самое, равенством

$$\| y \|_{C^m[a,b]} = \| y \|_{C[a,b]} + \| y^{/} \|_{C[a,b]} + \ldots + \| y^{(m)} \|_{C[a,b]} \qquad (2)$$

5. Пространство $C(\overline{D})$ непрерывных функций двух переменных.

Рассмотрим совокупность всех функций двух независимых переменных $u(x_1, x_2) = u(x)$ (т.е. функций точки $x = (x_1, x_2) \in R^2$), непрерывных на замкнутом, ограниченном множестве $\overline{D}$ Î R^2. Каждому элементу совокупности поставим в соответсвие число (норму элемента) по формуле

$$\| u \|_{C(\overline{D})} = \max_{x \in \overline{D}} |\, u(x)\, |.$$

В результате получим ЛНП непрерывных функций двух переменных, которое и обозначается символом $C(\overline{D})$.

6. Пространство $C^m(\overline{D})$ дифференцируемых функций двух переменных.

Пусть D – ограниченная область в R^2, $\overline{D}$ – её замыкание. Пространство $C^m(\overline{D})$ состоит из всех функций $u(x_1, x_2)$, которые непрерывные в $\overline{D}$ вместе со своими частными производными до m-го порядка включительно. Норма в этом пространстве обычно определяется равенством

$$\| u \|_{C^m(\overline{D})} = \| u \|_{C(\overline{D})} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{l} \left\| \partial^l u / \partial x_1^k \partial x_2^{l-k} \right\|_{C(\overline{D})}.$$

7. Пространство $L(a, b)$ интегрируемых функций одной переменной.

Это пространство состоит из всех функций одной переменной, которые интегрируемы по Лебегу (см. далее замечание 5) на интервале $[a, b]$. За норму элемента $y(x)$ пространства принимается интеграл от модуля $y(x)$:

$$\| y \|_{L(a,b)} = \int_a^b \left| y(x) \right| dx.$$

Сумма функций и произведение функции на число определяются на множестве таких функций обычным образом.

Близость в пространстве $L(a, b)$ двух его элементов $y(x)$ и $z(x)$ означает, что мала величина

$$\delta = \| y - z \|_{L(a,b)} = \int_a^b | y(x) - z(x) | dx,$$

т.е. мала площадь между графиками функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$; ясно, что при этом значения $y(x)$ и $z(x)$ для некоторых $x \in [a, b]$ могут отличаться очень существенно.

Сходимость в пространстве $L(a, b)$ называется *сходимостью в среднем*.

8. Пространство $L_p(a, b)$ функций одной переменной, интегрируемых с p-ой степенью (здесь $p \geq 1$ – заданное вещественное число).

Это пространство состоит из всех функций $y(x)$ одной переменной, для которых $y^p(x) \in L(a, b)$. Норма в $L_p(a, b)$ определяется равенством

$$\| y \|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b | y(x) |^p dx \right)^{1/p}. \tag{3}$$

Сходимость в $L_p(a, b)$ называется *сходимостью в среднем со степенью p*. Очевидно, что $L(a, b) = L_1(a, b)$.

9. Пространство $L_p(D)$ функций двух переменных, интегрируемых с p-ой степенью.

Пусть D – ограниченная область в R^2. Через $L_p(D)$ обозначают пространство, состоящее из всех функций $u(x) = u(x_1, x_2)$ двух переменных, для которых существует интеграл Лебега $\iint_D | u(x_1, x_2) |^p dx_1 dx_2$. Норма в $L_p(D)$ определяется равенством

$$\| u \|_{L_p(D)} = \left(\iint_D | u(x_1, x_2) |^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p}.$$

З а м е ч а н и е 4. Аналогично тому, как выше определены пространства непрерывных, дифференцируемых и интегрируемых функций одной и двух переменных, можно определить соответствующие пространства функций n переменных, где натуральное число $n > 2$.

З а м е ч а н и е 5. В курсе математики технических вузов изучается, как правило, интеграл Римана. Тем, кто хочет познакомиться с интегралом Лебега можем порекомендовать книги [2,6]. Здесь же отметим, что интегралы Римана и Лебега от многих функций, встречающихся в прикладных задачах, *совпадают*. Например, справедливо следующее **утверждение** (где a, b, p – вещественные числа; $a < b$, $p \geq 1$).

Пусть для функции одной переменной $y(x)$ на интервале $[a, b]$ выполнено какое-либо из нижеперечисленных условий:

а) $y(x)$ непрерывна;

б) $y(x)$ имеет конечное число точек разрыва и $y(x)$ ограничена;

в) $y(x)$ имеет конечное число точек разрыва, $y(x)$ неограничена и существует (сходится), понимаемый в несобственном смысле, интеграл Римана $\int_a^b |y(x)|^p dx.$

Тогда $y(x) \in L_p(a, b)$. При этом равны значения интегралов Римана и Лебега от $y^p(x)$ (и от $|y(x)|^p$) по $[a, b]$.

З а м е ч а н и е 6. Символом $C(Q)$ часто обозначают совокупность всех функций, непрерывных на множестве $Q \subset R^n$. Символом $C^m(Q)$ – совокупность всех функций, имеющих на Q непрерывные производные по всем переменным до m-го порядка включительно. Например, $C^1(a, b)$ – совокупность функций одной переменной, непрерывных на интервале (a,b) вместе со своей производной первого порядка. Для функций нескольких переменных используют и более сложные обозначения совокупностей дифференцируемых функций. А именно, через $C^{m,k}(Q)$, где m и k – целые, неотрицательные числа, обозначается совокупность всех функций двух переменных, имеющих на множестве $Q \subset R^2$ непрерывные частные производные: до m-го порядка включительно по первой переменной и до k-го порядка включительно по второй переменной. Например, $C^{1,2}(Q)$ – совокупность функций $v(x_1, x_2)$, непрерывных на Q вместе с производными v_{x_1}, v_{x_2}, $v_{x_1 x_2}$; включение $v(x_1, x_2) \in C^{1,0}(Q)$ означает, что v и v_{x_1} непрерывны на Q.

Если Q – ограниченная область в R^2, то $C^{m,k}(\overline{Q})$ можно «превратить» в ЛНП, введя соответствующим образом норму элементов данной совокупности (попробуйте сделать это самостоятельно).

§ 4. *О ВЛОЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВ*

При работе с пространствами функций часто приходится отвечать на следующие вопросы. Принадлежат ли элементы одного ЛНП другому ЛНП? Следует ли из сходимости последовательности функций в одном ЛНП её сходимость в другом ЛНП? Здесь приведены ответы на эти вопросы для нескольких функциональных пространств, часто используемых далее.

О п р е д е л е н и е 3. Говорят, что ЛНП E *вложено* в ЛНП F (пишут $E \subset F$), если любой элемент E является элементом F. Вложение E в F называется *непрерывным*, если для любого элемента $x \in E$ выполнено неравенство

$$\| x \|_F \le M \| x \|_E \qquad (4)$$

с некоторой постоянной $M > 0$, не зависящей от x.

Если $E \subset F$, то говорят также, что F более широкое пространство, чем E (или E более узкое, чем F).

Непрерывность вложения E в F означает, что из сходимости последовательности $\{x_k\} \subset E$ к точке $c \in E$ по норме E следует сходимость $\{x_k\}$ к c по норме F. Действительно, в силу (4) и первой аксиомы нормы,

$$0 \le \| x_k - c \|_F \le M \| x_k - c \|_E \quad (k = 1,2,...). \tag{5}$$

Так как по условию $\| x_k - c \|_E \to 0$, то, согласно (5), $\| x_k - c \|_F \to 0$ при $k \to \infty$. Иначе говоря, непрерывность вложения E в F означает, что из близости двух элементов пространства E в пространстве E следует их близость в F.

Для дальнейших построений важными являются факты вложения ряда перечисленных в § 3 пространств. Эти факты основаны на известных теоремах математического анализа. Например, известно, что если функция $y(x)$ имеет на интервале $[a, b]$ производную m-го порядка $y^{(m)}(x)$, то производная $y^{(m-1)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (здесь $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$, m – натуральное число). Из этого утверждения и из (2) следует

Теорема 2. *При любом натуральном* m *пространство* $C^m[a, b]$ *непрерывно вложено в* $C^{m-1}[a, b]$ (считаем, что $C^0[a, b] \equiv C[a, b]$).

Следующие две теоремы устанавливаются в теории интеграла.

Теорема 3. *Пространство* $C[a, b]$ *непрерывно вложено в* $L_p(a, b)$ *при любом* p ³ 1.

О том, что $C[a, b]$ вложено в $L_p(a, b)$ уже говорилось замечании 5 (см. п. а) утверждения). Доказательство непрерывности вложения проводится очень просто (см. (1) и (3)):

$$\| y \|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b | y(x) |^p dx \right)^{1/p} \le \left(\int_a^b \max_{x \in [a,b]} | y(x) |^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_a^b \| y \|_{C[a,b]}^p dx \right)^{1/p} = \| y \|_{C[a,b]} \cdot \left(\int_a^b dx \right)^{1/p} = M \| y \|_{C[a,b]},$$

где $M = (b - a)^{1/p} = \text{const} > 0$.

Теорема 4. *Если* $q > p \ge 1$, *то пространство* $L_q(a, b)$ *непрерывно вложено в* $L_p(a, b)$.

З а м е ч а н и е 7. Утверждения, аналогичные теоремам 2, 3 и 4, справедливы и для пространств функций нескольких переменных. Например, имеют место следующие вложения: $C^m(\overline{D}) \subset C^{m-1}(\overline{D})$, $C(\overline{D}) \subset L_p(D)$, $L_q(D) \subset L_p(D)$, если $q > p$ ³ 1 (здесь D – ограниченная область в R^n).

З а м е ч а н и е 8. Из теоремы 2 следует, что две функции $y(x)$, $z(x)$ из $C^1[a, b]$, близкие в норме $C^1[a, b]$, будут близки и в норме $C[a, b]$. Обратное утверждение неверно, что подтверждает приведённый ниже пример 5.

Из теоремы 3 следует, что две функции $y(x)$, $z(x) \in C\,[a, b]$, близкие в норме $C\,[a, b]$, будут близки и в норме $L_p\,(a, b)$. Обратное, в общем случае, неверно; соответствующий пример есть в упражнениях.

П р и м е р 1. Проверьте, принадлежит ли функция $y(x) = \ln x / x$ пространствам $L_2\,(1,2)$, $C^2\,[1,2]$.

Прежде чем привести решение примера, обратим внимание читателя на то, что поставленные вопросы можно сформулировать следующим образом. Будет ли функция $y^2(x)$ интегрируема на интервале [1,2]? Будет ли $y^{//}(x)$ непрерывна на этом интервале? Такие задачи уже решались в курсе анализа.

Р е ш е н и е. $y(x)$ – элементарная функция, следовательно, она непрерывна на области своего определения, т.е. при $x \in (0, \infty)$. Так как интервал $[1,2] \subset (0, \infty)$, то $y(x) \in C\,[1,2]$, а потому (см. теорему 3) $y(x)$ Î $L_2\,(1,2)$.

Выясним, принадлежит ли $y(x)$ пространству $C^2[1,2]$. Для этого найдём $y^{//}(x) = (2\ln x - 3)/x^3$ и (так же, как в случае с $y(x)$) убедимся, что $y^{//}(x)$ непрерывна на интервале [1,2] , т.е. $y(x) \in C^2[1,2]$.

П р и м е р 2. Проверьте, принадлежит ли пространствам $C\,[-1, p]$ и $L_2\,(-1, p)$ функция $y(x)$, заданная следующим образом:

$$y(x) = \begin{cases} 3x + 1 & при \quad x \le 0, \\ \sin x & при \quad x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Здесь $3x + 1$ и $\sin x$ – элементарные функции, непрерывные при всех $x \in R$.Следовательно, разрыв $y(x)$ возможен только при $x = 0$. Найдем пределы: $\lim\limits_{x \to -0} y(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x + 1) = 1,\quad \lim\limits_{x \to +0} y(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0.$

Итак, $y(x)$ при $x = 0$ имеет разрыв (первого рода). Поэтому $y(x) \notin C\,[-1, p]$.

Далее отметим, что $y(x)$ ограничена на отрезке $[-1, p] : |\,y(x)\,| \le 2$ (советуем построить график $y(x)$). Поэтому $y(x) \in L_2\,(-1, p)$ (см п. б) утверждения в замечании 5).

П р и м е р 3. Проверьте, принадлежит ли $y(x) = 1/\sqrt[3]{x}$ пространствам $C\,[0,1]$, $L(0,1)$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что $y(x) \notin C[0, 1]$, так как при $x = 0$ функция имеет разрыв. Далее отметим, что $y(x)$ неограничена на интервале [0, 1] ($\lim\limits_{x \to +0} y(x) = \lim\limits_{x \to +0} 1/\sqrt[3]{x} = \infty$). Вычислим несобственный интеграл

$\int\limits_0^1 |y(x)|\,dx = \int\limits_0^1 x^{-1/3} dx = 3/2$. Поскольку интеграл сходится, то (см. п. в) утверждения в замечании 5) $y(x)$ Î $L\,(0, 1)$.

П р и м е р 4. Найдите норму $y(x) = x^3$ в пространстве $C^1[0, 1]$ и в пространстве $L_2\,(0, 1)$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что $y(x)$ и $y'(x) = 3x^2$ непрерывны на интервале $[0, 1]$, так что $y(x)$ принадлежит указанным пространствам. Вычислим:

$$\| y \|_{C^1[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |y(x)| + \max_{x\in[0,1]} |y'(x)| = \max_{x\in[0,1]} x^3 + \max_{x\in[0,1]} 3x^2 = 1 + 3 = 4;$$

$$\| y \|_{L_2(0,1)} = \left(\int_0^1 y^2(x)\,dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 x^6 dx \right)^{1/2} = 1/\sqrt{7}\,.$$

П р и м е р 5. Задана последовательность функций $y_k(x) = \dfrac{1}{k}\sin k^2 x$ (k = 1,2,...). Вычислите пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{C[0,p]}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{C^1[0,p]}$. Проанализируйте полученные результаты.

Р е ш е н и е. Находим: $\| y_k \|_{C[0,p]} = \dfrac{1}{k} \max\limits_{x\in[0,p]} \left| \sin k^2 x \right| = \dfrac{1}{k}$,

$$\| y_k \|_{C^1[0,p]} = \| y_k \|_{C[0,p]} + \| y_k' \|_{C[0,p]} = \frac{1}{k} + k \max_{x\in[0,p]} \left| \cos k^2 x \right| = \frac{1}{k} + k\,.$$

Отсюда получаем : $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{C[0,p]} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \| y_k \|_{C^1[0,p]} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} + k \right) = \infty\,.$$

Итак, $\{y_k(x)\}$ в норме $C\,[0,p]$ сходится к нулю (ведь $\| y_k \| = \| y_k - 0 \|$), но в $C^1[0,\pi]$ эта последовательность расходится. Таким образом, из сходимости в $C\,[a, b]$ *не следует* сходимость в $C^1\,[a, b]$ (в то же время обратное, согласно теореме 2, имеет место).

§ 5. *ПОНЯТИЕ ОПЕРАТОРА И ФУНКЦИОНАЛА. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

О п р е д е л е н и е 4. *Оператором* A, действующим из множества X в множество Y, называется *правило*, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определённый элемент $y \in Y$:

$$y = A(x), \qquad \text{или} \qquad y = Ax\,.$$

Вместо термина «оператор» используется также термин «*отображение*»: A – отображение X в Y. В качестве множеств X и Y в определении 4 могут фигурировать линейные нормированные пространства.

О п р е д е л е н и е 5. Оператор, действующий из любого множества в множество чисел, называется *функционалом*.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть для множества X справедливы аксиомы линейности определения 1. Оператор A, определенный на X, называется *линейным*, если выполнены следующие два условия:

а) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ для любых $x_1, x_2 \in X$;

б) $A(l\,x) = lA\,x$ для любого $x \in X$ и для любого числа l.

Примеры операторов.

1. Функцию $\sin x$ можно рассматривать как оператор, действующий из R в интервал $[-1, 1]$ (согласно определению 5, $\sin x$ – функционал; функционалом является и любая скалярная функция одной или нескольких переменных). Ясно, что $\sin x$ – нелинейный функционал, так как условия определения 6 не выполнены (например, $\sin(x_1 + x_2) \neq \sin x_1 + \sin x_2$ для любых x_1, x_2).

2. Пусть задана квадратная матрица (a_{ij}) второго порядка ($i, j = 1,2$). Оператор A, определенный равенством

$$A\,x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ставит в соответствие каждому вектору $x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in R^2$ вектор $Ax \in R^2$ (т.е. A действует из R^2 в R^2). Это линейный оператор, что следует из определений операций сложения векторов, умножения вектора на число (§ 3, п. 2) и правила умножения матриц.

3. Оператор дифференцирования $Ay = \dfrac{d}{dx}(y(x))$, или $Ay = y'(x)$ можно рассматривать, как оператор, действующий из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$. Это линейный оператор (вспомните, что производная суммы двух функций равна сумме производных слагаемых и постоянный множитель можно выносить за знак производной). Значение A, например, на элементе $y_0(x) = x^4$ равно

$$Ay_0 = (x^4)' = 4x^3.$$

4. Оператор A, определенный равенством $A\,y = \int\limits_a^x y^2(t)\,dt$, можно рассматривать как оператор, действующий из $C[a, b]$ в $C^1[a, b]$ (здесь a и b – заданные числа, $a < b$). Это нелинейный оператор (проверьте !); его значение, например, на элементе $y_0(x) = x^4$ равно

$$A\,y_0 = \int\limits_a^x \left(t^4\right)^2 dt = \frac{x^9 - a^9}{9}.$$

5. Пусть $Q = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 2\}$ – прямоугольник в R^2. Оператор A, определенный на функциях двух независимых переменных $u(x_1, x_2)$ равенством $Au = u(0, x_2)$, можно рассматривать, как оператор, действующий из $C(Q)$ в $C[0, 2]$. Это линейный оператор; его значение, например, на элементе $u_0(x_1, x_2) = x_2 \cos x_1 - \sin x_2$ есть функция x_2: $Au_0 = x_2 \cos 0 - \sin x_2 = x_2 - \sin x_2$.

Многие уравнения и системы уравнений, встречающиеся в алгебре и анализе, можно записать в виде *операторного уравнения*

$$Ax = h\,, \tag{7}$$

где x – искомый элемент некоторого множества X, h – заданный элемент некоторого множества H, A – заданный оператор, действующий из X в H. В качестве X и H здесь могут выступать и ЛНП.

П р и м е р ы операторной записи уравнений.

1. Уравнение $\sin x = h$ есть уравнение вида (7), если оператор A определить равенством $Ax = \sin x$. Как отмечалось (см. примеры операторов, п.1), A действует из R в интервал $[-1{,}1]$, т.е. здесь $X = R$, $H = [-1{,}1]$.

2. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = h_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = h_2, \end{cases}$$

где a_{ij}, h_i – заданные числа, c_i – искомые числа ($i, j = 1{,}2$). Эту систему можно записать в виде (7), если оператор A определить равенством (6) и положить $x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$. Здесь $X = H = R^2$.

3. Дифференциальное уравнение относительно функции $u(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = h(x_1, x_2)$$

можно записать в операторном виде, если положить $Au \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.

Этот оператор действует, например, из $C^2(Q)$ в $C(Q)$, где Q – некоторая область в R^2.

Трактовка различных уравнений и систем уравнений как операторного уравнения (7) позволяет с единой точки зрения подходить к исследованию ряда их свойств. Подробный разговор на эту тему выходит за рамки данного пособия. Но один результат, который часто используется для доказательства существования и единственности решений уравнений, а также для оценки этих решений, мы здесь сформулируем. Предварительно приведём важное

О п р е д е л е н и е 7. ЛНП E называется *полным*, если любая последовательность $\{x_k\} \subset E$, удовлетворяющая условию $\| x_k - x_m \|_E \to 0$ при $k, m \to \infty$, имеет предел в пространстве E.

Доказано, что **все пространства, приведенные в § 3, являются полными ЛНП**.

Вернёмся к уравнению (7) и предположим, что его можно записать в виде

$$x = A_0 x + f. \tag{8}$$

Теорема 5 (принцип сжимающих отображений). *Пусть выполнены следующие условия*: E *– полное ЛНП*; *оператор* A_0 *действует из* E в E; *существует такое число* $\mu \in (0,1)$, *что для любых* $y_1, y_2 \in E$ *справедливо неравенство* (условие сжатия)

$$\| A_0 y_1 - A_0 y_2 \|_E \le m \| y_1 - y_2 \| . \tag{9}$$

Тогда для любого $f \in E$ *уравнение* (8) *имеет единственное решение* $x^* \in E$.

При этом x^* *является пределом в* E *любой последовательности* $\{x_k\}$, *элементы которой определяются равенствами*

$$x_1 = A_0 x_0 + f, \ \ x_2 = A_0 x_1 + f, \ldots, \ x_k = A_0 x_{k-1} + f, \ldots ,$$

где x_0 *– произвольная точка* E. *Для расстояния между* x^* и x_k *верна оценка*

$$\| x^* - x_k \|_E \le \frac{m^k}{1-m} \| x_0 - A_0 x_0 - f \|_E . \tag{10}$$

Таким образом, теорема 5 содержит не только достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (8), но и метод построения его приближенного решения x_k ($x_k \approx x^*$) с оценкой (10) погрешности этого приближения.

Приведем два следствия теоремы 5 для конкретных объектов.

1. Рассмотрим систему линейных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} c_1 = a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + f_1, \\ c_2 = a_{21} c_1 + a_{22} c_2 + f_2 . \end{cases} \tag{11}$$

Эту систему можно записать в виде уравнения (8), если положить

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

а оператор A_0 определить равенством $A_0 x = \begin{pmatrix} a_{11} c_1 + a_{12} c_2 \\ a_{21} c_1 + a_{22} c_2 \end{pmatrix}$.

Ясно, что A_0 действует из R^2 в R^2. Можно показать, что неравенство (9) при $E = R^2$ выполнено для данного оператора, если

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2} \le m < 1. \tag{12}$$

Таким образом получаем

Следствие 1. *Пусть выполнено неравенство* (12). *Тогда для любых чисел* f_1, f_2 *система* (11) *имеет единственное решение*: c_1^*, c_2^*. *При любом выборе чисел* $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ *последовательности, определенные равенствами*

$$\begin{cases} c_1^{(k)} = a_{11} c_1^{(k-1)} + a_{12} c_2^{(k-1)} + f_1, \\ c_2^{(k)} = a_{21} c_1^{(k-1)} + a_{22} c_2^{(k-1)} + f_2 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, ...),$$

сходятся при $k \to \infty$ *к* c_1^* *и* c_2^* *соответственно. Для расстояния в* R^2 *между векторами* $x^* = \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix}$ *и* $x_k = \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \end{pmatrix}$ *верна оценка* (10), *где надо заменить* E *на* R^2 *и положить* $x_0 = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix}$.

Утверждение, аналогичное следствию 1, верно для линейной системы алебраических уравнений любого порядка.

2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)\, x(s)\, ds + f(t), \qquad (13)$$

где $x(t)$ – искомая функция одной вещественной переменной t, $G(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, a и b – заданные числа, $a < b$. Это уравнение можно записать в виде (8), если оператор A_0 определить на функциях $x(t)$ равенством

$$A_0 x = \int_a^b G(t,s)\, x(s)\, ds$$

Легко показать, что если функция $G(t,s)$ непрерывна и

$$\max_{t \in [a,b]} \int_a^b |G(t,s)|\, ds \le m < 1, \qquad (14)$$

то этот оператор действует из $C[a, b]$ в $C[a, b]$ и удовлетворяет условию (9) при $E = C[a, b]$. Отсюда и из теоремы 5 вытекает

Следствие 2. *Пусть функция* $G(t,s)$ *непрерывна при* $t \in [a, b]$, $s \in [a, b]$ *и удовлетворяет неравенству* (14). *Тогда для любой функции* $f(t) \in C[a, b]$ *уравнение* (13) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in C[a, b]$. *При любом выборе* $x_0(t) \in C[a, b]$ *последовательность*

$$x_k(t) = \int_a^b G(t,s)\, x_{k-1}(s)\, ds + f(t) \qquad (k = 1,2,...)$$

сходится к $x^*(t)$ *в* $C[a, b]$. *Для расстояния в* $C[a, b]$ *между* $x^*(t)$ *и* $x_k(t)$ *верна оценка* (10) *с* $E = C[a, b]$.

Упражнения к главе 2

1. Проверьте, принадлежит ли заданная функция указанному пространству. Если принадлежит, то вычислите её норму в этом пространстве.

а) $y = x^2 - 2x$, $C^2[0,2]$;

б) $y = x^2 - 2x$, $L_2(0,1)$;

в) $y = x/(x+4)$, $C[-3,1]$;

г) $y = x/(x+4)$, $L(-3,1)$;

д) $y = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 3x^2 + 4 \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$, $C[-1,1]$;

е) $y = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 3x^2 + 4 \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$, $L(-1,1)$;

ж) $y = \begin{cases} 4 \text{ при } x < 0, \\ x^2 + 4 \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$, $C^1[-1,1]$;

з) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $C[0,1]$;

и) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $L_2(0,1)$;

к) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $L_4(0,1)$;

л) $y = \dfrac{1}{(2-x)^3}$, $L(0,2)$.

2. Найдите расстояние $\| y_1 - y_2 \|$ между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в указанных пространствах:

а) $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = 1$, $C^1[0,2\pi]$;

б) $y_1 = x$, $y_2 = 3/(x+2)$, $C[0,1]$ и $L(0,1)$;

в) $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{x}$, $C[0,1]$ и $L_2(0,1)$.

3. Задана последовательность функций ($k = 1, 2, \ldots$)

$$y_k(x) = \begin{cases} 1 - kx \text{ при } 0 \le x < 1/k, \\ 0 \text{ при } 1/k \le x \le 1. \end{cases}$$

Вычислите пределы : $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{C[0,1]}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{L(0,1)}$.

Прокомментируйте полученный результат.

4. Задана последовательность функций $y_k = x^k$ ($k = 1,2,\ldots$).
Вычислите пределы : $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{C[0,1]}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \| y_k \|_{L_2(0,1)}$.

Прокомментируйте полученный результат.

5. Оператор A определён указанным ниже равенством. Вычислите значение A на заданном элементе (помеченном индексом 0). Является

ли A линейным оператором (функционалом)? В примерах г) – ж) укажите возможные область определения и область значений A.

а) $Ax = \ln x$, $x_0 = 1$;

б) $Ax = x_1 \sin x_2 + (x_1 - x_2)^2$, здесь $x = (x_1, x_2)$ - точка R^2, $x_0 = (2, 0)$;

в) $Ax = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – точка R^2, $x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

г) $Ay = y'(0) + 2y(1)$, здесь $y = y(x)$, $y_0 = x^4 + 3$;

д) $Ay = 4y'' + 4y^3$, здесь $y = y(x)$, $y_0 = \cos x$;

е) $Au = \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} - 6t\,u(1,t)$, здесь $u = u(x, t)$, $u_0 = t x^2$;

ж) $Au = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 2x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, здесь $u = u(x_1, x_2)$, $u_0 = x_1 - 2x_1^3 x_2$.

6. Приведите примеры функционалов, определённых:

а) на $L(0,1)$; б) на $C[0,1]$; в) на $C^2[0,1]$.

7. Приведите примеры операторов, действующих:

а) из $L(0,1)$ в R^2; б) из $C[0,1]$ в R^3; в) из $C[0,1]$ в $C^1[0,1]$.

Ответы к упражнениям

1. а) да, 5; б) да, $(8/15)^{1/2} \approx 0{,}73$; в) да, 3; г) да, $4\ln 3{,}2 - 2 \approx 2{,}65$; д) нет; е) да, 5; ж) да, 7; з) нет; и) да , $2^{1/2} \approx 1{,}41$; к) нет; л) нет.

2. а) 4; б) 1,5 и $3\ln 1{,}5 - 0{,}5 \approx 0{,}72$; в) $e - e^{-1} \approx 2{,}35$ и $(0{,}5(e^2 - e^{-2}) - 2)^{1/2} \approx$ $\approx 1{,}28$.

3. 1 и 0. 4. 1 и 0.

5. а) $Ax_0 = 0$, A – нелинейный функционал; б) $Ax_0 = 4$, A – нелинейный функционал; в) $Ax_0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$, A – линейный оператор; г) $Ay_0 = 8$, A – линейный функционал; д) $Ay_0 = -2\sin 2x \sin x$, A – нелинейный оператор; е) $Au_0 = 2t(1-3t)$, A – линейный оператор; ж) $Au_0 = -2x_1^2(2x_1^2 + 3)$, A – линейный оператор.

Глава 2. **ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

§ 1. *НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВЕДЕНИЯ О СОВОКУПНОСТИ РЕШЕНИЙ*

1. *Дифференциальным уравнением* (д.у.) *с частными производными* называют уравнение, связывающее неизвестную функцию *нескольких* независимых переменных, её частные производные и сами независимые переменные.

Порядком д. у. называют порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Таким образом, общий вид д. у. первого порядка относительно функции $u(x, y)$ двух независимых переменных x и y –

$$F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0; \qquad (1)$$

а общий вид д.у. второго порядка относительно $u(x, y)$ –

$$F_2(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \qquad (2)$$

где F_1 и F_2 – заданные функции.

<u>Здесь и далее</u> u_x, u_y и т.п. – <u>сокращённые обозначения для частных производных функции</u> $u(x, y)$, точнее:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ясно, что конкретные уравнения вида (1), (2) могут не содержать всех величин, указанных в качестве аргументов функций F_1, F_2. Например,

$$u_y - u_{xx} + 2u = \sin y \qquad (2а)$$

есть уравнение вида (2), но в (2а) явно не присутствуют x, u_x, u_{xy}, u_{yy}.

Д. у. с частными производными вида (1), (2) являются математическими моделями многих физических, химических, биологических и социальных процессов. Как правило, в реальных задачах изменение независимых переменных x, y ограничено некоторой областью D плоскости Oxy (пространства R^2).

Решения дифференциальных уравнений можно искать среди функций, обладающих различной гладкостью (под гладкостью функции понимается существование и непрерывность её производных различного порядка). В приложениях наиболее часто ищутся классические решения уравнений.

О п р е д е л е н и е 1. *Классическим решением* (далее просто *решением*) д.у. (1) в области $D \subset R^2$ называется любая функция $u(x,y) \in C^1(D)$, которая, будучи подставлена в (1) вместо u, обратит это уравнение в тождество, т.е. равенство, верное для всех $(x, y) \in D$.

Аналогично, *классическим решением* д. у. (2) в области D называется любая функция $u(x,y) \in C^2(D)$, обращающая уравнение (2) в верное равенство при всех $(x, y) \in D$.

Заметим, что если д. у. не содержит явно той или иной производной высшего порядка искомой функции, то требования к гладкости классического решения данного уравнения можно ослабить.

Например, *классическим решением* уравнения (2а) называется любая функция $u(x,y) \in C^{2,1}(D)$, удовлетворяющая этому уравнению. (Пояснение обозначений $C^m(D)$, $C^{m,k}(D)$ см. на стр. 13).

О п р е д е л е н и е 2. Д. у. называется *линейным*, если искомая функция и все её производные входят в уравнение в первой степени.

Таким образом, общий вид линейного д. у., например, второго порядка относительно $u(x, y)$ –

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + a\,u_x + b\,u_y + c\,u = f, \qquad (3)$$

где A, B, C, a, b, c и f – заданные функции независимых переменных x и y, $u = u(x, y)$ – искомая функция. Д. у. (3) называется *неоднородным*, если его правая часть f не равна тождественно нулю, и называется *однородным*, если $f(x, y) \equiv 0$, т.е. если (3) имеет вид

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + a\,u_x + b\,u_y + c\,u = 0. \qquad (4)$$

Последнее уравнение обладает следующим важным свойством (доказательство которого рекомендуем провести самостоятельно).

Теорема 1. *Пусть* $u_1(x, y), \ldots, u_k(x, y)$ – *решения д.у.* (4), $C_1, \ldots, C_k$ – *числа. Тогда функция* $\sum_{j=1}^{k} C_j u_j(x, y)$ *также является решением д.у.* (4).

2. Для обыкновенного д.у. n - го порядка вся совокупность решений (за исключением возможных «особых» решений) представляется функцией от независимой переменной и n произвольных *постоянных*. Для д.у. с частными производными n - го порядка совокупность всех решений (снова за возможным исключением «особых» решений) даётся формулой, содержащей n произвольных *функций*. Приведём несколько простых примеров, поясняющих сказанное.

а) Найти все решения уравнения первого порядка относительно функции $z(x)$: $z' = 0$.

Хорошо известен ответ: $z = g$, где g – произвольная постоянная.

б) Найти все решения уравнения первого порядка относительно функции $u(x, y)$: $u_x = 0$.

Ясно, что общим решением этого д. у. будет $u \equiv y(y)$, где y – произвольная непрерывная функция.

в) Найти все решения уравнения второго порядка $z'' = 0$ относительно функции $z(x)$.

Ответ получим, интегрируя это равенство дважды по x: $z = g_1 x + g_2$, где g_1 и g_2 – произвольные постоянные.

г) Найти все решения уравнения второго порядка $u_{xy} = 0$ относительно функции $u(x, y)$.

Интегрируем это равенство вначале по y, затем полученное равенство-по x. В результате получим $u = y_1(y) + y_2(x)$, где y_1 и y_2 – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Таким образом, множество всех решений д. у. с частными производными имеет структуру существенно более сложную, чем множество решений обыкновенного д.у. Поэтому проблема выделения из всей совокупности решений уравнения с частными производными одного решения, описывающего изучаемый реальный процесс, гораздо сложнее, чем аналогичная проблема для обыкновенного дифференциального уравнения.

Подробный разговор об этом выходит за рамки данного пособия. Отметим только, что материал следующих двух параграфов имеет непосредственное отношение к решению упомянутой проблемы.

§ 2. *КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ*

Главным предметом исследований классической математической физики являются частные случаи уравнения (3). Теория д. у. (3), методы отыскания его решений в значительной мере зависят от коэффициентов A, B и C, которые определяют ***тип*** этого уравнения. Перейдём к строгим формулировкам, предположив вначале, что A, B, C – *числа*.

О п р е д е л е н и е 3. Уравнение (3) называют ***эллиптическим*** (говорят также, что оно является уравнением эллиптического типа), если

$$AC - B^2/4 > 0 . \tag{5}$$

При выполнении неравенства (5) можно ввести новые независимые переменные

$$\xi = \xi(x, y), \quad \tau = \tau(x, y) \tag{6}$$

таким образом, что уравнение (3), после замены переменных по формулам (6), примет вид

$$u_{xx} + u_{tt} + a_1 u_x + b_1 u_t + c_1 u = f_1(x, t),$$

где числа a_1, b_1, c_1 и функция f_1 связаны определённым образом с коэффициентами и правой частью (3).

Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{7}$$

называемое *уравнением Лапласа*. Здесь $A = C = 1$, $B= 0$, $a = b = c= 0$, $f \equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 4. Уравнение (3) называется ***гиперболическим***, если

$$AC - B^2/4 < 0. \tag{8}$$

При выполнении неравенства (8) уравнение (3) с помощью замены переменных (6) преобразуется к виду

$$u_{xx} - u_{tt} + a_2 u_x + b_2 u_t + c_2 u = f_2(x, t) .$$

Простейшим уравнением гиперболического типа является однородное *волновое уравнение* (другое название – *уравнение колебаний*)

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 . \tag{9}$$

О п р е д е л е н и е 5. Уравнение (3) называется ***параболическим***, если

$$AC - B^2/4 = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0 . \tag{10}$$

При выполнении (10) д. у. (3) заменой (6) приводится к виду

$$u_{xx} + a_3 u_x + b_3 u_t + c_3 u = f_3(x, t), \text{ где } b_3 \neq 0.$$

Простейшим уравнением параболического типа является однородное *уравнение теплопроводности* (другое название – *уравнение диффузии*)

$$u_y - u_{xx} = 0. \tag{11}$$

Если A, B, C являются *функциями* (x, y), то тип уравнения (3) определяется с помощью условий (5), (8), (10) в каждой фиксированной точке (x_0, y_0) области изменения (x, y).

Поясним название типов д. у. Рассмотрим алгебраическое уравнение второй степени относительно двух переменных, например, x и y:

$$A x^2 + B xy + C y^2 + a x + b y + c = 0. \tag{12}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что если уравнение (12) определяет на плоскости (где введена система прямоугольных координат Oxy) некоторую *кривую*, то эта кривая является: а) эллипсом или окружностью при выполнении неравенства (5); б) гиперболой при выполнении (8); в) параболой при выполнении (10).

В заключение теоретической части параграфа отметим, что существует классификация уравнений в частных производных произвольного порядка с любым числом независимых переменных.

П р и м е р. Определите тип уравнения

$$v_{xt} + 2v_t + 4v_{xx} + 5v = 3t ,$$

запишите простейшее уравнение этого типа, используя заданные обозначения для искомой функции и её аргументов.

Р е ш е н и е. Здесь $A = 4$, $B = 1$, $C = 0$, так что

$$AC - B^2/4 = 0 - 0{,}5^2 = -0{,}25 < 0.$$

Следовательно, заданное уравнение является гиперболическим. Простейшее д. у. этого типа в заданных обозначениях имеет вид: $v_{tt} - v_{xx} = 0$ (волновое уравнение).

§ 3. *ПОНЯТИЕ О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ И О КОРРЕКТНОСТИ ИХ ПОСТАНОВОК*

Перед чтением этого параграфа следует повторить сновные понятия функционального анализа (см. главу 1).

1. Рассмотрим задачу отыскания такого элемента u некоторого множества U, который удовлетворяет системе уравнений:

$$l_0 u = f_0 , \tag{13}$$

$$l_1 u = f_1 , \dots , l_m u = f_m ; \tag{14}$$

здесь f_j – заданные элементы множеств F_j , l_j – заданные операторы, действующие из U в F_j ($j= 0,1,...,m$). В частности, U и F_j могут быть линейными нормированными пространствами (ЛНП).

Рассмотрим ЛНП $U^0 \supset U$ и ЛНП $F_j^0 \supset F_j$ $(j = 0,1,..., m)$.

О п р е д е л е н и е 6. Задача отыскания решения системы уравнений (13),(14) (или, говорят коротко, «задача (13),(14)») называется корректной на множестве U в пространствах (или относительно пространств) $(U^0; F_0^0,..., F_m^0)$, если выполнены следующие условия:

а) для *любых* $f_j \in F_j$ система имеет решение $u \in U$;

б) при фиксированных $f_j \in F_j$ система не может иметь в U двух различных решений;

в) для любого (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенств $\| f_j - \tilde{f}_j \|_{F_j^0} < d$ $(j = 0,1,..., m)$ следует неравенство $\| u - \tilde{u} \|_{U^0} < e$, где $\tilde{u} \in U$ – решение системы уравнений, полученной из (13),(14) заменой там f_j на $\tilde{f}_j \in F_j$.

Кратко смысл этого определения можно изложить следующим образом. Задача (13), (14) называется корректной, если: а) она имеет решение для любых заданных величин f_j ; б) решение единственно; в) решение непрерывно зависит от заданных величин.

Если система (13), (14) описывает некоторый реальный процесс, то требования определения 4 представляются весьма естественными. Условие а) означает, что уравнения, входящие в (13),(14), внутренне непротиворечивы и не противоречат друг другу. Условие б) означает, что система (13),(14) несёт, в известном смысле, полную информацию об искомом решении. Выполнение условия в) гарантирует, что малые погрешности заданных величин f_j (как правило, f_j – это величины, измеряемые в ходе эксперимента) приводит к малым погрешностям искомой величины u. Введение пространств U^0 и F_j^0 требуется, в частности, для того, чтобы указать, в каком смысле понимается эта «малость».

2. Сказанное выше имеет непосредственное отношение и к дифференциальным уравнениям. Действительно, д. у., пусть это будет уравнение (13), имеет, как правило, бесчисленное множество решений. Таким образом, уравнение (13) некорректно в смысле определения 4 (нарушено условие б). Возникает вопрос: какие дополнительные уравнения (уравнения (14)) присоединить к д.у. (13), чтобы получилась корректная задача?

Если уравнение (13) описывает физический (или иной реальный) процесс, то физический смысл этого математического вопроса состоит в следующем: какие дополнительные измерения следует выполнить, чтобы по полученной информации можно было корректно определить величину u?

Поиск ответа на поставленный математический вопрос для д. у. с частными производными – это предмет специальных исследований, элементом которых является определение типа уравнения.

Обычно дополнительные к д. у. уравнения связывают искомую функцию u и её производные на границе (или части границы) заданной области изменения аргументов u. Поэтому эти уравнения называют часто *граничными условиями*. В зависимости от физического смысла аргументов функции u, граничные условия подразделяют на *краевые* и *начальные* условия. Задачу отыскания такого решения д. у., которое удовлетворяет заданным граничным условиям, называют *граничной задачей* для этого уравнения. Используют также термины: «краевая задача», «начальная задача» (если заданы только начальные условия), «смешанная задача» (если среди граничных условий есть начальные и краевые).

Примеры корректных граничных задач для основных уравнений математической физики приведены в главах 4, 5, 6 пособия.

3. Требование корректности изучаемых задач преобладало в классической математической физике. Однако всё более широкое применение математики для описания окружающего нас мира показало, что «корректно поставленные» задачи – это далеко не единственные задачи, правильно отражающие реальные явления. Поэтому за последние десятилетия получила большое развитие теория «некорректных задач», разговор о которой выходит за рамки данного пособия. Тем, кого она интересует, рекомендуем познакомиться, например, с книгой Тихонова А.Н., Арсенина В.Я. «Методы решения некорректных задач», М., «Наука», 1979 г.

Упражнения к главе 2

Укажите тип уравнения. Запишите (с сохранением обозначений для всех переменных) простейшее уравнение этого типа.

1. $z_y - 10\, z_{xy} + 8\, z_{yy} + 6\, z_{xx} + 4\, z - x = 0.$
2. $u_{zz} + 6\, u_z - 4\, u_{zt} + 5\, u\, z + t \sin t = 0.$
3. $V_{xy} + 3V_y + 4V_{yy} + V_{xx} - 8V_x - 5V = 0.$
4. $4T_{xx} + 12T_{xt} + xT_t + 9T_{tt} = 7\,t - t\,x^2.$
5. $P_{zz} - 2\,P_{yy} + 3\,zP_z - z^2 = 0.$
6. $H_{ut} + H_{uu} + 8\,H_t + 4\,H_{tt} = t^3H + H_u\,.$

Глава 3. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. *ПОНЯТИЕ О РЯДАХ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ*

Решения многих дифференциальных уравнений удобно представлять в виде сумм рядов, образованных из так называемых ортогональных систем функций (или с «участием» таких систем). Об этих рядах и пойдёт речь в настоящей главе. Предварительно приведём несколько обозначений, используемых ниже (подробнее о перечисленных ниже множествах функций см. § 3 главы 1).

$L_2(a, b)$ – множество, состоящее из тех функций $f(x)$ одной переменной, для которых существует интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ (понимаемый в смысле Лебега). Здесь и далее (a, b) – конечный интервал числовой оси, $a < b$.

$C[a, b]$ – множество непрерывных на интервале $[a, b]$ функций одной переменной.

$C^m[a, b]$ – множество функций одной переменной, имеющих на $[a, b]$ непрерывные производные до m - го порядка включительно (m – натуральное число).

О п р е д е л е н и е 1. Функции $v(x), z(x) \in L_2(a, b)$ называются *ортогональными* на (a, b), если $\int\limits_a^b v(x)\,z(x)\,dx = 0$.

Заметим, что принадлежность $v(x)$ и $z(x)$ множеству $L_2(a, b)$ гарантирует существование этого интеграла.

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность функций из $L_2(a, b)$

$$v_1(x), v_2(x), ..., v_k(x), ... \qquad \text{(или, кратко, } \{v_k(x)\},\ k = 1, 2, ...) \tag{1}$$

называется *ортогональной системой* на (a, b), если любые две различные функции системы ортогональны:

$$\int\limits_a^b v_k(x)\,v_m(x)dx = 0 \quad \text{для} \quad k \neq m,$$
$$\text{причём}, \quad \int\limits_a^b v_k^2(x)dx > 0 \qquad (k, m = 1,2,...). \tag{2}$$

На практике используются различные конкретные ортогональные системы функций, например, тригонометрические системы, системы собственных функций краевых задач для дифференциальных уравнений.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть задана ортогональная на (a, b) система функций (1) и числовая последовательность $A_1, A_2, ..., A_к, ...$. Функциональный ряд

$$A_1 v_1(x) + A_2 v_2(x) + \dots + A_k v_k(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) \qquad (3)$$

называется *рядом по ортогональной системе* (1) или *ортогональным рядом*.

Для наших дальнейших построений важно научиться решать задачу о разложении функций в ряды вида (3). Точнее, нам важно знать ответы на следующие три вопроса.

1. Пусть имеется ортогональная система (1). Можно ли по заданной функции $f(x)$ (удовлетворяющей некоторым условиям) найти такие числа A_k, чтобы ряд (3) сходился к $f(x)$ в том или ином смысле?

2. Как найти A_k ?

3. В каком смысле (при найденных A_k) ряд (3) будет сходиться к $f(x)$?

Ответ на первый вопрос зависит от выбора системы (1) и для рассматриваемой нами далее системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля является утвердительным (см. § 2).

Ответ на второй вопрос попробуем получить, исходя из предположения, что ряд (3) сходится на $[a, b]$ к $f(x)$, т.е. верно равенство

$$f(x) = A_1 v_1(x) + A_2 v_2(x) + \dots + A_k v_k(x) + \dots, \quad x \in [a, b]. \qquad (4)$$

Умножим обе части (4) на $v_k(x)$ и проинтегрируем полученное равенство по интервалу $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) v_k(x) dx = A_1 \int_a^b v_1(x) v_k(x) dx + A_2 \int_a^b v_2(x) v_k(x) dx + \dots + A_k \int_a^b v_k^2(x) dx + \dots.$$

Согласно (2), в правой части последнего равенства все интегралы равны нулю, кроме $\int_a^b v_k^2(x) dx$, так что мы имеем

$$\int_a^b f(x) v_k(x) dx = A_k \int_a^b v_k^2(x)\, dx, \qquad \text{или}$$

$$A_k = \frac{1}{d_k} \int_a^b f(x) v_k(x) dx \ , \text{ где } \quad d_k = \int_a^b v_k^2(x) dx. \qquad (5)$$

Итак, можно сформулировать следующее

Утверждение (необходимый признак сходимости ортогонального ряда). *Если ряд* (3) *сходится на интервале* $[a, b]$ *то коэффициенты* A_k *ряда определяются его суммой* $f(x)$ *по формулам* (5).

Точнее говоря, это утверждение *верно при условии, что законны действия, которые были выполнены при переходе от* (4) *к* (5), например, если $v_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и ряд (3) равномерно сходится на $[a, b]$.

О п р е д е л е н и е 4. Числа A_k, найденные по формулам (5), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{v_k(x)\}$. Ряд (3) с коэффициентами Фурье A_k называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{v_k(x)\}$ (независимо от того, сходится ли этот ряд к $f(x)$ или нет); при этом пишут

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x).$$

Ответ на третий вопрос зависит и от системы $\{ v_k(x) \}$, и от функции $f(x)$. Мы вспомним здесь некоторые типы сходимости функционального ряда (на примере ряда (3)) и почему, с точки зрения приложения рядов к приближенным вычислениям, надо знать, в каком смысле сходится такой ряд. А в § 3 познакомимся с некоторыми достаточными условиями сходимости ряда по собственным функциям одной важной для приложений краевой задачи.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть все члены ряда (3) определены при некотором $x \in [a, b]$. Говорят, что ряд (3) в точке x сходится к $f(x)$, если

$$\lim_{n \to \infty} \left| f(x) - s_n(x) \right| = 0, \text{ где } s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k v_k(x) - \tag{6}$$

n- ая частичная сумма ряда (3). Если ряд (3) сходится к $f(x)$ при всех $x \in J$, где J – подмножество $[a, b]$, то говорят, что он сходится к $f(x)$ *поточечно* на J.

В этом случае равенство (4) верно при всех $x \in J$ (при всех $x \in [a, b]$, если $J = [a, b]$) и, значит, для каждого фиксированного $x \in J$ приближённое равенство

$$f(x) \approx s_n(x) \tag{7}$$

(которым пользуются на практике) можно сделать как угодно точным, выбрав n достаточно большим, причем это n будет зависеть от x. Говоря более строго, для любого $x \in J$ по заданному числу $\delta > 0$ можно указать такой номер $N = N(x)$, что при всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $| f(x) - s_n(x) | \leq \delta$.

О п р е д е л е н и е 6. Ряд (3), сходящийся к $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, называется *равномерно* сходящимся на $[a, b]$, если для любого числа $\delta > 0$ найдется такой номер N, не зависящий от x, что при всех $n \geq N$ и при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $| f(x) - s_n(x) | \leq \delta$, или, что то же самое,

$$\max_{x \in [a,b]} | f(x) - s_n(x) | \leq \delta . \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 1. Если $v_k(x) \in C[a, b]$, то равномерная сходимость ряда (3) есть сходимость в пространстве $C[a, b]$, так как в этом случае (8) равносильно неравенству

$$\| f(x) - s_n(x) \|_{C[a,b]} \le d$$

или, с учетом произвольности δ, равенству

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - s_n(x) \|_{C[a,b]} = 0 .$$

В ряде прикладных задач важна не поточечная близость двух функций на области их определения, а близость, в некотором интегральном смысле. В связи с этим приведём еще одно понятие сходимости функционального ряда.

О п р е д е л е н и е 7. Говорят, что ряд (3) на интервале (a, b) *сходится к* $f(x)$ *в среднем со степенью* 2 (или *сходится в среднем квадратичном*), если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f(x) - s_n(x) \right)^2 dx = 0 \tag{9}$$

Из сходимости функционального ряда в среднем квадратичном не следует, как нетрудно видеть, его поточечная (а тем более равномерная) сходимость на $[a, b]$. Можно привести пример, показывающий, что из поточечной сходимости не следует сходимость в среднем. А вот из равномерной сходимости ряда на $[a, b]$ следует его сходимость в среднем квадратичном (подробнее об этом – в § 4.1).

Если ряд (3) сходится к $f(x)$ на (a, b) в среднем квадратичном, то приближённым равенством (7) можно пользоваться, но в данном случае малая погрешность в (7) означает (в силу (9)), что мала величина интеграла

$$\int_a^b \left(f(x) - s_n(x) \right)^2 dx .$$

З а м е ч а н и е 2. Сходимость в среднем со степенью 2 есть сходимость в пространстве $L_2(a, b)$, так как (9) равносильно равенству

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - s_n(x) \|_{L_2(a,b)} = 0 .$$

§ 2 . *СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ*

Задачей Штурма-Лиувилля называют следующую краевую задачу

$$v¢¢ + q(x)v = - l\, v , \tag{10}$$

$$a_1 v(a) + b_1 v¢(a) = 0 ,\ \ a_2 v(b) + b_2 v¢(b) = 0 . \tag{11}$$

Здесь: $v(x)$ – искомая функция; a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 – заданные числа, $a < b$; $q(x)$ – заданная на интервале $[a, b]$ функция; l – числовой параметр (т.е. числовая переменная, которой можно придавать различные значения).

Всюду далее предполагаем, что:

$$q(x) \in C\,[a, b],\ \ |a_1| + |b_1| > 0,\ \ |a_2| + |b_2| > 0.$$

О п р е д е л е н и е 8. Решением задачи (10), (11) называется функция $v(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (10) (при всех $x \in [a, b]$) и краевым условиям (11).

Ясно, что при любом значении l эта задача имеет нулевое решение: $v(x) \equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 9. *Собственной функцией* (*с.ф.*) задачи (10) , (11) называется её *ненулевое решение*. *Собственным числом* (*с.ч.*) задачи (10), (11) называется такое значение l , при котором задача имеет ненулевое решение.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Задача* (10), (11) *имеет счётное множество собственных чисел*: $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots$ *Все с.ч. вещественны и могут быть расположены в виде монотонной, неограниченно возрастающей последовательности*:

$$l_1 < l_2 < \ldots < l_k < \ldots ; \quad l_k \to \infty \ \text{при} \ k \to \infty .$$

2. *Каждому с.ч.* l_k *отвечает единственная, с точностью до постоянного множителя, собственная функция* $v_k(x)$ *задачи. Иными словами, при* $l = l_k$ *задача* (10), (11) *имеет бесконечно много ненулевых решений, но любые два из них* $v_k(x)$ *и* $u_k(x)$ *связаны равенством* $u_k(x) = C\, v_k(x)$, *где* C – *некоторое число.*

4. *Система с.ф. задачи* (10), (11) $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x), \ldots$ *ортогональна на* (a, b).

(Отметим, что в некоторых случаях удобно нумерацию с.ч. и с.ф. начинать не с 1, а с 0: $l_0, l_1, \ldots$ и соответственно $v_0(x), v_1(x) \ldots$).

Доказательство теоремы достаточно сложно и мы его полностью не приводим. Установим лишь ортогональность с.ф. для случая, когда $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$, так что краевые условия (11) принимают вид

$$v(a) = 0 , \ v(b) = 0. \qquad (12)$$

Пусть функции $U(x), V(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяют краевым условиям (12). Преобразуем интегал, использовав дважды формулу интегрирования по частям ($\int u dv = uv - \int v du$; первый раз полагаем $u = U$, а затем $u = U'$):

$$\int_a^b V''(x)U(x)\,dx = \Big(U(x)V'(x) - U'(x)V(x)\Big)\Big|_a^b + \int_a^b V(x)U''(x)\,dx =$$

$= \int_a^b V(x)U''(x)\,dx$; последнее равенство следует из предположения, что

$$U(a) = V(a) = U(b) = V(b) = 0 .$$

Из полученного равенства вытекает (аргумент x у функций опускаем):

$$\int_a^b (V^{//} + qV)U dx = \int_a^b (U^{//} + qU)V dx. \qquad (13)$$

Положив $V = v_k$, $U = v_m$ и учтя равенства

$$v_k^{//} + qv_k = -l_k v_k, \quad v_m^{//} + qv_m = -l_m v_m,$$

получим из (13)

$$-l_k \int_a^b v_k v_m \, dx = -l_m \int_a^b v_k v_m \, dx \quad \text{или} \quad (l_k - l_m)\int_a^b v_k v_m \, dx = 0.$$

Отсюда следует, что $\int_a^b v_k v_m \, dx = 0$ при $k \neq m$, так как в этом случае $l_k \neq l_m$ (согласно п. 1 теоремы 1).

При решении уравнений математической физики часто важен знак собственных чисел задачи (10), (11). Из п. 1 теоремы 1 вытекает, что если задача имеет отрицательные с.ч., то их число конечно. Но оказывается, при некоторых предположениях (естественных для прикладных задач) *все* l_k *неотрицательны*. Например, верна

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства*

$$q(x) \leq 0 \quad \text{при } x \in [a, b], \quad a_1 b_1 \leq 0, \; a_2 b_2 \geq 0. \qquad (14)$$

Тогда наименьшее с.ч. задачи (10), (11) $l_1 \geq 0$ (*так что все с. ч. задачи, начиная со второго, положительны*). *Более того, при выполнении* (14), *равенство* $l_1 = 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $q(x) \equiv 0, a_1 = 0$, $a_2 = 0$ (*т.е.* задача (10), (11) *имеет вид*: $v^{//} = -l\, v$, $v^{/}(a) = 0$, $v^{/}(b) = 0$).

З а м е ч а н и е 3. Если $q(x) \equiv const$, то уравнение (10) легко решить в элементарных функциях. Используя явное выражение для общего решения (10), можно найти с.ч. и с.ф. задачи (10), (11) и непосредственными вычислениями убедиться в справедливости теорем 1 и 2 в этой ситуации.

Докажем, например, что задача (где $\alpha \geq 0$ и $h > 0$ – заданные числа)

$$v^{//} = -l\, v, \qquad (15)$$

$$v(0) = 0, \; a\, v(h) + v^{/}(h) = 0 \qquad (16)$$

не имеет неположительных с.ч. (эта задача – частный случай (10), (11)).

Иначе говоря, покажем, что при любом $l \leq 0$ задача (15), (16) имеет только нулевое решение. Предположим сначала, что в (15) $l < 0$. Тогда характеристическое уравнение для д. у. (15) $r^2 = -l$ имеет два различных вещественных корня $r_{1,2} = \pm\sqrt{-l} = \pm m$, *где* $m = \sqrt{-l} > 0$. Таким образом, общее решение (15) имеет вид

$$v = C_1 e^{-m x} + C_2 e^{m x} \qquad (17)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Отсюда

$$v' = -mC_1e^{-m x} + mC_2e^{m x}. \qquad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (16), получим:

$$v(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$a\ v(h) + v'(h) = a\ (C_1e^{-m h} + C_2e^{m h}) - m\ (C_1e^{-m h} - C_2e^{m h}) = 0.$$

Отсюда

$$C_2 = -C_1, \qquad (19)$$

$$a\,(C_1e^{-m h} - C_1e^{m h}) - m\ (C_1e^{-m h} + C_1e^{m h}) = 0 \quad \text{или}$$

$$C_1[a\,(e^{-m h} - e^{m h}) - m\ (e^{-m h} + e^{m h})] = 0. \qquad (20)$$

Так как $m > 0$ и $h > 0$, то $e^{-mh} < 1 < e^{mh}$. Следовательно,

$$a\ (e^{-m h} - e^{m h}) \le 0 \ \text{(по условию } a \text{ ³ } 0\text{).}$$

Поскольку μ > 0, то $-m\,(e^{-m h} + e^{m h}) < 0$. Таким образом, в (20) в квадратных скобках – отрицательное число. Поэтому из (20) следует, что $C_1 = 0$, а отсюда и из (19) получаем $C_2 = 0$. Подставляя C_1 и C_2 в (17), получаем $v(x) \equiv 0$.

Решим (15), (16) при $l = 0$. Характеристическое уравнение для (15) в этом случае имеет вид $r^2 = 0$, его корни $r_1 = r_2 = 0$. Следовательно, общее решение (15) при $l = 0$:

$$v = C_1 + C_2\,x, \qquad (21)$$

а $v' = C_2$. Подставляя v и v' в (16), получим

$$v(0) = C_1 = 0\ ,\ a\ v(h) + v'(h) = a\ (C_1 + C_2\,h) + C_2 = 0\ .$$

Отсюда $C_2\ (a\ h + 1) = 0$ и $C_2 = 0$, так как $a\ h + 1 > 0$. Итак , $C_1 = C_2 = 0$, и согласно (21) , $v(x) \equiv 0$. Утверждение доказано.

П р и м е р 1. Найти с.ч. и с.ф. задачи

$$v'' = -\,l\,v\,, \qquad (15)$$

$$v\,(0) = 0\ ,\ v'\,(10) = 0\ . \qquad (22)$$

Р е ш е н и е. Вначале заметим, что задача (15), (22) – это задача (10), (11) при $q\,(x) = 0$, $a = 0$, $b = 10$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$. Таким образом, для (15), (22) выполнены условия теоремы 2 и, следовательно, все её с.ч. положительны. Поэтому мы решаем д.у. (15) только при $l > 0$. В этом случае характеристическое уравнение $r^2 = -\,l$ имеет мнимые корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{l}\,i,\ \textit{где}\ i = \sqrt{-1}$, а общим решением (15) будет функция

$$v = C_1 \sin\sqrt{l}\,x + C_2 \cos\sqrt{l}\,x\,. \qquad (23)$$

Нам требуется найти такие значения l и такие, не равные одновременно нулю, постоянные C_1 и C_2, чтобы функция (23) удовлетворяла краевым условиям (22). Подставляем $v(x)$ из (23) в первое краевое условие:

$$v(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0\,;$$

отсюда получаем $C_2 = 0$. Находим $v^{/} = C_1\sqrt{l}\cos\sqrt{l}\,x - C_2\sqrt{l}\sin\sqrt{l}\,x$ и подставляем во второе краевое условие:

$$v^{/}(10) = C_1\sqrt{l}\cos 10\sqrt{l} = 0 .$$

Поскольку $l > 0$, C_1 ¹ 0 (ведь $C_2 = 0$, а мы ищем не равные одновременно нулю C_1 и C_2), то последнее уравнение равносильно уравнению

$$\cos 10\sqrt{l} = 0 \tag{24}$$

Как известно, все положительные решения уравнения (24) даются формулой $10\sqrt{l} = \dfrac{(2k-1)p}{2}$ $(k = 1,2,...)$. Отсюда находим с.ч. задачи (15),(22):

$$l_k = \frac{(2k-1)^2 p^2}{400} \quad (k = 1, 2, ...) .$$

Подставляя в (23) $l = l_k$, $C_2 = 0$, а C_1 – любое, не равное нулю, число, например, $C_1 = 1$, получим с.ф. этой задачи:

$$v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)p\,x}{20} \quad (k = 1, 2, ...) .$$

Опишем <u>общую схему отыскания с.ч. и с.ф.</u> задачи Штурма-Лиувилля, которой рекомендуем следовать в более сложных случаях, чем рассмотренный в примере 1.

Находим общее решение д.у. (10)

$$v = C_1 V_1(x,l) + C_2 V_2(x,l), \tag{25}$$

где V_1, V_2 – частные, линейно независимые решения (10), а C_1, C_2 – произвольные постоянные. Теперь будем искать такие значения C_1, C_2 и λ, чтобы C_1 и C_2 не равнялись одновременно нулю и функция (25) удовлетворяла краевым условиям (11). Для этого подставим (25) в (11):

$$\begin{cases} a_1(C_1V_1(a,l)+C_2V_2(a,l))+b_1(C_1V_1^{/}(a,l)+C_2V_2^{/}(a,l))=0, \\ a_2(C_1V_1(b,l)+C_2V_2(b,l))+b_2(C_1V_1^{/}(b,l)+C_2V_2^{/}(b,l))=0. \end{cases} \tag{26}$$

При фиксированном l – это система линейных однородных уравнений относительно чисел C_1, C_2. Известно, что такая система имеет ненулевые решения (а именно эти решения мы ищем) тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1V_1(a,l)+b_1V_1^{/}(a,l) & a_1V_2(a,l)+b_1V_2^{/}(a,l) \\ a_2V_1(b,l)+b_2V_1^{/}(b,l) & a_2V_2(b,l)+b_2V_2^{/}(b,l) \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Корни уравнения (27) (а (27) – это уравнение относительно l) и есть собственные числа l_k задачи (10), (11). После отыскания l_k полагаем в (26) $l = l_k$ и находим любое ненулевое решение C_{1k}, C_{2k} этой системы. Собственные функции задачи получим, положив в (25) $l = l_k, C_1 = C_{1k}, C_2 = C_{2k}$.

П р и м е р 2. Найти с.ч. и с.ф. задачи

$$v^{//} = -\,l\,v, \qquad (15)$$

$$v^{/}(-p) = 0\ ,\ \ v^{/}(p) = 0\ . \qquad (28)$$

Р е ш е н и е. Эта задача – частный случай (10), (11) при $q(x) \equiv 0$, $a = -p$, $b = p$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$. Согласно теореме 2, наименьшее собственное число задачи (15), (28) равно 0 (обозначим, для удобства, это число l_0, а не l_1), а все остальные с.ч. положительны. При $l = l_0 = 0$ решением задачи, очевидно, будет $v_0(x) = 1$, это и есть собственная функция задачи, отвечающая l_0.

Пусть $l > 0$. По общему решению (23) уравнения (15) находим

$$v^{/} = C_1\sqrt{l}\cos\sqrt{l}\,x - C_2\sqrt{l}\sin\sqrt{l}\,x$$

и подставляем в краевые условия (28):

$$v^{/}(-p) = C_1\sqrt{l}\cos\sqrt{l}\,p + C_2\sqrt{l}\sin\sqrt{l}\,p = 0,$$

$$v^{/}(p) = C_1\sqrt{l}\cos\sqrt{l}\,p - C_2\sqrt{l}\sin\sqrt{l}\,p = 0.$$

Ясно, что эта система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} C_1\cos\sqrt{l}\,p + C_2\sin\sqrt{l}\,p = 0, \\ C_1\cos\sqrt{l}\,p - C_2\sin\sqrt{l}\,p = 0. \end{cases} \qquad (29)$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим уравнение для с. ч. l_k задачи (15), (28):

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{l}\,p & \sin\sqrt{l}\,p \\ \cos\sqrt{l}\,p & -\sin\sqrt{l}\,p \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(\sin\sqrt{l}\,p)\cos\sqrt{l}\,p = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin 2\sqrt{l}\,p = 0.$$

Отсюда находим: $2\sqrt{l}\,p = kp$ и $l_k = (k/2)^2$ ($k = 1,2,\ldots$). Подставляя l_k в (29), получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1\cos(kp/2) + C_2\sin(kp/2) = 0, \\ C_1\cos(kp/2) - C_2\sin(kp/2) = 0. \end{cases} \qquad (30)$$

Ясно, что решения системы (30) различны при нечётном и чётном значениях k. Если $k = 2m - 1$ ($m = 1,2,\ldots$), то

$$\cos(kp/2) = 0\ ,\ \sin(kp/2) = (-1)^{m-1}\ ¹\ 0\ ,$$

и ненулевым решением системы (30) будет любая пара чисел C_1 ¹ 0, $C_2 = 0$. Подставив в (23) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $l = \left(\dfrac{2m-1}{2}\right)^2$, получим собственные функции с нечётными индексами: $v_{2m-1} = \sin\dfrac{2m-1}{2}x$. Аналогично найдём собственные функции с чётными индексами: $v_{2m} = \cos mx$.

О т в е т. С. ч. и соответствующие им с.ф. задачи (15), (28):

$$\lambda_0 = 0,\ v_0 = 1,$$

$$\lambda_{2m-1} = \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2, \quad v_{2m-1} = \sin\frac{2m-1}{2}x,$$

$$\lambda_{2m} = m^2, \quad v_{2m} = \cos mx \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

З а м е ч а н и е 4. В приложениях встречается задача более общая, чем (10), (11), также называемая задачей Штурма-Лиувилля:

$$(p(x)v')' + q(x)v = -\lambda r(x)v,$$

$$a_1 v(a) + b_1 v'(a) = 0, \quad a_2 v(b) + b_2 v'(b) = 0,$$

где коэффициенты д.у. $p(x)$ и $r(x)$ обычно предполагаются положительными на $[a, b]$ функциями.

Для этой задачи имеют место утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, но с очень существенной поправкой. А именно, собственные функции $v_k(x)$ задачи образуют систему «ортогональную с весом $r(x)$», то есть

$$\int_a^b r(x)v_k(x)v_m(x)dx = 0 \qquad \text{при } k \neq m \quad (k, m = 1, 2, \ldots).$$

Соответствующим образом видоизменяется и ряд Фурье по системе с.ф. данной задачи.

§ 3. *ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ*

Пусть $\{v_k(x)\}$ – система с.ф. задачи Штурма-Лиувилля (10), (11). Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x), \tag{31}$$

где

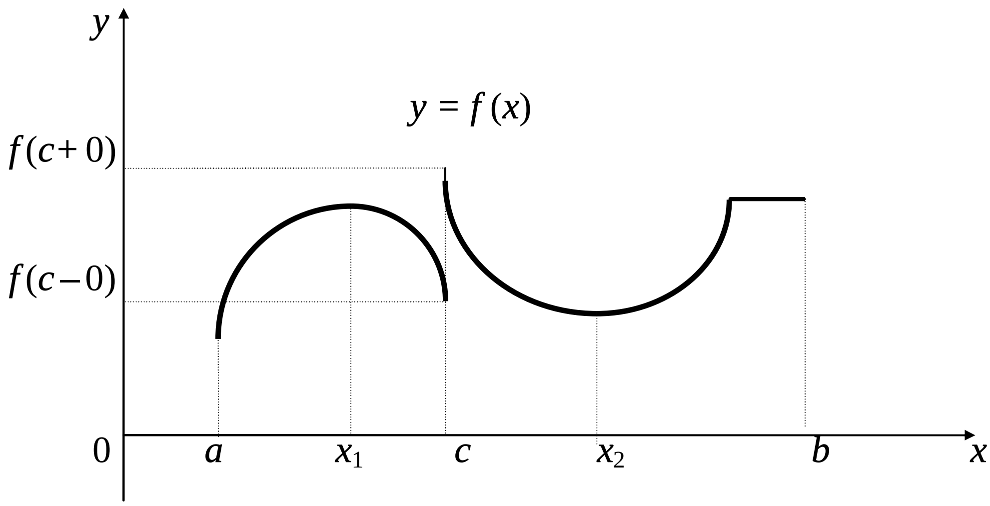
$$A_k = \frac{1}{d_k}\int_a^b f(x)v_k(x)\,dx, \quad d_k = \int_a^b v_k^2(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Строго говоря, в (31) вместо знака равенства (=) следует поставить знак соответствия (~), о чём уже говорилось в определении 4. Но учитывая приводимые ниже теоремы и следуя принятой в прикладной математике традиции, мы пишем знак равенства.

Теорема 3 (признак сходимости в среднем). *Пусть* $f(x) \in L_2(a, b)$. *Тогда ряд Фурье* (31), (32) *сходится к* $f(x)$ *в среднем квадратичном*.

Для формулировки условий поточечной сходимости ряда потребуется

О п р е д е л е н и е 10. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на интервале $[a, b]$, если этот интервал можно разбить на части конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (где $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$) так, что на каждом из интервалов $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_n, b]$ функция монотонна, т.е. либо не убывает, либо не возрастает (см. рисунок, где $n = 2$).



З а м е ч а н и е 5. Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна и ограничена на $[a, b]$, то она может иметь здесь только точки разрыва первого рода. То есть, если $c \in [a, b]$ – точка разрыва $f(x)$, то пределы

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0)$$

являются конечными. Разумеется, что в случае $c = a$ речь идет только о втором из этих пределов, а при $c = b$ – только о первом.

Теорема 4 (признак поточечной сходимости). *Пусть* $f(x)$ – *кусочно-монотонная и ограниченная на* $[a, b]$ *функция. Тогда ряд Фурье* (31) *данной функции сходится для всех* $x \in [a, b]$.

При этом для любого $x \in (a, b)$ *верно равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) \equiv s(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} ,$$

т.е. сумма ряда $s(x)$ *равна* $f(x)$ *в точках непрерывности* $f(x)$, *и* $s(x)$ *равна полусумме левого и правого пределов* $f(x)$ *в точках разрыва* $f(x)$.

Если в (11) $b_1 \neq 0$ *, то* $s(a) = f(a+0)$; *если же* $b_1 = 0$ (*т.е. если первое из краевых условий* (11) *имеет вид* $v(a) = 0$), *то* $s(a) = 0$.

Если в (11) $b_2 \neq 0$ *, то* $s(b) = f(b-0)$; *если же* $b_2 = 0$ (*т.е. если второе из краевых условий* (11) *имеет вид* $v(b) = 0$), *то* $s(b) = 0$.

З а м е ч а н и е 6. Утверждения теоремы 4 верны, если предположение о кусочной монотонности $f(x)$ заменить требованием дифференцируемости $f(x)$ при всех $x \in [a, b]$.

Теорема 5 (признак равномерной сходимости). *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$, $f'(x) \in L_2(a, b)$. *Пусть* $f(a) = 0$, *если в* (11) $b_1 = 0$, *и пусть* $f(b) = 0$, *если в* (11) $b_2 = 0$. *Тогда ряд* (31) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на* $[a, b]$.

З а м е ч а н и е 7. Из теории функциональных рядов и из равенства (31) (вспомним, что с.ф. $v_k(x)$ удовлетворяют краевым условиям (11)) следует, что для равномерной сходимости ряда (31) <u>необходимы</u> все условия теоремы 5, кроме требования $f^{/}(x)\,\hat{I}\;L_2(a,\,b)$. Так что, если $f(x)$ разрывна на $[a,\,b]$, или (и) $b_1 = 0$, а $f(a)$ ¹ 0, или (и) b_2 ¹ 0, a $f(b)$ ¹ 0, то ряд (31) <u>равномерно</u> на $[a,\,b]$ к $f(x)$ <u>не сходится.</u>

П р и м е р 3. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье по с.ф. задачи (15), (22).

Р е ш е н и е. Вычисляем d_k, A_k по формулам (32) , где полагаем (см. пример 1) $v_k(x) = \sin\dfrac{(2k{-}1)p\,x}{20}$ $(k=1,2,\ldots)$. Итак,

$$d_k = \int_a^b v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10}\sin^2\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{10}(1-\cos\frac{(2k-1)p\,x}{10})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{10}{(2k-1)p}\sin\frac{(2k-1)p\;x}{10})\,\Bigg|_0^{10} = 5.$$

$$A_k = \frac{1}{d_k}\int_a^b f(x)v_k(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^{10} x\sin\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,dx\ .$$

Для вычисления этого интеграла используем формулу интегрирования по частям (см. стр. 33). В данном случае полагаем

$$\mathrm{u} = x,\quad d\mathrm{v} = \sin\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$d\mathrm{u} = dx\,,\ \ \mathrm{v} = \int\sin\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,dx = -\frac{20}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,.$$

Тогда

$$A_k = \frac{1}{5}\left(-\frac{20x}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,\Bigg|_0^{10} + \int_0^{10}\frac{20}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{200}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p}{2} + \frac{400}{(2k-1)^2p^2}\sin\frac{(2k-1)p\,x}{20}\,\Bigg|_0^{10}\right) = \frac{80(-1)^{k-1}}{p^2(2k-1)^2},$$

так как

$$\cos\frac{(2k-1)p}{2} = 0,\ \sin 0 = 0,\ \ \sin\frac{(2k-1)p}{2} = (-1)^{k-1} \quad (k=1,2,\ldots)\,.$$

Подставляя A_k и $v_k(x)$ в (31), получим искомое разложение $f(x)$:

$$x = \frac{80}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)p\,x}{20}. \tag{33}$$

П р и м е р 4. Исследовать (используя теоремы 3, 4, 5) характер сходимости ряда Фурье функции $f(x) = x$ по собственным функциям задачи (15), (22), т.е. характер сходимости ряда (33).

Р е ш е н и е. Начнем с проверки условий теоремы 5 для $f(x)$. Ясно, что $f(x)$ и $f'(x) = 1$ – непрерывные на интервале [0, 10] функции (тем более $f'(x) \in L_2(0,10)$. Далее, в данном случае $b_1 = 0$, $b_2 = 1 \neq 0$. Поэтому требует проверки условие $f(0) = 0$; оно, очевидно, выполнено. Таким образом, согласно теореме 5, ряд (33) сходится к $f(x)$ равномерно на промежутке [0,10]. Выше уже отмечалось, что из равномерной сходимости ряда вытекает его сходимость в среднем квадратичном.

П р и м е р 5. Исследовать характер сходимости ряда Фурье функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ по собственным функциям задачи (15), (22).

Р е ш е н и е. Функция $f(x)$ разрывна при $x = 0$, так что, согласно замечанию 7, ряд Фурье этой функции не может сходиться к ней равномерно. Далее заметим, что $f(x)$ неограничена на [0,10]: $f(x) \to \infty$ при $x \to +0$, следовательно, для неё не выполнены условия теоремы 4, так что ряд не может сходиться на промежутке [0,10] поточечно к $f(x)$. Выясним, принадлежит ли $f(x)$ множеству $L_2(0, 10)$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^{10} f^2(x)\,dx = \int_0^{10} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 dx = \int_0^{10} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{10}\,.$$

Интеграл конечен (сходится), значит $f(x) \in L_2(0,10)$ (см замечание 5.1), и ряд Фурье данной функции сходится к ней в среднем квадратичном.

П р и м е р 6. Исследовать характер сходимости ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 2, & \dfrac{3\pi}{2} < x \le 10 \end{cases}$$

по собственным функциям задачи (15),(22).

Р е ш е н и е. Функция $f(x)$ (советуем нарисовать её график) непрерывна на интервале $[0, 3\pi/2]$ и на интервале $(3\pi/2, 10]$, а в точке $x = 3\pi/2$ имеет разрыв первого рода, причём $f(\frac{3\pi}{2} - 0) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $f(\frac{3\pi}{2} + 0) = 2$.

Так как $f(x)$ разрывна, то её ряд Фурье не может сходиться равномерно (замечание 7). Проверим выполнение условий теоремы 4 для $f(x)$. Ясно, что $f(x)$ – кусочно-монотонна: она убывает на $(0,\pi)$, возрастает на $(\pi, 3\pi/2)$ и постоянна на $(3\pi/2,10]$. Ясно, что $f(x)$ ограничена: $|f(x)| \le 2$ для любого $x \in [0,10]$. Поэтому ряд Фурье $f(x)$ по с. ф. задачи (15), (22) сходится к $f(x)$ при всех $x \in (0, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 10)$, т.е. в точках непрерывности $f(x)$.

При $x=\frac{3\pi}{2}$ сумма ряда равна $\dfrac{f(\frac{3\pi}{2}-0)+f(\frac{3\pi}{2}+0)}{2}=\frac{0+2}{2}=1.$

При $x = 0$ сумма ряда равна 0, т.е. в этой точке ряд не сходится к $f(x)$ (ведь $f(0) = \cos 0 = 1$).

Так как $b_2 = 1 \neq 0$, то при $x = 10$ ряд сходится к $f(10) = f(10-0) = 2$.

И последнее. Поскольку $f(x)$ ограничена на интервале $[0, 10]$ и непрерывна во всех его точках, кроме одной, то $f(x) \in L_2(0,10)$ (см. п. в) замечания 5.1), и согласно теореме 3, ряд Фурье сходится к $f(x)$ в среднем квадратичном.

Упражнения к главе 3

1. Докажите, не используя теорему 2, что все с.ч. задачи
$$v'' + q_0 v = -\lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v(h) = 0$$
положительны, если число $q_0 < 0$ (здесь и далее h – заданное положительное число).

2. Докажите, что задача
$$v'' + 5v = -\lambda v, \quad v'(0) = 0, \quad v(h) = 0$$
не имеет с.ч., удовлетворяющих неравенству $\lambda_k < -5$.

3. Найдите с.ч. и с.ф. задач:

а) $v'' = -\lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v(h) = 0;$

б) $v'' = -\lambda v, \quad v'(0) = 0, \quad v(10) = 0;$

в) $v'' = -\lambda v, \quad v'(0) = 0, \quad v'(10) = 0;$

г) $v'' = -\lambda v, \quad v(-\pi) = 0, \quad v(\pi) = 0;$

д) $v'' = -\lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v'(h) + \alpha v(h) = 0$ ($\alpha > 0$ – заданное число);

е) $v'' + q_0 v = -\lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v(h) = 0$ (q_0 – заданное число).

4. Разложите $f(x) \equiv u_0$, где u_0 – число, в ряд Фурье по с.ф. задачи упражнения 3а. Исследуйте характер сходимости полученного ряда.

5. Разложите в ряд по с.ф. задачи упражнения 3а функцию
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le h/2, \\ (h-x), & h/2 < x \le h. \end{cases}$$
Исследуйте характер сходимости полученного ряда.

6. Разложите функцию $f(x) = 10 - x$ в ряд Фурье по с.ф. задачи упражнения 3б. Исследуйте характер сходимости полученого ряда.

7. Разложите в ряд Фурье по с.ф. задачи упражнения 3б функцию
$$f(x)=\begin{cases} x-b, & 0 \le x \le b, \\ 0, & b < x \le 10. \end{cases} \quad \text{(здесь число } b \in (0, 10)\text{)}.$$

Исследуйте характер сходимости полученного ряда.

8. Разложите в ряд Фурье по с.ф. задачи упражнения 3в функцию $f(x) = 2x + 5$. Исследуйте характер сходимости полученного ряда.

9. Разложите в ряд Фурье по с.ф. задачи упражнения 3в функцию

$$f(x)=\begin{cases} 5, & 0 \le x < 5, \\ 10-x, & 5 \le x \le 10. \end{cases}$$

Исследуйте характер сходимости полученного ряда.

Ответы и указания к упражнениям

3 а) $\quad l_k=\left(\dfrac{kp}{h}\right)^2, \; v_k(x)=\sin\dfrac{kp\,x}{h} \quad (k=1,2,...).$

3 б) $\quad l_k=\left(\dfrac{(2k-1)p}{20}\right)^2, \; v_k(x)=\cos\dfrac{(2k-1)p\,x}{20} \quad (k=1,2,...).$

3 в) $\quad l_k=\left(\dfrac{(k-1)p}{10}\right)^2, \; v_k(x)=\cos\dfrac{(k-1)p\,x}{10} \quad (k=1,2,...),$

так что $\lambda_1 = 0$, $v_1(x) = 1$. Заметим, что ответ можно записать иначе (начав нумерацию с 0, а не с 1):

$$l_0=0,\; v_0(x)=1,\; l_k=\left(\frac{kp}{10}\right)^2,\; v_k(x)=\cos\frac{kp\,x}{10} \quad (k=1,2,...).$$

3 г) $\quad l_{2m-1}=\dfrac{(2m-1)^2}{4}, \; v_{2m-1}(x)=\cos\dfrac{(2m-1)x}{2},$

$\quad l_{2m}=m^2, \; v_{2m}(x)=\sin mx \quad (m=1,2,...).$

3 д) $\quad l_k=m_k^2, \; v_k(x)=\sin m_k x \quad (k=1,2,...),$

где m_k – положительные корни уравнения $ctg\, m\,h=-\dfrac{a}{m}$.

3 е) $\quad l_k=\left(\dfrac{kp}{h}\right)^2-q_0, \; v_k(x)=\sin\dfrac{kp\,x}{h} \quad (k=1,2,...).$

4. $\quad f(x)=\dfrac{4u_0}{p}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)}\sin\dfrac{(2m-1)p\,x}{h}.$

Указание: $\cos kp = (-1)^k$, $(-1)^k - 1 = -2$ при $k = 2m - 1$, $(-1)^k - 1 = 0$ при $k = 2m$ $(m = 1, 2, ...)$.

5. $f(x)=\dfrac{4h}{p^{2}}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^{2}}\sin\dfrac{(2m-1)p\,x}{h}$.

6. $10-x=\dfrac{80}{p^{2}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^{2}}\cos\dfrac{(2k-1)p\,x}{20}$.

7. $f(x)=\dfrac{80}{p^{2}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^{2}}(\cos\dfrac{(2k-1)p\,b}{20}-1)\cos\dfrac{(2k-1)p\,x}{20}$.

8. $2x+5=15-\dfrac{80}{p^{2}}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^{2}}\cos\dfrac{(2m-1)p\,x}{10}$.

Указание. Учитывая замечание к ответу задачи 3в, ряд (31) здесь можно записать в виде $f(x)=A_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\cos\dfrac{kp\,x}{10}$, *где* $A_0=\dfrac{1}{d_0}\int\limits_0^{10}f(x)\,dx$.

9. $f(x)=3{,}75+\dfrac{20}{p^{2}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{2}}(\cos\dfrac{kp}{2}-\cos kp)\cos\dfrac{kp\,x}{10}=$

$$=3{,}75+\frac{10}{p^{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^{2}}(2\cos\frac{(2m-1)p\,x}{10}-\cos\frac{(2m-1)p\,x}{5}).$$

Глава 4. **УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

§ 1. *ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ*

1. Уравнение теплопроводности с двумя независимыми переменными. Начальные и краевые условия.

Уравнением теплопроводности (другое название – *уравнение диффузии*) с двумя независимыми переменными в математической физике называют уравнение

$$u_t - a\,u_{xx} = f(x, t). \tag{1}$$

Здесь: $u = u(x, t)$ – искомая функция переменных x и t; $a > 0$ – заданное число; $f(x, t)$ – заданная функция. Для частных производных $u(x, t)$ использованы сокращённые обозначения: $u_t \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_x \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (они уже приводились в главе 2).

Уравнение (1) – линейное дифференциальное уравнение (д.у.) второго порядка параболического типа (см. § 2 главы 2).

Далее рассматривается задача отыскания решений уравнения (1), определённых в замкнутом прямоугольнике плоскости

$$\overline{Q} = \{(x, t):\ 0 \le x \le h,\ 0 \le t \le T\};$$

здесь h и T – заданные положительные числа. Через Q обозначается открытый прямоугольник, полученный из $\overline{Q}$ удалением границ последнего: $Q = \{(x, t):\ 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ (см. рис. 1).

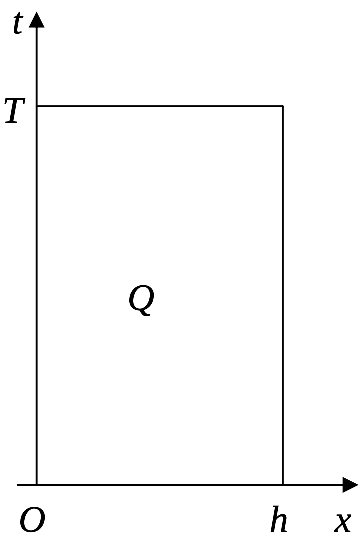


Рис. 1

Д. у. (1) имеет бесконечно много решений. Для того, чтобы из этого множества выделить одно решение, надо задать дополнительную информацию об искомом решении. Обычно такая информация задается в виде *начального условия*

$$u(x, 0) = j(x) \tag{2}$$

и краевых условий

$$a_1 u(0, t) + b_1 u_x(0, t) = y_1(t),\ \ a_2 u(h, t) + b_2 u_x(h, t) = y_2(t); \tag{3}$$

здесь $j(x)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ – заданные функции, a_1, b_1, a_2, b_2 – заданные числа, причём такие, что

$$|a_1| + |b_1| > 0,\ |a_2| + |b_2| > 0.$$

Задача отыскания решения д.у. (1), удовлетворяющего уравнениям (2) и (3), – это простейшая граничная задача для уравнения (1).

2. Пример физической задачи, приводящей к системе (1), (2), (3).

Уравнение (1) является математической моделью процесса распределения температуры в тонком однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, ось которого принята за координатную ось Ox. В этом случае: $u(x,t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t, коэффициент a характеризует физические свойства материала стержня; правая часть $f(x,t)$ д.у. (1) пропорциональна линейной плотности источников тепла, действующих внутри стержня (если таковых нет, то $f(x,t) \equiv 0$).

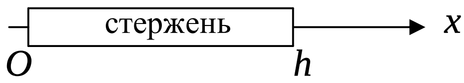


Рис. 2

Задание начального условия (2) с физической точки зрения означает задание температуры $j\,(x)$ в любой точке x стержня в момент времени $t = 0$. Предположим, что стержень имеет длину h и расположен так, как показано на рис. 2. Тогда краевые условия (3) имеют определённый теплофизический смысл, зависящий от значений чисел α_i, β_i.

Если $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ (что, по существу, равносильно предположению $a_1\ ^1\ 0$, $b_1 = 0$), то первое из уравнений (3) примет вид

$$u(0,t) = y_1(t).$$

Оно называется краевым условием *первого рода* и означает, что в любой момент времени t известна температура $y_1(t)$ левого края стержня.

Если $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, то это же краевое условие примет вид

$$u_x(0,t) = y_1(t).$$

Оно называется краевым условием *второго рода* и означает, что в любой момент времени t известен поток тепла, протекающий через левый край стержня ($y_1(t)$ – величина, пропорциональная этому потоку).

Если $a_1\ ^1\ 0$, $b_1\ ^1\ 0$, то первое уравнение в (3) можно записать в виде

$$u_x(0,t) = c_1(u(0,t) - y_c(t)),\ \text{где}\quad c_1 = -a_1/b_1,\ y_c(t) = y_1(t)/b_1.$$

Оно называется краевым условием *третьего рода* и выражает при $c_1 > 0$ закон теплообмена Ньютона. Применительно к рассматриваемому случаю данный закон можно сформулмровать так: тепловой поток через левый край стержня пропорционален разности температуры края стержня $u(0,t)$ и температуры внешней среды $y_c(t)$ вблизи этого края. Всё сказанное здесь о первом из уравнений (3), разумеется, относится и ко второму.

3. Уравнение теплопроводности с несколькими пространственными переменными.

Уравнение (1) описывает процесс теплообмена в стержне приближённо, поскольку ряд физических предположений, на которых основан вывод этого д.у., не совсем точно отражает реальность. В частности, при выводе

(1) считалось, что в каждый фиксированный момент времени температура изменяется лишь вдоль стержня, а в любом направлении, перпендикулярном оси стержня, температура неизменна. Такое предположение допустимо для достаточно тонкого стержня. Если же это не так, или вообще, если изучается теплообмен в теле произвольной формы, где температура меняется в нескольких направлениях, то надо использовать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_1, ..., x_n, t). \qquad (4)$$

Д.у. (4) называется *уравнением теплопроводности с n пространственными переменными*. Здесь: $x_1,\ldots,x_n$ – прямоугольные координаты в пространстве R^n, искомая функция $u = u(x_1,\ldots,x_n, t)$ – температура в точке $(x_1,\ldots,x_n)$ тела в момент времени t; $a > 0$ – заданное число; $f(x_1,\ldots,x_n, t)$ – заданная функция; n полагают равным трем, двум или единице, если есть основания считать, что температура зависит от трех, двух или одной пространственных переменных. При $n = 1$ д.у. (4) совпадает с (1), если принять $x_1 = x$.

Краевая задача для уравнения (4) при n ³ 2 ставится обычно следующим образом. Пусть D – область в R^n с границей S, $T = const > 0$. Требуется найти такое решение д.у. (4), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(x_1,\ldots,x_n, 0) = j\,(x_1,\ldots,x_n)$$

и краевому условию

$$\left(a\,u + b\,\frac{\partial u}{\partial N}\right)\Big|_S = y\,(x_1, ..., x_n, t).$$

Здесь: $N = N(x_1,\ldots,x_n)$ – вектор нормали к S в точке $(x_1,\ldots,x_n)$; j, y, a, b – заданные функции, причем a и b зависят от тех же переменных, что и y; $|a| + |b| > 0$ при $(x_1,\ldots,x_n) \in S$, $t \in [0,T]$. Величины a, f, j, y имеют такой же физический смысл, как и в (1), (2), (3).

§ 2. *КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЁННЫЕ РЕШЕНИЯ. КОРРЕКТНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ*

Ограничимся здесь рассмотрением для уравнения (1) граничной задачи с краевыми условиями первого рода

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(h, t) = \psi_2(t). \qquad (5)$$

Используемые далее обозначения функциональных пространств и множеств функций можно найти в § 3 главы 1.

О п р е д е л е н и е 1. Классическим решением задачи (1), (2), (5) называется функция $u(x, t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $(x, t) \in Q$, начальному условию (2) при всех $x \in [0, h]$ и краевым условиям (5) при всех $t \in [0,T]$.

Задача (1),(2),(5) корректна на множестве $C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ относительно пространств $(C(\overline{Q});\ C(\overline{Q}),\ C[0,h],\ C[0,T],\ C[0,T])$ (см. определение 6.2). Точнее, справедлива

Теорема 1. *Для любой функции* $f(x,t)\ \hat{I}\ C^1(\overline{Q})$ *и любых функций* $j\ (x) \in C[0,h]$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C[0,T]$, *удовлетворяющих равенствам* (которые называются условиями согласования)

$$\varphi(0) = \psi_1(0),\ \varphi(h) = \psi_2(0), \tag{6}$$

существует классическое решение задачи (1),(2),(5). *Это решение единственно и для него верна оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \le M_1(\|f\|_{C(\overline{Q})} + \|\varphi\|_{C[0,h]} + \|\psi_1\|_{C[0,T]} + \|\psi_2\|_{C[0,T]}), \tag{7}$$

где $M_1 > 0$ – *некоторая постоянная, зависящая только от* a, h, T.

Аналогичное утверждение верно для задачи (1),(2),(3) при любых краевых условиях (3). Его доказательтельство достаточно сложно и использует, в частности, принцип сжимающих отображений (см. § 5 главы 1).

Поясним, почему эта теорема – утверждение о корректности рассматриваемой задачи. Систему уравнений (1),(2),(5) запишем в виде системы (13.2), (14.2), положив $f = f_0$, $\varphi = f_1$, $\psi_1 = f_2$, $\psi_2 = f_3$, $l_0 u = u_t - a\, u_{xx}$, $l_1 u = u(x,0)$, $l_2 u = u(0,t)$, $l_3 u = u(h,t)$. Обозначим $U = C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, $U^0 = F_0^0 = C(\overline{Q})$, $F_0 = C^1(\overline{Q})$, $F_1 = F_1^0 = C[0,h]$, $F_2 = F_2^0 = F_3 = F_3^0 = C[0,T]$. Ясно, что $U^0 \supset U$, $F_0^0 \supset F_0$.

Условия теоремы 1 обеспечивают выполнение требований а), б) определения 6.2. Покажем, что неравенство (7) гарантирует выполнение и требования в) этого определения. Пусть функции $\tilde{f}, \tilde{j}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ удовлетворяют условиям, предъявленным в теореме 1 к $f, \varphi, \psi_1, \psi_2$ соответственно. Тогда, согласно этой теореме, существует классическое решение $\tilde{u}(x,t)$ задачи

$$\tilde{u}_t - a\,\tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(x,t), \tag{1a}$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{j}(x), \tag{2a}$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{y}_1(t), \quad \tilde{u}(h,t) = \tilde{y}_2(t)\ . \tag{5a}$$

Вычитая из (1) уравнение (1а), из (2) – (2а), из (5) – (5а), получим, что $z(x,t) \equiv (u(x,t) - \tilde{u}(x,t))$ – классическое решение задачи

$$z_t - a\, z_{xx} = f(x,t) - \tilde{f}(x,t),$$

$$z(x,0) = \varphi(x) - \tilde{j}(x),$$

$$z(0,t) = y_1(t) - \tilde{y}_1(t),\ z(h,t) = y_2(t) - \tilde{y}_2(t)\ .$$

Применяя к $z(x,t)$ оценку (7), будем иметь

$$\|z\|_{C(\overline{Q})} = \|u - \tilde{u}\|_{C(\overline{Q})} \le M_1(\|f - \tilde{f}\|_{C(\overline{Q})} + \|j - \tilde{j}\|_{C[0,h]} +$$

$$+ \|y_1 - \tilde{y}_1\|_{C[0,T]} + \|y_2 - \tilde{y}_2\|_{C[0,T]}). \tag{7a}$$

Зададим число $\varepsilon > 0$ (ε может быть как угодно малым) и положим $\delta = \varepsilon / (4M_1)$. Тогда из неравенств $\| f - \tilde{f} \|_{C(\bar{Q})} < d$, $\| j - \tilde{j} \|_{C[0,h]} < d$, $\| y_1 - \tilde{y}_1 \|_{C[0,T]} < d$, $\| y_2 - \tilde{y}_2 \|_{C[0,T]} < d$ (соответствующих неравенствам $\| f_j - \tilde{f}_j \|_{F_j^0} < d$ определения 6.2) будет, в силу (7а), следовать неравенство $\| u - \tilde{u} \|_{C(\bar{Q})} < e$, что и требовалось показать.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 легко вытекает, что система уравнений, полученная из системы (1),(2),(5) удалением начального или хотя гкостпщЕсх

(k = 1,2,…), что:

а) $\| f_k - f \|_{L_2(Q)} \to 0, \| \varphi_k - \varphi \|_{C[0,h]} \to 0, \| \psi_{1k} - \psi_1 \|_{C[0,T]} \to 0,$

$$\| \psi_{2k} - \psi_2 \|_{C[0,T]} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty;$$

б) при каждом k = 1, 2, … задача

$$u_t - a\, u_{xx} = f_k(x,t),\ u(x,0) = \varphi_k(x),\ u(0,t) = \psi_{1k}(t),\ u(h,t) = \psi_{2k}(t) \qquad (8)$$

имеет классическое решение $u_k(x,t)$;

в) последовательность $\{u_k(x,t)\}$ имеет в $C(\overline{Q})$ предел $\hat{u}(x,t)$ т.е.

$$\| u_k - \hat{u} \|_{C(\overline{Q})} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда функция $\hat{u}(x,t)$ называется обобщённым решением из $C(\overline{Q})$ задачи (1), (2), (5).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in L_2(0,h)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t) \in C[0,T]$, $\psi_1'(t)$ *и* $\psi_2'(t) \in L_2(0,T)$. Пусть существуют такие последовательности функций $f_k(x,t) \in L_2(Q) \cap C(Q)$, $\varphi_k(x) \in C[0,h]$, $\psi_{1k}(t)$ и $\psi_{2k}(t) \in C^1[0,T]$ (k = 1,2,…), что: при $k \to \infty$

а) $\| f_k - f \|_{L_2(Q)} \to 0, \| \varphi_k - \varphi \|_{L_2[0,h]} \to 0,$

$$(\| \psi_{1k} - \psi_1 \|_{C[0,T]} + \| \psi_{1k}' - \psi_1' \|_{L_2(0,T)}) \to 0,$$

$$(\| \psi_{2k} - \psi_2 \|_{C[0,T]} + \| \psi_{2k}' - \psi_2' \|_{L_2(0,T)}) \to 0;$$

б) при каждом k = 1, 2, … задача (8) имеет классическое решение $u_k(x,t)$;

в) последовательность $\{u_k(x,t)\}$ сходится в $L_2(Q)$ к пределу $\tilde{u}(x,t)$, т.е.

$$\| u_k - \tilde{u} \|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда функция $\tilde{u}(x,t)$ называется обобщённым решением из $L_2(Q)$ задачи (1),(2),(5).

Приведём достаточные условия корректности задачи (1),(2),(5) на множествах функций, к которым принадлежат определённые выше её обобщённые решения.

Теорема 2. *Для любой функции* $f(x,t) \in L_2(Q)$ *и любых функций* $\varphi(x) \in C[0,h]$, $\psi_1(t)$ *и* $\psi_2(t) \in C[0,T]$, *удовлетворяющих* (6), *задача* (1), (2), (5) *имеет обобщённое решение* $\hat{u}(x,t)$ *из* $C(\overline{Q})$. *Это решение единственно и для него верна оценка*

$$\| \hat{u} \|_{C(\overline{Q})} \le M_2 (\| f \|_{L_2(Q)} + \| \varphi \|_{C[0,h]} + \| \psi_1 \|_{C[0,T]} + \| \psi_2 \|_{C[0,T]}), \qquad (9)$$

где постоянная $M_2 > 0$ *зависит лишь от чисел* a, h, T.

Теорема 3. *Пусть в* (1),(2),(5) $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in L_2(0,h)$, $\psi_1(t)$ *и*

$y_2(t) \in C[0,T]$, $y_1^{/}(t)$ *и* $y_2^{/}(t) \in L_2(0,T)$. *Тогда задача* (1),(2),(5) *имеет обобщённое решение* $\overset{\mathrm{w}}{u}(x,t)$ *из* $L_2(Q)$. *Это решение едиственно и для него верна оценка*

$$\|\overset{\mathrm{w}}{u}\|_{L_2(Q)} \le M_3(\|f\|_{L_2(Q)} + \|j\|_{L_2(0,h)} + \|y_1\|_{C[0,T]} + \|y_2\|_{C[0,T]} +$$
$$+ \left\|y_1^{/}\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|y_2^{/}\right\|_{L_2(0,T)}), \qquad (10)$$

где постоянная $M_3 > 0$ *зависит лишь от чисел* a, h, T.

З а м е ч а н и е 2. Из неравенства (9) (из неравенства (10)) следует непрерывная зависимость в указанных нормах обобщённого решения $\grave{u}(x,t)$ (решения $\overset{\mathrm{w}}{u}(x,t)$) от заданных функций. Это устанавливается точно так же, как и для классического решения.

З а м е ч а н и е 3. Утверждение теоремы 2 о единственности обобщённого решения из $C(\overline{Q})$ означает следующее. Для любых последовательностей функций $\{f_k\},\{j_k\},\{y_{1k}\},\{y_{2k}\}$, удовлетворяющих условиям определеления 2, соответствующая последовательность $\{u_k\}$ сходится в норме $C(\overline{Q})$ к одной и той же функции $\grave{u}$. Аналогичное замечание (с заменой $C(\overline{Q})$ на $L_2(Q)$) относится и к решению $\overset{\mathrm{w}}{u}$.

З а м е ч а н и е 4. Вопрос о том, в каком смысле обобщённые решения $\grave{u}$ и $\overset{\mathrm{w}}{u}$ удовлетворяют уравнению (1) (существование производных у этих функкций не предполагалось) в данном пособии затрагиваться не будет. Ответы на него можно найти в [2,4,7,8].

§ 3. *РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ* (*МЕТОДОМ ФУРЬЕ*)

Построения этого параграфа опираются на теорию рядов Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (см. главу 3).

1. Случай однородного уравнения и однородных краевых условий.

Рассмотрим задачу (1),(2),(3) с $f \equiv 0$, $y_1 \equiv 0$, $y_2 \equiv 0$:

$$u_t - a\,u_{xx} = 0, \qquad (11)$$

$$u(x,0) = j(x), \qquad (12)$$

$$a_1 u(0,t) + b_1 u_x(0,t) = 0, \quad a_2 u(h,t) + b_2 u_x(h,t) = 0. \qquad (13)$$

Отыскание решения $u(x,t)$ этой задачи, согласно методу Фурье, проводится в два этапа.

<u>На первом этапе</u> ищем *ненулевые* решения $U(x,t)$ уравнения (11), удовлетворяющие краевым условиям (13), в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от t:

$$U(x,t) = v(x)\,z(t). \qquad (14)$$

Подставляя $U(x,t)$ в (11) вместо u, получим

$$v(x)z^{/}(t) - a\,z(t)v^{//}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(x)z^{/}(t) = a\,z(t)v^{//}(x)\ .$$

Разделив обе части последнего равенства на $a\,v(x)z(t)$, будем иметь

$$\frac{1}{a}\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{v''(x)}{v(x)}. \tag{15}$$

Чтобы функция (14) была в Q решением д. у. (11) равенство (15) должно выполняться при всех $(x, t) \in Q$. Его левая часть зависит только от t и не может меняться с изменением x. Поэтому, если зафиксировать t, то левая часть (15) примет некоторое постоянное значение, которому при всех $x \in (0, h)$ будет равна правая часть (15). Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что этому же значению при всех $t \in (0, T)$ равна левая часть (15). Таким образом, $U(x, t)$ будет решением д. у. (11), если

$$\frac{1}{a}\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{v''(x)}{v(x)}=-\,l \quad \text{при всех } (x, t) \in Q \quad (\text{здесь } l \text{ – число}).$$

Отсюда следует, что функции $z(t)$ и $v(x)$ должны быть решениями уравнений

$$z'(t)=-\,a\,l\;z(t), \tag{16}$$

$$v''(x)=-\;l\;v(x). \tag{17}$$

Подставляя $U(x, t)$ в (13) вместо u, получим

$$(a_1v(0) + b_1v'(0))\,z(t) = 0,\;\; (a_2v(h) + b_2v'(h))\,z(t) = 0,\;\; t\in (0,T).$$

Так как, по предположению, $U(x, t) \not\equiv 0$, то и $z(t) \not\equiv 0$, а потому последние два равенства равносильны равенствам

$$a_1v(0) + b_1v'(0) = 0,\;\; a_2v(h) + b_2v'(h) = 0. \tag{18}$$

Подведём итог проведённых построений: функция $U(x, t) = v(x)\,z(t)$ будет ненулевым решением д. у. (11), удовлетворяющим краевым условиям (13), если $v(x)$ будет ненулевым решением краевой задачи (17),(18) (задачи Штурма-Лиувилля), а $z(t)$ – ненулевым решением д. у. (16).

Напомним, что задача (17),(18) имеет счётное множество ненулевых решений $v = v_k(x)$ (называемых собственными функциями задачи) при определённых значениях $l = l_k$ (называемых собственными числами задачи). Предположим, что найдены l_k и $v_k(x)$ (k = 1,2,…). Подставив в д. у. (16) вместо l число l_k, найдём общее решение полученного уравнения (сделайте это самостоятельно):

$$z = z_k(t) = A_k e^{-a\,l_k t},$$

где A_k – произвольная постоянная, $A_k \neq 0$. Таким образом мы найдём счётное множество ненулевых решений д. у. (11), удовлетворяющих краевым условиям (13): $U_k(x, t) = v_k(x)\,z_k(t)$ или

$$U_k(x,t) = A_k v_k(x)\,e^{-a\,l_k t} \qquad (k = 1,2,...).$$

Но при этом, в случае *произвольной* $j(x)$, ни одна из функций $U_k(x, t)$ и никакая конечная сумма данных функций не удовлетворяет начальному условию (12) (в силу теоремы 1.2 любая конечная сумма $U_k(x,t)$ является решением решением (11) и, как нетрудно проверить, удовлетворяет (13)). Именно поэтому необходим

Второй этап. Будем искать решение задачи (11),(12),(13) в виде ряда, членами которого являются $U_k(x,t)$:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)\, e^{-a\, l_k t} \ . \tag{19}$$

Так как каждый член этого ряда удовлетворяет д. у. (11) и краевым условиям (13), то, в силу линейности и однородности (11) и (13), сумма ряда $u(x,t)$ также будет удовлетворять (11) и (13) при любых значениях A_k. Это легко установить непосредственными вычислениями в предположении, что ряд (19) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды по x и один раз по t, сходятся в $\overline{Q}$ (подробнее см. в следующем параграфе). Подберём постоянные A_k так, чтобы сумма $u(x,t)$ ряда (19) удовлетворяла начальному условию (12):

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) = j\,(x)\,.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)$ – ряд по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, то (см. § 3 главы 3) он может сходиться (в каком - либо смысле) к $j\ (x)$ лишь в том случае, если

$$A_k=\frac{1}{d_k}\int_0^h j\,(x)v_k(x)\,d\,x,\ \ где\ \ d_k=\int_0^h v_k^2(x)\,d\,x\,. \tag{20}$$

Таким образом, *сумма ряда* (19), *где* A_k *вычислены по формулам* (20) *является искомым решением задачи* (11),(12),(13). Точнее говоря, сумма ряда (19) будет классическим или обобщённым решением задачи, если *этот ряд сходится* определённым образом.

З а м е ч а н и е 5. Достаточные условия, обеспечивающие «нужную» сходимость (19), приведены в § 4. В тех же случаях, когда говорят о ряде (19) с A_k, вычисленными по формулам (20), не затрагивая вопрос о характере его сходимости, данный ряд называют обычно *формальным решением* задачи (11), (12),(13).

П р и м е р 1. Найдите формальное решение задачи

$$u_t-3u_{xx}=0,\ u(x,0)=px,\ u(0,t)=0,\ u_x(10,t)=0\ \ (p=const\neq 0). \tag{21}$$

(Это задача (11), (12), (13), где $a=3,\ j\,(x)=px,\ a_1=1,\ b_1=0,\ a_2=0,$ $b_2=1,\ h=10$).

Поиск решения $u(x,t)$ задачи (21) проведём по следующему плану.

1) Найдём собственные числа l_k и собственные функции $v_k(x)$ задачи Штурма-Лиувилля, соответствующй задаче (21):

$$v^{//} = -l\, v,\;\; v(0) = 0,\; v^{/}(10) = 0$$

(это система (17),(18) при указанных выше значениях $a_1,\, b_1,\, a_2,\, b_2,\, h$). Такая работа проделана в § 2 главы 3 (см. там пример 1):

$$l_k = \left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2,\;\; v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)p\, x}{20} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

2) Вычислим d_k и A_k по формулам (20):

$$d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10} \sin^2\frac{(2k-1)p\, x}{20}\,dx = 5,$$

$$A_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h j\,(x) v_k(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^{10} px\sin\frac{(2k-1)p\, x}{20}\,dx = \frac{80p(-1)^{k-1}}{p^2(2k-1)^2} \quad (k = 1,2,\ldots);$$

подробные выкладки читатель найдёт в § 3 главы 3 (см. там пример 3).

2) Записываем ответ, т.е. ряд (19), в который подставлены найденные выше значения A_k, $v_k(x)$, l_k и $a = 3$:

$$u(x,t) = \frac{80p}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\left(\sin\frac{(2k-1)p\, x}{20}\right)e^{-3\left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2 t}.$$

2. Случай однородных краевых условий.

Рассмотрим здесь задачу (1),(2),(13) (т.е. задачу (1),(2),(3), в которой $y_1(t) \equiv 0,\; y_2(t) \equiv 0$). В результате построений, аналогичных проведённым в предыдущем пункте, получим следующее выражение для формального решения $u(x,t)$ этой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)\, e^{-a\, l_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t) v_k(x). \tag{22}$$

Здесь: l_k – с. ч., $v_k(x)$ – с. ф. задачи (17),(18), A_k вычисляются по формулам (20), а функции $G_k(t)$ находятся по формулам ($k = 1,2,\ldots$)

$$G_k(t) = \int_0^t c_k(t)\, e^{-a\, l_k(t-t)}\,dt\;,\; где\;\; c_k(t) = \frac{1}{d_k}\int_0^h f(x,t) v_k(x)\,dx. \tag{23}$$

З а м е ч а н и е 6. Нетрудно показать, что $G_k(t)$ является решением следующей начальной задачи:

$$G_k^{/}(t) + a\, l_k G_k(t) = c_k(t),\; G_k(0) = 0. \tag{24}$$

А потому $G_k(t)$ можно искать, используя любые методы интегрирования этой задачи (а не только по формулам (23)).

3. Случай неоднородных краевых условий.

Если в (3) $\left|y_1(t)\right| + \left|y_2(t)\right| \not\equiv 0$, то задачу (1),(2),(3) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями, т.е. к задаче (1),(2),(13).

<u>В общем случае</u> это делается следующим образом. Построим функцию $g(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$, удовлетворяющую краевым условиям (3):

$$a_1 g(0,t) + b_1 g_x(0,t) = y_1(t),\ \ a_2 g(h,t) + b_2 g_x(h,t) = y_2(t),\ \ t \in [0,T]. \quad (25)$$

Такая функция обязательно найдётся, если $y_1(t)$ *и* $y_2(t) \in C^1[0,T]$. Введём новую искомую функцию

$$w(x,t) = u(x,t) - g(x,t), \qquad (26)$$

где $u(x,t)$ – решение (1),(2),(3). Нетрудно проверить, что $w(x,t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$w_t - a\,w_{xx} = \tilde f(x,t),\ \ \textit{где}\ \ \tilde f(x,t) = f(x,t) - (g_t(x,t) - a g_{xx}(x,t)), \qquad (27)$$

$$w(x,0) = \tilde j(x),\ \ \textit{где}\ \ \tilde j(x) = j(x) - g(x,0), \qquad (28)$$

$$a_1 w(0,t) + b_1 w_x(0,t) = 0,\ \ a_2 w(h,t) + b_2 w_x(h,t) = 0. \qquad (29)$$

Действительно, с учётом (26), $w_t - a\,w_{xx} = u_t - a\,u_{xx} - (g_t - a g_{xx}) = \tilde f(x,t)$; последнее равенство следует из (1) и из определения $\tilde f$. Равенство (28) вытекает из (26) и (2). Равенства (29) следуют из (26),(25), (3):

$$a_1 w(0,t) + b_1 w_x(0,t) = a_1 u(0,t) + b_1 u_x(0,t) - (a_1 g(0,t) + b_1 g_x(0,t)) =$$
$$= y_1(t) - y_1(t) = 0;$$ аналогично получаем второе равенство (29).

Выполнив для задачи (27),(28),(29) построения пункта **2**, найдём $w(x,t)$, а затем из (26) найдём решение $u(x,t)$ задачи (1),(2),(3):

$$u(x,t) = w(x,t) + g(x,t).$$

Функцию $g(x,t)$ стараются выбрать так, чтобы $\tilde f(x,t)$ и $\tilde j(x)$ имели вид, наиболее удобный для дальнейших вычислений.

<u>В частном случае</u>, когда y_1 и y_2 являются постоянными, рекомендуется брать в качестве g линейную функцию x: $g = px + q$, где p и q – числа. Подставив эту функцию в (3) вместо u (т.е. записав уравнения (25)), получим для определения p и q систему уравнений:

$$a_1 q + b_1 p = y_1,\ a_2(ph + q) + b_2 p = y_2.$$

Решив эту систему, получим нужную функцию g (если система решений не имеет, то g следет искать в другом виде). Функция $w(x,t)$ в данном случае имеет вид:

$$w(x,t) = u(x,t) - px - q$$

и удовлетворяет *тому же* д. у., что и $u(x,t)$:

$$w_t - a\,w_{xx} = f(x,t).$$

Действительно, если $g = px + q$, то $g_t - a g_{xx} = 0$ и в (27) $\tilde f(x,t) = f(x,t)$.

П р и м е р 2. Постройте функцию $g(x,t)$, удовлетворяющую краевым условиям:

а) $3g_x(0,t) - g(0,t) = 1,\ g(5,t) = 3;$ б) $g_x(0,t) = 8e^{-t},\ g_x(1,t) + 4g(1,t) = 8.$

Р е ш е н и е. а) Так как y_1 и y_2 – постоянные ($y_1 = 1$, $y_2 = 3$), то будем искать g в виде $g = px + q$, где p и q – числа. Подставляя эту функцию в заданные краевые условия, получим

$$3p - q = 1, \;\; 5p + q = 3.$$

Отсюда находим $p = 0{,}5$ и $q = 0{,}5$. Таким образом, $g = 0{,}5\,(x + 1)$.

б) Попытаемся и здесь искать g в виде линейной функции x: $g = px + q$. После подстановки g в заданные краевые условия, получим для определения p и q систему уравнений:

$$p = 8\,e^{-t}, \quad p + 4(\,p + q\,) = 8.$$

Отсюда находим $q = 2 - 10\,e^{-t}$. Следовательно, $g = 8\,x\,e^{-t} + 2 - 10\,e^{-t}$.

П р и м е р 3. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - u_{xx} = 0,\; u(x,0) = j\,(x),\;\; где\;\; j\,(x) = \begin{cases} 2\,x + 1 \;\; при \;\; 0 \le x \le 5, \\ 2\,x + 16 \;\; при \;\; 5 < x \le 10, \end{cases} \tag{30}$$

$$u(0,t) = 1,\;\; u_x(10,t) = 2\,. \tag{31}$$

<u>Поиск решения</u> задачи (30),(31), согласно изложенной выше теории, можно провести следующим образом.

1) Так как краевые условия (31) неоднородны, то строим функцию g, удовлетворяющую этим условиям. В данном случае y_1 и y_2 – постоянные, поэтому попытаемся найти g в виде линейной функции x: $g = px + q$. Подставляя g в (31), получим: $g\,(0) = q = 1$, $g^{\,/}(10) = p = 2$. Итак, $g = 2\,x + 1$.

2) Введём новую искомую функцию $w(x,t) = u(x,t) - g\,(x)$, т.е.

$$w(x,t) = u(x,t) - 2\,x - 1, \tag{32}$$

Запишем граничную задачу, решением которой будет $w(x,t)$:

$$w_t - w_{xx} = 0,\;\; w(x,0) = \tilde{j}\,(x),\; где\;\; \tilde{j}\,(x) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; 0 \le x \le 5 \\ 15 \;\; при \;\; 5 < x \le 10, \end{cases} \tag{33}$$

$$w(0,t) = 0,\;\; w_x(10,t) = 0\,. \tag{34}$$

Задача (33),(34) – это задача (27),(28),(29) для рассматриваемого примера (перечитайте две последние фразы перед примером 2).

3) Запишем задачу Штурма-Лиувилля, соответствующую (33),(34):

$$v^{//} = -l\;v,\;\; v(0) = 0,\; v^{/}(10) = 0\,.$$

Её с. ч. и с. ф.: $\displaystyle l_k = \left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2,\;\; v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)p\;x}{20}$ $\quad (k = 1,2,\ldots)$

уже упоминались выше в примере 1.

4) Вычислим d_k и A_k по формулам (20), в которых заменим $j\,(x)$ на $\tilde{j}\,(x)$:

$$d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10} \sin^2\frac{(2k-1)p\;x}{20}\,dx = 5; \quad A_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h \tilde{j}\,(x)v_k(x)\,dx =$$

$$=\frac{1}{5}\int\limits_{5}^{10}15\sin\frac{(2k-1)p\ x}{20}\,dx=-\frac{3\cdot 20}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p\ x}{20}\Bigg|_{5}^{10}=$$

$$=\frac{-60}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p}{2}+\frac{60}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p}{4}=\frac{60}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p}{4}.$$

$(k = 1,2,\ldots)$.

5) В общем случае этот пункт должен содержать вычисление $c_k(t)$ и $G_k(t)$ по формулам (23), в которых надо было бы заменить $f(x,t)$ на $\tilde{f}(x,t)$. Но в рассматриваемом примере $\tilde{f}(x,t)\equiv 0$, так что $G_k(t)\equiv 0$.

6) Записываем формальное решение задачи (33),(34) в виде ряда (22), а в данном случае в виде ряда (19) – частного случая (22):

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k v_k(x)\,e^{-a\,l_k t}\ ,\ \text{ т.е.}$$

$$w(x,t)=\frac{60}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\left(\cos\frac{(2k-1)p}{4}\right)\sin\frac{(2k-1)p\ x}{20}\,e^{-\left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2 t}.$$

7) Из (32) находим формальное решение задачи (30),(31):

$$u(x,t)=w(x,t)+2x+1\quad\Leftrightarrow$$

$$u(x,t)=2x+1+\frac{60}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\left(\cos\frac{(2k-1)p}{4}\right)\sin\frac{(2k-1)p\ x}{20}\,e^{-\left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2 t}.\qquad(35)$$

З а м е ч а н и е 7. Для практических расчётов значений $u(x,t)$ используются (как обычно при работе с рядами) частичные суммы ряда (35). Так, если заменить ряд в правой части (35) его второй частичной суммой s_2, то получим следующее приближённое равенство:

$$u(x,t)\approx 2x+1+\frac{30\sqrt{2}}{p}\left(\left(\sin\frac{p\ x}{20}\right)e^{-\frac{p^2 t}{400}}-\frac{1}{3}\left(\sin\frac{3p\ x}{20}\right)e^{-\frac{9p^2 t}{400}}\right).$$

Оценку погрешности здесь можно провести, используя общие приёмы работы с функциональными рядами.

§ 4. *О ХАРАКТЕРЕ СХОДИМОСТИ РЯДА* (22) *ДЛЯ ПЕРВОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ*

В § 3 уже отмечалось, что сумма ряда (22) будет классическим или обобщённым решением задачи (1),(2),(13) лишь при выполнении определённых условий. В теоремах 4, 5, 6 приведены возможные варианты этих условий, но только для первой граничной задачи. То есть всюду далее в настоящем параграфе предполагается, что в краевых условиях (13) $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_2 = 0$ и, следовательно, эти условия имеют вид

$$u(0,t)=0,\;\; u(h,t)=0\,. \qquad (13_1)$$

Теорема 4. *Пусть* $f(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\; j(x)\in C[0,h],\; j^{/}(x)\in L_2(0,h)$ *и* $j(0)=0,\; j(h)=0$. *Тогда справедливы утверждения а) и б):*

а) каждая из частичных сумм ряда (22)

$$s_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}A_k v_k(x)\,e^{-a\,l_k t}+\sum_{k=1}^{n}G_k(t)v_k(x) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

принадлежит $C^{2,1}(\overline{Q})$ *и при* $n\to\infty$ *последовательность* $\{s_n\}$ *сходится к функции* $u(x,t)$ *следующим образом*

$$\|\,u(x,t)-s_n(x,t)\,\|_{C(\overline{Q})}+\|\,u(x,t)-s_n(x,t)\,\|_{C^{2,1}(\overline{Q}_0)}\to 0,$$

где Q_0 *– произвольная область, лежащая в* Q *на положительном расстоянии от границы* Q.

б) сумма $u(x,t)$ *ряда* (22) *является классическим решением задачи* (1),(2),(13_1).

Теорема 5. *Пусть* $f(x,t)\in L_2(Q),\; j(x)\in C[0,h],\; j^{/}(x)\in L_2(0,h)$ *и* $j(0)=0,\; j(h)=0$. *Тогда справедливо следующее:*

а) каждая из частичных сумм $s_n(x,t)$ $(n=1,2,\ldots)$ *ряда* (22) *принадлежит* $C(\overline{Q})$ *и при* $n\to\infty$ *последовательность* $\{s_n\}$ *сходится в* $C(\overline{Q})$ *к функции* $\tilde{u}(x,t)$:

$$\|\,\tilde{u}(x,t)-s_n(x,t)\,\|_{C(\overline{Q})}\to 0;$$

б) сумма $u(x,t)\equiv\tilde{u}(x,t)$ *ряда* (22) *является обобщённым решением из* $C(\overline{Q})$ *задачи* (1),(2),(13_1).

Теорема 6. *Пусть* $f(x,t)\in L_2(Q),\; j(x)\in L_2(0,h)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) каждая из частичных сумм $s_n(x,t)$ $(n=1,2,\ldots)$ *ряда* (22) *принадлежит* $C(\overline{Q})$ *и при* $n\to\infty$ *последовательность* $\{s_n\}$ *сходится в* $L_2(Q)$ *к функции* $\hat{u}(x,t)$:

$$\|\,\hat{u}(x,t)-s_n(x,t)\,\|_{L_2(Q)}\to 0;$$

б) сумма $u(x,t)\equiv\hat{u}(x,t)$ *ряда* (22) *является обобщённым решением из* $L_2(Q)$ *задачи* (1),(2),(13_1).

Строгие доказательства этих теорем достаточно сложны и не приводятся в данном пособии, но автору представляется полезным перечислить с небольшими пояснениями основные этапы доказательства хотя бы одной из них, например, теоремы 4.

1) Устанавливаем, опираясь на известные результаты анализа, справедливость включений $s_n\in C^{2,1}(\overline{Q})$ $(n=1,2,\ldots)$.

2) Показываем, что ряд (22) сходится равномерно на множестве $\overline{Q}$, отсюда делаем вывод: $u \in C(\overline{Q})$.

3) Показываем, что равномерно на множестве $\overline{Q}_0$ сходятся ряды, полученные почленным дифференцированием ряда (22) один раз по t и два раза по x:

$$u_t = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k a\, l_k v_k(x) e^{-a\, l_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{/}(t) v_k(x), \tag{36}$$

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k^{//}(x) e^{-a\, l_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t) v_k^{//}(x). \tag{37}$$

Таким образом, с учётом произвольности области Q_0, приходим к выводу: $u \in C^{2,1}(Q)$.

3) Доказываем, используя (36) и (37), что сумма ряда (22) удовлетворяет в Q д. у. (1). Приведём соответствующие выкладки.

$$u_t - a u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k a\,(l_k v_k(x) + v_k^{//}(x)) e^{-a\, l_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k^{/}(t) v_k(x) - a G_k(t) v_k^{//}(x)).$$

Учитывая равенства $v_k^{//}(x) = -\, l_k v_k(x)$ (v_k – решение д. у. (17) при $l = l_k$), будем иметь для $(x,t) \in Q$

$$u_t - a u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (G_k^{/}(t) + a\, l_k G_k(t)) v_k(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) v_k(x) = f(x,t).$$

Справедливость предпоследнего равенства вытекает из (24), а последнего – из следующих соображений. Согласно (23), $c_k(t)$ – коэффициенты Фурье, а последний ряд – ряд Фурье функции $f(x,t)$ по системе с. ф. $\{v_k(x)\}$ задачи (17),(18) (переменная t здесь играет роль параметра); условия же теоремы 4, наложенные на $f(x,t)$, гарантируют сходимость этого ряда (см. теорему 4.3 и замечание 6.3).

4) Убеждаемся, что сумма ряда (22) удовлетворяет начальному условию. Действительно,

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(0) v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x),$$

так как $G_k(0) = 0$ (см. (24)). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)$ есть ряд Фурье функции $j\,(x)$ по системе $\{v_k(x)\}$ (см. (20)); из условий, наложенных на $j\,(x)$, следует, в силу теоремы 5.3, что этот ряд равномерно на $[0,h]$ сходится к $j\,(x)$. Таким образом, $u(x,0) = j\,(x)$ при $x \in [0,h]$.

5) Из равенств $v_k(0) = 0$, $v_k(h) = 0$ выводим, что сумма ряда (22) удовлетворяет краевым условиям (13_1).

Упражнения к главе 4

1. Найдите распределение температуры в стержне длиною h, если известно следующее: боковая поверхность и левый край стержня теплоизолированы; правый край всё время поддерживается при нулевой температуре; в начальный момент времени температура в стержне распределена линейно, причём, на левом крае она равна числу $u_0 \neq 0$, а на правом – нулю; источников тепла внутри стержня нет.

2. Найдите распределение температуры в полностью теплоизолированном стержне, длиною h, если источников тепла внутри стержня нет, а начальная температура равна

$$j(x) = \begin{cases} u_0 \ \textit{при} \ \ 0 \le x \le h/2, \\ 0 \ \textit{при} \ \ h/2 < x \le h. \end{cases} .$$

Здесь и далее $u_0 = const \neq 0$.

В упражнениях 3 – 6, 8 – 11 найдите формальные решения задач.

3. $u_t - a\,u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2u_0}{h} x \ \textit{при} \ \ 0 \le x \le h/2, \\ \dfrac{2u_0}{h}(h - x) \ \textit{при} \ \ h/2 < x \le h, \end{cases}$

$$u_x(0,t) = 0, \ u_x(h,t) = 0.$$

4. $u_t - u_{xx} = 0, \ u(x,0) = \begin{cases} x \ \textit{при} \ \ 0 \le x \le 1, \\ (2 - x) \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2, \end{cases} \ u(0,t) = 0, \ u(2,t) = 0.$

5. $u_t - a\,u_{xx} = 0, \ u(x,0) = \dfrac{x(h-x)}{h^2}, \ u(0,t) = 0, \ u(h,t) = 0.$

6. $u_t - a\,u_{xx} = 0, \ u(x,0) = 2\sin\dfrac{p\,x}{h}, \ u(0,t) = 0, \ u(h,t) = 0.$

7. Сведите граничную задачу с неоднородными краевыми условиями к задаче с однородными краевыми условиями:

а) $u_t - u_{xx} = 0, \ u(x,0) = x^2 + 4e^{-x}, \ u(0,t) = 3, \ u_x(1,t) + u(1,t) = 6.$

б) $u_t - 3u_{xx} = x + 5t, \ u(x,0) = 0, \ u_x(0,t) - u(0,t) = -4, \ u_x(3,t) = 1.$

в) $u_t - u_{xx} = 0, \ u(x,0) = 2, \ u(0,t) = 2 + t, \ u_x(1,t) = e^{-t}.$

8. $u_t - 8u_{xx} = 0, \ u(x,0) = 10 - x, \ u_x(0,t) = 0, \ u(10,t) = 0.$

9. $u_t - 4u_{xx} = 0, \ u(x,0) = 1 - x, \ u_x(0,t) = 2, \ u_x(10,t) = 2.$

10. $u_t - a\,u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} x + 3 \ \textit{при} \ \ 0 \le x \le 1, \\ x + 1 \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2, \end{cases} \ u(0,t) = 2, \ u(2,t) = 4.$

11. $u_t - u_{xx} = 1, \quad u(x,0) = 0, \ u(0,t) = 0, \ u_x(h,t) = 0.$

12. Найдите методом Фурье расчётную формулу для решения задачи
$u_t - a\,u_{xx} + cu = 0,\ \ u(x,0) = j\,(x),\ \ u(0,t) = 0,\ \ u(h,t) = 0,$ где $c = const \geq 0.$

13. Установите (используя одну из теорем 4,5,6) будут ли найденные в упражнениях 4,5,6 и 10 формальные решения классическими или обобщёнными решениями соответствующих задач.

Ответы и указания к упражнениям

1. $u(x,t) = \dfrac{8u_0}{p^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\left(\cos\dfrac{(2k-1)p\,x}{2h}\right)e^{-a\left(\frac{(2k-1)p}{2h}\right)^2 t}.$

Указание. Математической моделью процесса изменения температуры в стержне будет граничная задача

$$u_t - a\,u_{xx} = 0,\quad u(x,0) = \frac{u_0(h-x)}{h},\ \ u_x(0,t) = 0,\ \ u(h,t) = 0.$$

2. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{2u_0}{p}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)}\left(\cos\dfrac{(2m-1)p\,x}{h}\right)e^{-a\left(\frac{(2m-1)p}{h}\right)^2 t}.$

Указания. Математическая модель процесса –

$$u_t - a\,u_{xx} = 0,\ \ u(x,0) = j\,(x),\ \ u_x(0,t) = 0,\ \ u_x(h,t) = 0.$$

При отыскании решения следует учесть, что минимальное с. ч. соответствующей задачи Штурма-Лиувилля $l_0 = 0$, а отвечающая l_0 с. ф. $v_0(x) = 1$.

3. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2} - \dfrac{4u_0}{p^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}\left(\cos\dfrac{2(2m-1)p\,x}{h}\right)e^{-4a\left(\frac{(2m-1)p}{h}\right)^2 t}.$

4. $u(x,t) = \dfrac{8}{p^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\left(\sin\dfrac{(2m-1)p\,x}{2}\right)e^{-\left(\frac{(2m-1)p}{2}\right)^2 t}.$

5. $u(x,t) = \dfrac{8}{p^3}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^3}\left(\sin\dfrac{(2m-1)p\,x}{h}\right)e^{-a\left(\frac{(2m-1)p}{h}\right)^2 t}.$

6. $u(x,t) = \left(2\sin\dfrac{p\,x}{h}\right)e^{-\frac{ap^2}{h^2}t}.$

8. $u(x,t) = 3x - 30 + \dfrac{320}{p^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\left(\cos\dfrac{(2k-1)p\,x}{20}\right)e^{-\frac{(2k-1)^2p^2}{50}t}.$

9. $u(x,t) = 2x - 14 + \dfrac{120}{p^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}\left(\cos\dfrac{(2m-1)p\,x}{10}\right)e^{-\frac{(2m-1)^2p^2}{25}t}.$

10. $u(x,t) = x + 2 + \dfrac{4}{p}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{2m-1}(\sin(2m-1)p\ x)\,e^{-(2m-1)^2 p^2 t}$.

11. $u(x,t) = \dfrac{16h^2}{p^3}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^3}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)p}{h}\right)^2 t}\right)\sin\dfrac{(2k-1)p\ x}{2h}$.

12. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\sin\dfrac{kp\ x}{h})\,e^{-\left(a\left(\frac{kp}{h}\right)^2 + c\right)t}$, *где* $A_k = \dfrac{2}{h}\int_0^h j\,(x)\sin\dfrac{kp\ x}{h}\,dx$.

Глава 5. **УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ**

§ 1. *ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ*

1. Уравнение колебаний с двумя независимыми переменными. Начальные и краевые условия.

Уравнением колебаний (другое название – *волновое уравнение*) с двумя независимыми переменными называют уравнение

$$u_{tt} - a\, u_{xx} = f(x, t), \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ – искомая функция переменных x и t; $a > 0$ – заданное число; $f(x, t)$ – заданная функция. Символами u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx} (как и в главах 2, 4) обозначаем частные производные $u(x, t)$.

Уравнение (1) – линейное дифференциальное уравнение (д. у.) второго порядка гиперболического типа, его частный случай приведен в главе 2 (см. уравнение (9.2)).

Мы рассмотрим в данной главе задачу отыскания решений уравнения (1), определенных в том же прямоугольнике Q плоскости Oxt, о котором шла речь в § 1 главы 4. Для того, чтобы из бесконечного множества решений д. у. (1) выделить одно решение, требуется задать дополнительную информацию об искомом решении. Обычно такая информация задается в виде *начальных условий*

$$u(x, 0) = j(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), \tag{2}$$

и краевых условий

$$a_1 u(0,t) + b_1 u_x(0,t) = y_1(t), \quad a_2 u(h,t) + b_2 u_x(h,t) = y_2(t). \tag{3}$$

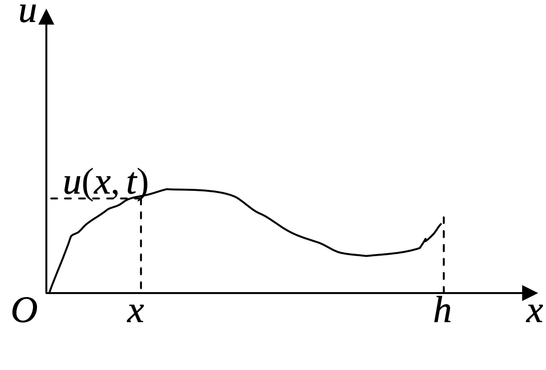
Здесь $j(x)$, $h(x)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ – заданные функции, a_1, b_1, a_2, b_2 – заданные числа, причём такие, что

$$|a_1| + |b_1| > 0, \quad |a_2| + |b_2| > 0.$$

Задача отыскания решения (1), определённого в $\overline{Q}$ и удовлетворяющего его уравнениям (2) и (3), – это простейшая граничная задача для д. у. (1).

2. Пример физической задачи, приводящей к системе (1), (2), (3).

Рассмотрим струну, совершающую в некоторой плоскости малые поперечные колебания около своего положения равновесия. Введём в этой плоскости систему прямоугольных координат Oxu, причём за ось Ox примем линию равновесного положения натянутой струны. Тогда математической моделью процесса колебаний струны и будет уравнение (1). При этом $u(x, t)$ – смещение вдоль оси Ou точки струны с абсциссой x в момент времени t (см. рису-



нок). Мы предполагаем далее, что в любой момент времени левый конец струны имеет абсциссу $x = 0$, а правый имеет абсциссу $x = h$ (здесь и далее $h = \text{const} > 0$).

Число a в нашем примере пропорционально величине силы натяжения струны, а функция $f(x, t)$ пропорциональна линейной плотности внешних сил, действующих на струну. Если таких сил нет, то $f(x, t) \equiv 0$, и колебания струны называют *свободными*.

Начальные условия (2) показывают, в каком состоянии находилась струна в момент начала наблюдений: $j\,(x)$ есть смещение, а $h\,(x)$ – скорость точки струны с абсциссой x при $t = 0$.

Физический смысл (3) зависит от значений чисел a_1, a_2, b_1, b_2. Так, задание краевых условий первого рода ($a_1 = a_2 = 1,\ b_1 = b_2 = 0$):

$$u(0, t) = y_1(t),\ \ u(h, t) = y_2(t),– \tag{4}$$

возможно в том случае, если известны в любой момент времени t смещения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ соответственно левого и правого концов струны.

Задание краевых условий второго рода ($a_1 = a_2 = 0,\ b_1 = b_2 = 1$):

$$u_x(0, t) = y_1(t),\ \ u_x(h, t) = y_2(t), –$$

возможно в том случае, если нам известны в любой момент времени проекции на ось Ou сил, действующих на концы струны ($y_1(t)$ и $y_2(t)$ пропорциональны этим проекциям). Если концы струны перемещаются свободно, то $y_1(t) \equiv y_2(t) \equiv 0$. Возможны ситуации, когда на левом и правом концах струны задаются краевые условия различного рода (см. далее пример 1).

3. Уравнение колебаний с несколькими пространственными переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_1, ..., x_n, t)\ . \tag{5}$$

Здесь: $u = u(x_1,\ldots, x_n, t)$ – искомая функция вещественных переменных $x_1,\ldots, x_n, t$; вещественное число $a > 0$, натуральное число n и функция $f(x_1,\ldots, x_n, t)$ считаются заданными.

При $n = 2$ уравнение (5) описывает, например, малые поперечные колебания мембраны; при $n = 3$ – процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. При $n = 1$ д.у. (5) совпадает с (1), если принять $x_1 = x$.

Граничная задача для уравнения (5) при n ³ 2 ставится обычно следующим образом. Требуется найти решение (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_1,\ldots, x_n, 0) = j\,(x_1,\ldots, x_n),\ \ u_t(x_1,\ldots, x_n, 0) = h\,(x_1,\ldots, x_n),$$

и краевому условию

$$(a\,u + b\,\frac{\partial u}{\partial N})\Big|_S = y\,(x_1,\ldots,x_n,t).$$

Здесь D, S, N имеют тот же смысл, что и § 1 главы 4; считаются выполненными и предположения, сделанные там относительно a и b.

§ 2. *КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ. КОРРЕКТНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ*

Мы рассмотрим здесь лишь первую граничную задачу для волнового уравнения с двумя независимыми переменными, т.е. задачу (1), (2), (4).

О п р е д е л е н и е 1. Классическим решением задачи (1), (2), (4) называется функция $u(x,t) \in C^{0,1}(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$, удовлетворяющая д.у. (1) при всех $(x,t) \in Q$, начальным условиям (2) при всех $x \in [0,h]$, краевым условиям (4) при всех $t \in [0,T]$.

Достаточные условия корректности задачи содержит

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi(x) \in C^2[0,h]$, $h(x) \in C^1[0,h]$, $\psi_1(t)$ *и* $y_2(t) \in C^3[0,T]$, *и пусть выполнены условия согласования*:

$$j(0) = y_1(0),\ j(h) = y_2(0),\ h(0) = y_1^{/}(0),\ h(h) = y_2^{/}(0),$$

$$y_1^{//}(0) - a\,j^{//}(0) = f(0,0),\ y_2^{//}(0) - a\,j^{//}(h) = f(h,0).$$

Тогда задача (1), (2), (4) *имеет классическое решение* $u(x,t)$.*Это решение единственно и для него верна оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \le M\left(\|f\|_{C^1(\overline{Q})} + \|j\|_{C^2[0,h]} + \|h\|_{C^1[0,h]} + \|y_1\|_{C^3[0,T]} + \|y_2\|_{C^3[0,T]}\right), \quad (6)$$

где $M > 0$ – *некоторое число, зависящее только от* a, h, T.

Из (6) следует непрерывная зависимость (в указанных нормах) классического решения u задачи от заданных функций f, j, h, y_1, y_2. Доказывается это точно так же, как аналогичное утверждение для уравнения теплопроводности в § 2 главы 4.

В ряде случаев (в частности тогда, когда граничная задача для уравнения (1) не имеет классического решения) целесообразно ввести понятие обобщённого решения задачи. Представление о том, как это делается, даёт § 2 главы 4. Точные определения и теоремы для д. у. (1) можно найти в [2, 4, 7].

§ 3. *РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ*

1. Случай однородного уравнения и однородных краевых условий.

Рассмотрим задачу (1), (2), (3) с $f \equiv 0$, $y_1 \equiv 0$, $y_2 \equiv 0$:

$$u_{tt} - a\,u_{xx} = 0, \quad (7)$$

$$u(x,0) = j(x),\ u_t(x,0) = h(x), \quad (8)$$

$$a_1 u(0,t) + b_1 u_x(0,t) = 0,\ a_2 u(h,t) + b_2 u_x(h,t) = 0. \quad (9)$$

Проводимые далее построения (имеющие целью отыскание формального решения $u(x, t)$ задачи) в значительной мере повторяют проделанное в § 3 главы 4. Поэтому ограничимся минимумом пояснений.

Первый этап метода разделения переменных (метода Фурье) состоит в отыскании отличных от тождественного нуля функций вида

$$U(x, t) = v(x)\, z(t),$$

которые удовлетворяют: д. у. (7) при всех $(x, t) \in Q$ и краевым условиям (9) при всех $t \in [0, T]$.

Подставляя $U(x,t)$ в (7) вместо u будем иметь

$$v(x)\, z''(t) - a\, v''(x)\, z(t) = 0, \text{ или}$$

$$v(x)\, z''(t) = a\, v''(x)\, z(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $a\, v(x)\, z(t)$, получим

$$\frac{z''(t)}{a\, z(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}. \tag{10}$$

Ясно, что функция $U(x,t)$ будет в Q решением (7), если равенство (10) выполнено при всех $(x, t) \in Q$. Но это возможно (по причинам, о которых подробно говорилось в связи с равенством (15.3)) лишь в том случае, если левая и правая части (10) равны одной и той же постоянной:

$$\frac{z''(t)}{a\, z(t)} = -\,l\,, \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\,l = \text{const}\,.$$

Таким образом, уравнение (10) «распадается» на два уравнения:

$$z''(t) = -\,a\,l\; z(t), \tag{11}$$

$$v''(x) = -\,l\; v(x). \tag{12}$$

Подставляя функцию $U(x,t)$ в краевые условия (9), приходим к выводу, что она удовлетворяет (9) при всех $t \in [0,T]$ тогда и только тогда, когда этим условиям удовлетворяет $v(x)$:

$$a_1 v(0) + b_1 v'(0) = 0\,,\; a_2\, v(h) + b_2\, v'(h) = 0. \tag{13}$$

Итак, функция $U(x, t) = v(x)\, z(t)$ будет ненулевым решением системы уравнений (7), (9), если $v(x)$ будет ненулевым решением (т.е. собственной функцией) задачи Штурма-Лиувилля (12),(13), а $z(t)$ будет ненулевым решением д.у. (11). Из сказанного вытекает, что для завершения первого этапа построений мы должны выполнить следующие действия. Во-первых, найти собственные функции $v_k(x)$ и отвечающие им собственные числа l_k задачи (12),(13). Во-вторых, решить д.у. (11) при $l = l_k$. Вид общего решения (11) зависит, как известно, от знака l. Мы *предположим* здесь, что *все* $l_k > 0$ (это равносильно тому, что положительно наименьшее с.ч.). В этом случае при $l = l_k$ характеристическое уравнение д. у. (11)

$$r^2 = -\,a\,l_k \text{ имеет мнимые корни } r_{1,2} = \pm\sqrt{a\,l_k}\; i\,,$$

а общее решение (11) с $l = l_k$ имеет вид

$$z = z_k(t) = A_k \cos\sqrt{a\,l_k}\; t + B_k \sin\sqrt{a\,l_k}\; t\,.$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные. И, наконец, мы можем записать все искомые ненулевые решения д.у (7), удовлетворяющие краевым условиям (9): $U = U_k(x, t) = v_k(x)\, z_k(t)$, или

$$U_k(x,t) = (A_k \cos\sqrt{a\,l_k}\; t + B_k \sin\sqrt{a\,l_k}\; t)\, v_k(x) \qquad (k = 1,2,\ldots).$$

<u>Второй этап</u> метода Фурье. Будем искать решение задачи (7), (8), (9) в виде ряда, составленного из $U_k(x, t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\sqrt{a\,l_k}\; t + B_k \sin\sqrt{a\,l_k}\; t)\, v_k(x)\,. \tag{14}$$

Так как каждый член ряда (14) удовлетворяет д.у. (7) и краевым условиям (9), то, в силу линейности и однородности (7) и (9), сумма $u(x,t)$ этого ряда также будет решением системы (7), (9) для любых A_k и B_k. Последнее верно, конечно, в том случае, если ряд (14) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды по t и дважды по x, сходятся должным образом.

Подберём постоянные A_k и B_k так, чтобы сумма (14) удовлетворяла начальным условиям (8). Вычислим

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \sqrt{a\,l_k} \sin\sqrt{a\,l_k}\; t + B_k \sqrt{a\,l_k} \cos\sqrt{a\,l_k}\; t)\, v_k(x)$$

и подставим в (8) это выражение для $u_t(x,t)$ и ряд для $u(x,t)$ из (14):

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) = j\,(x)\,, \\ u_t(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{a\,l_k}\; v_k(x) = h\,(x)\,. \end{cases} \tag{15}$$

Ряды, входящие в (15), есть ряды по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Как известно, первый из них может сходиться к $j\,(x)$ (в каком-либо смысле), только если

$$A_k = \frac{1}{d_k} \int_0^h j\,(x)\, v_k(x)\, dx\,, \; где \;\; d_k = \int_0^h v_k^2(x)\, dx\,; \tag{16}$$

а второй может сходиться к $h\,(x)$, если

$$B_k \sqrt{a\,l_k} = \frac{1}{d_k} \int_0^h h\,(x)\, v_k(x)\, dx\,, \quad \text{или}$$

$$B_k = \frac{1}{d_k \sqrt{a\,l_k}} \int_0^h h\,(x)\, v_k(x)\, dx\,. \tag{17}$$

<u>Вывод</u>. Формальным решением задачи (7), (8), (9) (при условии, что все

$l_k > 0$) будет сумма ряда (14), где l_k – с. ч., $v_k(x)$ – с. ф. задачи (12), (13), а коэффициенты A_k и B_k вычислены по формулам (16), (17).

З а м е ч а н и е 1. Решение (7), (8), (9) можно найти по изложенной выше схеме и тогда, когда среди собственных чисел задачи (12), (13) есть неположительные. Рассмотрим, например, ситуацию, когда *наименьшее с.ч.* l_0 задачи (12), (13) *равно нулю* (а следовательно, согласно теореме 1.3, все остальные с.ч. положительны). Собственную функцию, отвечающую l_0, обозначим $v_0(x)$. (Мы обозначаем наименьшее с.ч. l_0, а не l_1, для того, чтобы не пришлось менять использованные ранее обозначения). Уравнение (11) при $l = l_0 = 0$ имеет вид $z''(t) = 0$, его общее решение – $z(t) = z_0(t) = A_0 + B_0 t$, где A_0 и B_0 – произвольные постоянные. Теперь нетрудно убедиться, что формальным решением задачи (7), (8), (9) в рассматриваемой ситуации будет функция

$$u(x,t) = (A_0 + B_0 t)\,v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\sqrt{a l_k}\, t + B_k \sin\sqrt{a l_k}\, t)\,v_k(x),$$

где $A_0 = \dfrac{1}{d_0}\displaystyle\int_0^h j(x)\,v_0(x)\,dx$, $B_0 = \dfrac{1}{d_0}\displaystyle\int_0^h h(x)\,v_0(x)\,dx$, $d_0 = \displaystyle\int_0^h v_0^2(x)\,dx$,

а числа A_k, B_k при $k = 1,2,\dots$ вычисляются по формулам (16), (17).

П р и м е р 1. Найдите закон свободных колебаний струны длиной 10 дм при следующих условиях. Левый конец струны закреплён, правый может двигаться свободно; в начальный момент времени струна натянута; из состояния равновесия её выводит удар, который придаёт всем точкам струны (кроме закреплённой) постоянную скорость h_0 дм/сек; коэффициент $a = 4$ дм^2/ сек^2.

Р е ш е н и е примера. Математической моделью процесса (если использовать принятые выше обозначения и допущения) будет система уравнений:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = h_0, \\ u(0,t) = 0,\ \ u_x(10,t) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

(это система (7), (8), (9) при $a = 4$, $j(x) = 0$, $h(x) = h_0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $h = 10$).

П о и с к р е ш е н и я задачи (18) проведём по следующему плану.

1) Находим с.ч. l_k и с.ф. $v_k(x)$ задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей (18):

$$v''(x) = -\,l\,v(x)\,,\ v(0) = 0,\ \ v'(10) = 0.$$

Это сделано в § 2 главы 3 (см. там пример 1):

$$l_k = \left(\frac{(2k-1)p}{20} \right)^2, \; v_k(x) = \sin \frac{(2k-1)p\ x}{20} \quad (k = 1, 2,\ldots).$$

(заметим, что все $l_k > 0$).

2) Находим числа d_k, A_k, B_k по формулам (16), (17):

$$d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10} \sin^2 \frac{(2k-1)p\ x}{20}\,dx = 5,$$

$$A_k = \frac{1}{d_k} \int_0^h j\,(x)\, v_k(x)\,dx = 0\,, т.к.\ j\,(x) \equiv 0\,,$$

$$B_k = \frac{1}{d_k \sqrt{a\ l_k}} \int_0^h h(x)\, v_k(x)\,dx = \frac{20}{5 \cdot 2 \cdot (2k-1)p} \int_0^{10} h_0 \sin \frac{(2k-1)p\ x}{20}\,dx =$$

$$= \frac{2h_0}{(2k-1)p} \cdot \frac{20}{(2k-1)p} \left(-\cos \frac{(2k-1)p\ x}{20} \right)\Bigg|_0^{10} = \frac{40h_0}{(2k-1)^2 p^2}, \text{ так как}$$

$$\cos \frac{(2k-1)p}{2} = 0,\ \cos 0 = 1 \quad (k = 1, 2, ...).$$

3) Подставляя найденные значения A_k, B_k, l_k, $v_k(x)$ и $a = 4$ в (14), получаем <u>ответ:</u>

$$u(x,t) = \frac{40h_0}{p^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)p\ t}{10} \cdot \sin \frac{(2k-1)p\ x}{20}.$$

2. Случай однородных краевых условий.

В этом пункте рассмотрим задачу (1), (2), (3), где $y_1 \equiv 0$, $y_2 \equiv 0$, т. е. рассмотрим задачу (1), (2), (9). Построения, аналогичные выполненным в п.**1** приводят к следующему выражению для формального решения (1), (2), (9) в предположении, что <u>*все*</u> $l_k > 0$:

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{a\, l_k}\ t + B_k \sin \sqrt{a\, l_k}\ t)\, v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t)\, v_k(x). \qquad (19)$$

Здесь: l_k – с.ч., $v_k(x)$ – с.ф. задачи (12), (13); коэффициенты A_k, B_k вычисляются по формулам (16), (17);

$$G_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a\, l_k}} \int_0^t c_k(t) \sin(\sqrt{a\, l_k}\,(t - t))\,dt\ ,\ c_k(t) = \frac{1}{d_k} \int_0^h f(x,t)\, v_k(x)\,dx. \qquad (20)$$

Очевидно, что (14) – частный случай (19).

З а м е ч а н и е 2. Несложно показать, что $G_k(t)$ является решением задачи Коши

$$G_k^{//}(t) + a\ l_k G_k(t) = c_k(t),\ G_k(0) = 0,\ G_k^{/}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Это решение, конечно, можно искать любым методом, а не только по первой из формул (20).

З а м е ч а н и е 3. В пособии не приводятся условия, при которых сумма ряда (19) будет классическим или обобщённым решением задачи (1),(2), (9). Представление о характере этих условий даёт § 4 главы 4, а точные формулировки читатель найдёт, например, в [2,4,7].

3. Случай неоднородных краевых условий.

Задачу (1), (2), (3), где $\left|y_1(t)\right|+\left|y_2(t)\right|\not\equiv 0$, можно свести к задаче вида (1),(2), (9), т.е. к задаче с однородными краевыми условиями. Делается это по той же схеме, что для уравнения теплопроводности (см. § 3 главы 4). А именно, строится функция $g(x,t)\in C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющая краевым условиям (3), и вводися новая искомая функция

$$w(x,t)=u(x,t)-g(x,t).$$

Эта функция и будет решением задачи вида (1), (2), (9) (которую предлагаем читателю записать самостоятельно).

В частном случае, когда y_1, y_2 – постоянные, а g выбрана в виде $g=px+q$ (p и q – числа) новая искомая функция

$$w(x,t)=u(x,t)-px-q$$

будет решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt}-a\,w_{xx}=f(x,t), \\ w(x,0)=\breve{f}(x),\quad w_t(x,0)=h(x),\ \text{где}\ \breve{f}(x)=j(x)-px-q, \\ a_1 w(0,t)+b_1 w_x(0,t)=0,\ a_2 w(h,t)+b_2 w_x(h,t)=0. \end{cases} \tag{21}$$

Отыскав $w(x,t)$ по рецепту п. **2**, затем найдём и $u(x,t)$.

П р и м е р 2. Найдите формальное решение задачи

$$u_{tt}-4u_{xx}=0,\ u(x,0)=1+2x,\ u_t(x,0)=3, \tag{22}$$

$$u(0,t)=0,\ u_x(0,t)=2. \tag{23}$$

П о и с к р е ш е н и я $u(x,t)$ задачи (22), (23) проведём по следующему плану (повторяющему сответствующий план для уравнения теплопроводности в § 3 главы 4).

1) Поскольку краевые условия (23) неоднородны, то вначале построим функцию g, удовлетворяющую (23). В данном случае $y_1=0$, $y_2=2$ – числа, поэтому положим $g=px+q$. Подставляя g в (23) вместо u, получим: $g(0)=q=0$, $g_x(0)=g'(0)=p=2$; следовательно, $g=2x$.

2) Введём новую искомую функцию

$$w(x,t)=u(x,t)-g \quad\Leftrightarrow\quad w(x,t)=u(x,t)-2x.$$

Эта функция будет решением задачи (задача (21) для данного случая).

$$\begin{cases} w_{tt}-4w_{xx}=0,\ w(x,0)=1,\ w_t(x,0)=3, \\ w(0,t)=0,\ w_x(0,t)=0 \end{cases} \tag{24}$$

Приступим к отысканию решения (24) (процедура такая же, как в примере 1, для удобства читателя мы её кратко повторим).

3) Запишем задачу Штурма-Лиувилля, соответствующую (24):

$$v^{//}(x) = -\,l\; v(x)\,,\; v\,(0) = 0,\;\; v^{/}(10) = 0.$$

Найдём её с.ч. l_k и с.ф. $v_k\,(x)$ (см. пример 1):

$$l_k = \left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2,\; v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)p\;x}{20} \qquad (\,k = 1, 2,\ldots).$$

4) Найдём числа d_k , A_k , B_k по формулам (16), (17), заменив там $j\,(x)$ на $\tilde{j}(x)$ (в нашем примере $\tilde{j}(x) = 1$, $h\,(x) = 3$):

$$d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10} \sin^2\frac{(2k-1)p\;x}{20}\,dx = 5,$$

$$A_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h \tilde{j}(x)\,v_k(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^{10} 1\cdot\sin\frac{(2k-1)p\;x}{20}\,dx = \frac{4}{(2k-1)p}\,,$$

$$B_k = \frac{1}{d_k\sqrt{a\;l_k}}\int_0^h h(x)\,v_k(x)\,dx = \frac{20}{5\cdot 2\cdot(2k-1)p}\int_0^{10} 3\cdot\sin\frac{(2k-1)p\;x}{20}\,dx =$$

$$= \frac{120}{(2k-1)^2 p^{\,2}}$$ (подробности вычисления интегралов см. в примере 1).

5) В этом пункте, вообще говоря, следует искать функции $c_k\,(t)$ и $G_k\,(t)$ по формулам (20). В нашем примере $f\,(x,\,t) \equiv 0$, а потому $c_k\,(t) \equiv 0$, $G_k\,(t) \equiv 0$.

6) Запишем формальное решение задачи (24) в виде ряда (19): $w\,(x,\,t) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p\;t}{10} + \frac{120}{(2k-1)^2 p^{\,2}}\sin\frac{(2k-1)p\;t}{10}\right)\cdot\sin\frac{(2k-1)p\;x}{20}\,.$$

7) Вспомнив, что решение задачи (22), (23) $u(x,t) = 2\,x + w(x,t)$, запишем <u>ответ</u>: $u\,(x,\,t) = 2\,x\,+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2k-1)p}\cos\frac{(2k-1)p\;t}{10} + \frac{120}{(2k-1)^2 p^{\,2}}\sin\frac{(2k-1)p\;t}{10}\right)\cdot\sin\frac{(2k-1)p\;x}{20}\,.$$

***Упражнения к главе* 5**

1. Найдите формальное решение задачи

$$u_{tt} - a\,u_{xx} = 0,\; u(x,0) = \frac{u_0}{h}(h - x),\; u_t(x,0) = 0,\; u_x(0,t) = 0,\; u(h,t) = 0\,;$$

здесь и в упр. 3 $u_0 = const$. Поясните механический смысл задачи.

2. В начальный момент времени $(t = 0)$ струна $(0 \le x \le h\,)$ находится в покое и точкам её участка $a \le x \le b$ придана постоянная скорость h_0;

здесь $0 < a < b < h$. Найдите закон колебаний струны, если концы струны закреплены.

3. Найдите формальное решение задачи. Поясните механический смысл задачи.

$$u_{tt} - a u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2u_0}{h} x \;\; при \;\; 0 \le x \le h/2, \\ \dfrac{2u_0}{h}(h - x) \;\; при \;\; h/2 < x \le h, \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(h,t) = 0.$$

В упражнениях 4 – 11 найдите формальные решения задач.

4. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(x,0) = \sin\dfrac{p\ x}{2h},\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u_x(h,t) = 0.$

5. $u_{tt} - 9u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 1 - 3x,\ u_t(x,0) = 4 - x,\ u(0,t) = 1,\ u_x(10,t) = -3.$

6. $u_{tt} - 16u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 1 - 3x,\ u_t(x,0) = 2 - x,$

$$u_x(0,t) = -3,\ u(2,t) = -5.$$

7. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 1 - x,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 2,\ u_x(10,t) = 2.$

8. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 2x + 3 + \sin p\ x,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 3,\ u(1,t) = 5.$

9. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(10,t) = \sin t.$

10. $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \begin{cases} h_0 = const \;\; при \;\; |x| \le p/2, \\ 0 \;\; при \;\; p/2 < |x| \le p, \end{cases}$

$$u(-p,t) = 0,\ u(p,t) = 0.$$

11. $u_{tt} - a u_{xx} = -g,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(h,t) = 0$

(математическая модель колебаний струны под действием силы тяжести; здесь $g = const > 0$).

12. Выведите методом Фурье формулу для отыскания решения задачи

$$u_{tt} - a u_{xx} + c u = 0,\ u(x,0) = j(x),\ u_t(x,0) = h(x),\ u(0,t) = 0,\ u(h,t) = 0$$

($c = const \ge 0$).

Ответы и указания к упражнениям

1. $u(x,t) = \dfrac{8u_0}{p^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos\dfrac{(2k-1)\sqrt{a}\,p\ t}{2h} \cdot \cos\dfrac{(2k-1)p\ x}{2h}.$

Указание. См. упражнение 1 к главе 4.

2. $u(x,t) = \dfrac{2hh_0}{p^2\sqrt{a}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\left(\cos\dfrac{kpa}{h} - \cos\dfrac{kpb}{h}\right)\sin\dfrac{kp\sqrt{a}\,t}{h} \cdot \sin\dfrac{kp\ x}{h}.$

3. $u(x,t)=\dfrac{8u_0}{p^2}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\cdot\cos\dfrac{(2m-1)\sqrt{a}\,p\,t}{h}\cdot\sin\dfrac{(2m-1)p\,x}{h}.$

<u>Указание</u>. См. упражнение 4 к главе 3.

4. $u(x,t)=\cos\dfrac{p\,t}{2h}\cdot\sin\dfrac{p\,x}{2h}.$

5. $u(x,t) = 1 - 3\,x +$

$$+\frac{320}{3p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left(1+\frac{5(-1)^k}{(2k-1)p}\right)\sin\frac{3(2k-1)p\,t}{20}\cdot\sin\frac{(2k-1)p\,x}{20}.$$

6. $u(x,t)=1-3x+\dfrac{16}{p^3}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^3}\cdot\sin(2k-1)p\,t\cdot\cos\dfrac{(2k-1)p\,x}{4}.$

7. $u(x,t)=2\,x-14+\dfrac{120}{p^2}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}\cdot\cos\dfrac{(2m-1)p\,t}{10}\cdot\cos\dfrac{(2m-1)p\,x}{10}.$

<u>Указание</u>. См. замечание 1 и упражнение 8 к главе 4.

8. $u(x,t)=2\,x+3+\cos p\,t\cdot\sin p\,x.$

9. $u(x,t)=\dfrac{\sin t\cdot\sin x}{\sin 10}+20\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{100-k^2p^2}\sin\dfrac{k\,p\,t}{10}\cdot\sin\dfrac{k\,p\,x}{10}.$

10. $u(x,t)=\dfrac{8h_0}{p}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\cdot\sin\dfrac{(2m-1)p}{4}\cdot\sin\dfrac{(2m-1)\,t}{2}\cdot\cos\dfrac{(2m-1)\,x}{2}.$

<u>Указание</u>. Формулу для $u(x,t)$ следует вывести методом Фурье. С. ч. и с. ф. соответствующей задачи Штурма-Лиувилля найдены в упражнении 2г к главе 3.

11. $u(x,t)=-\dfrac{4gh^2}{ap^3}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^3}\left(1-\cos\dfrac{(2m-1)\sqrt{a}\,p\,t}{h}\right)\sin\dfrac{(2m-1)p\,x}{h}.$

<u>Указание.</u> Используйте результаты пункта 2 из § 3.

12. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\dfrac{\sqrt{a(kp)^2+ch^2}}{h}t+B_k\sin\dfrac{\sqrt{a(kp)^2+ch^2}}{h}t\right)\sin\dfrac{kp\,x}{h},$

где $A_k=\dfrac{2}{h}\int_0^h j(x)\sin\dfrac{kp\,x}{h}dx,\quad B_k=\dfrac{2}{\sqrt{a(kp)^2+ch^2}}\int_0^h h(x)\sin\dfrac{kp\,x}{h}dx.$

Глава 6. **УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА**

§ 1. *ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

1. Уравнения с двумя независимыми переменными. Краевые условия.

Дифференциальное уравнение (д.у.)

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \qquad (1)$$

где $u = u(x, y)$ – искомая функция переменных x и y, $f(x, y)$ – заданная функция, причём $f(x, y) \not\equiv 0$, называется *уравнением Пуассона* с двумя независимыми переменными. Если же $f(x, y) \equiv 0$, то д.у. (1) называется *уравнением Лапласа* (или однородным уравнением Пуассона):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \qquad (2)$$

Здесь и далее (так же, как в главах 2, 4, 5) символами u_{xx}, u_{yy}, u_x, u_y обозначаются частные производные $u(x, y)$.

Уравнение (1) (а значит, и (2)) – линейное д.у. второго порядка эллиптического типа (уравнение (2) уже приводилось выше, см. уравнение (7.2)).

Оператор Δ, определяемый равенством

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$

называется *оператором Лапласа* (точнее, двумерным оператором Лапласа). Используя его, уравнения (1) и (2) можно записать в виде

$$\Delta u = f(x, y) \ \text{ и } \ \Delta u = 0.$$

Д. у. (1) имеет бесконечно много решений. Для выделения из этого множества одного решения нужна дополнительная информация об искомом решении. Чаще всего такая информация задаётся в виде следующего *краевого условия*

$$\left.\left(a\,u + b\,\frac{\partial u}{\partial N} \right)\right|_S = y\,(x, y). \qquad (3)$$

Здесь: S – граница области D плоскости переменных x и y (той области, в которой считается определённым искомое решение); $N = N(x, y)$ – вектор нормали к S в точке (x, y); $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $y\,(x, y)$ – заданные на S функции, причём

$$|a(x, y)| + |b(x, y)| > 0 \ \textit{для всех} \ (x, y) \in S.$$

Задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего какому-либо краевому условию, например, условию (3), называется *краевой* (или *граничной*) задачей для д. у. (1).

Напомним, что (3) называется: краевым условием первого рода, если $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, т.е. (3) имеет вид $u\big|_S = y\,(x, y)$; краевым условием второго рода, если $a \equiv 0$, $b \equiv 1$, т.е. (3) имеет вид $\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_S = y\,(x, y)$; краевым условием третьего рода, если $|\,a\,| > 0$ и $|\,b\,| > 0$ на S.

Рассматриваются также задачи отыскания решений д. у. (1), удовлетворяющих на разных частях S краевым условиям разного рода (см. ниже задачу (7), (8), (9)).

2. Уравнения с произвольным числом независимых переменных.

Уравнением Пуассона с n независимыми переменными называют д. у.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f\,(x_1,..., x_n), \tag{4}$$

где $u = u\,(x_1,..., x_n)$ – искомая функция независимых переменных $x_1,..., x_n$, а $f\,(x_1,..., x_n)$ – заданная функция, n – заданное натуральное число, $n \geq 2$ (в прикладных задачах обычно $n = 2$ или $n = 3$).

Если $f\,(x_1,..., x_n) \equiv 0$, то д. у. (4) называют уравнением Лапласа с n независимыми переменными:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0\,.$$

При $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ уравнение (4) совпадает с (1).

Традиционная краевая задача для д. у. (4) состоит в отыскании решения этого уравнения, определённого в замыкании области D пространства R^n переменных $x_1,..., x_n$, и удовлетворяющего на границе S области следующему условию

$$\left.\left(a\,u + b\,\frac{\partial u}{\partial N}\right)\right|_S = y\,(x_1,..., x_n),$$

где N, a, b, y имеют тот же смысл, что и в (3).

3. Примеры физических задач, приводящих к уравнениям Пуассона и Лапласа.

1) *Стационарное распределение температуры в однородном теле.*

Рассмотрим тело, занимающее область D в пространстве, где введена система декартовых координат $Ox_1x_2x_3$. Температура $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ тела удовлетворяет, как известно, уравнению теплопроводности (4.4) с $n = 3$. Если процесс теплообмена установился во времени, т.е. искомая функция u и правая часть f д. у. (4.4) не зависят от t, то $u_t = 0$ и уравнение (4.4) «превращается» в уравнение (4) с $n = 3$ (которое называют в этом случае стационарным уравнением теплопроводности).

2) *Основное уравнение электростатики.*

Предположим, что в некоторой ограниченной области D пространства задано электростатическое поле и $\vec{E} = \vec{E}(x_1, x_2, x_3)$ – вектор его напряжённости (через x_1, x_2, x_3 снова обозначены декартовы координаты точки в пространстве). Выберем произвольно область $V \subset D$. Согласно известному физическому закону, поток вектора $\vec{E}$ через границу s области V равен сумме всех зарядов, находящихся в этой области:

$$\Pi_s\,(\vec{E}) = \iiint\limits_V r\,dv;$$

здесь $r = r\,(x_1, x_2, x_3)$ – плотность распределения зарядов по области V. Согласно теореме Остроградского-Гаусса

$$\Pi_s\,(\vec{E}) = \iiint\limits_V div\,\vec{E}\,dv.$$

Сопоставляя эти два выражения для потока $\Pi_s\,(\vec{E})$, получим

$$\iiint\limits_V r\,dv = \iiint\limits_V div\,\vec{E}\,dv.$$

Так как область V здесь произвольна, то последнее равенство возможно лишь в том случае, если

$$div\,\vec{E} = r \quad \text{во всех точках } D$$

($div\,\vec{E}$ и r предполагаются непрерывными функциями). Известно, что электростатическое поле является потенциальным, т.е.

$$\vec{E} = -\,grad\,u \quad \text{в } D,$$

где $u = u(x_1, x_2, x_3)$ – электрический потенциал. Таким образом получаем, что u удовлетворяет уравнению вида (4):

$$div\,(grad\,u) = -\,r \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -r\,(x_1, x_2, x_3).$$

В физике это д. у. называют основным уравнением электростатики.

§ 2. *КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ. КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

Мы рассмотрим здесь для уравнения (1) лишь первую краевую задачу, т.е. задачу отыскания решения (1), удовлетворяющего краевому условию

$$u\big|_S = y\,(x, y). \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 1. Классическим решением задачи (1), (5) называется функция $u(x, y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая д.у. (1) в области D и краевому условию (5) – на границе S этой области.

Сформулируем достаточные условия корректности задачи на указанном в определении 1 множестве функций. Для этой цели потребуется ввести новое понятие.

О п р е д е л е н и е 2. Говорят, что граница S области D обладает свойством *строгой сферичности извне*, если для каждой точки $P \in S$ существует такой круг K (ненулевого радиуса и лежащий в одной плоскости с D), что $K \cap D = \varnothing$, $K \cap S = P$.

Теорема 1. *Пусть область D ограничена, причём её граница S обладает свойством строгой сферичности извне. Тогда для любых функций $f(x,y) \in C^1(\overline{D})$, $y\,(x,y) \in C(S)$ задача* (1), (5) *имеет классическое решение. Это решение единственно и для него верна оценка*

$$\| u \|_{C(\overline{D})} \le M\left(\| f \|_{C(\overline{D})} + \| y \|_{C(S)}\right), \tag{6}$$

где M – некоторая положительная постоянная, зависящая только от D.

Из неравенства (6) следует непрерывная зависимость (в норме пространства $C(\overline{D})$) классического решения задачи (1), (5) от заданных функций f и y. Доказывается это так же, как соответствующее утверждение для уравнения теплопроводности (см. § 2 главы 4).

Понятия обобщённых решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона можно ввести так же, как для уравнения теплопроводности. Точные определения и теоремы о корректности этих задач на пространствах обобщённых решений читатель найдёт в [2, 4, 7].

§ 3. *РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ*

Метод разделения переменных (метод Фурье) для отыскания решений двумерных уравнений Лапласа и Пуассона применяется обычно тогда, когда область D определения решений является прямоугольником, кругом или определённой частью круга. В последних двух случаях требуется предварительно перейти к полярным координатам (об этом пойдёт речь в § 4).

1. Найдём методом Фурье решение $u(x,y)$ д. у. (2), определённое в замыкании прямоугольника $D = \{(x,y) : 0 < x < h,\ 0 < y < b\}$ и удовлетворяющее на границе D следующим условиям:

$$u\,(x,0) = j\,(x),\ \ u\,(x,b) = h\,(x), \tag{7}$$

$$a_1 u(0,y) + b_1 u_x(0,y) = 0,\ a_2 u(h,y) + b_2 u_x(h,y) = 0\,. \tag{8}$$

Здесь $j\,(x)$, $h\,(x)$ – заданные функции, h, b, a_1, b_1, a_2, b_2 – заданные числа, причём

$$h > 0,\, b > 0,\ |a_1| + |b_1| > 0\,, |a_2| + |b_2| > 0.$$

<u>Первый этап</u> метода Фурье состоит в отыскании не равных тождественно нулю функций вида

$$U\,(x,y) = v(x)\,z\,(y),$$

удовлетворяющих: д.у. (2) при всех $(x,y) \in D$ и условиям (8) при всех

$y \in [0, b]$. Подставляя $U(x, y)$ в (2) вместо u, получим

$$v(x)\, z''(y) + v''(x)\, z(y) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$v(x)\, z''(y) = -\, v''(x)\, z(y).$$

Разделим обе части последнего равенства на $v(x)\, z(y)$:

$$-\frac{z''(y)}{z(y)} = \frac{v''(x)}{v(x)}. \qquad (9)$$

Функция $U(x, y)$ будет в D решением (2), если (9) выполнено при всех $(x, y) \in D$. А это возможно (по причинам, о которых говорилось в § 3 главы 4) лишь в том случае, если левая и правая части (9) равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим $-l$:

$$-\frac{z''(y)}{z(y)} = -l\ , \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\ l\ .$$

Таким образом, уравнение (9) «распадается» на два уравнения:

$$z''(y) = l\, z(y), \qquad (10)$$
$$v''(x) = -\ l\, v(x). \qquad (11)$$

Подставляя функцию $U(x,y)$ в (8), приходим к выводу, что она удовлетворяет этим краевым условиям при всех $y \in [0, b]$, если им удовлетворяет $v(x)$:

$$a_1 v(0) + b_1 v'(0) = 0\ ,\ a_2\, v(h) + b_2\, v'(h) = 0. \qquad (12)$$

Итак, функция $U(x, y) = v(x)\, z(y)$ будет ненулевым решением д. у. (2), удовлетворяющим условиям (8), если $z(y)$ – ненулевое решение д. у. (10), а $v(x)$ – ненулевое решение задачи Штурма-Лиувилля (11),(12). Как известно (см. § 2 главы 3), эта задача имеет счётное множество ненулевых решений $v = v_k(x)$, отвечающих определённым значениям $l = l_k$ ($k = 1, 2,\dots$). Напомним, что $v_k(x)$ называются собственными функциями (с. ф.) , а l_k – собственными числами (с. ч.) задачи (11), (12).

Предположим, все l_k и $v_k(x)$ найдены. Решим д. у. (10) при $l = l_k$, _**считая, что**_ $l_k > 0$. Характеристическое уравнение для д. у. (10) с $l = l_k$ имеет вид $r^2 = l_k$, его корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{l_k}$. Следовательно, общее решение (10) с $l = l_k$

$$z = z_k(y) = a_k e^{-\sqrt{l_k}\, y} + b_k e^{\sqrt{l_k}\, y},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$U_k(x, y) = z_k(y) v_k(x) = (a_k e^{-\sqrt{l_k}\, y} + b_k e^{\sqrt{l_k}\, y}) v_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

являются решениями д. у. (2), удовлетворяющими краевым условиям (8).

Переходим к <u>второму этапу</u> метода Фурье. Решение задачи (2), (7), (8) ищем в виде ряда, составленного из $U_k(x, y)$:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k e^{-\sqrt{l_k}\,y}+b_k e^{\sqrt{l_k}\,y})v_k(x). \quad (13)$$

Сумма ряда (13) будет при любых a_k и b_k решением системы (2), (8), так как каждый член ряда (13) удовлетворяет уравнениям (2) и (8), а эти уравнения – линейны и однородны. Разумеется, данное утверждение верно, если ряд (13) и ряды, полученные в результате двукратного дифференцирования (13) по x и по y, сходятся определённым образом.

Попытаемся подобрать числа a_k и b_k так, чтобы сумма ряда (13) удовлетворяла и краевым условиям (7). Подставим (13) в (7):

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)v_k(x)=j(x), \quad (14)$$

$$u(x,b)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k e^{-\sqrt{l_k}\,b}+b_k e^{\sqrt{l_k}\,b})v_k(x)=h(x). \quad (15)$$

Ряды в (14), (15) есть ряды по системе собственных функций задачи (11), (12). А потому ряд в (14) может сходиться к $j(x)$, а ряд в (15) может сходиться к $h(x)$ (в том или ином смысле), только если (см. § 3 главы 3):

$$\begin{cases} a_k+b_k=\dfrac{1}{d_k}\displaystyle\int_0^h j(x)v_k(x)\,dx, \\ a_k e^{-\sqrt{l_k}\,b}+b_k e^{\sqrt{l_k}\,b}=\dfrac{1}{d_k}\displaystyle\int_0^h h(x)v_k(x)\,dx \quad (k=1,2,...). \end{cases} \quad (16)$$

Очевидно, что определитель системы (16) отличен от нуля, поэтому она имеет единственное решение. Несложными вычислениями найдём его:

$$a_k=\frac{A_k e^{\sqrt{l_k}\,b}-B_k}{e^{\sqrt{l_k}\,b}-e^{-\sqrt{l_k}\,b}},\quad b_k=\frac{B_k-A_k e^{-\sqrt{l_k}\,b}}{e^{\sqrt{l_k}\,b}-e^{-\sqrt{l_k}\,b}}\text{ , где}$$

$$\begin{cases} A_k=\dfrac{1}{d_k}\displaystyle\int_0^h j(x)v_k(x)\,dx,\quad B_k=\dfrac{1}{d_k}\displaystyle\int_0^h h(x)v_k(x)\,dx, \\ d_k=\displaystyle\int_0^h v_k^2(x)\,dx \quad (k=1,2,...). \end{cases} \quad (17)$$

Подставляя a_k и b_k в (13), получим, после элементарных преобразований, следующее выражение для <u>формального решения задачи (2), (7), (8)</u> в предположении, что <u>*все*</u> $l_k>0$:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\frac{sh\sqrt{l_k}(b-y)}{sh\sqrt{l_k}\,b}+B_k\frac{sh\sqrt{l_k}\,y}{sh\sqrt{l_k}\,b}\right)v_k(x), \quad (18)$$

где l_k – с. ч., $v_k(x)$ – с.ф. задачи (11), (12), A_k и B_k вычисляются по формулам (17), $sh\,a = \dfrac{1}{2}\left(e^{a} - e^{-a}\right)$ – так называемый гиперболический синус.

Предлагаем читателю самостоятельно вывести формулу для решения (7), (8) в том случае, когда наименьшее с. ч. задачи (11), (12) равно нулю (см. замечание 1.5).

П р и м е р 1. Найдите формальное решение $u(x,y)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 0,\ \ u(x,1) = x,\ u(0,y) = 0,\ \ u(10,y) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

определённое в прямоугольнике $\overline{D} = \{(x,y): 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 1\}$.

Для о т ы с к а н и я р е ш е н и я по формуле (18) выполним следующие действия.

1) Найдём с. ч. и с. ф. задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей краевым условиям по переменной x в (19):

$$v^{//}(x) = -\ l\ v(x)\ ,\ v\,(0) = 0,\ \ v^{/}(10) = 0.$$

Это сделано в § 2 главы 3 (см. там пример 1):

$$l_k = \left(\frac{(2k-1)p}{20}\right)^2,\ v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)p\ x}{20} \quad (\ k = 1,2,\ldots);$$

заметим, что все $l_k > 0$.

2) Найдём d_k, A_k, B_k по формулам (17) (см. пример 2 в § 3 главы 3):

$$d_k = 5;\ \ A_k = 0, \text{ так как } j\ (x) = 0;$$

$$B_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h h(x)\,v_k(x)\,d\,x = \frac{1}{5}\int_0^{10} x\sin\frac{(2k-1)p\ x}{20}\,d\,x = \frac{80(-1)^{k-1}}{p^2(2k-1)^2}.$$

3) Подставляя в (18) найденные выражения для l_k, $v_k(x)$, A_k, B_k и $b = 1$, получим формальное решение задачи (19):

$$u(x,y) = \frac{80}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\cdot\frac{sh\dfrac{(2k-1)p\ y}{20}}{sh\dfrac{(2k-1)p}{20}}\cdot\sin\frac{(2k-1)p\ x}{20}.$$

2. Отыскание методом Фурье формального решения $u(x,y)$ задачи (1), (7), (8), т.е. краевой задачи для уравнения Пуассона, приводит (в предположении, что *все* $l_k > 0$) к следующему результату:

$$u\,(x\,,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\,\frac{sh\sqrt{l_k}\,(b-y)}{sh\sqrt{l_k}\ b} + B_k\,\frac{sh\sqrt{l_k}\ y}{sh\sqrt{l_k}\ b}\right)v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty}G_k(y)\,v_k(x). \tag{20}$$

Здесь: l_k – с. ч., $v_k(x)$ – с. ф. задачи (11), (12); коэффициенты A_k, B_k вычисляются по формулам (17); $G_k(y)$ – решение задачи

$$G_k^{//}(y) - \ l_k G_k(y) = c_k(y),\ G_k(0) = 0,\ G_k(b) = 0, \tag{21}$$

в которой $c_k(y) = \dfrac{1}{d_k}\int\limits_0^h f(x,y)\,v_k(x)\,dx \quad (k = 1,2,\ldots).$

З а м е ч а н и е 1. Достаточные условия, при которых сумма ряда (20) будет классическим или обобщённым решением задачи (1), (7), (8), читатель найдёт в [2, 4, 7].

З а м е ч а н и е 2. Задача отыскания решениея д. у. (1) (или его частного случая – д. у. (2)), удовлетворяющего условиям (7) и, вместо (8), неоднородным краевым условиям

$$a_1 u(0,y) + b_1 u_x(0,y) = y_1(y),\; a_2 u(h,y) + b_2 u_x(h,y) = y_2(y), \qquad (22)$$

сводится к задаче вида (1), (7), (8) (или (2), (7), (8)) введением новой искомой функции $w(x,y) = u(x,y) - g(x,y)$, где $g(x,y)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям (22). Подробнее об этом см. в п. **3** § 3 главы 4.

§ 4. *УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ*

Введём на плоскости две системы координат – прямоугольную Oxy и полярную, причём так, что полярная ось совпадает с осью Ox. Тогда, как известно, прямоугольные координаты (x,y) произвольной точки плоскости и полярные координаты (r,φ) этой точки связаны равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (23)$$

Таким образом, любой функции $u(x,y)$ соответствует функция $\tilde{u}(r,\varphi)$:

$$u(x,y) \equiv u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \equiv \tilde{u}(r,\varphi).$$

Напомним, что это соответствие взаимно-однозначно, если

$$r > 0,\ 0 \le \varphi < 2p\ .$$

Предположим, $u(x,y)$ имеет вторые частные производные в области D плоскости. Тогда в D верно равенство

$$u_{xx} + u_{yy} = \tilde{u}_{rr} + \tilde{u}_r/r + \tilde{u}_{\varphi\varphi}/r^2,$$

которое нетрудно доказать, используя правило дифференцирования сложной функции. Поэтому, если в уравнениии (1) сделать замену переменных по формулам (23), то получится уравнение

$$\tilde{u}_{rr} + \tilde{u}_r/r + \tilde{u}_{\varphi\varphi}/r^2 = \tilde{f}(r,\varphi), \qquad (24)$$

где $\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Д. у. (24) называется уравнением Пуассона (а при $\tilde{f} \equiv 0$ – уравнением Лапласа) в полярных координатах.

П р и м е р 2. Найдите стационарное распределение температуры в поперечном сечении стенки длинной трубы, на внутренней поверхности корой поддерживается температура u_1, а на внешней – температура u_2, где u_1 и u_2 – числа. Источники тепла в стенке трубы отсутствуют. Известны также внутренний и внешний диаметры трубы: $2R_1$ и $2R_2$ $(0 < R_1 < R_2)$.

Р е ш е н и е примера. Поперечное сечение стенки трубы (имеется в виду сечение плоскостью, перпендикулярной оси трубы) есть круговое кольцо. Введём в плоскости сечения систему прямоугольных координат Oxy, приняв за точку O центр кольца. Тогда уравнения внутренней окружности S_1 кольца и его внешней окружности S_2 будут иметь вид

$$S_1: \ x^2 + y^2 = R_1^2, \quad S_2: \ x^2 + y^2 = R_2^2.$$

Обозначим через $u(x, y)$ температуру в точке (x, y) стенки трубы. Согласно сказанному в п. **2** § 1, эта функция является решением задачи

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{25}$$

$$u\big|_{S_1} = u_1, \quad u\big|_{S_2} = u_2. \tag{26}$$

($f \equiv 0$, так как в стенке трубы нет источников тепла).
Сделаем в (25), (26) замену переменных по формулам (23), т. е. перейдём к полярным координатам. Физически ясно (а можно доказать и математическими выкладками), что в данном случае $\tilde{u}$ не зависит от φ: $\tilde{u} = \tilde{u}$ (r). Поэтому д. у. (25) преобразуется в д.у. (24), где $\tilde{u}_{\varphi\varphi} \equiv 0$ и (по сказанному выше) $\tilde{f} \equiv 0$:

$$\tilde{u}_{rr} + \tilde{u}_r / r = 0.$$

В данном случае это обыкновенное дифференциальное уравнение. Запишем его в традиционном виде:

$$\tilde{u}'' + \tilde{u}'/r = 0. \tag{27}$$

Краевые условия (26) преобразуются в условия

$$\tilde{u}(R_1) = u_1, \ \tilde{u}(R_2) = u_2 \tag{28}$$

(поскольку в полярных координатах уравнения окружностей S_1 и S_2 имеют соответственно вид: $r = R_1$ и $r = R_2$).

Общее решение (27) легко найти, понизив его порядок. Обозначим $\tilde{u}'(r) = p(r)$, тогда $\tilde{u}'' = \dfrac{dp}{dr}$, и (27) примет вид $\dfrac{dp}{dr} + \dfrac{p}{r} = 0$. Отсюда

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln|p| = -\ln|r| + \ln|C_1| = \ln\left|\frac{C_1}{r}\right| \Rightarrow p = \frac{C_1}{r}.$$

Из равенств $\tilde{u}' = p = \dfrac{C_1}{r}$ следует, что $\tilde{u} = \displaystyle\int \frac{C_1}{r} dr$ или (с учётом неравенства $r > 0$)

$$\tilde{u} = C_1 \ln r + C_2, \tag{29}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подберём такие их значения, при которых будет выполнено (28):

$$\tilde{u}(R_1) = C_1 \ln R_1 + C_2 = u_1, \quad \tilde{u}(R_2) = C_1 \ln R_2 + C_2 = u_2.$$

Отсюда находим

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln(R_2/R_1)}, \quad C_2 = \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Подставляя эти выражения для C_1 и C_2 в (29), получим решение задачи (27), (28): $\tilde{u}(r) = \dfrac{(u_2 - u_1)\ln r + u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}$ или

$$\tilde{u}(r) = \frac{u_2 \ln(r/R_1) - u_1 \ln(r/R_2)}{\ln(R_2/R_1)}, \text{ где } R_1 \le r \le R_2. \qquad (30)$$

Таким образом, найдена зависимость температуры стенки трубы от полярного радиуса r. Положив в (30) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (это равенство легко следует из (23)), получим зависимость температуры от декартовых координат:

$$u(x, y) = \tilde{u}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

З а м е ч а н и е 4. Если u_1 и u_2 зависят от φ, то, после перехода в (25), (26) к полярным координатам, полученную для $\tilde{u}(r,\varphi)$ задачу можно решать методом разделения переменных.

Упражнения к главе 6

1. Найдите распределение потенциала u электростатического поля внутри прямоугоольника D, если две его противоположные стороны: $y = 0$ и $y = b$ – имеют потенциал u_0, а две другие стороны: $x = 0$ и $x = h$ – заземлены. Внутри D электрических зарядов нет. (Здесь и далее u_0 – число).

В упражнениях 2 – 8 найдите формальные решения задач.

2. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = u_0,\ u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = 0,\ u(h,y) = 0.$

3. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = u_0,\ u(x,b) = u_0, \quad u(0,y) = 0,\ u(h,y) = u_0.$

4. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = x(1-x),\ u(x,1) = 0, \quad u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0.$

5. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = 1,\ u(x,2) = x, \quad u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0.$

6. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \ u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,$

   $u(x,0) = 1 - x, \ u(x,y) \to 0$ *при* $y \to \infty$.

7. $u_{xx} + u_{yy} = f_0, \quad u(x,0) = u_0,\ u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = 0,\ u(h,y) = 0,$

где f_0 – число. Поясните теплофизический смысл задачи.

8. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u\big|_{S_1} = u_1, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{S_2} = u_2$, где

S_1 и S_2 имеют тот же смысл, что в примере 2, u_1 и u_2 – числа, $N = N(x, y)$ – вектор внешней нормали к S_2 в точке (x, y).

Ответы и указания к упражнениям

1. $$u(x,y)=\frac{4u_0}{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)sh\dfrac{(2m-1)p\ b}{h}}*$$
$$*\left(sh\frac{(2m-1)p\,(b-y)}{h}+sh\frac{(2m-1)p\ y}{h}\right)\sin\frac{(2m-1)p\ x}{h}.$$

2. $$u(x,y)=\frac{4u_0}{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sh\dfrac{(2m-1)p\,(b-y)}{h}}{(2m-1)\,sh\dfrac{(2m-1)p\ b}{h}}\sin\frac{(2m-1)p\ x}{h}.$$

3. $$u(x,y)=\frac{u_0x}{h}+\frac{2u_0}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,sh\dfrac{kp\ b}{h}}\left(sh\frac{kp\,(b-y)}{h}+sh\frac{kp\ y}{h}\right)\sin\frac{kp\ x}{h}\ .$$

4. $$u(x,y)=\frac{8}{p^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sh(2k-1)p\,(1-y)}{(2k-1)^3}\cdot\frac{\sin(2k-1)p\ x}{sh(2k-1)p}.$$

5. $$u(x,y)=1-\frac{y}{4}-\frac{8}{p^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sh(2m-1)p\ y}{(2m-1)^2\ sh\,2(2m-1)p}\cdot\cos(2m-1)p\ x.$$

6. $$u(x,y)=\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-kp\ y}\cdot\sin kp\ x.$$

7. $$u(x,y)=-\frac{16f_0h^2}{p^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\left(1-\frac{ch\dfrac{(2k-1)p\,(b-y)}{2h}}{ch\dfrac{(2k-1)pb}{2h}}\right)\sin\frac{(2k-1)p\ x}{2h},$$

где $cha=\frac{1}{2}\left(e^{a}+e^{-a}\right)$ – гиперболический косинус.

Рассмотренная краевая задача является математической моделью процесса стационарного распределения температуры в тонкой однородной прямоугольной пластине при следующих условиях. Пластина занимает в плоскости область D, определённую на стр. 78. Стороны пластины $x=h$ и $y=b$ теплоизолированы, две другие стороны $x=0$ и $y=0$ – поддерживаются при нулевой температуре. В пластине имеются источники тепла, поверхностная плотность которых пропорциональна f_0.

8. $u(x,y)=u_1+u_2R_2\ln\dfrac{r}{R_1}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Литература

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1969.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1976.
3. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: «Наука», 1974.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: «Наука», 1973.
5. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: «Наука», 1970.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., «Высшая школа», 1982.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: «Наука», 1976.
8. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: «Высшая школа», 1977.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Том 2. М.: «Наука», 1978.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. М.: «Наука», 1966.
11. Фридман Ф. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: «Мир», 1968.