65

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Методические указания

Иваново
2016

№ 65

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ивановский государственный химико-технологический университет

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Случайные события

Методические указания

Составитель А. В. Буров

Иваново 2016

УДК 519.2 (078)

Составитель А. В. Буров

Теория вероятностей. Случайные события: метод. указания / сост. А. В. Буров; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2016 - 50 с.

В методических указаниях приведены основные понятия, определения и формулы из раздела теории вероятностей «Случайные события». Для каждой приведённой темы разобраны решения основных задач. Все разделы содержат задачи для самостоятельного решения. В конце указаний приведена таблица значений функции Лапласа.

Предназначены для студентов всех специальностей и форм обучения ИГХТУ, а также преподавателей при проведении практических занятий.

Рецензент

кандидат технических наук А. К. Лихачёв
(Ивановский государственный политехнический университет)

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ. СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

Дано конечное число n объектов произвольной природы, которые назовём элементами. Из них по определённому правилу можно образовывать некоторые группы. Вычислением количества таких возможных групп и занимается раздел математики, называемый комбинаторикой.

Установленный порядок в конечном множестве называют перестановкой. Число различных возможных перестановок из n элементов обозначают P_n , и оно вычисляется по формуле:

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

(Читается ***«n-факториал»***). Например, $P_5 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$. По определению считают, что 0!=1.

Множество, для которого указан порядок расположения элементов, называется упорядоченным. Упорядоченные конечные подмножества некоторого множества называются размещениями. Любые два размещения отличаются друг от друга либо входящими в них элементами, либо порядком их расположения. Число A_n^m всех возможных размещений, содержащих по m элементов из множества, состоящего из n элементов $(m \le n)$, определяется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\,(n-1)\cdots(n-m+1) \quad .$$

Пример: Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из 6 различных цифр?

Решение: Каждое число отличается друг от друга либо цифрой, либо порядком их расположения. Поэтому любое составленное число – это размещение 3-х цифр из 6 имеющихся. Поэтому всего таких чисел будет:

$$A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120\,.$$

Эту же самую задачу можно было решить при помощи так называемого **принципа умножения:** если некоторое действие ***A*** можно совершить ***r*** способами и при этом в каждом случае другое действие ***B*** можно осуществить ***q*** способами, то всего существует $r \cdot q$ вариантов осуществить совместно оба действия ***A*** и ***B***.

Тогда при составлении трёхзначного числа из 6-ти различных цифр 1-ю цифру можно выбрать 6-ю способами, 2-ю цифру – 5-ю способами, 3-ю цифру – 4-мя способами. Тогда по принципу умножения, всего различных чисел будет: $6\cdot 5\cdot 4 = 120 = A_6^3$.

Всякое конечное подмножество, состоящее из ***m*** элементов данного множества из ***n*** элементов, называется **сочетанием** ***m*** элементов из ***n*** элементов, если каждое подмножество из ***m*** элементов отличается одно от другого хотя бы одним элементом. Число всех возможных сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\ (n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}.$$

Для числа всех возможных сочетаний верны формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad ; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Пример: Сколько различных команд, состоящих из 10-ти игроков, можно составить из 12-ти человек?

Решение: Каждая составленная команда отличается от другой команды хотя бы одним игроком. Поэтому всего таких команд будет:

$$C_{12}^{10} = C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66.$$

Основными понятиями теории вероятностей являются случайные события и случайные величины. Событием называется любое явление, о котором можно сказать ***«произошло»***, ***«не произошло»*** или ***«появилось»***, ***«не появилось»*** и так далее.

Событие называется достоверным, если оно обязательно наступает при некоторых определённых условиях. Если при этих условиях событие никогда не наступает, то оно называется невозможным. Случайным называют такое событие, которое в результате опыта при одинаковых условиях в одном случае происходит, а в другом нет или может появиться или не появиться. Случайные события обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, D, C, ... Достоверное событие обозначают буквой E, а невозможное – символом $\varnothing$.

Если появление одного события исключает появление другого, то они называются ***несовместными***; в противном случае два события называются ***совместными.*** Например, выпадение **3-х и 5-ти** очков при подбрасывании одного игрального кубика – события несовместные, а при подбрасывании двух кубиков – совместные события.

Множество событий $\{A_i\}_{i=1}^n$ называется группой попарно несовместных событий, если совместное появление любой пары этих событий невозможно.

Если хотя бы одно событие из этой группы $\{A_i\}_{i=1}^n$ обязательно происходит, то она называется ***полной группой событий.*** Например, при двух выстрелах по одной мишени события: «Мишень не поражена», «Мишень поражена один раз», «Мишень поражена два раза» образуют полную группу событий.

События называются ***равновозможными,*** если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Для множества событий $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ определяют следующие действия (алгебра событий):

1) ***Суммой (объединением)*** этих событий называется событие $B = \sum_{i=1}^{n} A_i$, заключающееся в появлении хотя бы одного из этих событий.

2) ***Произведением (совмещением)*** этих событий называется событие $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$, заключающееся в появлении всех перемножаемых событий.

3) Два события, образующие полную группу несовместных событий, называются ***противоположными.*** Для любого события A противоположное событие обозначается - $\bar{A}$ (читается ***« не** A **»***).

При помощи перечисленных действий из простых событий можно получать более сложные. Для этих действий справедливы следующие равенства:

$$A\cdot \bar{A} = \varnothing \ ; \quad A+\varnothing = A \ ; \ A \cdot \varnothing = \varnothing \ ; \ A + E = E \ ; \ A \cdot E = A .$$

Рассмотрим серию из ***n-*** опытов, в некоторых из них событие А наступает, в некоторых – не наступает. Каждое событие, которое может наступить в опыте, называется его элементарным исходом. Опыты (или исходы), при которых событие А наступает, называются ***благоприятствующими*** событию А. Вероятностью случайного события А называется отношение числа ***m*** элементарных исходов опыта, благоприятствующих событию А, к числу ***n*** всех равновозможных , образующих полную группу, элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} .$$

Данное определение называется ***классическим определением вероятности.***

Пример 1. В коробке находятся одинаковые по форме цветные шары: 5 красных, 12 зелёных и 3 синих. Наугад из коробки берётся один шар. Найти вероятность того, что он зелёного цвета?

Решение. Так как каждый из имеющихся в коробке шаров может быть взят, то число всех элементарных исходов $n = 20$. Число исходов, благоприятствующих появлению зелёного шара, $m = 12$. Пусть А – наугад взятый один шар зелёного цвета, тогда $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$.

Пример 2. Пусть из той же самой коробки вынимают 6 шаров. Надо найти вероятность того, что среди них будут: 2 красных, 3 зелёных и 1 синий?

Решение. Пусть случайное событие **А** состоит в том, что при вынимании 6-ти шаров из 20-ти появятся два красных, три зелёных и один синий. Так как возможности появления любой комбинации 6-ти шаров из 20-ти одинаковы, то число всех равновозможных случаев: $n = C_{20}^{6}$. Так как последовательность появления шаров определённого цвета неважна, то два красных шара можно вынуть C_5^2 способами, три зелёных шара можно вынуть C_{12}^3 способами, а один синий C_3^1 способами. Следовательно, число случаев, которые благоприятствуют появлению случайного события А, по принципу умножения будет равно: $m = C_5^2 \cdot C_{12}^3 \cdot C_3^1$

Тогда искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_{12}^3 \cdot C_3^1}{C_{20}^6} = \frac{5! \cdot 12! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 14!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 9! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 20!} = \frac{20 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 180}{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20} \approx 0{,}17.$$

Классическое определение вероятности предполагает, что число исходов испытаний конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных случаев которых бесконечно. Кроме того, слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Ещё труднее указать основания, позволяющие считать элементарные исходы испытаний равновозможными. ***Относительной частотой*** события А или просто ***частотой*** (обозначается $W(A)$) называется отношение числа опытов m^*, в которых появилось событие А, к числу всех проведённых опытов n^*, то есть:

$$W(A) = \frac{m^*}{n^*}.$$

Основные свойства (аксиомы) частоты:

1) частота достоверного события равна единице: $W(E) = 1$;
2) частота невозможного события равна нулю: $W(\varnothing) = 0$;
3) для любого случайного события справедливо: $0 < W(A) < 1$.

Вероятностью случайного события А называется постоянное число $P(A)$, около которого группируются частоты $W(A)$ события А при увеличении числа опытов (свойство устойчивости частоты). Вероятность случайного события определяет меру его возможного появления. Данное определение называется ***статистическим определением*** вероятности события: $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} W(A)$.

Такой подход к оценке значений вероятности случайного события чаще всего используется при обработке экспериментальных данных в математической статистике.

Пример 3. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных изделий в партии из случайно отобранных 500 изделий. Чему принять равной вероятность обнаружения брака при случайном выборе одного изделия? Сколько бракованных изделий в среднем следует ожидать в партии из 3000 изделий?

Решение. Относительная частота события $\mathbf{A}$, которое состоит в обнаружении бракованного изделия в партии из 500 изделий, будет равна: $\mathbf{W(A)=\frac{5}{500}=0{,}01}$. В силу устойчивости частоты за вероятность события $\mathbf{A}$ можно принять $\mathbf{P(A)\approx 0{,}01}$. Тогда в партии из 3000 изделий бракованных можно ожидать $\mathbf{m^* = W(A)\ n^* = 0{,}01\cdot 3000=30}$.

Классическое определение вероятности можно применять только тогда, когда пространство элементарных исходов конечномерно. Если же число элементарных исходов бесконечно, то числа $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$ тоже бесконечны. В этих случаях каждому из возможных исходов ставится в соответствие точка пространства, а системе всех возможных исходов – некоторая область $\boldsymbol{D}$ данного пространства. Так как все исходы равновозможны, то попадание в любую точку области $\boldsymbol{D}$ тоже равновозможно. Всем благоприятствующим исходам соответствует некоторое множество $\boldsymbol{d}$, которое является подмножеством $\boldsymbol{D}$, то есть $\boldsymbol{d\subset D}$.

Если множества $\boldsymbol{d}$; $\boldsymbol{D}$ измеримы и $\boldsymbol{S_D}$; $\boldsymbol{S_d}$ их метрические характеристики (длина, площадь или объём), то $\boldsymbol{P(A) = \frac{S_d}{S_D}}$. Это ***геометрическое определение вероятности.***

Пример 4. Внутрь круга радиуса **10** наудачу брошена точка, которая может попасть с равной вероятностью в любую часть круга, включая его границу. Найти вероятность того, что точка попадёт внутрь (или на границу) вписанного в круг: ***а)*** квадрата; ***б)*** правильного треугольника; ***в)*** правильного шестиугольника.

Решение: а) в данном примере измеримая область $\boldsymbol{D}$ – круг радиуса 10 с площадью $\boldsymbol{S_D=\pi\cdot 10^2=100\pi}$. Измеримая область $\boldsymbol{d}$ – вписанный в этот круг квадрат с площадью $\boldsymbol{S_d=2\cdot 10^2=200}$. Случайное событие $\mathbf{A}$ – точка попадает внутрь квадрата или на его границу. Поэтому $\boldsymbol{P(A)=\frac{S_d}{S_D}=\frac{200}{100\pi}=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}637}$.

б) в этом случае измеримая область d – вписанный в этот круг правильный треугольник с площадью $S_d = \frac{3\sqrt{3}}{4} 10^2 = 75\sqrt{3}$. Случайное событие **А** – точка попадает внутрь этого треугольника или на его границу. Поэтому

$$P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{75\sqrt{3}}{100\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,414;$$

в) в этом случае измеримая область d – вписанный в этот круг правильный шестиугольник с площадью $S_d = \frac{3\sqrt{3}}{2} 10^2 = 150\sqrt{3}$. Случайное событие **А** – точка попадает внутрь этого шестиугольника или на его границу. Поэтому

$$P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{150\sqrt{3}}{100\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,827.$$

Пример 5. На отрезок длины 10 наудачу поставлены две точки A и B. Найти вероятность того, что длина отрезка AB: а) меньше расстояния от точки B до конца отрезка; б) меньше расстояния от точки B до начала отрезка; в) длина отрезка AB меньше **4,** если известно, что точка A оказалась ближе к началу отрезка, чем точка B.

Решение: а) Обозначим координаты точек A и B через x и y соответственно. Тогда область D описывается системой неравенств $D: \begin{cases} 0 \le x \le 10; \\ 0 \le y \le 10. \end{cases} \Rightarrow S_D = 10^2 = 100$. Длина отрезка AB равна $|x - y|$. Поэтому случайное событие A описывается неравенством: $A: |x - y| < 10 - y$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств вида: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y \ge 0 \\ x \le 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y < 0 \\ 2y - x < 10 \end{cases} \end{array} \right.$. Таким образом область d представляет собой четырёхугольник $OMDE$ – множество точек квадрата $OBDE$, заключённых между прямыми MD (уравнение: $2y - x = 10$), OM (уравнение: $x = 0$), OE (уравнение: $y = 0$) и DE (уравнение: $x = 10$). (рис. 1).

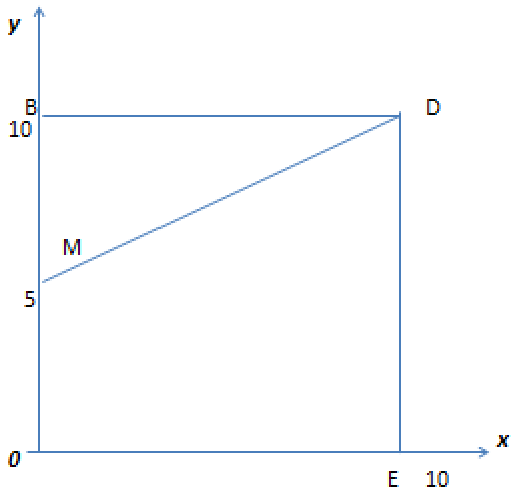

Рис. 1

Поэтому

$$S_d = S_{OMDE} = S_{OBDE} - S_{MBD} = 10^2 - \frac{1}{2}\ 5 \cdot 10 = 100 - 25 = 75.$$

Тогда искомая вероятность $P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{75}{100} = 0,75$;

б) в этом случае случайное событие A описывается неравенством: $A: |x-y| < y$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств вида:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y < 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Таким образом область d представляет собой четырёхугольник $OMDB$ – множество точек квадрата $OBDE$, заключённых между прямыми OM (уравнение: $x - 2y = 0$), OB (уравнение: $x = 0$), BD (уравнение: $y = 10$) и MD (уравнение: $x = 10$). (рис. 2).

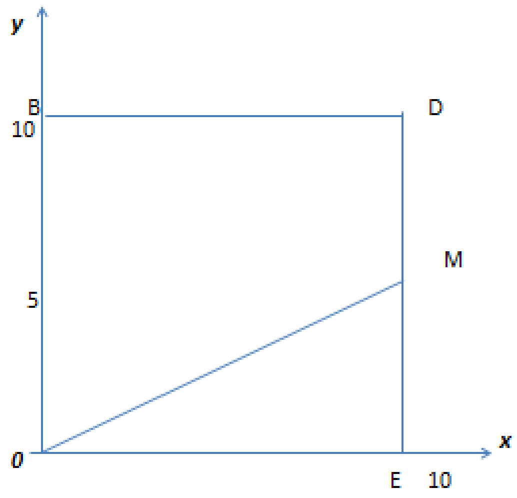

Рис. 2

Поэтому

$$S_d = S_{OBDM} = S_{OBDE} - S_{OEM} = 10^2 - \frac{1}{2}5 \cdot 10 = 100 - 25 = 75.$$

Тогда искомая вероятность $P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{75}{100} = 0,75$;

в) в этом случае область D представляет собой треугольник OBD и описывается системой неравенств:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 10; \\ 0 \le y \le 10; \\ x < y. \end{cases} \Rightarrow S_D = \frac{1}{2}10^2 = 50.$$

Случайное событие A описывается неравенством: $A: y - x < 4$. . Таким образом область d представляет собой четырёхугольник $OMCD$ – множество точек треугольника OBD, заключённых между прямыми MC (уравнение: $x - y = -4$) , OD (уравнение: $x = y$), OM (уравнение: $x = 0$) и CD (уравнение: $y = 10$). (рис. 3).

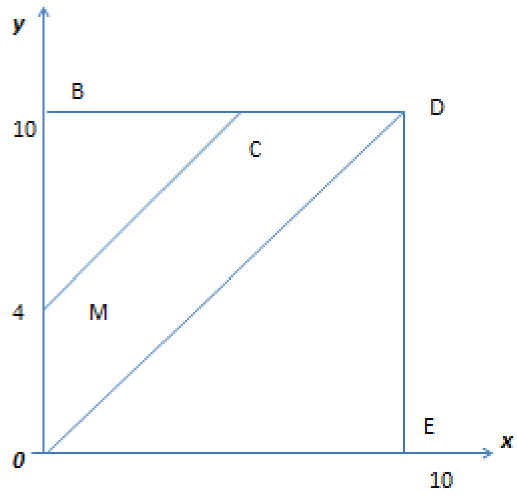

Рис. 3

Поэтому

$$S_d = S_{OMCD} = S_{OBD} - S_{MBC} = \frac{1}{2}10^2 - \frac{1}{2}6\cdot 6 = 50 - 18 = 32.$$

Тогда искомая вероятность $P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{32}{50} = 0,64$.

Пример 6. Молодой человек и девушка договорились встретиться между 17 и 18 часами (продолжительность временного промежутка для встречи – один час) в определённом месте. Найти вероятность их встречи, если каждый из них может с одинаковой вероятностью прийти в любой момент времени в течение этого часа и они договорились при этом между собой, что а) будут ждать друг друга не более t минут; б) молодой человек будет ждать девушку не более t минут.

Решение: а) пусть x и y – моменты времени (часы) прихода каждого из встречающихся молодых людей в течение оговоренного времени. Тогда область D представляет собой квадрат O**MDN** и описывается системой неравенств:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \Rightarrow S_D = 1^2 = 1. \text{ (рис. 4)}$$

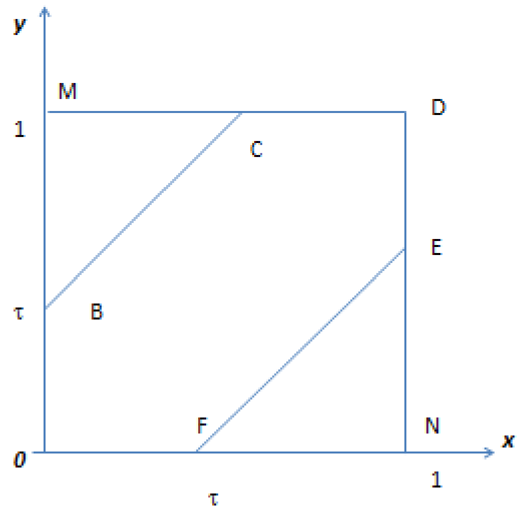

Рис. 4

Случайное событие A – встреча молодых людей произойдёт при условии, если моменты их прихода будут отличаться друг от друга не более, чем на $\tau = \dfrac{t}{60}$ часов. То есть $d: |x-y| \le \tau \;\; \Rightarrow \;\; -\tau \le x-y \le \tau \; \Rightarrow \begin{cases} x-y \le \tau; \\ y - x \le \tau. \end{cases}$

Таким образом, область d представляет собой шестиугольник $OBCDEF$ – множество точек квадрата $OMDN$, заключённых между прямыми BC (уравнение: $y-x=\tau$) и FE (уравнение: $x-y=\tau$). Поэтому

$$S_d = S_{OBCDEF} = S_D - 2\,S_{BMC} = 1-2\,\frac{1}{2}\,(1-\tau)^2 = 1-(1-\tau)^2 .$$

Тогда искомая вероятность встречи $P(A) = \dfrac{S_d}{S_D} = \dfrac{1-(1-\tau)^2}{1} = \tau(2-\tau)$;

б) пусть $x-$ момент времени (ч) прихода молодого человека, $y-$ момент прихода девушки в течение оговоренного времени. Тогда множество всех возможных исходов (область D) меняться не будет. Множество d, соответствующее времени прихода молодых людей, благоприятным для их встречи, будет иметь вид:

$$d: \begin{cases} x \le y; \\ y - x \le \tau. \end{cases} \quad (\text{рис. } 5)$$

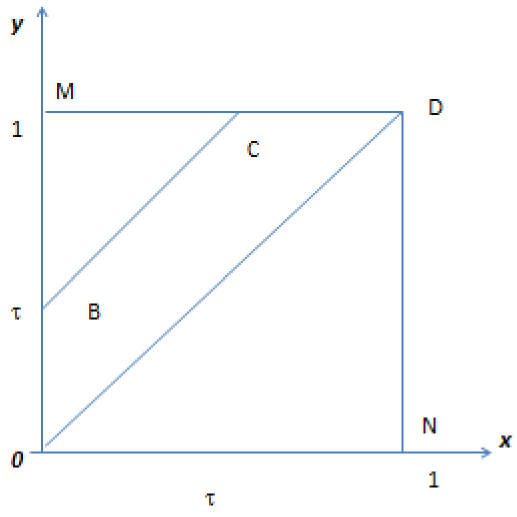

Рис. 5

Первое неравенство системы соответствует требованию того, чтобы время прихода молодого человека было не позднее времени прихода девушки, иначе встреча не произойдёт (по условию задачи девушка не будет ждать). Таким образом, область d представляет собой четырёхугольник $OBCD$ – множество точек квадрата $OMDN$, которые находятся между прямыми BC (уравнение: $y - x = \tau$) и OD (уравнение: $y = x$). Поэтому

$$S_d = S_{OBCD} = \frac{1}{2} S_D - S_{BMC} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-\tau)^2 = \frac{1}{2}\left(1-(1-\tau)^2\right).$$

Тогда искомая вероятность встречи $P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{1-(1-\tau)^2}{2} = \frac{\tau}{2}(2-\tau)$.

Пример 7. Наудачу взяты два положительных числа **x** и **y**, каждое из которых не превышает шести. Найти вероятность того, что их сумма $x + y$ будет не больше восьми, а их частное $\frac{y}{x}$ не меньше $\frac{3}{2}$.

Решение. По условию задачи $D: \begin{cases} 0 \le x \le 6; \\ 0 \le y \le 6. \end{cases} \Rightarrow S_D = 6^2 = 36$.

Случайное событие A описывается неравенствами: $A: \begin{cases} x + y \le 8; \\ \frac{y}{x} \ge \frac{3}{2} \end{cases}$.

Таким образом, область d представляет собой четырёхугольник $OMAB$ – множество точек квадрата $OMDN$, заключённых между прямыми AN (уравнение: $x + y = 8$) , OC (уравнение: $y = \frac{3}{2}x$), MD (уравнение: $y = 6$) и OM (уравнение: $x = 0$). (рис. 6).

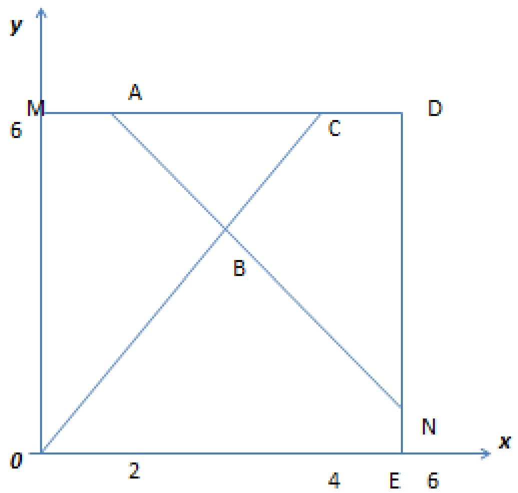

Рис. 6

Точка $B(3,2;\ 4,8)$ является результатом пересечения прямых OC и AN. Её координаты определяются из решения системы:

$$\begin{cases} x + y = 8; \\ y = \frac{3}{2}x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2} \cdot x = 8; \\ y = \frac{3}{2}x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{5}; \\ y = \frac{24}{5}. \end{cases}.$$

Поэтому

$$S_d = S_{OMAB} = \int_0^{4,8} \frac{2}{3} y dy + \int_{4,8}^{6} (8 - y) dy = \left.\frac{y^2}{3}\right|_0^{4,8} - \left.\frac{(8-y)^2}{2}\right|_{4,8}^{6} = .$$

$$= \frac{1}{3}\left(4,8^2 - 0\right) - \frac{1}{2}\left(2^2 - 3,2^2\right) = 7,68 + 3,12 = 10,8.$$

Тогда искомая вероятность $P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{10,8}{36} = 0,3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из 8 букв разрезной азбуки составлено слово ***«ПЕРЕМЕНА».*** Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово ***«ПЕРЕМЕНА»***. (Ответ: 0,00015.)

2. Игральный кубик подбросили **2** раза. Найти вероятности событий: **а)** сумма очков не превосходит четырёх; б) произведение очков – чётное число; в) выпала хотя бы одна шестёрка. (Ответ: 0,083 ; 0,75 ; 0,306.)

3. Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две равные подгруппы. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе. (Ответ: $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$; $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$.)

4. В лифт 9-ти этажного дома сели **5** пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на 5-м этаже; б) все вышли на одном и том же этаже; в) все вышли на разных этажах; г) по крайней мере, двое сошли на одном этаже. (Ответ: 0,00003 ; 0,0002 ;0,205 ; 0,795.)

5. В ящике **100** деталей, среди них **30** – первого сорта; **45 –** второго сорта; остальные – бракованные. Наудачу берут **5** деталей. Найти вероятность того, что среди взятых деталей будут: а) все детали первого сорта; б) 4 детали первого сорта и 1 – второго сорта; в) **2** детали первого сорта, **2** детали второго сорта и одна бракованная. (Ответ: 0,002 ; 0,016 ; 0,143.)

6. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от 0 до 9. Определить вероятность того, что случайно составленное с помощью данных карточек двухзначное число делится на 18. (Ответ: 0,056.)

7. Мальчик забыл две последние цифры номера телефона одноклассника и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечётны и различны. Найти вероятность того, что номер набран правильно. (Ответ: 0,05.)

8. Десять студентов условились ехать определённым рейсом электропоезда с 10 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны. (Ответ: 0,000363.)

9. Из восьми книг, стоящих на полке, две книги по математике. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырёх книг хотя бы одна по математике. (Ответ: 0,785.)

10. По цели произведено 50 выстрелов, причём 45 из них попали в цель. Чему принять равной вероятность попадания одного выстрела? Сколько попаданий в среднем следует ожидать от каждой серии в 20 выстрелов? (Ответ: 0,9 ; 18.)

11. При испытании партии автомобилей относительная частота автомобилей без дефектов оказалась равной 0,9. Сколько автомобилей без дефектов можно ожидать в партии из 500 машин? (Ответ: 450.)

12. Из колоды игральных карт (36 карт) наугад вынимается одна карта. Сколько раз в среднем необходимо повторить такой опыт, чтобы вынуть «Туз». (Ответ: 36.)

13. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит **0,3.** Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси. (Ответ: 0,4.)

14. В правильный треугольник со стороной **8** вписана окружность. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в треугольник точка попадёт в окружность. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть треугольника пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно треугольника. (Ответ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.)

15. В круге радиусом **20 см** наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух лежащих внутри круга непересекающихся фигур: равнобедренную трапецию с острым углом 45°, нижнее основание и высота которой равны ***3 см*** и ***1 см*** соответственно и четверть ромба, диагонали которого равны **3 см и 4 см** соответственно. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно круга. (Ответ: $\frac{1}{50\pi}$.)

16. Внутрь круга радиусом **6 см** наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка не попадёт внутрь вписанного в круг: ***а)*** квадрата; ***б)*** правильного треугольника; ***в)*** правильного шестиугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно круга. (Ответ: $\frac{\pi-2}{\pi}$; $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{4\pi}$; $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2\pi}$.)

17. В квадрат со стороной **10** см вписана окружность. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в квадрат точка попадёт в четверть круга. Предполагается, что вероятность попадания точки в четверть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно квадрата. (Ответ: $\frac{\pi}{16}$.)

18. Внутрь круга радиусом **5 см** наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка не попадёт внутрь вписанного в круг прямоугольника, одна из сторон которого равна **6 см**. Предполагается, что вероятность попадания точки в прямоугольник пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно круга. (Ответ: 0,389.)

19. Внутрь прямоугольника со сторонами **6 и 12 см** наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка не попадёт внутрь вписанного в прямоугольник треугольника, одна из сторон которого является меньшей стороной прямоугольника, а вершина делит пополам противолежащую сторону. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть треугольника пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно прямоугольника. (Ответ: 0,5.)

20. Внутрь круга радиусом **6 см** наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка не попадёт внутрь вписанного в круг равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого совпадает с диаметром круга. Предполагается, что вероятность попадания точки в прямоугольный треугольник пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно круга. (Ответ: 0,682.)

21. На отрезок длиной **16 см** наудачу поставлены две точки A и B, причём точка A оказалась ближе к началу отрезка. Найти вероятность того, что длина отрезка AB меньше расстояния от точки B до конца отрезка. (Ответ: 0,5.)

22. На отрезок длиной **6 см** наудачу поставлены две точки A и B, причём точка A оказалась ближе к началу отрезка. Найти вероятность того, что длина отрезка AB больше **2**. (Ответ: 0,(4).)

23. На отрезок длиной **10 см** наудачу поставлены две точки A и B, причём точка A оказалась ближе к началу отрезка. Найти вероятность того, что длина отрезка AB меньше **3 см**. (Ответ: 0,51.)

24. Два человека договорились встретиться в определённом месте между **15** и **16** часами дня. Каждый человек ждёт другого в течение 20 минут, после чего уходят. Найти вероятность того, что встреча состоится. (Ответ: 0,(5).)

25. Молодой человек и девушка договорились встретиться между 18 и 20 часами (продолжительность временного промежутка для встречи – 2 часа) в определённом месте. Найти вероятность их встречи, если каждый из них может с одинаковой вероятностью прийти в любой момент времени в течение этого часа и они договорились при этом между собой, что а) будут ждать друг друга не более 30 минут; б) молодой человек будет ждать девушку не более 15 минут. (Ответ: а)0,4375 ; б)0,2344.)

26. Наудачу взяты два положительных числа **x** и **y**, каждое из которых не превышает четырёх. Найти вероятность того что, их произведение xy будет не меньше четырёх, а их частное $\frac{y}{x}$ не больше единицы. (Ответ: 0,2017.)

27. Наудачу взяты два положительных числа **x** и **y**, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того что, их сумма $x+y$ будет не меньше двух, а их разность $x-y$ не больше единицы. (Ответ: 0,375.)

28. Наудачу взяты два положительных числа **x** и **y**, каждое из которых не превышает восьми. Найти вероятность того что, их сумма $x+y$ будет не меньше восьми, а их разность $y-x$ не больше четырёх. (Ответ: 0,4375.)

29. Наудачу взяты два положительных числа **x** и **y**, каждое из которых не превышает десяти. Найти вероятность того, что их сумма $x+y$ будет не больше десяти, а их произведение $x \cdot y$ не меньше девяти. (Ответ: 0,2023.)

30. Наудачу взяты два положительных числа **x** и **y**, каждое из которых не превышает шести. Найти вероятность того, что их сумма $x+y$ будет не меньше шести, а первое число x не меньше трёх. (Ответ: 0,375.)

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема сложения вероятностей: *вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \text{ где } A_i \cdot A_k = \varnothing \text{ при } i \neq k.$$

Если события $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ образуют полную группу несовместных событий, то $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. В частности, события A и $\bar{A}$ образуют полную группу и несовместны, поэтому: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Теорема умножения вероятностей: *вероятность произведения конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них и условных вероятностей остальных событий, вычисленных при условии, что все предшествующие события произошли, то есть*

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_{1,2}}(A_3) \ldots P_{A_{1-(n-1)}}(A_n)$$

События А и В называются ***независимыми,*** если $P_B(A) = P(A)$. Тогда $P_B(A) = P(B)$, то есть независимость событий взаимная. События $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ называются ***независимыми в совокупности***, если каждое из них и любые комбинации их совместного появления являются независимыми событиями. Для независимой в совокупности системы событий справедливо равенство:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если любые два события системы независимы, то система событий называется ***попарно независимой.*** Из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Если случайные события $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ являются независимыми в совокупности, то для любого события $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ противоположное событие $\overline{A} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Поэтому

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right).$$

Теорема сложения вероятностей для двух совместных случайных событий A и B записывается в виде:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)+\mathrm{P}(\mathrm{C})-P(A\cdot B)\ .$$

Если они являются независимыми, то $P(A+B)=1-P(\overline{A})\,P(\overline{B})$.

Теорема сложения вероятностей для трёх совместных случайных событий A, B и C записывается в виде:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+\mathrm{P}(\mathrm{C})-P(A\cdot B)-P(A\cdot \mathrm{C})-P(B\cdot \mathrm{C})+P(A\cdot B\cdot \mathrm{C}).$$

Если они являются независимыми, то $P(A+B+C)=1-P(\overline{A})\ P(\overline{B})\ P(\overline{C})$.

Пример 1. При приёмке партии из 40 изделий, среди которых 10 бракованных, проверяется 20 наугад взятых изделий. Партия изделий принимается, если среди проверяемых изделий не более двух бракованных. Определить вероятность приёмки партии изделий.

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3 обозначают, что среди 20 проверяемых изделий соответственно нет бракованных, одно бракованное и два бракованных. События A_1, A_2, A_3 несовместны. Событие $A=A_1+A_2+A_3$ означает, что партия изделий будет принята. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_{30}^{20}}{C_{40}^{20}}+\frac{C_{10}^{1}\cdot C_{30}^{19}}{C_{40}^{20}}+\frac{C_{10}^{2}\cdot C_{30}^{18}}{C_{40}^{20}}\approx$$

$$\approx 0{,}0002+0{,}004+0{,}0282=0{,}0324\ .$$

Пример 2. Вероятность попадания в цель каждого из трёх стрелков соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Стрелки произвели один залп. Найти вероятности следующих событий: а) в мишени обнаружено только одно попадание; б) хотя бы один из стрелков попал.

Решение. а) Пусть событие A означает только одно попадание в мишень при одном залпе трёх стрелков, а события A_1, A_2, A_3 означают попадание в цель каждого из них. Тогда $A=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$. Так как $A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$, $\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$, $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$ – несовместные события (каждый стрелок выстрелил один раз), а A_1, A_2, A_3 – независимые события (вероятность попадания каждого стрелка постоянна), то по теоремам сложения и умножения вероятностей получим:

$$P(A)=P(A_1)\ P(\overline{A_2})\ \ P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\ \ P(A_2)\ \ P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})\ \ P(\overline{A_2})\ \ P(A_3)=$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}188.$$

б) Пусть B – случайное событие, состоящее в попадании хотя бы одного стрелка. Тогда по определению суммы случайных событий $B=A_1+A_2+A_3$. Событие $\overline{\mathbf{B}}$ – противоположно по смыслу случайному событию $\mathbf{B}$ и означает одновременный промах всех стрелков, то есть $\overline{\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}_1}\cdot\overline{\mathbf{A}_2}\cdot\overline{\mathbf{A}_3}$. Так как попадание в цель каждого стрелка – независимые в совокупности события, то

$$P(B)=P(A_1+A_2+A_3)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathbf{B}}\right)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathbf{A}_1}\cdot\overline{\mathbf{A}_2}\cdot\overline{\mathbf{A}_3}\right)=$$
$$=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=1-0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}976\ .$$

Пример 3. В коробке лежат 10 одинаковых по размеру шаров, среди которых 6 – синего цвета. Наугад выбирается 3 шара. Найти вероятности того, что они синего цвета а) при условии, что шары в коробку не возвращаются; б) после выбора шара он возвращается в коробку.

Решение. а) Пусть события A_1, A_2, A_3 состоят в том, что при первом, втором и третьем выборе появляется синий шар. Тогда случайное событие $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$ означает одновременное появление трёх шаров синего цвета. Так как шары назад в коробку не возвращаются, то вероятности появления синих шаров меняются в зависимости от того, вынимали перед этим синие шары или нет. Поэтому события ***«Появление очередного шара синего цвета»*** зависимые случайные события. Тогда

$$P(A)=P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1A_2}(\mathrm{A}_3)=\frac{6}{10}\ \frac{5}{9}\ \frac{4}{8}=0{,}1(6)\,;$$

б) в этом случае случайные события ***«Появление очередного шара синего цвета»*** перестают быть зависимыми, так как каждый последующий вынутый шар возвращается в коробку, то есть $P(A_1)=P_{A_1}(A_2)=P_{A_1A_2}(\mathrm{A}_3)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Тогда

$$P(A)=P(A_1)\,P(A_2)\ \ P\,(\mathrm{A}_3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=0{,}216\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В ящике **10** одинаковых по форме деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлечённых деталей окажется: а) все окрашенные; б) менее двух окрашенных; в) хотя бы одна окрашенная. (Ответ: 0,071 ; 0,119 ; 0,995.)

2. В двух ящиках **60 %** и **90 %** спелых яблок соответственно. Наудачу выбирают по одному яблоку из каждого ящика. Какова вероятность обнаружить среди них: а) два спелых яблока: б) одно спелое, а другое нет; в) хотя бы одно спелое яблоко. (Ответ: 0,54 ; 0,42 ; 0,96.)

3. В партии из **15** деталей **12** стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых четырёх деталей окажется: а) менее двух нестандартных; б) три стандартных; в) хотя бы одна нестандартная деталь. (Ответ: 0,846 ; 0,161 ; 0,637.)

4. В ящике **20** деталей, среди которых **3** нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных **8** деталях окажется: а) не более одной нестандартной детали; б) хотя бы одна нестандартная деталь. (Ответ: 0,656 ; 0,807.)

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных кубиков **6** очков появится: а) хотя бы на одном из них; б) на двух кубиках; в) не менее чем на двух кубиках. (Ответ: 0,421 ; 0,069(4) ; 0,0741.)

6. Вероятность того, что событие **А** появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях равна **0,75.** Найти: а) вероятность появления события в одном испытании; б) вероятность того, что при трёх испытаниях событие появится два раза. (Ответ: 0,5 ; 0,375.)

7. Студент, сдающий сессию, должен сдать **4** экзамена. Вероятности того, что он сдаст эти экзамены, равны соответственно: **0,95; 0,9; 0,7 и 0,8.** Найти вероятность того, что студент: а) сдаст сессию без «двоек»; б) получит хотя бы одну «двойку»; в) получит «двойки» по двум предметам. (Ответ: 0,4788 ; 0,5212 ; 0,0807.)

8. Три стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна **0,7,** а вторым – **0,6.** Найти вероятность того, что: ***а)*** хотя бы один из стрелков попал в мишень; ***б)*** два стрелка попадут в мишень; ***в)*** только один стрелок попадёт в мишень. (Ответ: 0,88 ; 0,42 ; 0,46.)

9. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятности того, что выиграют: а) три билета; б) не менее трёх билетов; в) менее двух билетов. (Ответ: 0,0456 ; 0,0492 ; 0,6112.)

10. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком – **0,6**; вторым – **0,7**. Первый сделал **2** выстрела, второй – **3** выстрела. Определить вероятность того, что: **а)** цель не поражена; **б)** цель поражена **4** раза; **в)** хотя бы одна пуля попала в мишень. (Ответ: 0,187 ; 0,3234 ; 0,99568.)

11. Три стрелка сделали по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна **0,5;** второго – **0,6;** третьего – **0,7.** Какова вероятность того, что: **а)** в мишени будет ровно **2** пули; **б)** попадёт хотя бы один из них; **в)** промахнётся только третий стрелок. (Ответ: 0,44 ; 0,94 ; 0,09.)

12. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события: **А –** среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновой масти; **В –** среди вынутых карт будет хотя бы одна червонной масти. Найти вероятность события $C = A + B$. (Ответ: 0,9077.)

13. В ящике **10** деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна деталь окажется окрашенной; б) только одна деталь будет окрашенной; в) окрашенной окажется только третья деталь. (Ответ: 0,9(6) ; 0,3 ; 0,1(6).)

14. В двух ящиках **40 %** и **80 %** доброкачественных фруктов соответственно. Наудачу выбирают по одному фрукту из каждого ящика. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы один гнилой; б) оба хороших; в) один гнилой и один хороший. (Ответ: 0,68 ; 0,32 ; 0,56.)

15. В партии из **10** деталей **8** стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых **2** деталей есть: а) хотя бы одна стандартная; б) все стандартные; в) только одна стандартная деталь. (Ответ: 0,9(7) ; 0,6(2) ; 0,3(5).)

16. В ящике **10** деталей, среди которых **3** нестандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных **6** деталей окажется: а) все стандартные детали; б) половина стандартных деталей; в) не более одной нестандартной детали. (Ответ: 0,0(3) ; 0,1(6) ; 0,(3).)

17. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт в мишень, равна **0,9.** Стрелок произвёл три выстрела. Найти вероятности того, что: а) все три выстрела дали попадание; б) мишень поражена; в) два выстрела поразили мишень. (Ответ: 0,729 ; 0,999 ; 0,243.)

18. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком – **0,7;** вторым – **0,8.** Первый сделал **2** выстрела, второй – **1** выстрел. Найти вероятности того, что: а) цель поражена; б) попал только второй стрелок; в) каждый стрелок попал только один раз. (Ответ: 0,982 ; 0,072 ; 0,336.)

19. В двух ящиках **50%** и **70%** доброкачественных фруктов соответственно. Наудачу выбирают по одному фрукту из каждого ящика. Какова вероятность обнаружить среди них: 1) хотя бы один хороший; 2) оба гнилых; 3) один гнилой и один хороший. (Ответ: 0,85 ; 0,15 ; 0,5.)

20. Четыре стрелка сделали по выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в мишень **1**-го стрелка **0,5**; **2**-го – **0,6; 3**-го – **0,7; 4**-го – **0,8.** Каковы вероятности того, что: а) в мишени будет ровно две пули; б) хотя бы один из стрелков попадёт; в) мишень не поражена. (Ответ: 0,32 ; 0,988 ; 0,012.)

21. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна **0,8,** а вторым стрелком – **0,6.** Они сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) цель будет поражена только одним стрелком; б) хотя бы один из них попадёт; в) оба промахнутся. (Ответ: 0,44 ; 0,92 ; 0,08.)

22. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна **0,7,** а для второго – **0,8.** Найти вероятность того, что: а) попадёт только один из стрелков; б) мишень поражена; в) хотя бы один из стрелков промахнётся. (Ответ: 0,38 ; 0,94 ; 0,44.)

23. Три стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Найти вероятности следующих событий: а) мишень поражена; б) второй стрелок поразил мишень; в) мишень поражена два раза. Вероятности попадания в мишень стрелков равны соответственно: **0,8; 0,7; 0,6.** (Ответ: 0,976 ; 0,056 ; 0,452.)

24. Спортсмен произвёл четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причём вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Вычислить вероятности того, что цель будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) не менее трёх раз. (Ответ: 0,084 ; 0,302 ; 0,386.)

25. Из партии деталей, среди которых 100 стандартных и 5 бракованных, для контроля наугад выбрано 12 изделий. При контроле выяснилось, что первые 10 из 12 деталей – стандартные. Определить вероятность того, что следующая деталь будет стандартной. (Ответ: 0,944.)

26. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранного лотерейного билета не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001. (Ответ: 0,3024.)

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть события $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ образуют полную группу несовместных событий, то есть $\sum_{i=1}^{n} P(B_i)=1$. Событие A может наступить только вместе с наступлением одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые называются гипотезами. Тогда справедлива ***формула полной вероятности***:

$$P(A)=P(B_1)\ P_{B_1}(A)+P(B_2)\ P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\ P_{B_n}(A)= \\ =\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P_{B_i}(A).$$

Если событие A, которое может наступить только вместе с наступлением одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ произошло, то возникает задача, связанная с возможностью нахождения условных вероятностей гипотез $\{B_i\}_{i=1}^{n}$. Эти вероятности можно найти по ***формулам Байеса:***

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)\ P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P_{B_i}(A)}\ ,\ k=1,\ldots,n\ .$$

Эта формула позволяет по известным априорным (полученным до опыта) вероятностям $P(B_i)$ гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$ получить более точные условные апостериорные (полученные после опыта) вероятности гипотез $P_A(B_i)$.

Пример 1. В цехе 3 станка-автомата штампуют детали одного вида. Производительность первого станка в два раза больше, а третьего – в два раза меньше производительности второго станка. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго – 0,03, для третьего – 0,01. Изготовленные детали складываются в один ящик. Найти вероятность того, что наугад взятая из ящика деталь окажется бракованной.

Решение. Относительно каждой взятой из ящика детали можно выдвинуть следующие предположения (гипотезы): B_1 – деталь изготовлена первым станком, B_2 – деталь изготовлена вторым станком, B_3 – деталь изготовлена третьим станком.

Так как третий станок штампует $\frac{1}{7}$ часть всех деталей, второй $\frac{2}{7}$, то первый $\frac{4}{7}$ всех деталей. Поэтому вероятности сделанных предположений:

$$P(B_1)=\frac{4}{7}\ ,\ P(B_2)=\frac{2}{7},P(B_3)=\frac{1}{7}\ .$$

По условию задачи $P_{B_1}(A)=0{,}05$; $P_{B_2}(A)=0{,}03$; $P_{B_3}(A)=0{,}01$.

Тогда искомая вероятность: $P(A)=\frac{4}{7}\ 0{,}05+\frac{2}{7}\ \ 0{,}03+\frac{1}{7}\ \ 0{,}01=\ 0{,}0386$.

Пример 2. В первом ящике находится **6** белых и **2** чёрных шара, а во втором – **3** белых и **4** чёрных. Из первого ящика случайно взяли **3** шара и переложили во второй ящик. Найти вероятность того, что взятые после этого из второго ящика два шара оказались чёрного цвета.

Решение. Относительно перекладываемых шаров можно сделать следующие предположения: B_1 – из первого ящика переложили 3 белых шара, B_2 – из первого ящика переложили 2 белых и 1 чёрный шар, B_3 – из первого ящика переложили 1 белый и 2 чёрных шара. Найдём вероятности этих гипотез:

$$P(B_1)=\frac{6}{8}\ \frac{5}{7}\ \ \frac{4}{6}=\frac{5}{14}\ ;\ P(B_2)=\frac{C_6^2\cdot C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}\ ;\ P(B_3)=\frac{C_6^1\ \cdot C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}\ .$$

Пусть A – событие, которое состоит в том, что после перекладывания трёх шаров, два вынутых из второго ящика шара будут чёрного цвета. Тогда

$$P_{B_1}(A)=\frac{6}{10}\ \frac{5}{9}\ \ \frac{4}{8}=\frac{1}{6}\ ;\ P_{B_2}(A)=\frac{5}{10}\ \ \frac{4}{9}\ \ \ \frac{3}{8}=\frac{1}{12}\ ;\ P_{B_3}(A)=\frac{4}{10}\ \ \frac{3}{9}\ \ \frac{2}{8}=\frac{1}{30}\ .$$

Искомую вероятность найдём по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{5}{14}\ \frac{1}{6}+\frac{15}{28}\ \ \frac{1}{12}+\frac{3}{28}\ \ \ \frac{1}{30}=0{,}108\ .$$

Пример 3. На склад поступает продукция с трёх фабрик . Поступления с первой фабрики составляют 20 %, со второй – 46 %, с третьей – 34 %. Вероятность брака для первой фабрики равна 0,03, для второй – 0,02, для третьей – 0,01. Найти вероятность того, что в случае, когда взятое наугад изделие нестандартно, оно произведено на первой фабрике.

Решение. Известно, что любое изделие, находящееся на складе, производится на трёх фабриках. Пусть B_1 – изделие произведено на первой фабрике, B_2 – на второй, B_3 – на третьей фабрике. Система гипотез B_1, B_2, B_3 является полной группой несовместных событий:

$$P(B_1)=0{,}2\ ;\ P(B_2)=0{,}46\ ;\ P(B_3)=\ 0{,}34\ .$$

Вероятности производства брака каждой фабрикой известны:

$$P_{B_1}(A) = 0,03\ ;\ P_{B_2}(A) = 0,02\ ;\ P_{B_3}(A) = 0,01\,,$$

где A – событие, состоящее в выборе произвольного изделия на складе. Необходимо найти вероятность гипотезы B_1 при условии, что взятое наугад изделие (событие A) оказалось нестандартным. Согласно формуле Байеса, имеем:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\ \ P_{B_1}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)\ \ P_{B_i}(A)} = \frac{0,2\cdot 0,03}{0,2\cdot 0,03 + 0,46\cdot 0,02 + 0,34\cdot 0,01} = 0,323\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. У сборщика имеется **16** деталей, изготовленных заводом **№1,** и **14** деталей, изготовленных заводом **№2.** Вероятности изготовления брака этими заводами равны соответственно **0,1** и **0,05.** Для сборки одной единицы продукции используется две таких детали. Найти вероятность изготовления бракованной продукции. (Ответ: 0,1475.)

2. В локальную сеть подключено **4** компьютера. Вероятности того, что в течение определённого времени они не будут заражены вирусами, равны соответственно **0,8; 0,85; 0,9; 0,95.** Найти вероятность того, что выбранный наудачу компьютер не будет заражен вирусом. (Ответ: 0,875.)

3. Для контроля продукции из трёх партий деталей взяты для испытания две детали. Найти вероятность обнаружения брака продукции, если в одной партии $\frac{1}{4}$ деталей бракованные, а в двух других они составляют **10 %** и **5 %** соответственно. (Ответ: 0,247.)

4. Для контроля продукции из четырёх партий деталей взята для испытания одна деталь. Найти вероятность обнаружения брака продукции, если в одной партии $\frac{1}{6}$ деталей бракованные, а в двух других партиях доброкачественные и бракованные относятся как ***3:2***. (Ответ: 0,242.)

5. В отдел контроля продукции поступает материя, выработанная двумя ткачихами. Первая работает на **20** станках и даёт **80 %** продукции отличного качества, вторая – на **16** станках и даёт **90 %** продукции отличного качества. Какова вероятность того, что наугад взятый браковщицей один кусок материи окажется отличного качества. (Ответ: 0,8(4).)

6. Орудие производит три независимых выстрела по самолёту. Вероятность попадания при одном выстреле равна **0,3**. Найти вероятность того что самолёт будет сбит, если вероятность сбить его при одном попадании равна **0,2**, при двух попаданиях – **0,7**, при трёх попаданиях – **1**. (Ответ: 0,2475.)

7. В первом ящике содержится **10** шаров, из них **8** белых; в другом ящике **20** шаров, из них **4** белых. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый шар из наудачу взятого ящика будет белого цвета. (Ответ: 0,4.)

8. В первом ящике содержится **20** деталей, из них **15** стандартных; во втором – **30** деталей, из них **24** стандартных; в третьем – **10** деталей, из них **6** стандартных. Найти вероятность того что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика – стандартная. (Ответ: 0,75.)

9. В **1**-й коробке три белых и три чёрных шара, во **2**-й один белый и три чёрных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй коробки извлекли один шар. Определить вероятность того, что вынули шар чёрного цвета. (Ответ: 0,(3).)

10. В первой коробке находится **2** белых и **8** чёрных шаров, во второй – **4** белых и **16** чёрных. Из первой во вторую случайным образом переложено **3** шара, затем из второй коробки извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй коробки шар – чёрный. (Ответ: 0,8.)

11. В первом ящике **3** красных и **4** чёрных шара, во втором – **5** красных и **3** чёрных. Из первого ящика случайно взяли два шара и переложили во второй ящик. После этого из второго ящика случайно взяли три шара. Найти вероятность того, что все три шара красного цвета. (Ответ: 0,161.)

12. В первом ящике **7** красных и **3** чёрных шара, во втором – **4** красных и **5** чёрных. Из первого ящика случайно взяли один шар и переложили во второй ящик. После этого из второго ящика случайно взяли два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара чёрного цвета; б) взяты шары разного цвета. (Ответ: а) 0,256 ; б) 0,549.)

13. В первом ящике **6** красных и **4** чёрных шара, во втором – **3** красных и **9** чёрных. Из первого ящика случайно взяли один шар и переложили во второй ящик. После этого из второго ящика случайно взяли два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара красного цвета; б) хотя бы один шар чёрного цвета. (Ответ: а) 0,06 ; б) 0,94.)

14. В первом ящике **5** красных и **4** чёрных шара, во втором – **2** красных и **6** чёрных. Из первого ящика случайно взяли шар и переложили во второй.

После этого из второго ящика случайно взяли три шара. Найти вероятность того, что среди них **1** красный и **2** чёрных шара. (Ответ: 0,52.)

15. В ящике находятся ***10*** новых теннисных мячей и ***15*** игранных. Из ящика наугад вынимаются два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми. (Ответ: 0,1265.)

16. В сетке находятся 6 волейбольных мячей, из которых 4 новых. Для первой игры наугад берут 2 мяча, которые после игры возвращаются в сетку. Для второй игры также берутся 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые. (Ответ: 0,16.)

17. Из коробки, содержащей 10 красных и 5 синих шаров, один, неизвестного цвета, потерян. Найти вероятность того, что вынутый после этого из коробки шар – белый. (Ответ: 0,(6).)

18. В ящик, содержащий три одинаковых детали, среди которых могут быть как стандартные, так и нестандартные, брошены одна стандартная и одна нестандартная детали, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь. (Ответ: 0,5.)

19. В первом ящике **8** красных и **2** чёрных шара, во втором – 1**4** красных и **6** чёрных. Из первого ящика случайно взяли один шар и переложили во второй ящик. После этого из второго ящика случайно взяли два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара чёрного цвета; б) взяты шары разного цвета. (Ответ: а) 0,077 ; б) 0,436.)

20. В ящике находятся три одинаковых детали, среди которых могут быть как стандартные, так и нестандартные. Туда добавили одну стандартную деталь, после чего наудачу извлекли одну деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь. Как изменятся при этом вероятности предположений о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике? (Ответ: 0,625 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4.)

21. Из **1000** ламп **300** принадлежат 1-й партии, **500** – 2-й партии, **200** – 3-й партии. В 1-й партии **6 %** бракованных ламп, во 2-й – **5 %**, в 3-й – **4 %.** Наудачу выбранная лампа оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она принадлежала 2-й партии. (Ответ: 0,49.)

22. Одна из четырёх независимо работающих микросхем прибора отказала. Найти вероятность того, что отказали первая или вторая микросхема, если вероятности отказа микросхем известны: **0,1; 0,2; 0,3; 0,4.** (Ответ: 0,3.)

23. В первой коробке находятся **4** белых и **6** чёрных шаров, во второй – **8** белых и **12** – чёрных. Из первой во вторую случайным образом переложено **3** шара, затем из второй коробки извлекли один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй коробки шар – чёрный. (Ответ: 0,6.)

24. В первом ящике **8** красных и **2** чёрных шара, во втором – **5** красных и **7** чёрных. Из первого ящика случайно взяли три шара и переложили во второй ящик. После этого из второго ящика случайно взяли два шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета. (Ответ: 0,533.)

25. В группе спортсменов **15** лыжников, **5** велосипедистов и **10** бегунов. Вероятность выполнения квалифицированной нормы для каждой категории спортсменов равна соответственно: **0,9; 0,8; 0,75.** На прошедших соревнованиях спортсмен выполнил квалификационную норму. Найти вероятность того, что это был велосипедист или бегун. (Ответ: 0,46.)

26. Батарея из трёх орудий произвела залп, причём один снаряд попал в цель. Найти вероятность того, что первое или третье орудие дали попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны: **0,6; 0,7; 0,9.** (Ответ: 0,682.)

27. Батарея из четырёх орудий произвела залп, причём один снаряд попал в цель. Найти вероятность того, что второе или четвёртое орудия дали попадания, если вероятности попаданий орудий известны: **0,9; 0,7; 0,8; 0,6.** (Ответ: 0,433.)

28. В магазин поступают однотипные изделия с **3**-х заводов. Причём **1**-й завод поставляет **40 %; 2**-й – **35 %; 3**-й – **25 %** изделий. Среди изделий **1**-го завода **90 %** первосортных; **2**-го – **80 %**; **3**-го – **60 %.** Куплено одно изделие, и оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено **1**-м или **3**-м заводом. (Ответ: 0,646.)

29. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём **1**-й завод поставляет **30 %** изделий, **2**-й – **40 %**; **3**-й – **30 %.** Среди изделий **1**-го и **3**-го заводов – **9 %** бракованных, среди **2**-го – **12 %.** Купленное изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно выпущено **2**-м заводом. (Ответ: 0,471.)

30. В первой урне содержится **10** шаров, из них **8** белых, во второй урне **20** шаров, из них **4** белых. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар. (Ответ: 0,5.)

31. Три стрелка произвели залп, причём одна пуля поразила мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень **1**-м, **2**-м и **3**-м стрелками соответственно равны: **0,6; 0,5; 0,4.** (Ответ: 0,27.)

32. Батарея из трёх орудий произвела залп, причём один снаряд попал в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны: **0,4; 0,3; 0,5.** (Ответ: 0,(3).)

33. В состав блока входят 6 интегральных схем 1-го поколения и 10 2-го поколения. Гарантийный срок обычно выдерживают 80 % интегральных схем 1-го поколения и 90 % 2-го поколения. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая интегральная схема выдержит гарантийный срок; б) интегральная схема, выдержавшая гарантийный срок, схема 1-го поколения. (Ответ: а) 0,863; б) 0,348.)

34. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём **1**-й завод поставляет **20 %** изделий, **2**-й – **50 %**; **3**-й – **30 %.** Среди изделий **1**-го и **3**-го заводов – **6 %** бракованных, среди **2**-го – **15 %.** Купленное изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно выпущено **2**-м или **3**-м заводом. (Ответ: 0,886.)

35. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём 1-й завод поставляет **40 %** изделий; 2-й – **50 %**; 3-й – **10 %**. Среди изделий 1-го и 2-го заводов **8 %** бракованных, среди 3-го – **10 %** брака. Купленное изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно выпущено 3-м заводом. (Ответ: 0,122.)

36. Из **1000** ламп **300** принадлежат 1-й партии, **500** – 2-й партии, **200** – 3-й партии. В 1-й партии **6 %** бракованных ламп, во 2-й – **5 %**, в 3-й – **4 %.** Наудачу выбранная лампа оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она принадлежала 2-й партии. (Ответ: 0,49.)

37. Три стрелка стреляют независимо (по одному разу) по одной мишени. Вероятности попадания каждого стрелка равны соответственно **0,6; 0,9** и **0,8**. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что попал первый или третий стрелок. (Ответ: 0,609.)

38. В магазин поступают однотипные изделия с 3-х заводов, причём 1-й завод поставляет **60 %;** 2-й – **30 %**; 3-й – **10 %.** Среди изделий 1-го завода **80%** первосортных; 2-го – **70 %;** 3-го – **90 %.** Куплено одно изделие и оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено 2-м заводом. (Ответ: 0,269.)

39. В магазин поступают одинаковые изделия с четырёх заводов в отношении **2:9:3:6.** Бракованная продукция каждого завода составляет соответственно **5 %**, **12 %, 8 %** и **6 %**. Куплено одно изделие, которое оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно выпущено ***1***-м или ***3***-м заводом. (Ответ: 0,191.)

40. На складе хранятся приборы, изготовленные двумя производителями в отношении **2:8** . Вероятность безотказной работы прибора первого производителя равна 0,9, второго – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад прибор работает безотказно; б) взятый наугад прибор, работающий безотказно, выпущен вторым производителем. (Ответ: 0,66 ; 0,73.)

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Если вероятность появления случайного события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются ***независимыми относительно события*** A.

Рассмотрим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти случайное событие A с постоянной вероятностью $P(A)=p$, $0<p<1$. Такая схема проведения опытов называется ***схемой Бернулли***. В этом случае возникает серия задач, связанная с необходимостью определения следующих вероятностей:

1) $P_n(k)$ – вероятность того, что случайное событие A произойдет ровно k раз при проведении серии из n независимых опытов, при этом последовательность появления события неважна;

2) $P_n(k_1 \le k < k_2)$ – вероятность того, что случайное событие A произойдет между k_1 (включая его) и k_2 (не включая его) раз;

3) $P_{\max} = max\{P_n(0); P_n(1); \ldots; P_n(n-1); P_n(n)\}$ – наибольшее значение вероятности и $k_{\max}$ – число опытов, при которых это наибольшее значение вероятности наблюдается (***наивероятнейшее число появлений*** события A в n независимых испытаниях).

Вероятность $P_n(k)$ определяется по ***формуле Бернулли:***

$$P_n(k)=C_n^k \; p^k \; (1-p)^{n-k} .$$

Вероятность $P_n(k_1 \le k < k_2)$ по теореме вероятности суммы несовместных событий определяется:

$$P_n(k_1 \le k < k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+\ldots+P_n(k_2-2)+P_n(k_2-1),$$

где каждая из вероятностей $P_n(k)$, $k=k_1, \ldots, (k_2-1)$ определяется по формуле Бернулли.

Число $k_{\max}$ можно определить из условия:

$$n \cdot p - q \le k_{\max} < n \cdot p + p, \text{ где } q = 1-p.$$

Соответственно наибольшее значение вероятности:

$$P_{\max} = P(k_{\max}).$$

Пример 1. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна **0,1.** Куплено **10** билетов. Найти вероятность того, что выиграют: а) **3** билета; б) не менее 2-х билетов; в) наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Решение: а) в этой задаче опыт состоит в проверке одного лотерейного билета на выигрыш, а случайное событие A – выигрыш одного билета. Вероятность выигрыша $P(A)=0,1$, всего опытов $n=10$. Вероятность того, что выиграют три билета $k=3$: $P_{10}(3)=C_{10}^{3}\cdot 0,1^{3}\cdot(1-0,1)^{10-3}=120\cdot 0,1^{3}\cdot 0,9^{7}=0,0574$;

б) вероятность случайного события B – выиграет не менее 2-х лотерейных билетов, если куплено 10 билетов, можно записать так: $P(B)=P_{10}(k\ge 2)=P_{10}(2\le k\le 10)$.

Тогда

$$P(B)=P_{10}(2)+P_{10}(3)+\ldots+P_{10}(10)=1-P(\overline{B})=1-P_{10}(k<2)=$$
$$=1-\left(P_{10}(0)+P_{10}(1)\right)=1-\left(C_{10}^{0}\cdot 0,1^{0}\cdot 0,9^{10}+C_{10}^{1}\cdot 0,1^{1}\cdot 0,9^{9}\right)=$$
$$=1-(0,3487+0,3874)=1-0,7361=0,2639\ ;$$

в) найдём наивероятнейшее число выигрышных билетов $k_{\max}$:

$$10\cdot 0,1-(1-0,1)\le k_{\max}<10\cdot 0,1+0,1\ \Rightarrow\ 0,1\le k_{\max}<1,1\ \Rightarrow\ k_{\max}=1.$$

Тогда наибольшее значение вероятности:

$$P_{\max}=P(1)=C_{10}^{1}\cdot 0,1^{1}\cdot 0,9^{9}=0,3874.$$

Формула Бернулли – точная формула. Однако при большом количестве испытаний применение формулы приводит к громоздким вычислениям. Это связано с необходимостью определения факториалов больших чисел и степеней с большими показателями. В процессе этих вычислений неизбежно приходится проводить округления, что в итоге приводит к появлению погрешности формулы, возрастающей с увеличением числа испытаний. В этом случае для вычисления вероятностей $P_n(k)$, $P_n(k_1\le k<k_2)$ используют приближённые формулы, которые позволяют оценить их значения при проведении больших серий независимых испытаний $(n\to\infty)$. Эти формулы называются ***асимптотическими приближениями формулы Бернулли.*** Погрешность, возникающая в результате замены формулы, уменьшается с увеличением количества проводимых независимых испытаний.

ФОРМУЛА ПУАССОНА

Если вероятность появления случайного события $P(A)$ мала $(0 < p < 0{,}1)$, а произведение $n\,p$ невелико $(n\;p < 10)$, то вероятность появления события k раз можно приближённо найти по формуле:

$$P_n(k) \approx P(k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\;\lambda^k \quad \text{, где} \quad \lambda = n\,p\,.$$

Эта формула называется ***формулой Пуассона*** (формула редких событий). Формула применяется при проведении больших серий опытов $(n > 50)$ и обеспечивает определение искомой вероятности $P_n(k)$ с погрешностью в пределах одного процента.

Пример 2. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна **0,002.** Поступила **1000** вызовов. Определить вероятность того, что произойдёт: а) **3** сбоя; б) менее **2**-х сбоев; в) не менее **2**-х сбоев; г) хотя бы один сбой.

Решение. В этом примере опыт состоит в том, что на телефонную станцию поступит вызов $(n = 1000)$. Случайное событие A, которое может произойти в каждом опыте – при обработке вызова в работе станции произойдёт сбой $P(A) = 0{,}002$. Поэтому $\lambda = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ и при нахождении искомых вероятностей удобней применять формулу Пуассона:

а) $k = 3$: $P_{1000}(3) \approx \frac{e^{-2}}{3!}\;2^3 = \frac{4\,e^{-2}}{3} \approx 0{,}1805;$

б) $k < 2$: $P_{1000}(k < 2) = P_{100}(0) + P_{1000}(1) \approx \frac{e^{-2}}{0!}\;2^0 + \frac{e^{-2}}{1!}2^1 = 3e^{-2} \approx 0{,}406;$

в) хотя бы один сбой, значит $k \geq 1$:

$$P_{1000}(k \geq 1) = 1 - P_{100}(k < 1) = 1 - P_{1000}(0) \approx 1 - \frac{e^{-2}}{0!}\;2^0 = 1 - e^{-2} \approx 0{,}8647\,.$$

Пример 3. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна **0,01.** Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей чем **0,85?**

Решение. В этом примере опыт состоит в покупке лотерейного билета (n – неизвестно). Случайное событие A, которое может произойти в каждом опыте – выигрыш при покупке одного лотерейного билета $P(A) = 0{,}01$. Известна вероятность $P_n(k \geq 1) = 0{,}85$. Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) \approx 1 - \frac{e^{-\lambda}}{0!}\;\lambda^0 \;\Rightarrow\; 1 - e^{-\lambda} = 0{,}85 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0{,}15.$$

Тогда получим $-\lambda = \ln 0{,}15 \Rightarrow \lambda = 1{,}897$. Так как $\lambda = n \cdot p$ оценим количество билетов, необходимых для выигрыша хотя бы по одному из них с заданной вероятностью: $1{,}897 = 0{,}01\ n \;\Rightarrow\; n = 189{,}7$. Значит необходимо купить 190 билетов.

ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛЫ МУАВРА – ЛАПЛАСА

При больших значениях вероятности p : $(0{,}1 \le p < 1)$ рекомендуется применять формулы ***Муавра-Лапласа.***

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \text{ где}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p\,.$$

Равенство тем точнее, чем p ближе к 0,5.

Вероятность того, что случайное событие A произойдет между k_1 и k_2 раз при большой серии испытаний может быть приближённо оценена по формуле:

$$P_n(k_1 \le k < k_2) = P_n(k_1 < k \le k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \;\; – \;\; \textit{интегральная функция Лапласа};$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\;; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ - нечётная $\left(\Phi(-x) = -\Phi(x)\right)$ и при удалении x на бесконечность: $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0{,}5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$. Поэтому значения функции Лапласа приведены в таблице только для положительных значений аргумента. Для значений $x > 5$ полагают, что $\Phi(x) = 0{,}5$.

Вероятность того, что в больших сериях опытов случайное событие A появится ***не менее*** k_1 ***раз*** или ***более*** k_1 ***раз*** можно найти по формуле:

$$P_n(k_1 \le k) = P_n(k_1 < k) \approx 0{,}5 - \Phi(x_1).$$

Вероятность того, что в больших сериях опытов случайное событие A появится ***не более*** k_2 ***раз*** или ***менее*** k_2 ***раз*** можно найти по формуле:

$$P_n(k \le k_2) = P_n(k < k_2) \approx \Phi(x_2) + 0{,}5.$$

Пример 4. Предприятие выпускает 70 % продукции высшего качества. В некоторый магазин поступила партия из 1000 изделий, выпущенных этим предприятием. Найти вероятности следующих событий: а) партия содержит 720 изделий высшего качества; б) количество изделий высшего качества будет заключено между 652 и 760; в) количество изделий высшего качества будет не менее 710; г) количество изделий высшего качества будет меньше 680.

Решение: а) по условию задачи число опытов в серии $n = 1000$, один опыт заключается в проверке на качество наугад взятого изделия из поступившей в магазин партии, случайное событие A – изделие будет высшего качества. Поэтому

$$P(A) = 0,7 \;;\; q = 1 - 0,7 = 0,3 \;;\; k = 720 .$$

Для вычисления исходной вероятности воспользуемся локальной формулой Муавра-Лапласа:

$$x = \frac{720 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = 1,38 \;;\; \varphi(1,38) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1,38^2}{2}} = 0,154;$$

$$\mathrm{P}_{1000}(720) \approx \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \; 0,154 = 0,034 \;;$$

б) в этом случае $k_1 = 652$; $k_2 = 760$. Искомую вероятность определим по интегральной формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k < k_2) = P_n(k_1 < k \le k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \;;$$

$$x_1 = \frac{652 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = -3,31 \;;\; x_2 = \frac{760 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = 4,14 \;;$$

$$\mathrm{P}_{1000}(652 < k < 760) \approx \Phi(4,14) - \Phi(-3,31) = 0,99945 \;.$$

Значения функции Лапласа в точках x_1 ; x_2 находим в приложении:

$$\Phi(4,14) = 0,499974 \quad ; \quad \Phi(-3,31) = -0,49948 \;;$$

в) вероятность того, что количество изделий высшего качества будет не менее 710, определяется по формуле $P_{1000}(710 \le k\;) \approx 0,5 - \Phi(x_1)$. Найдём x_1 и значение функции Лапласа в этой точке в приложении :

$$x_1 = \frac{710 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = 0,69 \;;\; \Phi(0,69) = 0,2549 \;.$$

Тогда искомая вероятность $P_{1000}(710 \le k\;) \approx 0,5 - 0,2549 = 0,2451$;.

г) вероятность того, что количество изделий высшего качества будет меньше 680 определим по формуле $P_{1000}(k < 680) \approx \Phi(x_2) + 0,5$. Найдём x_2 и значение функции Лапласа в этой точке в приложении :

$$x_2 = \frac{680 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = -1,38 \;;\; \Phi(-1,38) = -0,4162 \quad .$$

Тогда искомая вероятность $P_{1000}(k < 680\;) \approx -0,4162 + 0,5 = 0,5838$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Монету бросают **8** раз. Найти вероятность следующих случайных событий: а) «цифра» выпадет менее **2**-х раз; б) «цифра» выпадет не менее **3**-х раз; в) «герб» выпадет хотя бы один раз.(Ответ: а) 0,035; б)0,856 ; в) 0,996.)

2. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трёх; в) четыре. (Ответ: а) 0,082; б) 0,983; в) 0,246.)

3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх независимых выстрелах равна **0,9984.** Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле. (Ответ: 0,8.)

4. Кубик подбрасывают **20** раз. Найти вероятность того, что: а) хотя бы один раз число очков будет кратно трём; б) наиболее вероятное число появлений простого числа очков и соответствующую вероятность**.** (Ответ: а) 0,9997 ; б) 10 ; 0,176.)

5. Кубик подбрасывают **10** раз. **А** – число выпавших очков кратно **3**. Найти: а) наиболее вероятное число появления события **А** и его вероятность; б) вероятность того, что событие **А** появится хотя бы один раз. (Ответ: а) 3 ; 0,26 б) 0,983.)

6. Какова вероятность того, что при **24** – кратном подбрасывании двух игральных кубиков хотя бы один раз появятся две шестёрки? Найти наивероятнейшее число появлений двух шестёрок и соответствующую вероятность. (Ответ: 0,491 ; 0 ;0,509.)

7. Произведено **8** независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события **А** равна **0,1.** Найти вероятность того, что событие **А** появится: а) хотя бы **2** раза; б) наивероятнейшее число появлений события **А** и его вероятность. (Ответ: а) 0,187 ; б) 0 ; 0,431.)

8. При передаче SMS-сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трёх искажений. (Ответ: а) 0,349; б) 0,057; в) 0,987.)

9. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из шести. (Ответ: не менее трёх партий из четырёх.)

10. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из шести. (Ответ: не менее двух партий из четырёх.)

11. Стрелок производит независимым образом **5** выстрелов в мишень. Найти вероятность трёх попаданий в мишень, если вероятность поражения мишени не менее одного раза при двух выстрелах равна **0,84.** (Ответ: 0,3456.)

12. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна **0,8**, для второго – **0,6**. Было произведено **15** залпов. Найти наивероятнейшее число залпов и соответствующую вероятность, при которых оба стрелка вместе попадут в мишень. (Ответ: 7 ; 0,202.)

13. Испытания заключаются в бросании трёх игральных кубиков. Найти вероятность того, что при четырёх испытаниях появятся: а) две цифры **«4»** в двух испытаниях; б) хотя бы в одном испытании появятся все разные цифры. (Ответ: а) 0,025 ; б) 0,961.)

14. Испытания заключаются в бросании трёх игральных кубиков. Найти вероятность того, что при пяти испытаниях: а) появятся цифры **«2»** и **«5»** в двух испытаниях; б) появятся три цифры **«1»** хотя бы в одном испытании. (Ответ: а)0,026 ; б) 0,598.)

15. Два кубика подбрасывают **6** раз. Найти вероятность того, что: а) хотя бы один раз сумма выпавших очков будет кратна **3**; б) менее 2-х раз произведение очков будет равно **6**. (Ответ: а) 0,912 ; б) 0,863.)

16. Партия цветов содержит **40 %** тюльпанов. Какова вероятность того, что среди **5**-ти случайно отобранных цветов: а) **3** тюльпана; б) не менее **3**-х тюльпанов; в) хотя бы один тюльпан. (Ответ: а) 0,23 ; б) 0,317 ; в) 0,92.)

17. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди них: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) все девочки. Вероятность рождения мальчика равна **0,51.** (Ответ: а) 0,306 ; б) 0,481 ; в) 0,028.)

18. В цехе **6** моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он включён, равна **0,8.** Найти вероятность того, что: а) включено **4** мотора; б) включены все моторы; в) включён хотя бы один мотор. (Ответ: а) 0,246 ; б) 0,262 ; в)0,999936.)

19. Найти вероятность того, что событие **А** появится в пяти независимых испытаниях не менее четырёх раз, если в каждом испытании вероятность появления события **А** равна **0,4.** (Ответ: 0,087.)

20. Событие **В** появится в случае, если событие **А** появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие **В**, если будет произведено **6** независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события **А** равна **0,4.** (Ответ: 0,767.)

21. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трёх экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов. (Ответ: а) 0,309; б) 0,132; в) 0,969.)

22. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна **0,9.** Найти вероятность поражения цели при **6** выстрелах, если для этого достаточно не менее **2-х** попаданий. (Ответ: 0,999945.)

23. Орудие производит **5** независимых выстрелов в летящую цель. Известно, что вероятность попадания при одном выстреле равна **0,7.** Найти вероятность того, что цель поражена, если для этого достаточно хотя бы два попадания. (Ответ: 0,9692.)

24. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна **0,2.** Куплено **18** билетов. Найти вероятность выигрыша хотя бы по одному из них, наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность. (Ответ: 0,981986 ; 3 ; 0,2297.)

25. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна **0,1.** Куплено **10** билетов. Найти вероятность того, что выиграют: а) **3** билета; б) не менее 2-х билетов; в) наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность. (Ответ: а) 0,057 ; б) 0,264 ; в) 1 ; 0,387.)

26. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна **0,005.** Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей чем **0,95?** (Ответ: 600.)

27. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна **0,01.** Сколько нужно купить билетов, чтобы с вероятностью **0,9** можно было ожидать хотя бы одного выигрышного билета. (Ответ: 231.)

28. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение 100 часов работы равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность отказа не менее двух элементов в течение 100 часов работы. **(**Ответ: 0,264.)

29. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна **0,04.** Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей чем **0,6?** (Ответ: 30.)

30. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных. (Ответ: 0,099.)

31. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна **0,02.** Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью не меньшей чем **0,8?** (Ответ: 81.)

32. Вероятность рождения больного ребёнка равна **0,01.** Найти вероятность того, что среди тысячи новорожденных окажется: а) два больных ребёнка; б) хотя бы два больных ребёнка; в) не более трёх больных детей. (Ответ: а)0,002 ; б) 0,9995 ; в) 0,0103.)

33. Среднее число вызовов, поступающих на **АТС** за одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за две минуты работы **АТС** поступит не более трёх вызовов. (Ответ: 0,1512.)

34. Вероятность возникновения аварийной ситуации при полёте на самолёте равна **0,002.** Найти вероятности того, что из **1000** произведённых полётов авария произойдёт: а) в **4-х** случаях; б) не более **2-х** раз; в) хотя бы один раз. (Ответ: а) 0,09 ; б) 0,677 ; в) 0,865.)

35. Вероятность рождения больного ребёнка равна **0,001.** Найти вероятность того, что среди **2000** новорожденных окажется: а) два больных ребёнка; б) хотя бы один больной ребёнок. (Ответ: а) 0,271 ; б) 0,865.)

36. Машинистка делает в среднем **2** опечатки на 2**0** страницах. Найти вероятность того, что на случайно взятых **50** страницах текста, напечатанного машинисткой, будет: а) не более **2-х** опечаток; б) хотя бы одна опечатка. (Ответ: а) 0,125 ; б) 0,993.)

37. Машинистка делает в среднем **2** опечатки на **10** страницах. Найти вероятность того, что на случайно взятых **15** страницах текста, будет не более двух опечаток. (Ответ: 0,423.)

38. Вероятность сбоя в работе **АТС** при каждом вызове равна **0,05.** Поступило **100** вызовов. Определить вероятность того, что произойдёт: а) **3** сбоя; б)менее **2-х** сбоев; в) не менее **2-х** сбоев. (Ответ: а) 0,14 ; б) 0,04 ; в) 0,96.)

39. Вероятность сбоя в работе **АТС** при каждом вызове равна **0,001.** Поступило **4000** вызовов. Определить вероятность того, что произойдёт: а) **4** сбоя; б) менее **3**-х сбоев; в) хотя бы один сбой.(Ответ: а) 0,195; б) 0,238 ; в) 0,98.)

40. Вероятность рождения девочки равна **0,49.** Найти вероятность того, что среди **1000** новорожденных окажется: а) **500** девочек; б) более половины девочек.(Ответ: а) 0,021 ; б) 0,2643.)

41. Вероятность появления случайного события **A** в каждом из **1500** опытов равна **0,4.** Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее **600** и не более **630** раз; б) не менее **630** раз; в) не более **620** раз. (Ответ: а) 0,4429 ; б) 0,0571 ; в) 0,8531.)

42. Найти число **m**, при котором с вероятностью **0,5** число выпадений герба при **1000** бросаниях монеты будет лежать между **490** и **m.** (Ответ: 512.)

43. Вероятность появления случайного события **A** в каждом из **3000** независимых испытаний равна **0,4.** Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее **1250** и не более **1300** раз; б) **1170** раз; в) не более **1220** раз. (Ответ: а) 0,031 ; б) 0,008 ; в) 0,77.)

44. Вероятность дачи правильного ответа на поставленный вопрос равна 0,9. Сколько нужно задать вопросов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 из них получат правильные ответы. (Ответ: 177.)

45. Вероятность появления события **A** в каждом из **500** испытаний равна **0,6.** Найти вероятность того, что событие появится: а) **310** раз; б) менее **270** раз; в) в большинстве испытаний. (Ответ: а) 0,024 ; б) 0,0031 ; в) 0,999997.)

46. Вероятность появления события **A** в каждом из **600** испытаний равна **0,4**. Найти вероятность того, что событие появится: а) **250** раз; б) не менее **230**, но не более **260** раз; в) не менее, чем в **45 %** испытаний. (Ответ: а) 0,024 ; б) 0,7482 ; в) 0,0062.)

47. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле – **0,7.** Произведено **400** выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий в мишень лежит между числами **300 и 320?** (Ответ: 0,0146.)

48. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле – **0,4.** Произведено **600** выстрелов. Найти вероятность того, что: а) число попаданий в мишень лежит между числами **230 и 260;** б) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность. (Ответ: а) 0,7482 ; б) 240 ; 0,033.)

49. Вероятность нарушения стандарта при штамповке заготовок деталей равна **0,3**. Найти вероятность того, что при изготовлении **800** заготовок число бракованных деталей заключено между **225** и **250**. (Ответ: 0,654.)

50. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна **0,7.** Произведено **400** выстрелов. Найти вероятность того, что число попаданий в мишень будет находиться: а) между **270 и 300;** б) менее **300;** в) не менее **275.** (Ответ: а) 0,7482 ; б) 0,9515 ; в) 0,6628.)

Приложение

Таблица значений функции Лапласа: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,21	0,0832	0,40	0,1554
0,01	0,0040	0,22	0,0871	0,41	0,1591
0,02	0,0080	0,23	0,0910	0,42	0,1628
0,03	0,0120	0,24	0,0948	0,43	0,1664
0,04	0,0160	0,25	0,0987	0,44	0,1700
0,05	0,0199	0,26	0,1026	0,45	0,1736
0,06	0,0239	0,27	0,1064	0,46	0,1772
0,07	0,0279	0,28	0,1103	0,47	0,1808
0,08	0,0319	0,29	0,1141	0,48	0,1844
0,09	0,0359	0,30	0,1179	0,49	0,1879
0,10	0,0398	0,31	0,1217	0,50	0,1915
0,11	0,0438	0,32	0,1255	0,51	0,1950
0,12	0,0478	0,33	0,1293	0,52	0,1985
0,13	0,0517	0,34	0,1331	0,53	0,2019
0,14	0,0557	0,35	0,1368	0,54	0,2054
0,15	0,0596	0,36	0,1406	0,55	0,2088
0,16	0,0636	0,37	0,1443	0,56	0,2123
0,17	0,0675	0,36	0,1406	0,55	0,2088
0,18	0,0714	0,37	0,1443	0,56	0,2123
0,19	0,0753	0,38	0,1480	0,57	0,2157
0,20	0,0793	0,39	0,1517	0,58	0,2190

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,59	**0,2224**	**0,82**	**0,2939**	**1,03**	**0,3485**
0,60	**0,2257**	**0,83**	**0,2967**	**1,04**	**0,3508**
0,61	**0,2291**	**0,84**	**0,2995**	**1,05**	**0,3531**
0,62	**0,2324**	**0,85**	**0,3023**	**1,06**	**0,3554**
0,63	**0,2357**	**0,86**	**0,3051**	**1,07**	**0,3577**
0,64	**0,2389**	**0,87**	**0,3078**	**1,08**	**0,3599**
0,65	**0,2422**	**0,88**	**0,3106**	**1,09**	**0,3621**
0,66	**0,2454**	**0,89**	**0,3133**	**1,10**	**0,3643**
0,67	**0,2486**	**0,90**	**0,3159**	**1,11**	**0,3665**
0,68	**0,2517**	**0,91**	**0,3186**	**1,12**	**0,3686**
0,69	**0,2549**	**0,92**	**0,3212**	**1,13**	**0,3708**
0,70	**0,2580**	**0,93**	**0,3238**	**1,14**	**0,3729**
0,71	**0,2611**	**0,94**	**0,3264**	**1,15**	**0,3749**
0,72	**0,2642**	**0,95**	**0,3289**	**1,16**	**0,3770**
0,73	**0,2673**	**0,96**	**0,3315**	**1,17**	**0,3790**
0,74	**0,2703**	**0,97**	**0,3340**	**1,18**	**0,3810**
0,75	**0,2734**	**0,98**	**0,3365**	**1,19**	**0,3830**
0,76	**0,2764**	**0,99**	**0,3389**	**1,20**	**0,3849**
0,77	**0,2794**	**1,00**	**0,3413**	**1,21**	**0,3869**
0,78	**0,2823**	**0,99**	**0,3389**	**1,20**	**0,3849**
0,79	**0,2852**	**1,00**	**0,3413**	**1,21**	**0,3869**
0,80	**0,2881**	**1,01**	**0,3438**	**1,22**	**0,3883**
0,81	**0,2910**	**1,02**	**0,3461**	**1,23**	**0,3907**

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1,24	**0,3925**	**1,48**	**0,4306**	**1,70**	**0,4554**
1,25	**0,3944**	**1,49**	**0,4319**	**1,71**	**0,4564**
1,26	**0,3962**	**1,50**	**0,4332**	**1,72**	**0,4573**
1,27	**0,3980**	**1,51**	**0,4345**	**1,73**	**0,4582**
1,28	**0,3997**	**1,52**	**0,4357**	**1,74**	**0,4591**
1,29	**0,4015**	**1,53**	**0,4370**	**1,75**	**0,4599**
1,30	**0,4032**	**1,54**	**0,4382**	**1,76**	**0,4608**
1,31	**0,4049**	**1,55**	**0,4394**	**1,77**	**0,4616**
1,32	**0,4066**	**1,56**	**0,4406**	**1,78**	**0,4625**
1,33	**0,4082**	**1,57**	**0,4418**	**1,79**	**0,4633**
1,34	**0,4099**	**1,58**	**0,4429**	**1,80**	**0,4641**
1,35	**0,4115**	**1,59**	**0,4441**	**1,81**	**0,4649**
1,36	**0,4131**	**1,60**	**0,4452**	**1,82**	**0,4656**
1,37	**0,4147**	**1,61**	**0,4463**	**1,83**	**0,4664**
1,38	**0,4162**	**1,62**	**0,4474**	**1,84**	**0,4671**
1,39	**0,4177**	**1,63**	**0,4484**	**1,85**	**0,4678**
1,40	**0,4192**	**1,64**	**0,4495**	**1,86**	**0,4686**
1,41	**0,4207**	**1,65**	**0,4505**	**1,85**	**0,4678**
1,42	**0,4222**	**1,64**	**0,4495**	**1,86**	**0,4686**
1,43	**0,4236**	**1,65**	**0,4505**	**1,87**	0,4693
1,44	**0,4251**	**1,66**	**0,4515**	**1,88**	0,4699
1,45	**0,4265**	**1,67**	**0,4525**	**1,89**	**0,4706**
1,46	**0,4279**	**1,68**	**0,4535**	**1,90**	**0,4713**
1,47	**0,4292**	**1,69**	**0,4545**	**1,91**	**0,4719**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,92	0,4726	2,28	0,4887	2,72	0,4967
1,93	0,4732	2,30	0,4893	2,74	0,4969
1,94	0,4738	2,32	0,4898	2,76	0,4971
1,95	0,4744	2,34	0,4904	2,78	0,4973
1,96	0,4750	2,36	0,4909	2,80	0,4974
1,97	0,4756	2,38	0,4913	2,82	0,4976
1,98	0,4761	2,40	0,4918	2,84	0,4977
1,99	0,4767	2,42	0,4922	2,86	0,4979
2,00	0,4772	2,44	0,4927	2,88	0,4980
2,02	0,4783	2,46	0,4931	2,90	0,4981
2,04	0,4793	2,48	0,4934	2,92	0,4982
2,06	0,4803	2,50	0,4938	2,94	0,4984
2,08	0,4812	2,52	0,4941	2,96	0,4985
2,10	0,4821	2,54	0,4945	2,98	0,4986
2,12	0,4830	2,56	0,4948	3,00	0,49865
2,14	0,4838	2,58	0,4951	3,20	0,49931
2,16	0,4846	2,60	0,4953	3,40	0,49966
2,18	0,4854	2,62	0,4956	3,60	0,499841
2,20	0,4861	2,64	0,4959	3,80	0,499928
2,22	0,4868	2,66	0,4961	4,00	0,499968
2,24	0,4875	2,68	0,4963	4,50	0,499997
2,26	0,4881	2,70	0,4965	5,00	0,499997

Библиографический список

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман – 11-е изд., перераб. – М.: Высш. образование, 2008 . – 405 с.

2. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: Юнити, 2003.

3. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель.– М.: Академия, 2003.

4. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 2006.

5. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятнотей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Академия, 2005.

6. Бочаров, П.П. Теория вероятностей. Математическая статистика / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 . – 296 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Случайные события

Составитель **Буров** Александр Валерьевич

Техн. редактор О.А. Соловьёва

Подписано в печать 30.09.2016
Формат 60×84 1/16. Бумага писчая.
Усл. печ. л. 3,0. Тираж 400 экз. Заказ________
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный
химико-технологический университет»
Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры
экономики и финансов ФГБОУ ВО «ИГХТУ»
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7