

**С.В. Натареев**

**ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОМАССОБМЕНА  
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБОРУДОВАНИИ  
ХИМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ**

**Учебное пособие**



**Иваново**

**2017**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ивановский государственный химико-технологический университет

С.В. Натареев

**ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОМАССОБМЕНА  
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБОРУДОВАНИИ  
ХИМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ**

Учебное пособие

Иваново 2017

УДК 691.002:620.179.1

Натареев Сергей Валентинович

Процессы тепломассообмена в технологическом оборудовании химических производств: учебное пособие / С.В. Натареев; Иван. гос. хим. - технол. ун-т. – Иваново, 2017. – 142 с.

В учебном пособии изложены основы теории тепломассообмена. Описаны процессы передачи теплоты теплопроводностью, конвекцией и излучением. Рассмотрены конструкции теплообменных аппаратов и приводятся основные положения о методике их расчета. Излагаются вопросы теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества. Даются основные понятия теории массообменных процессов. Приведены расчеты процессов адсорбции, сушки и других процессов в технологическом оборудовании химических производств.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по магистерской программе «Машины и аппараты химических производств».

#### Рецензенты:

кафедра естественно-научных дисциплин Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России; доктор технических наук, профессор В.В. Бухмиров (Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина).

© Натареев С.В., 2017

© Ивановский государственный химико-технологический университет, 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Теория теплообмена. Теплопроводность	6
1.1. Основные понятия теории теплообмена	6
1.2. Теплопроводность. Закон Фурье	9
1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности. Условия однозначности	10
1.4. Теплопроводность плоской стенки	15
1.5. Теплопроводность цилиндрической стенки	18
1.6. Теплопроводность сферической стенки	23
1.7. Нестационарный процесс теплопроводности в неограниченной пластине при граничных условиях первого рода	26
Глава 2. Конвективный теплообмен	31
2.1. Дифференциальное уравнение конвективного теплообмена	31
2.2. Теория подобия	33
2.3. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости вдоль пластины	37
2.4. Течение жидкости в трубах и каналах	38
2.5. Теплоотдача при поперечном обтекании труб	41
Глава 3. Теплообмен излучением	47
3.1. Общие сведения о тепловом излучении	47
3.2. Законы теплового излучения	48
3.3. Лучистый теплообмен между двумя твердыми телами, разделенными лучепрозрачной средой	51
3.4. Лучистый теплообмен в поглощающих и излучающих средах	53
3.5. Сложный теплообмен	54

Глава 4. Теплообменные аппараты	56
4.1. Типы теплообменных аппаратов	56
4.2. Конструкции рекуперативных теплообменников	57
4.3. Уравнения теплопередачи при прямотоке и противотоке теплоносителей	58
4.4. Расчет теплообменного аппарата	61
4.5. Нагрев жидкости в кожухотрубчатом теплообменнике	64
Глава 5. Теплообмен при изменении агрегатного состояния вещества	69
5.1. Теплообмен при конденсации пара	69
5.2. Теплообмен при кипении	70
Глава 6. Массообменные процессы	72
6.1. Общие сведения о массообменных процессах	72
6.2. Дифференциальное уравнение молекулярной диффузии	74
6.3. Дифференциальное уравнение массообмена в движущейся среде	75
6.4. Равновесие при массообмене	77
6.5. Уравнения массопередачи и массотдачи	79
6.6. Движущая сила массопередачи	80
6.7. Подобие процессов переноса массы	82
Глава 7. Массообмен в аппаратах химической технологии	84
7.1. Непрерывный процесс абсорбции в насадочном аппарате	84
7.2. Ионный обмен в колонном аппарате с провальными тарелками	89
7.3. Сушка сыпучего материала в сушилке с кипящим слоем	108
7.4. Кристаллизация соли из водного раствора в аппарате с псевдооживленным слоем	118
7.5. Выщелачивание листового материала в емкостном аппарате проточного типа	129
Список литературы	140

## Введение

Процессы тепломассопереноса распространены в химической технологии. Теплообменные процессы протекают в теплообменниках и выпарных аппаратах. К массообменным аппаратам относятся абсорберы, адсорберы, экстракторы, сушилки, кристаллизаторы и др. В ряде аппаратов химической технологии, например, сушилках, ректификационных колоннах и других аппаратах одновременно протекают процессы переноса теплоты и массы. При этом теоретический анализ процессов переноса строится на исследовании элементарных актов, которые могут быть следствием макроскопического движения среды или хаотичного молекулярного движения.

Учебное пособие посвящено не только изложению основ теории тепломассообмена, но и разработке математических описаний этих процессов, протекающих в типовых аппаратах химической технологии. Оно предназначено в помощь студентам, обучающимся по магистерской программе «Машины и аппараты химических производств».

# Глава 1. Теория теплообмена.

## Теплопроводность

### 1.1. Основные понятия теории теплообмена

*Теплообмен* – передача энергии в форме теплоты в пространстве с неоднородным распределением температуры.

Тела, участвующие в теплообмене, называются *теплоносителями*.

*Движущая сила процесса теплообмена* – разность температур между двумя точками в пространстве. При этом тепловая энергия переходит от более нагретого к менее нагретому телу.

Различают три элементарных, физически различных способа распространения теплоты: теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение.

*Теплопроводность* – процесс переноса тепловой энергии от частиц (молекул, атомов, электронов), обладающих большей энергией, к частицам с меньшей энергией.

*Конвекция* – перенос теплоты в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками вещества.

Вынужденная конвекция – перенос теплоты вследствие принудительного движения жидкости или газа.

Естественная конвекция (свободная) – перенос теплоты, обусловленный разностью плотностей в различных точках объема жидкости (газа), возникающей вследствие разности температур в этих точках.

*Тепловое излучение* – это процесс распространения энергии в виде электромагнитных волн.

В процессе теплообмена имеет место 2 случая:

1) *процесс теплоотдачи* – перенос теплоты из объема движущейся среды (жидкости или газа) к стенке (или наоборот);

2) *процесс теплопередачи* – процесс передачи теплоты от более нагретой

жидкости (газа) к менее нагретой через стенку.

*Температурное поле* – совокупность мгновенных значений температуры всех точек изучаемого пространства.

Если температура в данной точке зависит от координат точки  $(x, y, z)$  и изменяется во времени:

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (1.1.1)$$

то температурное поле называют нестационарным.

В частном случае температура является функцией только пространственных координат:

$$t = f(x, y, z), \quad (1.1.2)$$

и температурное поле называют стационарным.

Изотермическая поверхность – геометрическое место точек, имеющих в данный момент времени одинаковую температуру.

Рассмотрим две изотермические поверхности (рис. 1.1.1).

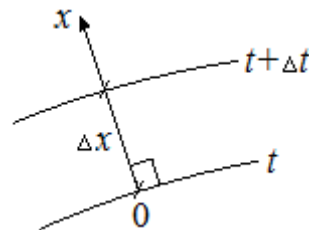


Рис. 1.1.1. К определению температурного поля

Предел отношения изменения температуры  $\Delta t$  к кратчайшему расстоянию между изотермическими поверхностями  $\Delta x$  называется температурным градиентом:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dt}{dx} = \text{grad } t. \quad (1.1.3)$$

*Скорость теплового потока*  $Q$  – количество теплоты, проходящее в единицу времени в направлении падения температуры:

$$Q = \frac{dQ^*}{d\tau}. \quad (1.1.4)$$



Плотность теплового потока (удельный тепловой поток)  $q_T$  – отношение теплового потока к площади поперечного сечения потока  $F$ :

$$q_T = n \frac{dQ}{dF} = n \frac{d^2 Q^*}{dF d\tau}, \quad (1.1.5)$$

где  $n$  – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности.

Основное уравнение теплопередачи имеет вид:

$$Q^* = K F \Delta t_{cp} \tau, \quad (1.1.6)$$

где  $K$  – коэффициент теплопередачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\Delta t_{cp}$  – средняя разность температур между теплоносителями, К.

Согласно уравнению (1.1.6), количество теплоты  $Q^*$ , передаваемое от более нагретого к более холодному теплоносителю, пропорционально поверхности теплообмена  $F$ , среднему температурному напору  $\Delta t_{cp}$  и времени  $\tau$ .

Основное уравнение теплоотдачи (закон Ньютона) имеет вид:

$$d^2 Q^* = \alpha dF (t_{ct} - t_{ж}) d\tau, \quad (1.1.7)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Согласно уравнению (1.1.7), количество переданной теплоты  $dQ$ , отдаваемой за время  $d\tau$  поверхностью стенки  $dF$ , имеющей температуру стенки  $t_{ct}$ , жидкости (или газу) с температурой  $t_{ж}$  ( $t_{г}$ ), прямо пропорционально поверхности стенки  $dF$  и разности температур  $t_{ct} - t_{ж}$ .

Применительно к поверхности теплообмена всего аппарата  $F$  для непрерывного процесса теплоотдачи уравнение (1.1.7) принимает вид:

$$Q = \alpha F (t_{ct} - t_{ж}), \quad (1.1.8)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  определяют следующие факторы:

- 1) скорость жидкости  $\omega$ , её плотность  $\rho$  и вязкость  $\mu$ , т.е. переменные, определяющие режим течения жидкости;
- 2) тепловые свойства жидкости: удельная теплоемкость  $c_p$ , теплопроводность  $\lambda$ ;
- 3) геометрические параметры: форма и определяющие размеры стенки  $L$ , шероховатость стенки  $\varepsilon$ .

Таким образом,

$$\alpha = f(\omega, \mu, \rho, c_p, \lambda, L, \varepsilon). \quad (1.1.9)$$

Значения коэффициентов теплопередачи  $K$  и теплоотдачи  $\alpha$  для плоской стенки связаны соотношением:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (1.1.10)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи со стороны "горячего" и "холодного" теплоносителей соответственно, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\delta$  – толщина стенки, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К).

## 1.2. Теплопроводность. Закон Фурье

Основным законом передачи теплоты теплопроводностью является закон Фурье. Согласно закону Фурье количество теплоты  $d^2Q^*$ , передаваемое посредством теплопроводности через элемент изотерической поверхности  $dF$ , перпендикулярной тепловому потоку, за промежуток времени  $d\tau$  прямо пропорционально температурному градиенту  $\frac{\partial t}{\partial n}$ , поверхности  $dF$  и времени  $d\tau$ :

$$d^2Q^* = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau \quad (1.2.1)$$

или

$$q_T = -\lambda \text{grad } t, \quad (1.2.2)$$

где  $q_T$  – плотность теплового потока за счет теплопроводности, Вт/м<sup>2</sup>.

Знак «−» в уравнениях (1.2.1) и (1.2.2) показывает, что направление теплового потока противоположно направлению температурного градиента. Физический смысл коэффициента теплопроводности вытекает из уравнения (1.2.1):

$$[\lambda] = \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}} \right] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right].$$

Таким образом, коэффициент теплопроводности  $\lambda$  показывает, какое количество теплоты проходит вследствие теплопроводности в единицу времени через единицу поверхности теплообмена при единичном температурном градиенте.

### 1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности.

#### Условия однозначности

Выделим в неподвижной сплошной среде произвольный объем  $dV$ , ограниченный поверхностью  $dF$  (рис. 1.3.1). Внутри объема находится источник  $q_v^m$  теплоты.

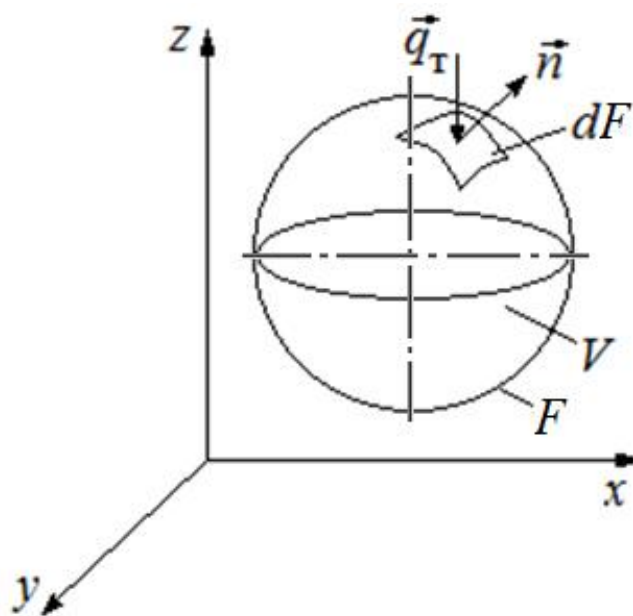


Рис. 1.3.1. К выводу уравнения теплопроводности

Составим уравнение баланса для элемента  $dV$ .

Количество теплоты, входящее в объем через всю поверхность посредством теплопроводности, равно:

$$d^2 Q_T^* = -q_T n dF d\tau. \quad (1.3.1)$$

Проинтегрируем уравнение (3.3.1) по поверхности  $F$ :

$$dQ_T^* = - \int_S q_T n dF d\tau \quad (1.3.2)$$

и воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса

$$\int_F q_T n dF = \int_V \operatorname{div}(q_T) dV. \quad (1.3.3)$$

Получаем

$$dQ_T^* = - \int_V \operatorname{div}(q_T) d\tau dV. \quad (1.3.4)$$

Количество теплоты в объеме  $dV$  за время  $d\tau$  вследствие действия источника:

$$dQ_{\text{ист}}^* = \int_V q_V^T dV d\tau. \quad (1.3.5)$$

По закону сохранения энергии приращение количества теплоты в объеме  $dV$  равно количеству теплоты, расходуемому на изменение энтальпии:

$$d^2 Q^* = c_p \rho dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.3.6)$$

Откуда

$$dQ^* = \int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (1.3.7)$$

Уравнение теплового баланса для  $dV$  за  $d\tau$ :

$$dQ^* = dQ_T^* + dQ_{\text{ист}}^* \quad (1.3.8)$$

или

$$\int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV d\tau = - \int_V \operatorname{div}(q_T) dV d\tau + \int_V q_V^T dV d\tau. \quad (1.3.9)$$

Отбросив в силу произвольности выбранного объема знаки интегралов, получим

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \operatorname{div}(q_T) + q_V^T. \quad (1.3.10)$$

Учтем, что плотность теплового потока в соответствии с законом Фурье определяется уравнением (1.2.2). Получаем

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) + q_V^T \quad (1.3.11)$$

или

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla t) + q_V^T, \quad (1.3.12)$$

где  $\nabla$  – оператор Гамильтона.

Если коэффициент теплопроводности  $\lambda = \text{const}$ , то

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 t + q_V^T, \quad (1.3.13)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Уравнение (1.3.13) представляет собой дифференциальное уравнение теплопроводности с источником.

Частный случай. Источник теплоты  $q_V^T = 0$ . Тогда уравнение (1.3.14) преобразуется в следующее:

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 t \quad (1.3.14)$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t, \quad (1.3.15)$$

где  $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент температуропроводности  $a$  по своему физическому смыслу характеризует молекулярный перенос внутренней энергии теплоты.

Уравнение (1.3.15) определяет распределение температур в любой точке тела, через которое теплота передается теплопроводностью, и называется дифференциальным уравнением теплопроводности в неподвижной среде или уравнением Фурье.

При установившемся (стационарном) тепловом режиме  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ , поэтому уравнение (1.3.15) в Декартовой системе координат примет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3.16)$$

Уравнение (1.3.16) имеет множество решений. Для получения однозначного решения уравнения (1.3.16) необходимо выполнение следующих условий: геометрические условия – задаются форма и размеры твердого тела; физические условия – задаются физические свойства тела: коэффициент теплопроводности, теплоемкость, плотность и др.; начальные условия – устанавливают распределение температуры в теле в начальный момент времени при  $\tau = 0$ . Имеем

$$t(x, y, z, \tau) = t_0(x, y, z), \quad (1.3.17)$$

где  $x, y, z$  – координаты тела.

Во многих задачах принимают равномерное распределение температуры в начальный момент времени:

$$t|_{\tau=0} = t_0 = const. \quad (1.3.18)$$

Граничные условия – отражают условия теплового взаимодействия на границе между рассматриваемым телом и окружающей его средой, имеют четыре основных вида (рода). Для задач, в которых существует симметрия, применяется граничное условие симметрии.

Граничные условия первого рода характеризуют температуру на поверхности тела как функцию координат и времени:

$$t|_{\text{гр}} = t(x, y, z, \tau), \quad (1.3.19)$$

где  $t|_{\text{гр}}$  – температура на внешней границе частицы.

Частный случай граничных условий первого рода задает постоянство температуры на поверхности тела в любой момент времени (условие Дирихле):

$$t|_{\text{гр}} = t_{\text{ст}} = const, \quad (1.3.20)$$

где  $t_{\text{ст}}$  – температура поверхности тела.

Граничные условия второго рода задают на поверхности тела плотность теплового потока в виде функции координат и времени:

$$q_{\text{гр}} = q(x, y, z, \tau) \quad (1.3.21)$$

или

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{\text{гр}} = q_{\text{гр}}. \quad (1.3.22)$$

Частным случаем является условие тепловой изоляции поверхности  $q_{\text{гр}}=0$ , при этом:

$$\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{\text{гр}} = 0, \quad (1.3.23)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к поверхности тела.

Граничные условия третьего рода характеризуются законом теплообмена между телом и рабочей средой (закон теплообмена Ньютона):

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{\text{гр}} = \alpha(t_{\text{гр}} - t_c), \quad (1.3.24)$$

где  $t_c$  – температура среды.

При  $\alpha \rightarrow 0$  граничное условие третьего рода переходит в граничное условие второго рода.

При  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow 0$  получаем граничное условие первого рода, т.е.

$$t|_{\text{гр}} - t_c = \lim_{\frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\frac{\alpha}{\lambda}} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{гр}} \right] = 0. \quad (1.3.25)$$

Откуда

$$t_{\text{гр}} = t_c. \quad (1.3.26)$$

Граничные условия четвертого рода (условия сопряжения) задаются в месте контакта двух тел, предполагая равенство температур поверхностей двух тел и тепловых потоков:

$$t_1(R_1, \tau) = t_2(R_1, \tau), \quad (1.3.27)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_1, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(R_1, \tau)}{\partial x}, \quad (1.3.28)$$

где  $t_1(R_1, \tau)$  и  $t_2(R_1, \tau)$  – температуры на поверхности первого и второго тела соответственно.

## 1.4. Теплопроводность плоской стенки

Рассмотрим передачу тепла теплопроводностью через плоскую стенку (рис. 1.4.1).

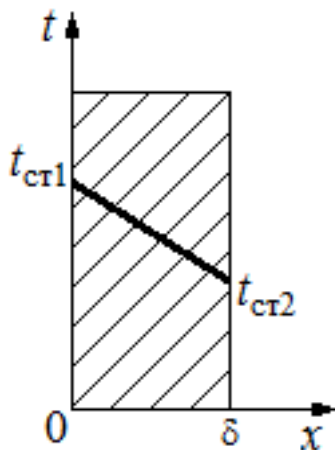


Рис. 1.4.1. К выводу уравнения теплопроводности плоской стенки

Дано: толщина стенки  $\delta$ ; длина и ширина стенки велики по сравнению с ее толщиной (неограниченная пластина); ось  $0x$  расположена по нормали к поверхности стенки; температуры наружных поверхностей стенки равны  $t_{ст1}$  и  $t_{ст2}$ , причем  $t_{ст1} > t_{ст2}$ ; температурное поле одномерное, т.е. температура изменяется только в направлении оси  $0x$   $\left( \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \right)$ .

Найти: температурное поле внутри стенки  $t(x)$ , удельный тепловой поток  $q$ .

Уравнение теплопроводности (1.3.15) примет вид:

$$\frac{d^2 t(x)}{dx^2} = 0. \quad (1.4.1)$$

Граничные условия 1-го рода:

$$t|_{x=0} = t_{ст1}; \quad (1.4.2)$$

$$t|_{x=\delta} = t_{ст2}. \quad (1.4.3)$$

Проинтегрируем уравнение (1.4.1):

$$t(x) = C_1 x + C_2, \quad (1.4.4)$$



где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования. Они определяются из граничных условий (1.4.2) и (1.4.3):

$$\text{при } x = 0; C_2 = t_{\text{cr1}}; \quad (1.4.5)$$

$$\text{при } x = \delta; t_{\text{cr2}} = C_1 \delta + C_2. \quad (1.4.6)$$

Подставим  $C_2$  в уравнение (1.4.6):

$$t_{\text{cr2}} = C_1 \delta + t_{\text{cr1}}. \quad (1.4.7)$$

Откуда

$$C_1 = \frac{t_{\text{cr2}} - t_{\text{cr1}}}{\delta}. \quad (1.4.8)$$

Подставим уравнения (1.4.8) и (1.4.5) в уравнение (1.4.4):

$$t(x) = \frac{t_{\text{cr2}} - t_{\text{cr1}}}{\delta} x + t_{\text{cr1}} \quad (1.4.9)$$

или

$$t(x) = t_{\text{cr1}} - \frac{t_{\text{cr1}} - t_{\text{cr2}}}{\delta} x. \quad (1.4.10)$$

Уравнение (1.4.10) позволяет рассчитать температурное поле внутри пластины. Оно показывает, что по толщине плоской стенки температура изменяется по линейному закону.

Найдем плотность теплового потока:

$$q = \lambda \frac{t_{\text{cr1}} - t_{\text{cr2}}}{\delta}. \quad (1.4.11)$$

Величина  $\frac{\delta}{\lambda} = R$  – термическое сопротивление плоской стенки.

Рассмотрим передачу теплоты теплопроводностью через плоскую стенку, состоящую из  $n$  слоев (рис. 1.4.2).

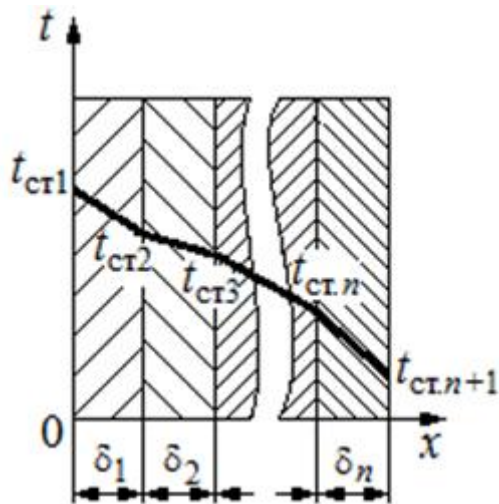


Рис. 1.4.2. Распределение температур в многослойной стенке

При стационарном процессе через каждый слой стенки пройдет одно и то же количество теплоты. Следовательно, должно иметь место равенство тепловых потоков, проходящих через каждую стенку:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = q \quad (1.4.12)$$

или

$$\lambda_1 \frac{t_{ct1} - t_{ct2}}{\delta_1} = \lambda_2 \frac{t_{ct2} - t_{ct3}}{\delta_2} = \dots = \lambda_n \frac{t_{ctn} - t_{ctn+1}}{\delta_n}. \quad (1.4.13)$$

Складывая слагаемые в равенстве (1.4.13), получим

$$q = \frac{t_{ct1} - t_{ctn+1}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (1.4.14)$$

где  $i$  – порядковый номер слоя стенки;  $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} = R_{общ}$  – суммарное термическое сопротивление теплопроводности  $n$  слоев стенки (полное внутреннее термическое сопротивление).

В качестве примера рассмотрим задачу о переносе теплоты в плоской однородной стенке.

Пусть в печи из керамического кирпича поддерживается температура  $t_c$  300 °С. Через стенку печи проходит удельный тепловой поток  $q$  1000 Вт/м<sup>2</sup>. Примем температуру стенки внутри печи равной температуре среды внутри

печи, т.е.  $t_{ст} = t_c$ . Температура наружной поверхности печи  $t_{ст2} = 50$  °С. Коэффициент теплопроводности кладки из керамического кирпича  $\lambda = 0,814$  Вт/(м·°С). Требуется определить толщину стенки печи  $\delta$ .

Решение задачи с помощью пакета Mathcad 15 приведено на рис. 1.4.3.

Дано	
Температура стенки внутри печи $t_1$ , °С	$t_1 := 350$
Температура стенки снаружи печи $t_2$ , °С	$t_2 := 50$
Удельный тепловой поток $q$ , Вт/м <sup>2</sup>	$q := 1000$
Коэффициент теплопроводности материала $\lambda$ , Вт/(м·°С)	$\lambda := 0.814$
Решение	
Толщина стенки печи, м	
$\delta := \lambda \cdot \frac{t_1 - t_2}{q} = 0.244$	
Ответ: $\delta = 0,244$ м	

Рис. 1.4.3. Пример решения задачи о теплопроводности плоской стенки

## 1.5. Теплопроводность цилиндрической стенки

Дано: полый цилиндр длиной  $L$  с внутренним радиусом  $r_v$  и наружным радиусом  $r_n$  (рис. 1.5.1); температура внутренней стенки  $t_{ст1}$ ; температура наружной стенки  $t_{ст2}$ ;  $t_{ст1} > t_{ст2}$ ; стационарный процесс теплопроводности через цилиндрическую стенку, т.е.  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ .

Найти: температурное поле внутри стенки  $t(r)$ , плотность теплового потока  $q$ .

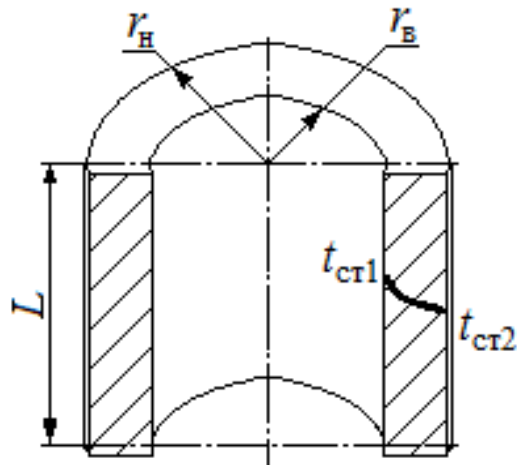


Рис. 1.5.1. К выводу уравнения теплопроводности цилиндрической стенки

Запишем уравнение стационарной теплопроводности (1.3.16) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (1.5.1)$$

Граничные условия 1-го рода:

$$t|_{r=r_B} = t_{ст1}; \quad (1.5.2)$$

$$t|_{r=r_H} = t_{ст2}. \quad (1.5.3)$$

Введем новую переменную  $\frac{dt}{dr} = u$ . Получаем:

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} u = 0. \quad (1.5.4)$$

Разделим переменные и интегрируем:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{r} dr \quad (1.5.5)$$

или

$$\ln u = -\ln r + \ln C_1, \quad (1.5.6)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Перепишем уравнение (1.5.6) в следующем виде:

$$\frac{dt}{dr} r = C_1. \quad (1.5.7)$$

После интегрирования уравнения (1.5.7) получим:

$$t(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (1.5.8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий.

Удовлетворим решение (1.5.8) условиям (1.5.2) и (1.5.3):

$$\left. \begin{aligned} t_{\text{ст1}} &= C_1 \ln r_{\text{в}} + C_2 \\ t_{\text{ст2}} &= C_1 \ln r_{\text{н}} + C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.5.9)$$

Из системы уравнений (1.5.9) находим

$$C_1 = \frac{t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}}{\ln \frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}}}, \quad (1.5.10)$$

$$C_2 = t_{\text{ст2}} - \frac{(t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}) \ln r_{\text{в}}}{\ln \frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}}}, \quad (1.5.11)$$

Окончательно получаем:

$$t(r) = t_{\text{ст1}} - \frac{(t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}) \ln \frac{r}{r_{\text{в}}}}{\ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{в}}}}. \quad (1.5.12)$$

Уравнение (1.5.12) представляет собой уравнение логарифмической кривой. Следовательно, внутри цилиндрической стенки температура изменяется по логарифмическому закону (рис. 1.5.2).

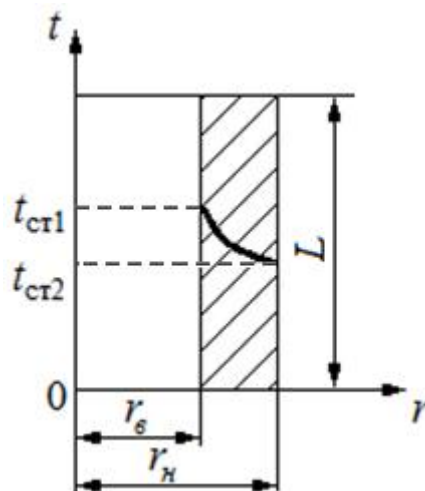


Рис. 1.5.2. Распределение температуры в цилиндрической стенке

Для нахождения теплового потока воспользуемся законом Фурье:

$$Q = -\lambda F \frac{dt}{dr}, \quad (1.5.13)$$

где  $F=2\pi rL$  – площадь боковой поверхности цилиндра.

Тепловой поток может быть отнесен: к единице длины трубы, единице внутренней или внешней поверхности.

1. Тепловой поток отнесен к единице длины трубы  $q_l = Q/L$  – линейная плотность потока.

Подставим уравнение (1.5.12) в уравнение (1.5.13). Получаем

$$Q = \frac{2\pi\lambda L(t_{ct1} - t_{ct2})}{\ln \frac{r_H}{r_B}}. \quad (1.5.14)$$

Последнее выражение поделим на  $L$ :

$$q_l = \frac{2\pi\lambda(t_{ct1} - t_{ct2})}{\ln \frac{r_H}{r_B}}. \quad (1.5.15)$$

2. Тепловой поток отнесен к единице площади внутренней поверхности цилиндра:

$$q_{r_B} = \frac{2\lambda(t_{ct1} - t_{ct2})}{d_B \ln \frac{r_H}{r_B}}, \quad (1.5.16)$$

где  $d_B$  – внутренний диаметр цилиндра.

3. Тепловой поток отнесен к единице площади наружной поверхности цилиндра:

$$q_{r_H} = \frac{2\lambda(t_{ct1} - t_{ct2})}{d_H \ln \frac{r_H}{r_B}}, \quad (1.5.17)$$

где  $d_H$  – наружный диаметр цилиндра.

В качестве примера рассмотрим решение задачи о переносе теплоты в цилиндрической стенке.

Необходимо определить температуру неизолированной поверхности паропровода из стальной трубы с наружным диаметром  $d_2$  0,219 м и толщиной стенки  $\delta$  0,01 м. Температура внутренней поверхности трубы  $t_{cr1}$  170 °С. Линейный тепловой поток  $q_l$ , проходящий через стенку трубы, 340 Вт/м. Коэффициент теплопроводности стали определяется зависимостью  $\lambda = 58 - 0,042t_{cp}$ , Вт/(м·°С).

Решение задачи с помощью пакета Mathcad 15 приведено на рис. 1.5.3.

<b>Дано</b>	
Наружный диаметр трубы $d_2$ , м	$d_2 := 0.219$
Толщина стенки трубы $\delta$ , м	$\delta := 0.01$
Температура внутренней поверхности трубы $t_1$ , °С	$t_1 := 170$
Линейный тепловой поток $q_l$ , Вт/м	$q_l := 340$
<b>Решение</b>	
Внутренний диаметр трубы, м	
$d_1 := d_2 - 2 \cdot \delta$	$d_1 = 0.199$
Коэффициент теплопроводности найдем с учетом допущения	
$t_{cp} := t_1$	
Имеем	
$\lambda := 58 - 0.042 \cdot t_{cp}$	$\lambda = 50.86$
Температура наружной поверхности трубы $t_2$ , °С	
$t_2 := t_1 - \frac{q_l \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2 \cdot \pi}$	$t_2 = 164.8$
Ответ: $t_2 = 164,8$ °С.	

Рис. 1.5.3. Пример решения задачи о теплопроводности цилиндрической стенки

## 1.6. Теплопроводность сферической стенки

Дано: полый шар с внутренним диаметром  $d_{\text{в}}$  (радиусом  $r_{\text{в}}$ ) и наружным диаметром  $d_{\text{н}}$  (радиусом  $r_{\text{н}}$ ) (рис. 1.6.1); температура внутренней стенки  $t_{\text{ст1}}$ ; температура наружной стенки  $t_{\text{ст2}}$ ;  $t_{\text{ст1}} > t_{\text{ст2}}$ ; стационарный процесс теплопроводности через шаровую стенку, т.е.  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ .

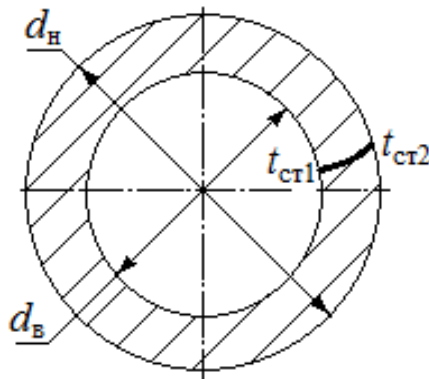


Рис. 1.6.1. К выводу уравнения теплопроводности шаровой стенки

Найти: температурное поле  $t(r)$  и тепловой поток сквозь шаровую стенку  $Q$ .

Решение. Дифференциальное уравнение теплопроводности через сферическую стенку имеет вид:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (1.6.1)$$

Граничные условия 1-го рода:

$$t|_{r=r_{\text{в}}} = t_{\text{ст1}}; \quad (1.6.2)$$

$$t|_{r=r_{\text{н}}} = t_{\text{ст2}}. \quad (1.6.3)$$

Введем новую переменную  $\frac{dt}{dr} = u$ . Получаем:

$$\frac{du}{dr} + \frac{2}{r} u = 0. \quad (1.6.4)$$

Разделим переменные и проинтегрируем:



$$\int \frac{du}{du} = -2 \int \frac{1}{r} dr \quad (1.6.5)$$

или

$$\ln u = -2 \ln r + \ln C_1, \quad (1.6.6)$$

где  $C_1$  - постоянная интегрирования.

Потенцируя это выражение, имеем:

$$\frac{dt}{dr} r^2 = C_1. \quad (1.6.7)$$

После интегрирования уравнения (1.6.7) получим:

$$t(r) = -C_1 \frac{1}{r} + C_2, \quad (1.6.8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий.

Удовлетворим решение (1.6.8) условиям (1.6.2) и (1.6.3) с учетом замены переменной:

$$\left. \begin{aligned} t_{\text{ст1}} &= -C_1 \frac{1}{r_{\text{в}}} + C_2 \\ t_{\text{ст2}} &= -C_1 \frac{1}{r_{\text{н}}} + C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.6.9)$$

Из системы уравнений (1.6.9) находим

$$C_1 = \frac{t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}}{\frac{1}{r_{\text{в}}} - \frac{1}{r_{\text{н}}}}, \quad (1.6.10)$$

$$C_2 = t_{\text{ст1}} - \frac{(t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}) \frac{1}{r_{\text{в}}}}{\frac{1}{r_{\text{в}}} - \frac{1}{r_{\text{н}}}}. \quad (1.6.11)$$

Подставляя значения  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (1.6.8), получим уравнение теплопроводности цилиндрической стенки при установившемся процессе теплообмена:

$$t(r) = t_{\text{ст1}} - \frac{(t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}) \left( \frac{1}{r_{\text{в}}} - \frac{1}{r} \right)}{\frac{1}{r_{\text{в}}} - \frac{1}{r_{\text{н}}}} \quad (1.6.12)$$

или

$$t(d) = t_{\text{ст1}} - \frac{(t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}}) \left( \frac{1}{d_{\text{в}}} - \frac{1}{d} \right)}{\frac{1}{d_{\text{в}}} - \frac{1}{d_{\text{н}}}}. \quad (1.6.13)$$

Уравнения (1.6.12) и (1.6.13) представляют собой уравнения теплопроводности шаровой стенки при установившемся процессе теплообмена. Температура внутри сферической поверхности изменяется по гиперболическому закону (рис. 1.6.2).

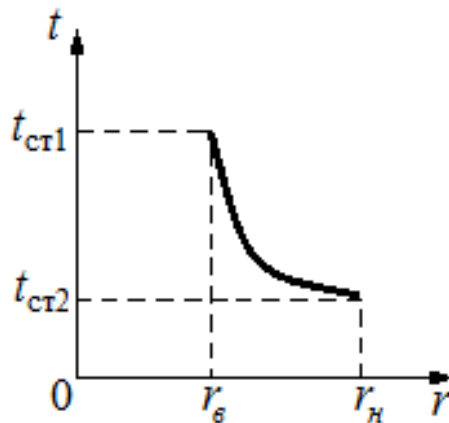


Рис. 1.6.2. Распределение температуры в шаровой стенке

Найдем тепловой поток по уравнению:

$$Q = -\lambda F \frac{dt}{dr}, \quad (1.6.14)$$

где  $F = 4\pi r^2$  — площадь шаровой поверхности.

Подставив уравнение (1.6.12) в (1.6.14), получаем:

$$Q = \frac{4\pi\lambda L(t_{\text{ст1}} - t_{\text{ст2}})}{\frac{1}{r_{\text{в}}} - \frac{1}{r_{\text{н}}}} \quad (3.6.15)$$

## 1.7. Нестационарный процесс теплопроводности в неограниченной пластине при граничных условиях первого рода

Дана пластина толщиной  $2R$  и бесконечно протяженная в двух других направлениях. Начальное распределение температуры по толщине пластины задается некоторой функцией  $t(x, 0) = f(x)$ . В начальный момент времени поверхности пластины мгновенно охлаждаются до некоторой температуры  $t_c$ , которая поддерживается постоянной на протяжении процесса охлаждения. Требуется определить распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени.

Поместим начало координат в середину пластины (рис. 1.7.1).

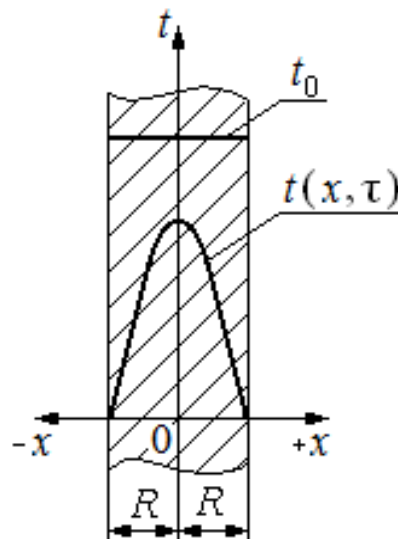


Рис. 1.7.1. Изменение распределения температуры в неограниченной пластине

Процесс охлаждения пластины описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (1.7.1)$$

Начальные и граничные условия:

$$t|_{\tau=0} = f(x), \quad (1.7.2)$$

$$t|_{x=R} = t_c = const, \quad (1.7.3)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.7.4)$$

Для решения задачи используем метод Фурье. Частное решение уравнения (1.7.1) ищем в виде произведения двух функций:

$$t = Q(\tau)U(x). \quad (1.7.5)$$

Тогда получим

$$\frac{Q'(\tau)}{Q(\tau)} = a \frac{U''(x)}{U(x)}. \quad (1.7.6)$$

Приравнивая обе части полученного равенства постоянной  $-k^2$ , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$Q'(\tau) + k^2 a Q(\tau) = 0, \quad (1.7.7)$$

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0. \quad (1.7.8)$$

Первое из этих уравнений имеет следующий общий интеграл:

$$Q(\tau) = C e^{-k^2 a \tau}, \quad (1.7.9)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Если  $k > 0$ , то общее решение уравнения (1.7.8) будет суммой частных решений:

$$U(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (1.7.10)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные.

Частное решение дифференциального уравнения теплопроводности имеет вид:

$$t(x, \tau) = (A \sin kx + B \cos kx) C e^{-k^2 a \tau}. \quad (1.7.11)$$

Из условия симметрии следует, что  $A = 0$ . Тогда имеем

$$t(x, \tau) = D \cos kx e^{-k^2 a \tau}, \quad (1.7.12)$$

где  $D = BC$ .

Уравнение (1.7.12) удовлетворим граничному условию (1.7.3). Для упрощения расчета временно примем  $t_c = 0$ . Имеем

$$t(R, \tau) = D \cos kR e^{-k^2 a \tau} = 0. \quad (1.7.13)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \cos kR = 0, kR = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi; \\ k_n R = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

т.е.  $k$  имеет бесчисленное множество значений.

Решение задачи запишется в виде:

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos k_n x e^{-k_n^2 a \tau}. \quad (1.7.15)$$

Удовлетворим решение (1.7.15) условию (1.7.2). Подставляя в (1.7.15)  $\tau = 0$ , получим

$$f(x) = D_1 \cos k_1 x + D_2 \cos k_2 x + D_3 \cos k_3 x + \dots + D_n \cos k_n x. \quad (1.7.16)$$

Основываясь на теории рядов Фурье и допуская, что функция  $f(x)$  разлагается в ряд Фурье, можно записать

$$D_n = \frac{2}{R} \int_0^R f(x) \cos k_n x dx. \quad (1.7.17)$$

При этом сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_n|. \quad (1.7.18)$$

Формально задача решена при некоторых допущениях. Эти допущения требуют, чтобы функция  $f(x)$  удовлетворяла условиям Дирихле. Опуская эти доказательства, запишем окончательное решение задачи:

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}} \frac{2}{R} \int_0^R f(x) \cos \mu_n \frac{x}{R} dx, \quad (1.7.19)$$

где  $\mu_n = k_n R = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ .

Если начальное распределение температуры внутри пластины равномерное, т.е.  $t(x,0) = t_0 = \text{const}$ , то интеграл в правой части решения (1.7.19) может быть вычислен:

$$\frac{2}{R} \int_0^R t_0 \cos \mu_n \frac{x}{R} dx = \frac{2t_0 \sin \mu_n}{\mu_n} = \frac{2t_0}{\mu_n} (-1)^{n+1}. \quad (1.7.20)$$

Таким образом, решение нашей задачи примет вид:

$$\theta(x, \tau) = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_c - t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}}. \quad (1.7.21)$$

Для определения средней температуры пластины используем уравнение:

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{R} \int_0^R t(x, \tau) dx. \quad (1.7.22)$$

Если подставить в соотношение (1.7.22) вместо  $\bar{t}(x, \tau)$  решение (1.7.21), то после интегрирования получим:

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\bar{t}(\tau) - t_c}{t_0 - t_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}}. \quad (1.7.23)$$

Уравнение (1.7.23) позволяет рассчитать среднюю температуру пластины в любой момент времени при охлаждении тела. Выведенные уравнения будут справедливы и для задач на нагрев тела, только под  $\bar{\theta}(\tau)$  надо поменять

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{t_c - \bar{t}(\tau)}{t_c - t_0} = 1 - \frac{\bar{t}(\tau) - t_0}{t_c - t_0}. \quad (1.7.24)$$

Иллюстрация решений (1.7.21) и (1.7.23) приведена на рис. 1.7.2.

Дано

Половина толщины пластины R, м	R := 0.006
Коэффициент температуропроводности материала a, м <sup>2</sup> /с	a := 1.3 · 10 <sup>-7</sup>
Начальная температура пластины t <sub>0</sub> , °C	t <sub>0</sub> := 100
Температура поверхности пластины t <sub>c</sub> , °C	t <sub>c</sub> := 20
Время процесса τ, с	τ := 0.. 500
Координата внутри пластины x, м	x := 0, 0.0001 .. 0.006

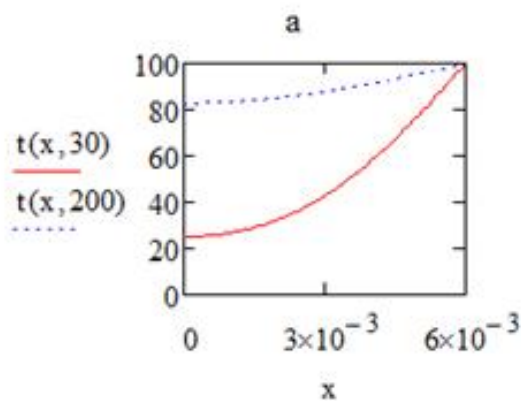
Решение

Распределение температуры в пластине, °C

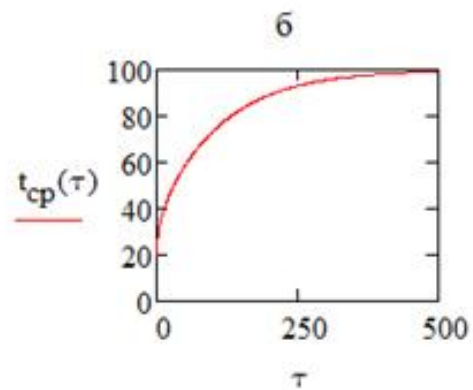
$$t(x, \tau) := t_0 + (t_c - t_0) \cdot \sum_{n=1}^{100} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos \left[ \left( (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{x}{R} \right] \cdot e^{- \left[ (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2 \cdot \frac{a \cdot \tau}{R^2}}}{(2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Средняя температура пластины, °C

$$t_{cp}(\tau) := t_0 + (t_c - t_0) \cdot \sum_{n=1}^{100} \frac{2 \cdot e^{- \left[ (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2 \cdot \frac{a \cdot \tau}{R^2}}}{\left[ (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2}$$



а - кривые распределения температуры по толщине пластины,



б - кривая изменения средней температуры пластины с течением времени процесса

Рис. 1.7.2. Пример расчета нагрева пластины

## Глава 2. Конвективный теплообмен

### 2.1. Дифференциальное уравнение конвективного теплообмена

Рассмотрим движущуюся среду (рис. 2.1.1). Перенос теплоты в ней осуществляется теплопроводностью и конвекцией. Выделим в среде элемент объема  $dV$ , ограниченный поверхностью  $dF$ . Внутри объема  $dV$  действует источник теплоты мощностью  $q_v^T$ .

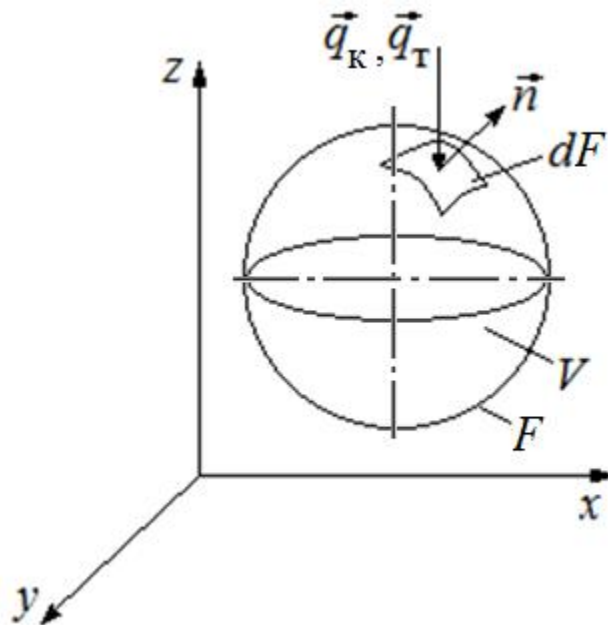


Рис. 2.1.1. К выводу дифференциального уравнения конвективного теплообмена

Составим уравнение теплового баланса для элемента  $dV$ .

Количество теплоты, входящее в объем  $dV$ :

$$d^2 Q_k^* = -(q_T + q_k)n dF d\tau. \quad (2.1.1)$$

Проинтегрируем уравнение (2.1.1) по поверхности  $F$ :

$$dQ_k^* = - \int_F (q_T + q_k)n dF d\tau \quad (2.1.2)$$

и воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:



$$\int_F (q_T + q_K) n dF = \int_V \operatorname{div}(q_T + q_K) dV. \quad (2.1.3)$$

Получаем

$$dQ_K^* = - \int_V \operatorname{div}(q_T + q_K) dV d\tau. \quad (2.1.4)$$

Количество теплоты в объеме  $dV$  за время  $d\tau$  вследствие действия источника:

$$dQ_{\text{ист}}^* = \int_V q_V^T dV d\tau. \quad (2.1.5)$$

По закону сохранения энергии приращение количества теплоты в объеме  $dV$  равно количеству теплоты, расходуемому на изменение энтальпии:

$$d^2 Q^* = c_p \rho dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.1.6)$$

Откуда

$$dQ^* = \int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (2.1.7)$$

Так как

$$Q^* = Q_T^* + Q_{\text{ист}}^*. \quad (2.1.8)$$

Тогда

$$\int_V c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV d\tau = - \int_V \operatorname{div}(q_T + q_K) dV d\tau + \int_V q_V^T dV d\tau. \quad (2.1.9)$$

Отбросим в силу произвольности выбранного объема знаки интегралов. После сокращения подобных членов получим:

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \operatorname{div}(q_T + q_K) + q_V^T \quad (2.1.10)$$

или

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) - \operatorname{div}(\omega c_p \rho t) + q_V^T. \quad (2.1.11)$$

Поделим уравнение (2.1.11) на  $c_p \rho$ :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\omega t) = a \operatorname{div}(\operatorname{grad} t) + q_V^* \quad (2.1.12)$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + q_V^*, \quad (2.1.13)$$

где  $q_V^* = \frac{q_V^T}{c_p \rho}$ ,  $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с.

Уравнение (2.1.13) представляет собой дифференциальное уравнение конвективного теплообмена (уравнение Фурье-Кирхгофа).

## 2.2. Теория подобия

Теория подобия – это учение о методах научного обобщения эксперимента. Она указывает, при каких условиях процессы, проведенные в лабораторной и промышленной установках, будут подобны, как надо ставить опыт, обрабатывать полученные результаты, чтобы при минимальном числе экспериментов обобщить опытные данные и получить единые уравнения для всех подобных явлений.

В теории подобия рассматривают подобие групп явлений. Различают геометрическое, физическое, временное подобие и подобие начальных и граничных условий.

Геометрическое подобие показывает, что отношение размеров натуре и модели инвариантны:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{D_1}{D_2} = const, \quad (2.2.1)$$

где  $L_1, L_2$  – длина натуре и модели;  $D_1, D_2$  – диаметр натуре и модели.

Физическое подобие выражается:

а) коэффициентом подобия или масштабным множителем:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = C_\omega, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = C_\rho, \quad (2.2.2)$$

б) инвариантами подобия:

$$1 \text{ система: } \frac{\omega_1}{\omega'_0} = \omega'; \quad 2 \text{ система: } \frac{\omega_1}{\omega''_0} = \omega'', \quad (2.2.3)$$

где  $\omega_1$  – скорость в натуре;  $\omega_2$  – скорость в модели;  $\omega'_0, \omega''_0$  – скорость, отнесенная к определенному сечению для первой и второй системы.

Системы подобны, если их инварианты равны, т. е.  $\omega' = \omega''$ .

Отношение физических свойств является величиной постоянной.

Временное подобие характеризуется тем, что сходственные точки, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные отрезки пути  $\Theta$ , за промежутки времени  $\tau$ , отношение которых выражается постоянной величиной, т.е.

$$\frac{\theta_1}{\tau_2} = \frac{\theta_1}{\tau_2} = const. \quad (2.2.4)$$

Подобие начальных и граничных условий предполагает, что отношение основных параметров в начале и конце натуре и модели постоянны. Иначе говоря, для начальных и граничных условий должно соблюдаться геометрическое, временное и физическое подобие.

#### *Теоремы подобия*

*Первая теорема (Ньютона).* Подобные между собой явления должны иметь одинаковые критерии подобия. Следствие:

а) можно использовать в опытах любые жидкости лишь бы выполнилось условие  $Re_1 = Re_2$ ;

б) критерий показывает, какие величины нужно измерять в опыте.

Например, критерий Рейнольдса  $Re = \frac{\omega l}{\nu}$ .

*Вторая теорема (Федемана-Бэкингема).* Любая зависимость между переменными величинами может быть представлена в виде обобщенного критериального уравнения:

$$f(K_1, K_2, K_3) = 0 \quad (2.2.5)$$

или в виде степенной зависимости:

$$K_1 = A K_2^n K_3^m, \quad (2.2.6)$$

где  $K$  – критерий подобия.

*Третья теорема (Кирпичева-Гухмана).* Для того чтобы физические процессы были подобны, необходимо, чтобы эти процессы были качественно подобны, т.е. описывались одинаковыми математическими уравнениями.

При экспериментальном изучении тепловых процессов принято выражать математическое описание процесса и расчетные уравнения в виде зависимостей между числами (критериями) подобия.

Перепишем уравнение конвективного теплообмена (2.3.13) для случая одномерного движения жидкости без учета источника теплоты:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (2.2.7)$$

Критерии подобия можно получить путем деления левой части дифференциального уравнения (2.2.7) на правую (или наоборот) и последующего отбрасывания знаков математических операторов, поэтому

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \sim \frac{t}{\tau}, \quad \omega_x \frac{\partial t}{\partial x} \sim \omega_x \frac{t}{l}, \quad a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \sim \frac{at}{l^2}. \quad (2.2.8)$$

Разделив член  $t/\tau$  на  $at/l^2$ , получим безразмерный комплекс  $l^2/(a\tau)$ . Обратную величину этого комплекса называют критерием Фурье:

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2}. \quad (2.2.9)$$

Необходимое условие подобия неустановившихся процессов теплообмена обеспечивается равенством критериев Фурье.

Разделив конвективный член  $\omega t/l$  на  $at/l^2$ , получаем критерий Пекле:

$$Pe = \frac{\omega l}{a}. \quad (2.2.10)$$

Критерий Пекле является мерой соотношения конвективной и кондуктивной составляющих при конвективном теплообмене.

Умножив числитель и знаменатель критерия  $Pe$  на  $\nu$ , можно выразить его через критерии Рейнольдса и Прандтля:

$$Pe = \frac{\omega l v}{\nu a} = \frac{\omega l \rho \mu c_p}{\mu \lambda} = Re Pr, \quad (2.2.11)$$

откуда

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (2.2.12)$$

Критерий Прандтля характеризует подобие физических свойств теплоносителей при конвективном теплообмене и является мерой подобия полей температур и скоростей.

Передача теплоты в пограничном слое характеризуется уравнением:

$$-\lambda \frac{dt}{dn} = \alpha(t_{ст} - t_{ж}). \quad (2.2.13)$$

Для подобного преобразования этого уравнения отбросим знаки математических операторов. Получим

$$-\lambda \frac{dt}{dx} \sim \lambda \frac{t}{l}, \quad \alpha(t_{ст} - t_{ж}) = \alpha \Delta t \sim \alpha t. \quad (2.2.14)$$

Разделив  $\alpha t$  на  $\lambda t/l$ , получим критерий Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}. \quad (2.2.15)$$

Равенство критериев Нуссельта характеризует подобие процессов теплопереноса на границе между стенкой и потоком жидкости.

Поскольку конвективный теплообмен связан с движением жидкости, то необходимым условием процессов переноса теплоты является соблюдение не только теплового, но и геометрического и гидродинамического подобий. Последнее характеризуется равенством критериев Рейнольдса  $Re$ , Фруда  $Fr$ , гомохронности  $Ho$ , симплексов геометрического подобия  $\Gamma$ .

Таким образом, обобщенное (критериальное) уравнение конвективного теплообмена выражается функцией вида:

$$f(Fo, Nu, Pe, Ho, Re, Fr, \Gamma). \quad (2.2.16)$$

Поскольку искомый коэффициент теплоотдачи входит в критерий Нуссельта, он и является определяемым, т.е.

$$Nu = f(Fo, Pe, Ho, Re, Fr, \Gamma). \quad (2.2.17)$$

Критерий Грасгофа:

$$Gr = \frac{gl^3\beta\Delta t}{\nu^2}, \quad (2.2.18)$$

где  $\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости;  $\Delta t$  – разность температур между стенкой и жидкостью;  $l$  – определяющий геометрический размер.

Критерий  $Gr$  определяет меру отношения сил трения к подъемной силе, определяемой разностью плотностей в различных точках неизотермического потока.

### 2.3. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости вдоль пластины

Рассмотрим развитие пограничного слоя при движении жидкости вдоль пластины (рис. 2.3.1).

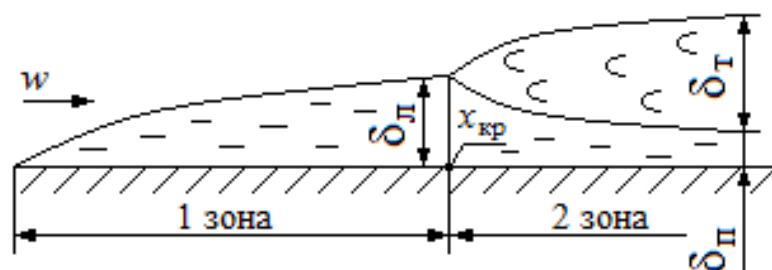


Рис. 2.3.1. Схема движения жидкости вдоль пластины

В 1-й зоне (от кромки до  $x_{кр}$ ) движение жидкости носит струйный характер. Здесь образуется ламинарный пограничный слой  $\delta_l$ , толщина которого увеличивается с продвижением жидкости вдоль плоской поверхности.

Во 2-й зоне образуется турбулентный пограничный слой с вязким подслоем толщиной  $\delta_n$ .

Характер изменения значений местного коэффициента теплоотдачи вдоль плоской поверхности наглядно виден из рис. 2.3.2.

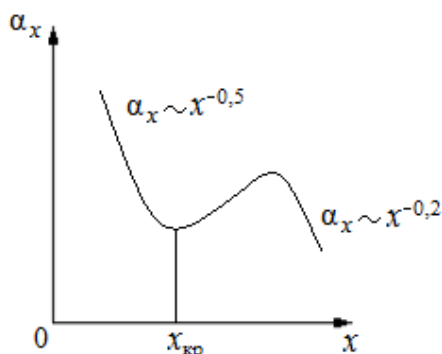


Рис. 2.3.2. Изменение значений местного коэффициента теплоотдачи вдоль плоской пластины

По критериальным уравнениям находят критерий Нуссельта (2.2.15), из которых рассчитывают коэффициент конвективной теплоотдачи  $\alpha$ .

Расчетные формулы:

- для локальной теплоотдачи:

$$Nu_{жх} = 0,296 Re_{жх}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}, \quad Re_{жх} > 4 \cdot 10^4, \quad (2.3.1)$$

- для средней теплоотдачи:

$$\overline{Nu}_{жх} = 0,037 Re_{жл}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}, \quad Re_{жл} > 4 \cdot 10^4. \quad (2.3.2)$$

## 2.4. Течение жидкости в трубах и каналах

При ламинарном режиме движения жидкости в трубе ( $Re \leq 2320$ ) можно выделить два участка:

1 участок – термически начальный участок, на котором поле температуры зависит от условий на входе в трубу. Данный участок характеризуется изменением профиля скорости, ростом пограничного слоя и уменьшением по длине местного и среднего числа Нуссельта;

2 участок – участок стабилизированного теплообмена, на котором поле температуры практически не зависит от распределения температуры в начальном сечении обогреваемого участка. Коэффициент теплоотдачи на данном участке является величиной постоянной.

Различают два режима:

а) вязкостный режим – соответствует течению вязких жидкостей при отсутствии естественной конвекции. Передача теплоты к стенке канала (и наоборот) осуществляется только теплопроводностью;

б) вязко-гравитационный режим – вынужденное течение жидкости сопровождается вынужденной конвекцией.

Уравнения для расчета среднего коэффициента теплоотдачи в прямых гладких трубах:

- при вязкостном режиме течения жидкости:

$$\overline{Nu}_{жх} = 0,15 Re_{жд}^{0,33} \left( \frac{d_B}{l} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_{ж}}{\mu_{ст}} \right)^{0,14}; \quad (2.4.1)$$

- при вязкостно-гравитационном режиме течения жидкости:

$$\overline{Nu}_{жх} = 0,17 Re_{жд}^{0,33} Pr_{ж}^{0,43} Gr_{жд}^{0,1} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}, \quad (2.4.2)$$

где  $l$  и  $d_B$  – длина и внутренний диаметр трубы.

Для переходного режима ( $2320 < Re < 10^4$ ) пока нет надежных расчетных зависимостей.

Для приближенных расчетов может быть использовано уравнение:

$$\overline{Nu}_{жх} = 0,008 Re_{жд}^{0,9} Pr_{ж}^{0,43}. \quad (2.4.3)$$

В области турбулентного режима ( $Re \geq 10^4$ ) движение жидкости для прямых труб при  $l/d > 50$  применимо уравнение:

$$\overline{Nu}_{жх} = 0,021 Re_{жд}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (2.4.4)$$

Применение уравнения (2.4.4) рассмотрим на следующем примере. По трубе с внутренним диаметром  $d$  0,05 м проходит жидкость со скоростью  $w$



1 м/с и средней температурой  $t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Температура стенки трубы  $t_{\text{ст}} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ . Параметры жидкости при  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ : плотность  $\rho = 985 \text{ кг/м}^3$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0,61 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ; коэффициент динамической вязкости  $\mu = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ ; удельная теплоемкость  $c = 4,18 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Параметры жидкости при  $70 \text{ }^\circ\text{C}$ : коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\text{ст}} = 0,67 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ; коэффициент динамической вязкости  $\mu_{\text{ст}} = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ ; удельная теплоемкость  $c_{\text{ст}} = 4,19 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Определить значение среднего коэффициента теплоотдачи от жидкости к стенке трубы.

Решение задачи приведено на рис. 2.4.1.

Дано	
Внутренний диаметр трубы $d$ , м	$d := 0.05$
Скорость жидкости в трубе $w$ , м	$w := 1$
Температура внутренней поверхности трубы $t_{\text{ст}}$ , $^\circ\text{C}$	$t_{\text{ст}} := 70$
Средняя температура жидкости $t$ , $^\circ\text{C}$	$t := 30$
Параметры жидкости при $30^\circ\text{C}$ :	
плотность $\rho$ , $\text{кг/м}^3$	$\rho := 985$
коэффициент теплопроводности $\lambda$ , $\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$\lambda := 0.61$
коэффициент динамической вязкости $\mu$ , $\text{м/с}$	$\mu := 8 \cdot 10^{-4}$
удельная теплоемкость $c$ , $\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$	$c := 4180$
Параметры жидкости при $70^\circ\text{C}$ :	
коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{ст}}$ , $\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$\lambda_{\text{ст}} := 0.67$
коэффициент динамической вязкости $\mu_{\text{ст}}$ , $\text{м/с}$	$\mu_{\text{ст}} := 4.1 \cdot 10^{-4}$
удельная теплоемкость $c_{\text{ст}}$ , $\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$	$c_{\text{ст}} := 4190$
Решение	
Критерий Рейнольдса	
$\text{Re} := \frac{w \cdot d \cdot \rho}{\mu}$	$\text{Re} = 61562.5$
Критерий Прандтля	
$\text{Pr} := \frac{c \cdot \mu}{\lambda}$	$\text{Pr} = 5.48$

Критерий Прандтля при температуре стенки

$$Pr_{ст} := \frac{c_{ст} \cdot \mu_{ст}}{\lambda_{ст}} \quad Pr_{ст} = 2.56$$

Критерий Нуссельта

$$Nu := 0.021 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.43} \cdot \left( \frac{Pr}{Pr_{ст}} \right)^{0.25} \quad Nu = 358.03$$

Коэффициент массоотдачи

$$\alpha := \frac{Nu \cdot \lambda}{d} \quad \alpha = 4367.95$$

Ответ:  $\alpha = 4367,95 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Рис. 2.4.1. Пример расчета коэффициента теплоотдачи

## 2.5. Теплоотдача при поперечном обтекании труб

Картина движения жидкости при поперечном обтекании одиночной трубы приведена на рис. 2.5.1.

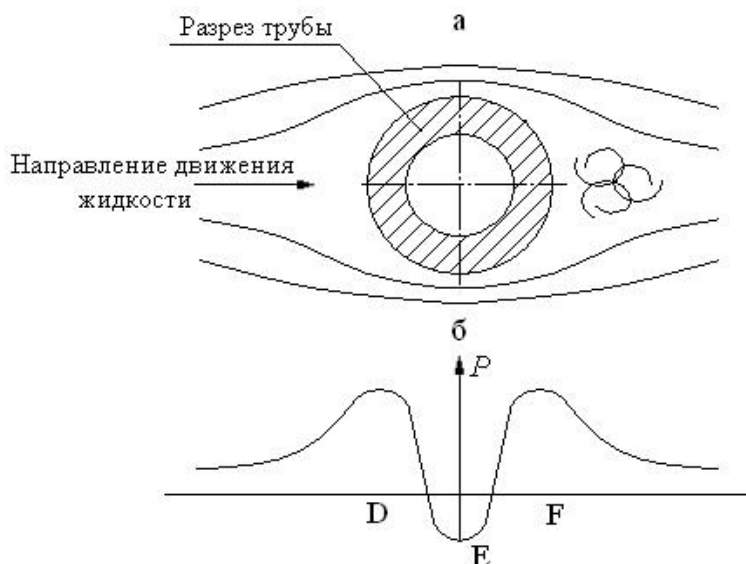


Рис. 2.5.1. Картина движения жидкости при поперечном обтекании трубы:  
*а* – схема движения жидкости; *б* – распределение давления жидкости при обтекании трубы

Рассмотрим частицы жидкости, находящиеся вне пограничного слоя: от точки D к точке E – потенциальная энергия движения преобразуется в кинетическую; от точки E к точке F – наоборот, кинетическая энергия опять преобразуется в энергию движения.

Рассмотрим движение жидкости в пограничном слое: от точки D к точке E – часть кинетической энергии расходуется на внутреннее трение, вызванное вязкостью; от точки E к точке F – частицы жидкости не достигают точки F. Под действием распределения давления P во внешнем течении частицы начинают двигаться против тока. Обратное течение обуславливает образование вихрей за трубой.

Значение локального коэффициента теплоотдачи от точки к точке неодинаково (рис. 2.5.2). График на рис. 2.5.2 справедлив при  $Re = 10^4$ .

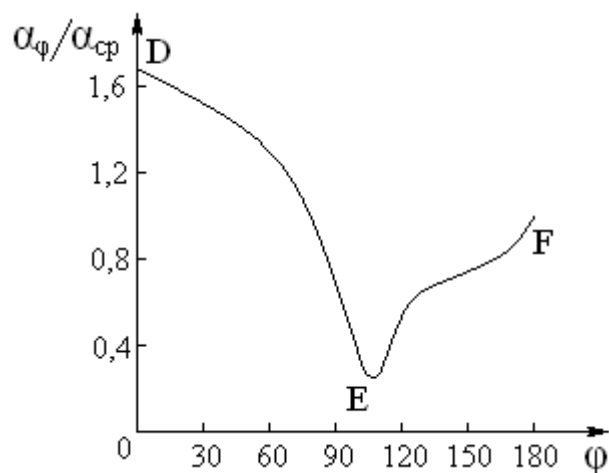


Рис. 2.5.2. Величина коэффициента теплоотдачи в зависимости от угла отрыва:

$\alpha_\phi$  – локальное значение коэффициента теплоотдачи;  $\alpha_{ср}$  – среднее значение коэффициента теплоотдачи;  $\phi$  – угол отрыва

Расчетные формулы для одиночной трубы:

- для жидкости:

$$Nu_{ж} = 0,5 Re_{ж}^{0,5} Pr_{ж}^{0,38} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}, \quad 10 < Re_{ж} < 10^3; \quad (2.5.1)$$

$$Nu_{ж} = 0,25 Re_{ж}^{0,6} Pr_{ж}^{0,38} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}, \quad 10^3 < Re_{ж} < 2 \cdot 10^5; \quad (2.5.2)$$

- для воздуха:

$$Nu_{ж} = 0,43 Re_{ж}^{0,5}, \quad 10 < Re_{ж} < 10^3; \quad (2.5.3)$$

$$Nu_{ж} = 0,216 Re_{ж}^{0,6}, \quad 10^3 < Re_{ж} < 2 \cdot 10^5. \quad (2.5.4)$$

Процесс теплоотдачи становится более сложным при поперечном обтекании пучка труб, который бывает шахматным или коридорным (рис. 2.5.3).

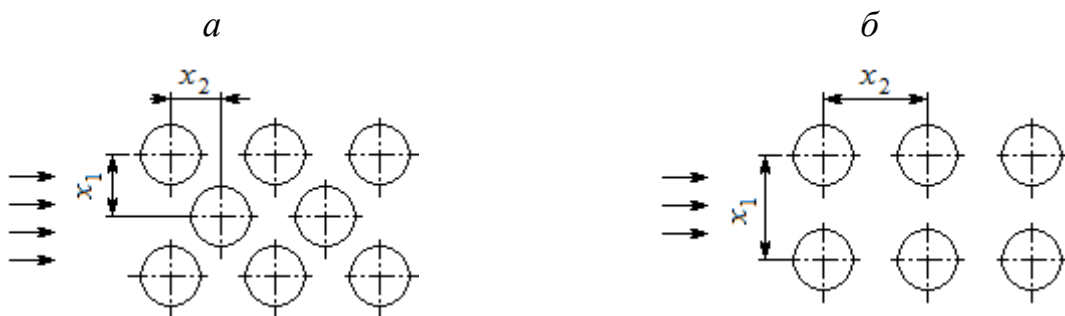


Рис. 2.5.3. Движение теплоносителя при обтекании трубного пучка:

*a* – шахматное расположение труб; *б* – коридорное расположение труб

Условия омывания первого ряда труб в обоих пучках близки к условиям омывания одиночной трубы.

В коридорном пучке трубы второго, третьего и других рядов находятся в вихревой зоне. Между пучками находятся застойные зоны.

В шахматном пучке характер омывания труб второго и последующих рядов мало чем отличается от условий омывания труб первого ряда.

В целом теплоотдача в шахматных пучках за счет лучшей турбулентности потока выше, чем в коридорном.

Расчетные формулы для 3-го ряда пучка труб (при  $Re_{ж} = 10^3 \div 10^5$ ):

- для жидкости:

при коридорном расположении труб:

$$\overline{Nu}_{ж} = 0,26 Re_{ж}^{0,65} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (2.5.5)$$

при шахматном расположении труб:

$$\overline{Nu}_{ж} = 0,41 Re_{ж}^{0,6} Pr_{ж}^{0,33} \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}; \quad (2.5.6)$$

- для воздуха:

при коридорном расположении труб:

$$\overline{Nu}_{ж} = 0,194 Re_{жд}^{0,65}; \quad (2.5.7)$$

при шахматном расположении труб:

$$\overline{Nu}_{ж} = 0,35 Re_{ж}^{0,6}. \quad (2.5.8)$$

Значение коэффициента теплоотдачи для трубок первого ряда определяется путем умножения коэффициента теплоотдачи для третьего ряда на поправочный коэффициент  $\varepsilon_1 = 0,6$ ; для трубок второго ряда в шахматных пучках на  $\varepsilon_2 = 0,7$ , а в коридорных на  $\varepsilon_3 = 0,9$ .

Если трубы омываются потоком жидкости под углом  $\varphi$  меньше  $90^\circ$ , то коэффициент теплоотдачи для пучка труб необходимо умножить на поправочный коэффициент  $\varepsilon_\varphi$ , тогда  $\alpha_\varphi = \alpha \cdot \varepsilon_\varphi$ . Значения поправочных коэффициентов приведены в табл. 2.5.1.

Таблица 2.5.1

Значения  $\varepsilon_\varphi$  в зависимости от  $\varphi$

$\varphi$ , град	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$\varepsilon_\varphi$	1	1	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

В качестве примера рассмотрим решение задачи о конвективном переносе теплоты.

В стальной трубе с наружным диаметром  $d_2$  0,219 м и толщиной стенки  $\delta$  0,006 м течет горячая вода со средней температурой  $t_1$  90 °С. Определить потерю теплоты с 1 м неизолированного участка трубопровода в окружающую среду  $q$  с температурой  $t_2 = -10$  °С, температуры внутренней  $t_{ст1}$  и наружной  $t_{ст2}$

поверхностей трубы. Коэффициент теплопроводности стали  $\lambda = 46,5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , коэффициенты теплоотдачи от воды к внутренней стенке трубы  $\alpha_1 = 1200 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$  и от наружной стенки трубы в окружающую среду  $\alpha_2 = 13,2 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ .

Решение задачи иллюстрируется рис. 2.5.4.

Дано	
Наружный диаметр трубы $d_2$ , м	$d_2 := 0.219$
Толщина стенки трубы $\delta$ , м	$\delta := 0.006$
Средняя температура воды $t_2$ , °C	$t_2 := 90$
Температура окружающей среды $t_1$ , °C	$t_1 := -10$
Коэффициент теплопроводности стали $\lambda$ , Вт/(мК)	$\lambda := 45.6$
Коэффициент теплоотдачи от воды к внутренней стенке трубы $\alpha_2$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К)	$\alpha_2 := 1200$
Коэффициент теплоотдачи от наружной стенки трубы в окружающую среду $\alpha_1$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К)	$\alpha_1 := 13.20$
Решение	
Внутренний диаметр трубы, м	
$d_1 := d_2 - 2 \cdot \delta$	$d_1 = 0.207$
Термическое сопротивление теплоотдачи от горячей воды к внутренней стенке трубы, мК/Вт	
$R_2 := \frac{1}{d_2 \cdot \alpha_2}$	$R_2 = 3.805 \times 10^{-3}$
Термическое сопротивление теплоотдачи от горячей воды к внутренней стенке трубы, мК/Вт	
$R_1 := \frac{1}{d_1 \cdot \alpha_1}$	$R_1 = 0.366$
Термическое сопротивление стенки трубы, мК/Вт	
$R_{ст} := \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$	$R_{ст} = 6.179 \times 10^{-4}$

<p>Линейная плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup></p> $q := \frac{\pi \cdot (t_2 - t_1)}{R_1 + R_2 + R_{ст}} \quad q = 848.158$	
<p>Температура внутренней стенки трубы, °C</p> $t_{ст2} := t_2 - \frac{q \cdot R_2}{\pi} \quad t_{ст2} = 88.973$	
<p>Температура наружной стенки трубы, °C</p> $t_{ст1} := t_1 + \frac{q \cdot R_1}{\pi} \quad t_{ст1} = 88.806$	
<p>Ответ: <math>q = 84,158</math>; <math>t_{ст1} = 88,806</math> °C, <math>t_{ст2} = 88,973</math> °C.</p>	

Рис. 2.5.4. Пример расчета передачи теплоты через стенку трубы

## Глава 3. Теплообмен излучением

### 3.1. Общие сведения о тепловом излучении

Теплообмен излучением происходит в результате переноса энергии в форме электромагнитных колебаний с длинами волн 0,8–800 мкм. Излучение обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами. Теплообмен излучением, в отличие от теплопроводности и конвекции, не связан с температурным полем в теле или среде. Наличие сплошной среды не обязательно.

Поток лучей, испускаемый нагретым телом, попадая на поверхность другого тела, частично поглощается, частично отражается и частично проходит сквозь тело. Тогда общая энергия падающих на тело лучей  $Q_0$  находится так:

$$Q_0 = Q_A + Q_R + Q_D, \quad (3.1.1)$$

где  $Q_A$  – энергия поглощенная телом;  $Q_R$  – энергия отраженная телом;  $Q_D$  – энергия лучей, проходящих сквозь тело.

Если поделить все члены уравнения на  $Q_0$ , получается следующее соотношение:

$$A + R + D = 1, \quad (3.1.2)$$

где  $A$ ,  $R$  и  $D$  – поглощательная, отражательная и пропускательная способность тела соответственно.

Если  $A = 1$ ,  $R = D = 0$ , то тело поглощает все падающие на тело лучи. Такое тело называется абсолютно черным.

Если  $R = 1$ ,  $A = D = 0$ , то тело пропускает все падающие на тело лучи. Такое тело называется абсолютно прозрачным или диатермическим.

Если  $D = 1$ ,  $A = R = 0$ , то тело отражает все падающие на него лучи. Такое тело называется абсолютно белым.



В природе абсолютно черных, прозрачных и белых тел не существует. Тела, обладающие свойствами поглощать, отражать и пропускать лучи, называют серыми.

Потоком излучения (потоком лучистой энергии)  $Q$  называется отношение энергии излучения, проходящей в данном направлении, к промежутку времени  $\tau$ , в течение которого энергия проходила:

$$Q = \frac{Q_0}{\tau}. \quad (3.1.3)$$

Поверхностной плотностью потока излучения  $E$  называется количество энергии излучения, проходящее в единицу времени  $\tau$  через единицу площади  $F$ :

$$E = \frac{Q_0}{F\tau}. \quad (3.1.4)$$

## 3.2. Законы теплового излучения

*Закон Планка.* Абсолютно черное тело при данной температуре испускает лучи всех длин волн от  $\lambda = 0$  до  $\lambda = \infty$ , но распределение энергии вдоль спектра излучения различно и определяется по формуле:

$$E_{\lambda 0} = \frac{dE_0}{d\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}, \quad (3.2.1)$$

где  $C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16}$  – первая постоянная Планка, Вт·м<sup>2</sup>;  $C_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$  – вторая постоянная Планка, м·К;  $\lambda$  – длина волны, м;  $E_0$  – лучеиспускательная способность абсолютно черного тела, Вт/м<sup>2</sup>;  $T$  – абсолютная температура излучающего тела, К.

По мере увеличения длины волны энергия лучей возрастает, при некоторой длине волны достигает максимума, затем убывает. Кроме того, для луча одной и той же длины волны энергия его увеличивается с возрастанием температуры тела, испускающего лучи (рис. 3.2.1).

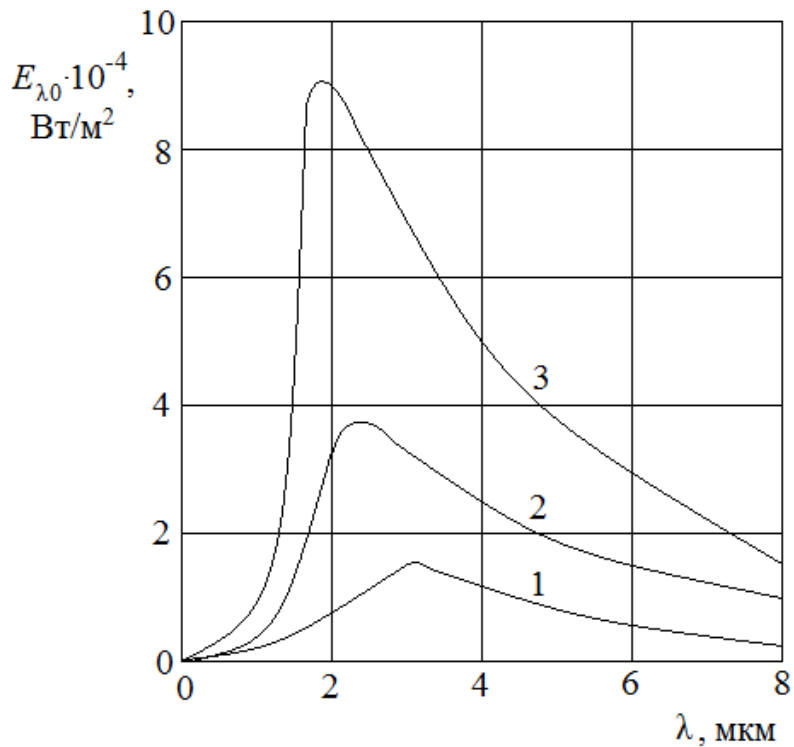


Рис. 3.2.1. Зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела от длины волны и температуры:  $T$ , К: 1 – 1500; 2 – 1250; 3 – 1000

Из рис. 3.2.1 видно, что максимумы кривых с повышением температуры смещаются в сторону более коротких волн. Длина волны  $\lambda$  в микрометрах, отвечающая максимальному значению  $E_{\lambda_0}$  определяется *законом смещения Вина*:

$$\lambda_{max} = \frac{2,9}{T}. \quad (3.2.2)$$

С увеличением температуры  $\lambda_{max}$  уменьшается, что и следует из закона Вина.

*Закон Стефана-Больцмана.* Лучеиспускательная способность абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \quad (3.2.3)$$

где  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) – постоянная Стефана-Больцмана.

Спектральная лучеиспускательная способность серого тела определяется по формуле:

$$E = \varepsilon \sigma_0 T^4, \quad (3.2.4)$$

где  $\varepsilon = C/C_0$  – степень черноты тела;  $C_0$  – коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела.

*Закон Кирхгофа.* Отношение лучеиспускательной способности любого тела  $E$  к его лучепоглощательной способности  $A$  при той же температуре не зависит от природы излучающего тела и равно лучеиспускательной способности абсолютно черного тела:

$$\frac{E}{A} = E_0. \quad (3.2.5)$$

Согласно закону Кирхгофа, тело, которое при данной температуре лучше поглощает излучение, должно интенсивнее излучать.

*Закон Ламберта.* Энергия, излучаемая абсолютно черным телом, распространяется в пространстве по отдельным направлениям неодинаково и определяется законом косинусов Ламберта:

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{\pi} d\Omega \cos \varphi, \quad (3.2.6)$$

где  $E_\varphi$  – плотность потока излучения, соответствующая углу  $\varphi$ ;  $\varphi$  – угол между нормалью к излучающей поверхности и направлением излучения;  $E_0$  – лучеиспускательная способность абсолютно черного тела;  $d\Omega$  – элементарный телесный угол, под которым из данной точки видна элементарная площадь  $dF$ .

*Закон Бугера-Ламберта* описывает поглощение света непрозрачными средами:

$$I(l) = I_0 e^{-k_\lambda l}, \quad (3.2.7)$$

где  $I(l)$  – интенсивность лучистого потока на выходе из слоя среды;  $I_0$  – интенсивность лучистого потока на входе в слой среды;  $l$  – толщина среды;  $k_\lambda$  – коэффициент ослабления луча при данной длине волны, зависящий от физических свойств среды и температуры.

### 3.3. Лучистый теплообмен между двумя твердыми телами, разделенными лучепрозрачной средой

Количество теплоты  $Q_{\text{л}}$ , передаваемое посредством излучения в единицу времени от более нагретого твердого тела к менее нагретому телу, определяется по уравнению:

$$Q_{\text{л}} = C_{1-2} F \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1-2}, \quad (3.3.1)$$

где  $C_{1-2}$  – коэффициент взаимного излучения;  $Q_{\text{л}}$  – количество теплоты, передаваемое лучеиспусканием в единицу времени;  $F$  – площадь поверхности излучения;  $T_1$  – температура поверхности более нагретого тела;  $T_2$  – температура поверхности менее нагретого тела;  $\varphi_{1-2}$  – средний угловой коэффициент.

Коэффициент излучения  $C_{1-2}$  зависит от взаимного расположения и степени черноты  $\epsilon$  излучающих поверхностей, имеющих температуру  $T_1$  и  $T_2$ :

а) если две параллельные бесконечно большие пластины,  $F_1 = F_2$ , то имеем:

$$C_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}}, \quad (3.3.2)$$

где  $C_1$  – коэффициент лучеиспускания первой пластины;  $C_2$  – коэффициент лучеиспускания второй пластины;  $C_0 = 5,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела;

б) если одно тело, площадь поверхности излучения которого, равная  $F_1$ , расположено внутри полого тела с площадью поверхности излучения  $F_2$ , то

$$C_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0} \right)}; \quad (3.3.3)$$

в) если площадь  $F_2$  очень велика по сравнению с площадью  $F_1$ , т.е. соотношение  $F_1/F_2$  близко к нулю, то в этом случае следует положить  $C_{1-2} = C_1$ .

В качестве примера рассмотрим решение задачи о тепловом излучении.

В цеху проложен трубопровод длиной  $l$  10 м с наружным диаметром  $d$  89 мм, в котором проходит хладагент со средней температурой  $t_1$  5 °С. Средняя температура воздуха в помещении  $t_2$  составляет 20 °С. Полагаем, что температура наружной поверхности трубопровода равна средней температуре хладагента, температура стен помещения равна температуре воздуха в цеху и площадь поверхности трубопровода во много раз меньше площади поверхности стен помещения.

Найти количество теплоты  $Q$ , передаваемое лучеиспусканием в единицу времени от трубопровода к стенами помещения.

Решение задачи приведено на рис. 3.3.1.

<b>Дано</b>	
Наружный диаметр трубы $d$ , м	$d := 0.089$
Длина трубы $l$ , м	$l := 10$
Температура наружной поверхности трубы $T_2$ , К	$T_2 := 278$
Температура стен в помещении $T_1$ , К	$T_1 := 293$
Приведенная степень черноты $\epsilon_{\text{тр}}$	$\epsilon_{\text{тр}} := 0.92$
Коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела $C_0$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К)	$C_0 := 5.67$
<b>Решение</b>	
Площадь поверхности трубопровода, м <sup>2</sup>	
$F_1 := l \cdot \pi \cdot d$	$F_1 = 2.796$
Количество теплоты, передаваемое лучеиспусканием в единицу времени от трубопровода к стенами помещения, Вт	
$Q_{\text{л}} := \epsilon_{\text{тр}} \cdot C_0 \cdot \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot F_1 \quad Q_{\text{л}} = 203.79$	
Ответ: $Q_{\text{л}} = 203,79$ Вт.	

Рис. 3.3.1. Пример решения задачи о тепловом излучении твердых тел

### 3.4. Лучистый теплообмен в поглощающих и излучающих средах

Излучение газов существенно отличается от излучения твердых тел. Излучение носит объемный характер. Одноатомные газы (He, Ar и др.), а также многие двухатомные газы ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$  и т.д.) прозрачны для тепловых лучей. При температуре 5000–8000 К эти газы начинают заметно излучать и поглощать энергию. Трехатомные газы ( $CO_2$ ,  $SO_4$ ,  $H_2O$  и др.) обладают значительной излучательной и поглощательной способностью.

Поглощательная способность газа зависит от его природы, температуры, плотности и спектральной характеристики падающего излучения.

Плотность потока излучения газа формально определяется выражением:

$$E_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma} \sigma_0 T_{\Gamma}^4, \quad (3.4.1)$$

где  $\sigma_0$  – константа Стефана-Больцмана;  $\varepsilon_{\Gamma}$  – степень черноты газа,  $T_{\Gamma}$  – температура газа.

Однако, поскольку степень черноты газа  $\varepsilon_{\Gamma}$  существенно зависит от температуры, то закон четвертой степени Стефана-Больцмана здесь не применим.

Экспериментально установлено, плотность потока излучения для паров воды  $E_{H_2O} \sim T^3$ , двуокиси углерода  $E_{CO_2} \sim T^{3,5}$ .

В технических расчетах для упрощения используют закон Стефана-Больцмана. Отклонения учитывают величиной степени черноты газа, значения которой приведены в справочниках.

В реальных условиях газ окружен поверхностью твердого тела – оболочкой, обладающей собственным излучением. Расчет лучистого теплообмена между газом и оболочкой, которая его ограничивает, проводится по приближенному уравнению:

$$q = \varepsilon'_{ст} \sigma_0 F \left[ \varepsilon_{\Gamma} \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \varepsilon'_{\Gamma} \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (3.4.2)$$

где  $\varepsilon'_{\text{ст}} = \frac{\varepsilon_{\text{ст}} + 1}{2}$  – эффективная степень черноты стенки,  $\varepsilon_{\text{ст}}$  – степень черноты стенки;  $T_{\text{г}}$  и  $T_{\text{ст}}$  – температура газа и стенки.

Если оболочка заполнена смесью двух газов, например  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ , то степень черноты газа  $\varepsilon_{\text{г}}$  равна

$$\varepsilon_{\text{г}} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\varepsilon, \quad (3.4.3)$$

где  $\varepsilon_{\text{CO}_2}$  и  $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$  – степень черноты углекислого газа и водяного пар;  $\beta$  – поправочный коэффициент, учитывающий неодинаковую степень влияния давления и длины луча на количество энергии, излучаемой парами воды;  $\Delta\varepsilon$  – поправка на взаимное поглощение лучистой энергии парами газов.

### 3.5. Сложный теплообмен

Сложный теплообмен – процесс переноса теплоты, при котором принимают участие все виды теплообмена – теплопроводность, конвекция и излучение.

Плотность теплового потока при сложной теплоотдаче равна:

$$q = q_{\text{к}} + q_{\text{л}} = \alpha_{\text{к}}(T_{\text{ст}} - T_{\text{г}}) + \alpha_{\text{л}}(T_{\text{ст}} - T_{\text{г}}), \quad (3.5.1)$$

где  $q_{\text{к}}$  и  $q_{\text{л}}$  – плотность тепловых потоков, переносимых путем конвекции и излучения;  $\alpha_{\text{к}}$  – конвективная составляющая коэффициента теплоотдачи;  $\alpha_{\text{л}}$  – лучистая составляющая коэффициента теплоотдачи;  $T_{\text{ст}}$  – температура стенки;  $T_{\text{г}}$  – температура нагреваемого газа.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{л}}$  находится по уравнению:

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{5,67 \varepsilon_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_{\text{ст}}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{г}}}{100} \right)^4 \right]}{T_{\text{ст}} - T_{\text{г}}}. \quad (3.5.2)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{к}}$  находится по уравнению:

$$\alpha_{\text{к}} = \frac{Q}{F \tau (T_{\text{ст}} - T_{\text{г}})}, \quad (3.5.3)$$

где  $F$  – рабочая поверхность стенки.

Обозначив суммарный коэффициент теплоотдачи конвекцией и излучением

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{л}}, \quad (3.5.4)$$

находим

$$q = \alpha_{\Sigma}(T_{\text{ст}} - T_{\text{г}}). \quad (3.5.5)$$

Для расчета процесса переноса теплоты от стенки аппарата, находящегося в закрытом помещении, в окружающую среду при условии, когда температура стенки аппарата  $t_{\text{ст}}$  равна 50–350 °С, коэффициент теплоотдачи может быть найден по формуле:

$$\alpha_{\text{общ}} = 9,3 + 0,058 t_{\text{ст}}. \quad (3.5.6)$$



## **Глава 4. Теплообменные аппараты**

### **4.1. Типы теплообменных аппаратов**

Теплообменники – это аппараты, предназначенные для передачи тепла от одних веществ к другим.

Вещества, участвующие в процессе передачи теплоты, называются теплоносителями.

Теплоноситель, имеющий более высокую температуру, чем нагреваемая среда, называется нагревающим агентом.

Теплоноситель с более низкой температурой, чем среда, от которой он воспринимают тепло, называется охлаждающим агентом.

В зависимости от способа передачи тепла различают теплообменники смешительные и поверхностные.

В смешительных теплообменниках теплоносители находятся в непосредственном контакте.

В поверхностных теплообменниках перенос тепла между теплоносителями происходит через поверхность теплообмена.

По принципу действия теплообменники делят на рекуперативные и регенеративные.

В рекуперативных теплообменниках теплоносители разделены стенкой.

В регенеративных теплообменниках нагрев холодного теплоносителя происходит за счет его соприкосновении с ранее нагретыми твердыми телами (насадкой). "Горячий" и "холодный" теплоносители подаются поочередно.

## 4.2. Конструкции рекуперативных теплообменников

Ряд конструкций рекуперативных теплообменников, получивших наибольшее распространение, показан на рис. 4.2.1–4.2.4.

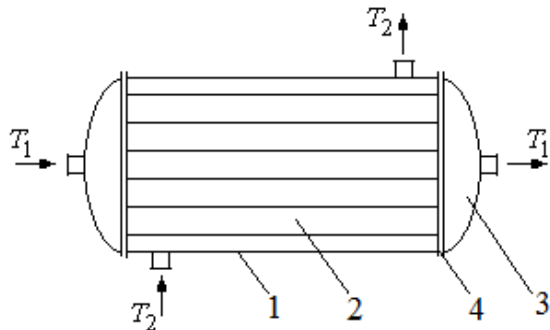


Рис. 4.2.1. Схема кожухотрубчатого теплообменника: 1 – корпус; 2 – трубы; 3 – крышка; 4 – трубная решетка

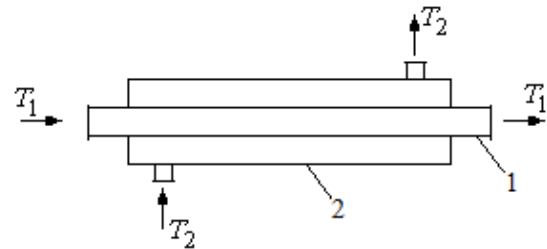


Рис. 4.2.2. Схема двухтрубного теплообменника: 1 – внутренняя труба; 2 – наружная труба

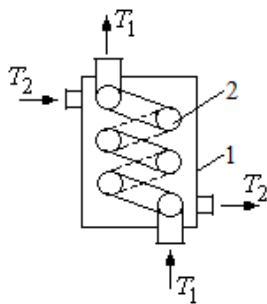


Рис. 4.2.3. Схема змеевикового теплообменника: 1 – корпус; 2 – спиральный змеевик

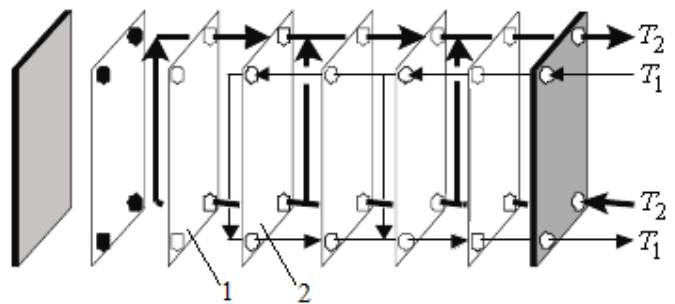


Рис. 4.2.4. Схема пластинчатого теплообменника (одноходового): 1 – четная пластина; 2 – нечетная пластина

В кожухотрубчатом (рис. 4.2.1), двухтрубном (рис. 4.2.2) и змеевиковом (4.2.3) теплообменниках поверхность теплообмена выполнена из труб, а в пластинчатом теплообменнике (рис. 4.2.4) – из листа.

Схемы направления взаимного движения теплоносителей  $T_1$  и  $T_2$  показаны на рис. 4.2.5. Различают прямоточное (рис. 4.2.5, а) и противоточное (рис. 4.2.5, б) движение теплоносителей, смешанный (рис. 4.2.5, в) и перекрестный (рис. 4.2.5, г) ток теплоносителей.



Рис. 4.2.5. Схемы направления движения теплоносителей  $T_1$  и  $T_2$  при теплообмене

### 4.3. Уравнения теплопередачи при прямотоке и противотоке теплоносителей

Пусть с одной стороны стенки (рис. 4.3.1) движется более нагретый теплоноситель с массовым расходом  $G_1$ , имеющий теплоемкостью  $c_1$ . С другой стороны стенки в том же направлении движется более холодный теплоноситель с массовым расходом  $G_2$  с теплоемкостью  $c_2$ . Допустим, что теплоемкости теплоносителей постоянны и теплообмен между движущимися прямотоком теплоносителями происходит только через разделяющую их стенку толщиной  $\delta$  с поверхностью поверхности  $F$ . Процесс теплопередачи является установившимся.

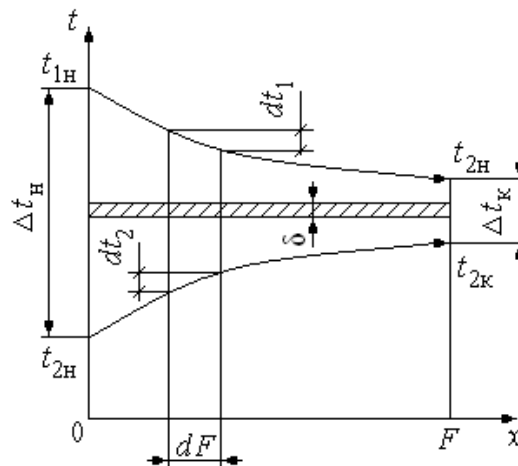


Рис. 4.3.1. Изменение температуры теплоносителей при параллельном токе

Выделим элемент поверхности теплообмена  $dF$ . На нем более нагретый теплоноситель охлаждается на  $dt_1$ , а более холодный на  $dt_2$ .

Составим уравнение теплового баланса для элемента  $dF$ :

$$dQ = G_1 c_1(-dt_1) = G_2 c_2 dt_2. \quad (4.3.1)$$

Знак «минус» указывает на охлаждение более нагретого теплоносителя в процессе теплообмена.

Обозначим:

$$W_1 = G_1 c_1(-dt_1), W_2 = G_2 c_2 dt_2, \quad (4.3.2)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – водяные эквиваленты теплоносителей.

Тогда имеем:

$$dQ = W_1 (-dt_1) = W_2 dt_2. \quad (4.3.3)$$

Следовательно,

$$-dt_1 = \frac{dQ}{W_1}, \quad (4.3.4)$$

$$dt_2 = \frac{dQ}{W_2}. \quad (4.3.5)$$

Обозначим

$$\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} = m, \quad \Delta t = t_1 - t_2. \quad (4.3.6)$$

Складывая выражения (4.3.4) и (4.3.5) с учетом обозначения (4.3.6), получаем:

$$dQ = -\frac{d(\Delta t)}{m}. \quad (4.3.7)$$

Воспользуемся уравнением теплопередачи

$$dQ = K dF \Delta t. \quad (4.3.8)$$

Приравниваем уравнения (4.3.7) и (4.3.8), разделяем переменные и интегрируем полученное выражение:

$$\int_{\Delta t_H}^{\Delta t_K} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mK \int_0^F dF \quad (4.3.9)$$

или

$$\ln \frac{\Delta t_K}{\Delta t_H} = -mKF. \quad (4.3.10)$$

Запишем уравнение теплового баланса для всего теплообменника:

$$Q = W_1 (t_{1H} - t_{1K}) = W_2 (t_{2H} - t_{2K}). \quad (4.3.11)$$

Откуда

$$m = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} = \frac{t_{1H} - t_{1K} + t_{2K} - t_{2H}}{Q} = \frac{(t_{1H} - t_{2H}) - (t_{1K} - t_{2K})}{Q} = \frac{\Delta t_H - \Delta t_K}{Q}. \quad (4.3.12)$$

Подставим значение  $m$  в уравнение (4.3.10):

$$\ln \frac{\Delta t_K}{\Delta t_H} = -KF \frac{\Delta t_H - \Delta t_K}{Q}. \quad (4.3.13)$$

Откуда

$$Q = -KF \frac{\Delta t_H - \Delta t_K}{\ln \frac{\Delta t_K}{\Delta t_H}} = KF \frac{\Delta t_H - \Delta t_K}{\ln \frac{\Delta t_H}{\Delta t_K}}. \quad (4.3.14)$$

Введем обозначение

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t_H - \Delta t_K}{\ln \frac{\Delta t_H}{\Delta t_K}}. \quad (4.3.15)$$

Здесь величина  $\Delta t_{cp}$  называется средней движущей силой или средним температурным напором.

Тогда уравнение теплопередачи примет вид:

$$Q = K F \Delta t_{cp}. \quad (4.3.16)$$

Если  $\frac{\Delta t_H}{\Delta t_K} < 2$ , то  $\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t_H + \Delta t_K}{2}$ .

При противотоке теплоносителей количество передаваемой теплоты находят по уравнению:

$$Q = KF \frac{\Delta t_{\text{б}} - \Delta t_{\text{м}}}{\ln \frac{\Delta t_{\text{б}}}{\Delta t_{\text{м}}}}, \quad (4.3.17)$$

где  $\Delta t_{\text{б}}$  – разность температур теплоносителей на том конце теплообменника, где она больше;  $\Delta t_{\text{м}}$  – меньшая разность температур теплоносителей на противоположном конце теплообменника.

#### 4.4. Расчет теплообменного аппарата

Существует два вида расчетов теплообменных аппаратов: тепловой конструктивный и тепловой поверочный.

Расчет теплообменника сводится к определению необходимой поверхности теплообмена  $F$ .

Выбор целесообразности направления теплоносителей в трубное или межтрубное пространство производится из следующих соображений:

- 1) вязкую жидкость рекомендуется направлять в пространство, где скорость будет выше;
- 2) в трубное пространство целесообразно направлять теплоносители с твердыми взвешиваемыми или загрязненными с тем, чтобы облегчить очистку;
- 3) нагревающий теплоноситель целесообразно направлять в трубное пространство с тем, чтобы уменьшить потери теплоты в окружающую среду;
- 4) противоток применяют при теплообмене без изменения агрегатного состояния теплоносителя;
- 5) прямоток применяют при движении нагреваемой среды снизу вверх;
- 6) желательно, чтобы теплообмен происходил в условиях турбулентного режима течения теплоносителей ( $Re > 10^4$ ).

Расчет теплообменника включает: тепловой расчет, конструктивный расчет, гидравлический расчет.

Тепловой расчет теплообменника с противоточным движением теплоносителей производят в следующей последовательности.

### 1. Определение тепловой нагрузки и расхода теплоносителей.

Тепловая нагрузка рассчитывается по уравнению теплового баланса:

$$Q = G_1 (I_{1н} - I_{1к}) = G_2 (I_{2к} - I_{2н}), \quad (4.4.1)$$

где  $G_1, G_2$  – расходы теплоносителей, кг/с;  $I_{1н}, I_{1к}$  – энтальпии первого теплоносителя на входе и выходе из аппарата, Дж/кг;  $I_{2н}, I_{2к}$  – энтальпии второго теплоносителя на входе и выходе из аппарата, Дж/кг.

Если теплообмен протекает без изменения агрегатного состояния теплоносителей, имеем:

$$I_{1н} = c_{1н} t_{1н}; I_{1к} = c_{1к} t_{1к}; \quad (4.4.2)$$

$$I_{2н} = c_{2н} t_{2н}; I_{2к} = c_{2к} t_{2к}. \quad (4.4.3)$$

Если теплоемкости обменивающихся теплом жидкостей ( $c_1$  и  $c_2$ ) можно считать не зависящими от температуры, то уравнение теплового баланса (4.4.1) примет вид:

$$Q = G_1 c_1 (t_{1н} - t_{1к}) = G_2 (t_{2к} - t_{2н}). \quad (4.4.4)$$

Если расходы заданы, то обычно находят неизвестную конечную температуру одного из теплоносителей.

### 2. Определение средней разности температур и средних температур теплоносителей.

Средняя разность температур теплоносителей равна:

$$\Delta t_{ср.} = t_{ср1} - t_{ср2}. \quad (4.4.5)$$

Здесь средняя температура каждого теплоносителя определяется по формуле:

$$t_{ср} = \frac{1}{F} \int_0^F t dF, \quad (4.4.6)$$

где  $t$  – текущая температура вдоль поверхности теплообмена  $F$ .

Для расчетов применение формулы (4.4.6) затруднительно, т.к. функция  $\Delta t_{ср} = f(F)$ , как правило, неизвестна.

При противотоке среднюю разность температур определяют по формуле (4.3.17).

### 3. Определение коэффициента теплопередачи.

Для плоской стенки имеем:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (4.4.7)$$

Поверхность теплообмена определяется по формуле:

$$F = \frac{Q}{K \Delta t_{cp}}. \quad (4.4.8)$$

Для кожухотрубчатого аппарата конструктивный расчет сводится к определению числа и длины труб, размещению их в трубной решетке, нахождению длины и высоты аппарата.

Число труб  $n$  и длины  $l$  каждой трубы связаны между собой зависимостью:

$$n = \frac{F}{\pi d_p l}, \quad (4.4.9)$$

где  $d_p$  – расчетный диаметр трубы.

Внутренний диаметр кожухотрубного теплообменника рассчитывают по формуле:

$$D_{вн} = S(b - 1) + 4 d_n, \quad (4.4.10)$$

где  $S = (1,2 - 1,5) d_n$  – шаг между трубами;  $b = 2a - 1$  – число труб, размещаемых по диагонали наибольшего шестиугольника при шахматном расположении труб;  $a$  – число труб на стороне наибольшего шестиугольника при шахматном расположении труб;  $d_n$  – наружный диаметр трубы.

Рассмотрим пример решения задачи о процессе передачи теплоты в теплообменнике.

В теплообменнике проходит процесс охлаждения масла водой. Расход масла  $G_1 = 1,5$  кг/с. Расход воды  $G_2 = 2,5$  кг/с. Начальная температура масла  $t_{1н} = 60$  °С, его конечная температура  $t_{1к} = 20$  °С. Начальная температура воды  $t_{2н} = 10$  °С. Удельная теплоемкость масла  $c_{p1} = 2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°С). Удельная



теплоемкость воды  $c_{p2} = 4,18 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C). Определить температуру воды на выходе из теплообменника.

Решение задачи приведено на рис. 4.4.1.

Дано	
Расход масла $G_1$ , кг/с	$G_1 := 1.5$
Расход воды $G_2$ , кг/с	$G_2 := 2.5$
Начальная температура масла $t_{1Н}$ , °C	$t_{1Н} := 60$
Конечная температура масла $t_{1К}$ , °C	$t_{1К} := 20$
Начальная температура воды $t_{2Н}$ , °C	$t_{2Н} := 10$
Удельная теплоемкость масла $c_{p1}$ , Дж/(кг·°C)	$c_{p1} := 2 \cdot 10^3$
Удельная теплоемкость воды $c_{p2}$ , Дж/(кг·°C)	$c_{p2} := 4.18 \cdot 10^3$
Решение	
Из уравнения теплового баланса для теплообменника находим температуру воды на выходе из аппарата, °C	
$t_{2К} := t_{2Н} + \frac{G_1 \cdot c_{p1} \cdot (t_{1Н} - t_{1К})}{G_2 \cdot c_{p2}} \quad t_{2К} = 21.5$	
Ответ: $t_{2К} = 21,5$ °C.	

Рис. 4.4.1. Пример расчета температуры теплоносителя в теплообменнике

## 4.5. Нагрев жидкости в кожухотрубчатом теплообменнике

В горизонтальном одноходовом кожухотрубчатом теплообменнике (рис. 4.5.1) проходит непрерывный процесс нагревания органической жидкости водяным паром.

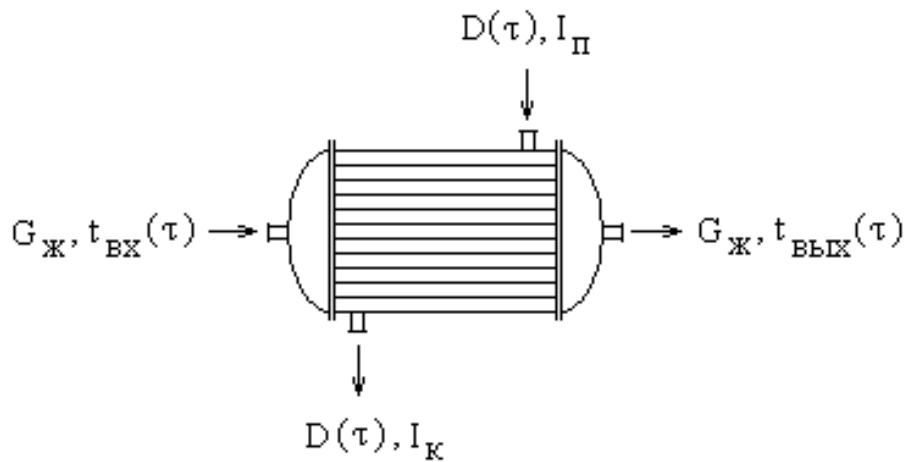


Рис. 4.5.1. Схема движения фаз в подогревателе

Обозначим через  $D(\tau)$  – массовый расход водяного пара на входе в подогреватель,  $G_{ж}$  – массовый расход жидкости в подогревателе,  $c_{ж}$  – среднюю удельную теплоемкость жидкости,  $I_{п}$  и  $I_{к}$  – энтальпии пара и конденсата,  $t_{вх}(\tau)$  и  $t_{вых}(\tau)$  – температуры жидкости на входе в подогреватель,  $t_{вых}(\tau)$  – температуры жидкости на выходе из подогревателя.

При постановке математической модели процесса теплообмена в теплообменнике используем следующие допущения: жидкость в трубном пространстве движется в режиме идеального вытеснения; температура жидкости на входе в теплообменник изменяется во времени; высота уровня конденсата в теплообменнике является незначительной; давление пара изменяется незначительно, что позволяет считать температуру пара в любой точке аппарата одинаковой.

Уравнение теплового баланса подогревателя без учета потерь теплоты в окружающую среду имеет вид:

$$D(\tau)(I_{п} - I_{к}) = G_{ж}c_{ж}[t_{вых}(\tau) - t_{вх}(\tau)]. \quad (4.5.1)$$

Учитывая принятые допущения, можно из математической модели исключить уравнение для профиля температур водяного пара, т.к. его температура является величиной известной. Уравнение для профиля температур жидкости в трубах теплообменника имеет следующий вид:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = -w \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + R[t_{\Pi} - t(x, \tau)]. \quad (4.5.2)$$

К уравнению (4.5.2) необходимо добавить начальные и граничные условия:

$$t(x, \tau)|_{\tau=0} = t_{\Pi}; \quad (4.5.3)$$

$$t(x, \tau)|_{x=0} = t_{\text{вх}}(\tau). \quad (4.5.4)$$

Здесь  $R = \frac{K\Pi}{F_{\text{тр}}c_{\text{ж}}\rho_{\text{ж}}}$ ,  $t_{\Pi}$  – температура пара;  $w$  – скорость движения

жидкости в трубе теплообменника;  $K$  – коэффициент теплопередачи;  $\Pi$  – периметр трубы теплообменника, вычисленный по среднему диаметру;  $F_{\text{тр}}$  – площадь поперечного сечения трубы.

Введем новые переменные:

$$T = t_{\Pi} - t; \quad \theta = \tau R; \quad z = \frac{xR}{w}. \quad (4.5.5)$$

В новых переменных система уравнений (4.5.2) – (4.5.4) примет вид:

$$\frac{\partial T(z, \theta)}{\partial z} + \frac{\partial T(z, \theta)}{\partial \theta} + T(z, \theta) = 0; \quad (4.5.6)$$

$$T(z, \theta)|_{\theta=0} = 0; \quad (4.5.7)$$

$$T(z, \theta)|_{z=0} = T_{\text{вх}}(\theta); \quad (4.5.8)$$

Применим к уравнению (4.5.6) преобразование Лапласа по  $\theta$ , т.е. перейдем от  $T(z, \theta)$  и  $T_{\text{вх}}(\theta)$  к их изображениям  $T_L(z, s)$  и  $T_{\text{Лвх}}(s)$  [1]. Получаем:

$$\frac{dT_L(z, \theta)}{dz} + sT_L(z, \theta) + T_L(z, \theta) = 0; \quad (4.5.9)$$

Уравнение (4.5.9) не содержит произвольной постоянной по  $s$  и поэтому представляет собой простое дифференциальное уравнение с параметром  $s$ . Его общее решение имеет вид:

$$T_L(z, \theta) = Ce^{-(s+1)z}, \quad (4.5.10)$$

где  $C$  – постоянная, определяемая из граничного условия.

Применим преобразование Лапласа к граничному условию (4.5.8):

$$T_L(z,s)|_{z=0} = T_{L\text{ВХ}}(s). \quad (4.5.11)$$

Воспользуемся условием (4.5.11):

$$T_L(z,s)|_{z=0} = C e^{-(s+1)z} \Big|_{z=0} = T_{L\text{ВХ}}(s). \quad (4.5.12)$$

Получаем

$$C = T_{L\text{ВХ}}(s). \quad (4.5.13)$$

Таким образом, решение уравнения (4.5.10) с граничным условием (4.5.11) имеет вид:

$$T_L(z,s) = T_{L\text{ВХ}}(s) e^{-(s+1)z}. \quad (4.5.14)$$

Выполним обратное преобразование Лапласа и возвратимся к прежним переменным:

$$t(x,\tau) = t_{\text{II}} - e^{-\frac{xK\Pi}{wF_{\text{тр}}c_{\text{ж}}\rho_{\text{ж}}}} \left[ t_{\text{II}} - t_{\text{ВХ}} \left( \tau - \frac{x}{w} \right) \right]. \quad (4.5.15)$$

Из решения (4.5.15) следует, что значение искомой функции  $t(x,\tau)$  находится путем сдвига входной функции по времени и её умножения на

коэффициент  $e^{-\frac{xK\Pi}{wF_{\text{тр}}c_{\text{ж}}\rho_{\text{ж}}}}$ .

Рассмотрим случай, когда температура нагреваемой жидкости на входе в аппарат не изменяется во времени. В этом случае уравнение для расчета профиля температур жидкости может быть получено в следующем в виде:

$$\frac{t(x,\tau)}{t_{\text{вх}}} = e^{-\frac{xK\Pi}{wF_{\text{тр}}c_{\text{ж}}\rho_{\text{ж}}}}. \quad (4.5.16)$$

На рис. 4.5.2 приведен пример расчета горизонтального кожухотрубчатого подогревателя для нагревания органической жидкости насыщенным водяным паром, выполненный в системе Mathcad.

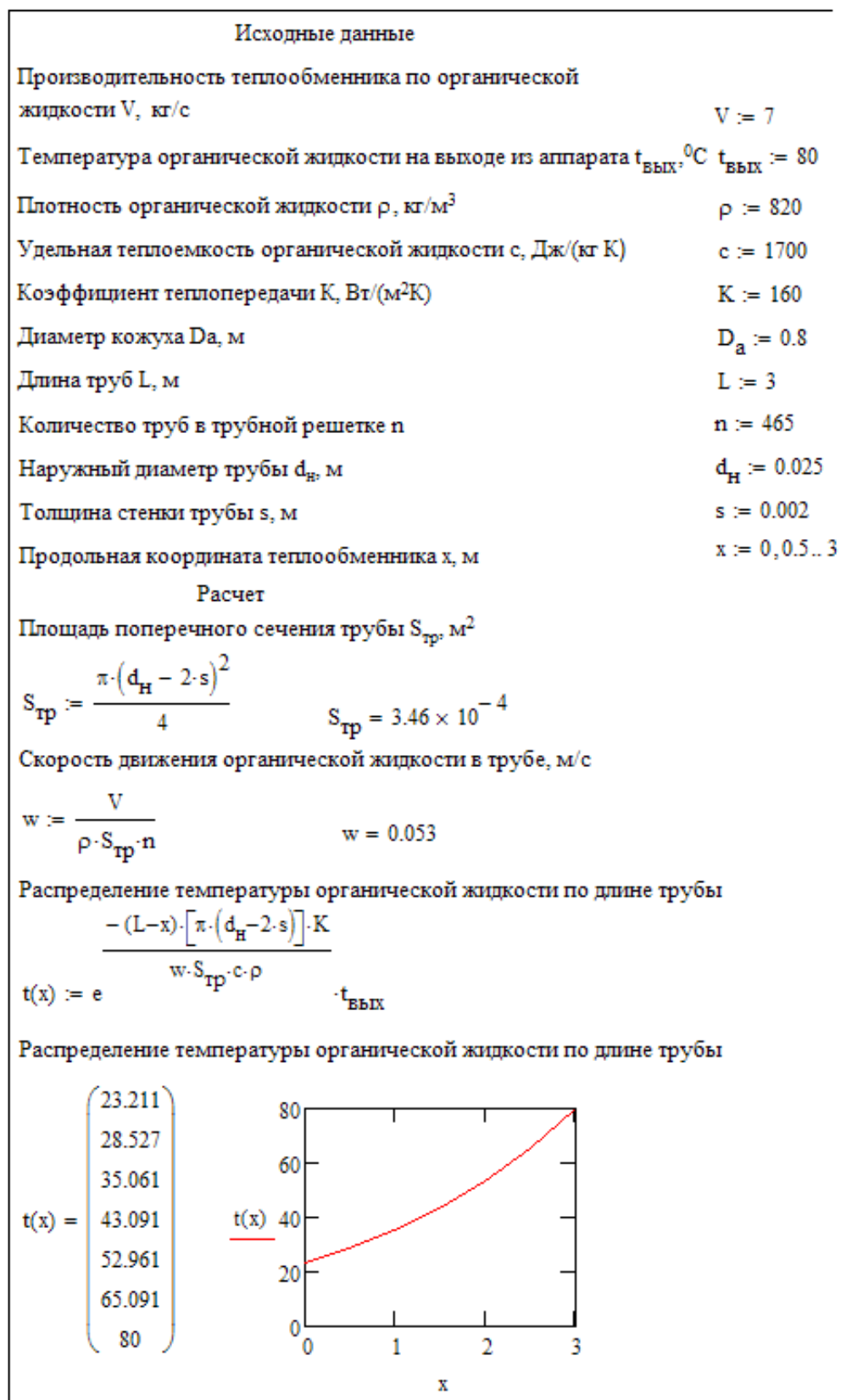


Рис. 4.5.2. Пример расчета кожухотрубчатого подогревателя

## Глава 5. Теплообмен при изменении агрегатного состояния вещества

### 5.1. Теплообмен при конденсации пара

Конденсация – это переход вещества из газообразного состояния в жидкое или твердое; фазовый переход первого рода.

В объеме пара (или парогазовой смеси) конденсация может происходить только при переохлаждении пара относительно температуры насыщения.

На несмачиваемых поверхностях жидкая фаза выпадает в виде отдельных капель (капельная конденсация), а на полностью смачиваемых – в виде пленок (пленочная конденсация).

Теплоотдача от конденсирующих паров зависит от режима течения пленки, физических свойств конденсата (плотности, вязкости, теплопроводности), шероховатости стенки, ее положения в пространстве, размеров и т.д.

Общее уравнение теплоотдачи при конденсации пара имеет вид:

$$Nu = f(Ga, Pr, K), \quad (5.1.1)$$

где  $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$  – критерий Нуссельта;  $Ga = \frac{gl^3}{\nu^2}$  – критерий Галилея;  $K = \frac{r}{c_p \Delta t}$  –

критерий, характеризующий изменение агрегатного состояния вещества (критерий конденсации);  $c_p$  – изобарная теплоемкость конденсата;  $r$  – теплота конденсации;  $\Delta t = t_{\text{конд}} - t_{\text{ст}}$  – температурный напор;  $t_{\text{конд}}$  – температура конденсата;  $t_{\text{ст}}$  – температура стенки.

Критерий конденсации  $K$  есть мера отношения теплового потока, затрачиваемого на фазовое превращение, к теплоте перегрева или переохлаждения фазы при температуре ее насыщения.

При ламинарном стекании пленки конденсата по вертикальной поверхности уравнение для расчета теплоотдачи имеет вид:

$$\alpha = 2,04A \frac{r}{H \Delta t} \quad (Re_{пл} < 100), \quad (5.1.2)$$

где  $H$  – высота вертикальной стенки;  $A = \sqrt{\frac{\rho_{ж}^2 \lambda_{ж}^3}{\mu_{ж}}}$  – коэффициент;  $Re_{пл} = \frac{ql}{r\mu_{ж}}$

– критерий Рейнольдса для пленки жидкости.

Коэффициент теплоотдачи при конденсации пара на горизонтальной поверхности определяется по уравнению:

$$\alpha = 1,28A \left( \frac{r}{d_H \Delta t} \right), \quad (Re_{пл}^* < 50), \quad (5.1.3)$$

где  $d_H$  – наружный диаметр трубы;  $Re_{пл}^* = \frac{\pi d_H z q}{2r\mu_{ж}}$ .

Здесь  $z = 1$  для единичной трубы.

## 5.2. Теплообмен при кипении

*Кипение* – это процесс перехода жидкости в пар внутри её объема.

В жидкости образуются паровые пузырьки, которые при определенных условиях сливаются в паровые пленки или струи.

Различают кипение жидкости поверхностное и объемное.

Поверхностное кипение происходит при температуре поверхности выше температуры кипящей жидкости.

Объемное кипение происходит при перегреве жидкости относительно температуры насыщения при данном давлении.

Пузырьки пара зарождаются только на обогреваемой поверхности в перегретом пограничном слое жидкости в центрах парообразования.

При кипении на поверхности возможны два основных режима:

а) пузырьковый (ядерный) – пар возникает в виде цепочек пузырей на отдельных центрах кипения;

б) пленочный – жидкость отделяется от поверхности нагрева

сплошной паровой пленкой.

Переход от пузырькового кипения к пленочному происходит при достижении критического температурного напора  $\Delta t_{кр}$  (рис. 5.2.1).

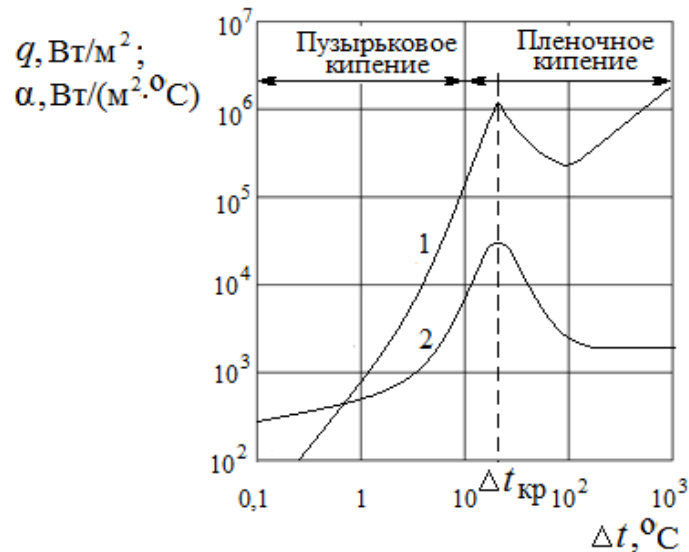


Рис. 5.2.1. Зависимости  $q = f(\Delta t)$  (1) и  $\alpha = f(\Delta t)$  (2) для кипящей воды при  $p = 10,1 \cdot 10^4$  Па

Для пузырькового (ядерного) кипения при естественной конвекции и в большом объеме величины коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  и критического теплового потока  $q_{кр}$  могут быть определены по уравнениям:

$$\alpha = 0,008 \left( \frac{\rho_{\Pi} r}{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Pi}} \right)^{0,033} \left( \frac{\rho_{\text{ж}}}{\sigma} \right)^{0,033} \frac{\lambda_{\text{ж}}^{0,75} q_{\text{ж}}^{0,75}}{\mu_{\text{ж}}^{0,45} c_{\text{ж}}^{0,117} T_{\text{нас}}^{0,37}}; \quad (5.2.1)$$

$$q_{кр} = 5466 \frac{\lambda_{\text{ж}}^{0,4} (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Pi})^{0,48} (\rho_{\Pi} r)^{0,36} T_{\text{нас}}^{0,32} \sigma^{0,21}}{\rho_{\text{ж}}^{0,31} \mu_{\text{ж}}^{0,45} c_{\text{ж}}^{0,117}}, \quad (5.2.2)$$

где  $\rho_{\Pi}$  и  $\rho_{\text{ж}}$  – соответственно плотность пара и жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $r$  – теплота парообразования,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\text{н}/\text{м}$ ;  $\lambda_{\text{ж}}$  – теплопроводность жидкости,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;  $\mu_{\text{ж}}$  – динамическая вязкость жидкости,  $\text{н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ ;  $c_{\text{ж}}$  – удельная теплоемкость жидкости,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $T_{\text{нас}}$  – абсолютная температура насыщенного пара, К.



## Глава 6. Массообменные процессы

### 6.1. Общие сведения о массообменных процессах

Массообмен – перенос вещества из одной фазы в другую в неравновесных бинарных или многокомпонентных системах.

Способы выражения состава фаз:

1) в объемных концентрациях – число килограммов (киломолей) данного компонента, приходящееся на единицу объема фазы,  $\text{кг/м}^3$ ,  $\text{кмоль/м}^3$ ;

2) в весовых или мольных долях – отношение килограммов (киломолей) данного компонента, выраженное общим числом килограммов (киломолей);

3) в относительных концентрациях – отношение килограммов (киломолей) данного компонента к числу килограммов (киломолей) другого компонента – носителя.

Движущей силой массообмена является разность концентрации распределяемого компонента в рабочем и равновесном состояниях системы:

$$\Delta y = y^* - y, \quad (6.1.1)$$

где  $y^*$  и  $y$  – равновесная и рабочая концентрации компонента соответственно.

Перенос вещества внутри фазы происходит путем молекулярной, конвективной и турбулентной диффузии.

Молекулярная диффузия – это переход распределяемого вещества из одной точки данной фазы в другую, обусловленный молекулярным движением.

Молекулярная диффузия описывается первым законом Фика. Количество вещества  $dM$ , продиффундировавшего за время  $d\tau$  через элементарную поверхность  $dF$ , нормальную к направлению диффузии, пропорционально градиенту концентрации  $dC/dn$  этого вещества:

$$dM = -D dF d\tau \frac{dC}{dn} \quad (6.1.2)$$

или

$$M = -DF\tau \frac{dC}{dn}, \quad (6.1.3)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с.

Удельный диффузионный поток вещества  $q_M$ , переносимый молекулярной диффузией, определяется по уравнению:

$$q_M = \frac{M}{F\tau} = -D \frac{dC}{dn}. \quad (6.1.4)$$

Направление диффузионного потока противоположно направлению вектора градиента концентрации, т.е. диффузионный поток идет от области с более высокой концентрацией к области низкой концентрации.

Турбулентная диффузия – это процесс переноса вещества при вихревом движении газа или жидкости.

Для описания турбулентного переноса вещества используют коэффициент турбулентной диффузии  $E_M$ , определяемый из соотношения:

$$dM_T = -E_M dF d\tau \frac{dC}{dn}, \quad (6.1.5)$$

где  $E_M$  – коэффициент турбулентной диффузии, м<sup>2</sup>/с.

Удельный поток вещества, переносимый турбулентной диффузией (скорость турбулентной диффузии), определяется по формуле:

$$q_T = \frac{M_T}{F\tau} = -E_T \frac{dC}{dn}. \quad (6.1.6)$$

Коэффициент турбулентной диффузии  $E_M$  не является физической константой. Он зависит от гидродинамических условий.

Конвективный перенос вещества происходит вследствие макроскопического движения среды.

Скорость конвективного переноса вещества вместе с самой средой в направлении, совпадающем с направлением общего потока, равна

$$q_k = C\omega, \quad (6.1.7)$$

где  $\omega$  – скорость потока жидкости, газа или пара, м/с;  $C$  – концентрация, кг/м<sup>3</sup>.

## 6.2. Дифференциальное уравнение молекулярной диффузии

Пусть точки некоторого твердого тела имеют различную концентрацию  $C(x,y,z)$ . В теле будет происходить процесс переноса вещества за счет молекулярной диффузии. Выделим в теле бесконечно малый объем  $dV$ , ограниченный поверхностью  $dF$  (рис. 6.2.1).

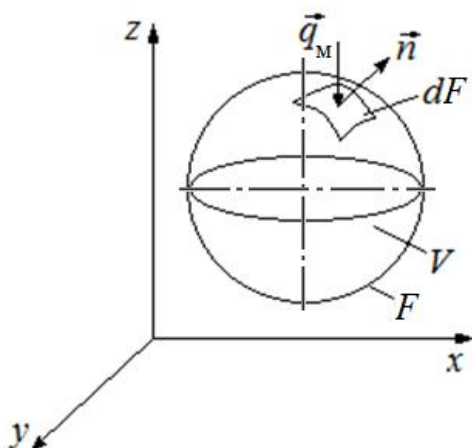


Рис. 6.2.1. К выводу дифференциального уравнения молекулярной диффузии

Количество вещества, поступающее в объем  $dV$ , можно определить интегрированием плотности потока  $q_M$  по замкнутой поверхности  $F$ , ограничивающей этот объем:

$$d^2 M' = - \int_F q_M n dF d\tau . \quad (6.2.1)$$

С другой стороны, это приращение массы вещества приводит к увеличению его содержания в объеме:

$$dM^* = \int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV d\tau . \quad (6.2.2)$$

Запишем материальный баланс для объема  $dV$  по веществу:

$$dM' = dM^* . \quad (6.2.3)$$

Получаем

$$- \int_F q_M n dF d\tau = \int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV d\tau . \quad (6.2.4)$$

Применяя к левой части равенства (6.2.4) формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div}(q_M) dV = \int_F q_M n dF. \quad (6.2.5)$$

Получаем

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV = \int_V \operatorname{div}(q_M) dV. \quad (6.2.6)$$

Учтем, что плотность потока вещества в соответствии с законом Фика определяется уравнением (6.1.5). В силу произвольности взятого нами объема  $dV$  следует, что подинтегральное выражение должно быть равно нулю

$$\int_V \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) \right] dV = 0. \quad (6.2.7)$$

Тогда

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C). \quad (6.2.8)$$

Считая  $D = \text{const}$ , получаем:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (6.2.9)$$

Уравнение (6.2.9) представляет собой дифференциальное уравнение молекулярной диффузии.

### **6.3. Дифференциальное уравнение массообмена в движущейся среде**

В движущейся среде перенос вещества осуществляется двумя механизмами: конвекцией и молекулярной диффузией.

Выделим в движущейся среде физически бесконечно малый объем  $dV$ , в который через элемент поверхности  $dF$  поступает поток массы, переносимый за счет конвекции и молекулярной диффузии (рис. 6.3.1).

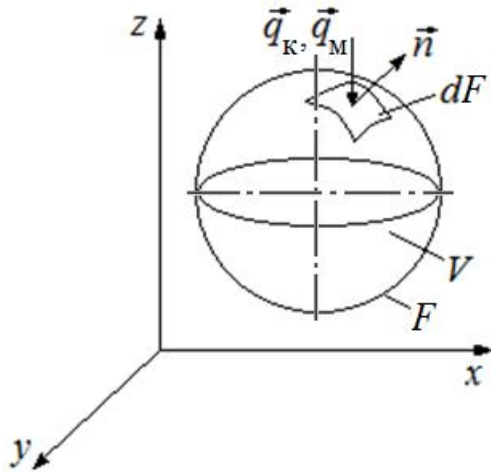


Рис. 6.3.1. К выводу дифференциального уравнения конвективного массообмена

Количество вещества, вошедшее в объем за время  $d\tau$ , равно:

$$d^2 M' = -(q_k + q_m) n dS d\tau. \quad (6.3.1)$$

где  $q_k, q_m$  – векторы плотности потоков вещества конвекцией и диффузией;  $n$  – единичный орт.

Проинтегрируем уравнение (6.3.1) по поверхности  $F$ :

$$dM' = - \int_F (q_k + q_m) n dF d\tau \quad (6.3.2)$$

и воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$\int_F (q_k + q_m) n dF = \int_V \text{div}(q_k + q_m) dV. \quad (6.3.3)$$

Запишем уравнение (6.3.2) с учетом (6.3.3):

$$dM' = - \int_V \text{div}(q_k + q_m) dV d\tau. \quad (6.3.4)$$

С другой стороны, приращение массы вещества приводит к изменению его содержания в объеме:

$$dM^* = \int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (6.3.5)$$

Составим уравнение материального баланса:

$$dM' = dM^*. \quad (6.3.6)$$

Получаем

$$-\int_V \operatorname{div}(q_K + q_M) dV d\tau = \int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (6.3.7)$$

Откуда

$$\int_V \left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} + \operatorname{div}(q_K + q_M) \right] dV d\tau = 0. \quad (6.3.8)$$

Учтем

$$q_M = -D \operatorname{grad} C, \quad (6.3.9)$$

$$q_K = \omega C. \quad (6.3.10)$$

Так как объем  $dV$  выбран произвольно, то равенство нулю интеграла означает, что

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(\omega C) = 0 \quad (6.3.11)$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial C}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial C}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial C}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (6.3.12)$$

Уравнение (6.3.12) представляет собой дифференциальное уравнение конвективной диффузии.

## 6.4. Равновесие при массообмене

Правило фаз:

$$\Phi + C = K + 2, \quad (6.4.1)$$

где  $\Phi$  – число фаз;  $C$  – число степеней свободы, т.е. число независимых способов, которыми можно изменить состояние системы без нарушения числа фаз в системе (инвариантность системы);  $K$  – число компонентов системы.

Правило фаз указывает число параметров, которые можно изменить произвольно при расчете равновесия в процессах массообмена.

Фазовое равновесие – это сосуществование термодинамически равновесных фаз, образующих гетерогенную систему.

При равновесии не происходит видимого перехода вещества из одной фазы в другую. В самом общем виде связь между концентрациями распределяемого вещества в фазах при равновесии выражается зависимостью:

$$\bar{y}^* = f(\bar{x}) \quad (6.4.2)$$

или

$$\bar{x}^* = f(\bar{y}), \quad (6.4.23)$$

где  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – концентрация распределяемого вещества соответственно в фазе  $\Phi_x$  и фазе  $\Phi_y$ ;  $x^*$ ,  $y^*$  – равновесная концентрация распределяемого вещества соответственно в фазе  $\Phi_x$  и фазе  $\Phi_y$ .

Зависимости (6.4.2) и (6.4.3) изображаются графически линией равновесия (рис. 6.4.1).

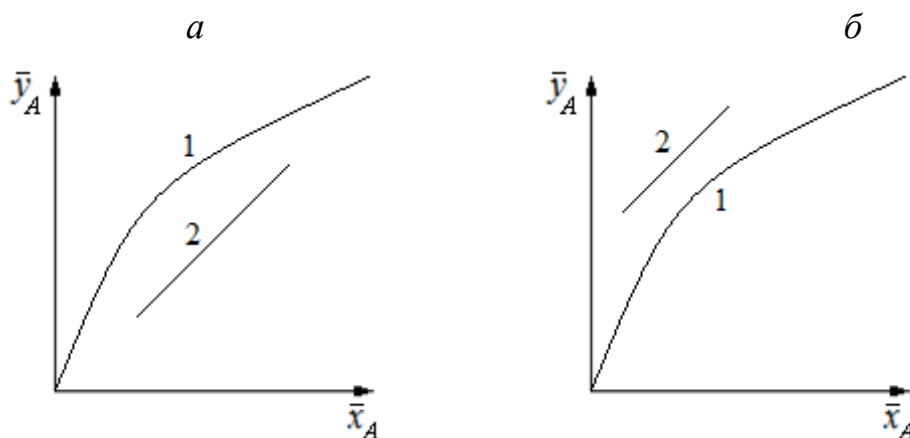


Рис. 6.4.1.  $y$ - $x$  диаграммы:

1 – равновесная линия  $\bar{y}^* = f(\bar{x})$ ; 2 – рабочая линия  $\bar{y} = f(\bar{x})$

Зависимость между рабочими концентрациями распределяемого вещества в фазах  $\bar{y} = f(\bar{x})$  изображается линией, которая называется рабочей линией (рис. 6.4.1).

По расположению рабочей и равновесной линий на фазовой диаграмме можно определить направление массопередачи. Если рабочая линия ниже линии равновесия (рис. 6.4.1, а), то вещество будет переходить из фазы  $\Phi_x$  в

фазу  $\Phi_y$ . Если же рабочая линия располагается выше линии равновесия (рис. 6.4.1, б), то распределяемый компонент будет переходить из фазы  $\Phi_y$  в фазу  $\Phi_x$ .

## 6.5. Уравнения массопередачи и массоотдачи

Пусть разделяемое вещество переходит из фазы  $\Phi_y$  в фазу  $\Phi_x$ . Количество вещества  $M$ , переносимое в единицу времени в каждой из фаз к границе фазы или в обратном направлении, определяется уравнением массоотдачи:

$$\text{для фазы } \Phi_y: M = \beta_y F (\bar{y} - \bar{y}_{\text{Гр}}), \quad (6.5.1)$$

$$\text{для фазы } \Phi_x: M = \beta_x F (\bar{x}_{\text{Гр}} - \bar{x}), \quad (6.5.2)$$

где  $F$  – площадь поверхности раздела фаз,  $\text{м}^2$ ;  $\beta_y, \beta_x$  – коэффициент массоотдачи,  $\text{м/с}$ .

Коэффициент массоотдачи  $\beta$  показывает, какое количество вещества переходит от поверхности раздела фаз в ядро фазы (или в обратном направлении) через единицу поверхности в единицу времени при движущей силе, равной единице.

Коэффициент  $\beta$  – это кинетическая характеристика, зависящая от свойств среды, гидродинамических условий и геометрических факторов, определяемых конструкцией и размерами массообменных аппаратов.

Основное уравнение массопередачи определяет количество  $M$  вещества, переносимое из фазы в фазу в единицу времени:

$$\text{для фазы } \Phi_y: M = K_y F (\bar{y} - \bar{y}_p), \quad (6.5.3)$$

$$\text{для фазы } \Phi_x: M = K_x F (\bar{x}_p - \bar{x}), \quad (6.5.4)$$

где  $\bar{y}_p, \bar{x}_p$  – равновесные концентрации распределяемого вещества в ядре соответствующих фаз,  $K_x, K_y$  – коэффициенты массопередачи,  $\text{м/с}$ .

Коэффициент массопередачи показывает, какое количество вещества переходит из фазы в фазу за единицу времени через единицу поверхности контакта фаз при движущей силе массопередачи, равной единице.



Концентрации фаз изменяются при их движении вдоль поверхности раздела фаз. Соответственно изменяется движущая сила массопередачи. Поэтому в уравнение массопередачи вводят величины средней движущей силы  $\Delta y_{\text{ср}}$  и  $\Delta x_{\text{ср}}$ :

$$\text{для фазы } \Phi_y: M = K_y F \Delta y_{\text{ср}}, \quad (6.5.5)$$

$$\text{для фазы } \Phi_x: M = K_x F \Delta x_{\text{ср}}. \quad (6.5.6)$$

Коэффициенты массопередачи и массоотдачи связаны между собой соотношением:

$$\text{для фазы } \Phi_y: K_y = \frac{1}{\frac{1}{\beta_y} + \frac{m}{\beta_x}}, \quad (6.5.7)$$

$$\text{для фазы } \Phi_x: K_x = \frac{1}{\frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_y m}}, \quad (6.5.8)$$

где  $m = \bar{y}^* / \bar{x}$  – коэффициент распределения.

## 6.6. Движущая сила массопередачи

Величина движущей силы процесса массопередачи зависит от взаимного направления движения фаз и вида их контакта. Обычно концентрации фаз изменяются при их движении вдоль поверхности раздела. Поэтому в общем уравнение массопередачи входит величина средней движущей силы.

Рассмотрим процесс массопередачи в противоточном колонном аппарате (рис. 6.6.1) при следующих условиях: 1) линия равновесия описывается уравнением (6.4.1); 2) расходы фаз постоянны ( $G = \text{const}$  и  $L = \text{const}$ ); 3) коэффициенты массопередачи постоянны ( $K_x = \text{const}$ ,  $K_y = \text{const}$ ).

Перенос массы происходит из фазы  $\Phi_y$  в фазу  $\Phi_x$ . Движущую силу будем выражать в концентрациях фазы  $\Phi_y$ .

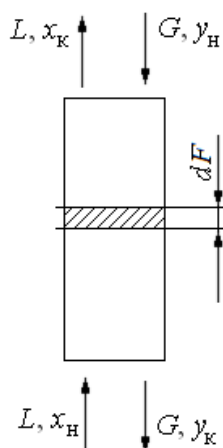


Рис. 6.6.1. Схема движения фаз в противоточном массообменном аппарате

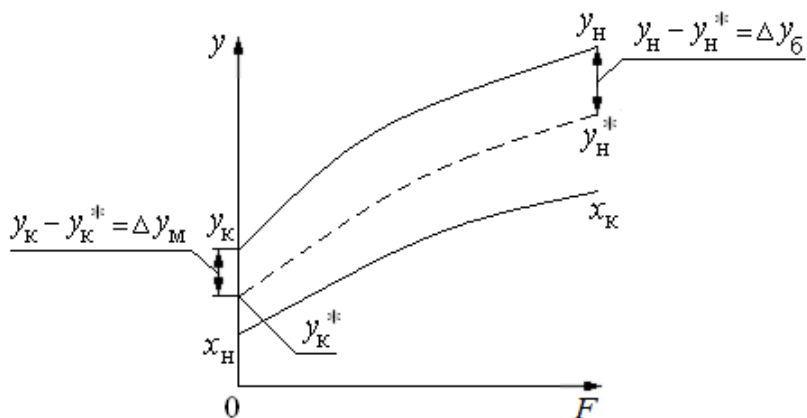


Рис. 6.6.2. К определению средней движущей силы процесса массообмена

Выделим в аппарате элемент поверхности  $dF$ . Концентрация фазы  $\Phi_y$  в элементе поверхности  $dF$  уменьшится на величину  $dy$ . Количество распределяемого вещества  $dM$ , переходящего в другую фазу, составит:

$$dM = -Gdy. \quad (6.6.1)$$

Знак минус перед правой частью уравнения (6.6.1) указывает на уменьшение концентрации в фазе  $\Phi_y$ .

Воспользовавшись уравнением массопередачи, можно записать:

$$dM = -Gdy = K_y(y - y^*)dF. \quad (6.6.2)$$

Разделяя переменные  $y$  и  $F$  и интегрируя, получим:

$$-\int_{y_H}^{y_K} \frac{dy}{y - y^*} = \int_0^F \frac{K_y}{G} dF. \quad (6.6.3)$$

Составим уравнение материального баланса для всего аппарата:

$$M = K_y(y_H - y_K). \quad (6.6.4)$$

Выразим из уравнения (6.6.4) значение  $G$  и, подставляя его в уравнение (6.6.3), после преобразования получим:

$$M = K_y F \frac{y_H - y_K}{\int_{y_H}^{y_K} \frac{dy}{y - y^*}} = K_y F \Delta y_{cp}, \quad (6.6.5)$$

где  $\Delta y_{\text{cp}} = \frac{y_{\text{H}} - y_{\text{K}}}{\int_{y_{\text{H}}}^{y_{\text{K}}} \frac{dy}{y - y^*}}$  – средняя движущая сила процесса массопередачи.

Аналогично выражается средняя движущая сила в концентрациях фазы  $\Phi_x$ :

$$\Delta x_{\text{cp}} = \frac{x_{\text{H}} - x_{\text{K}}}{\int_{x_{\text{H}}}^{x_{\text{K}}} \frac{dx}{x - x^*}}. \quad (6.6.6)$$

В частном случае, когда линия равновесия является прямой ( $y^* = mx$ ), средняя движущая сила процесса определяется уравнением:

$$\Delta y_{\text{cp}} = \frac{\Delta y_{\text{б}} - \Delta y_{\text{м}}}{\ln \frac{\Delta y_{\text{б}}}{\Delta y_{\text{м}}}}, \quad (6.6.7)$$

где  $\Delta y_{\text{б}}$  – движущая сила процесса массопередачи на том конце аппарата, где она больше, а величина  $\Delta y_{\text{м}}$  – на другом конце аппарата, где она меньше. Аналогично в концентрациях фазы  $\Phi_x$  имеем:

$$\Delta x_{\text{cp}} = \frac{\Delta x_{\text{б}} - \Delta x_{\text{м}}}{\ln \frac{\Delta x_{\text{б}}}{\Delta x_{\text{м}}}}, \quad (6.6.8)$$

## 6.7. Подобие процессов переноса массы

Метод теории подобия позволяет найти связь между переменными, характеризующими процесс переноса массы вещества в потоке фазы, в виде обобщенного (критериального) уравнения массоотдачи.

Числа подобия массообменных процессов имеют структуру, аналогичную структуре чисел подобия процессов теплообмена.

Диффузионный критерий Нуссельта:

$$Nu^* = \frac{\beta l}{D}. \quad (6.7.1)$$

Диффузионный критерий  $Nu^*$  выражает отношение интенсивности переноса в ядре фазы к интенсивности переноса в диффузионном пограничном подслое, где она определяется молекулярной диффузией.

Диффузионный критерий Фурье:

$$Fo^* = \frac{D\tau}{l^2}. \quad (6.7.2)$$

Диффузионный критерий  $Fo^*$  характеризует постоянство отношения изменения концентрации во времени к изменению концентрации за счет молекулярного переноса.

Диффузионный критерий Пекле:

$$Pe^* = \frac{\omega l}{D}. \quad (6.7.3)$$

Диффузионный критерий  $Pe^*$  выражает меру отношения массы вещества, переносимой за счет конвективного переноса и молекулярной диффузии.

Диффузионный критерий Прандтля:

$$Pr^* = \frac{\nu}{D}. \quad (6.7.4)$$

Диффузионный критерий  $Pr^*$  выражает отношения физических свойств жидкости (газа) в сходственных точках подобных потоков.

Кроме массообменных критериев, подобие процессов массопередачи определяется гидродинамическим и геометрическим подобием. Поскольку определяемым критерием является критерий Нуссельта, то общая функциональная зависимость  $Nu^*$  от определяющих критериев и симплексов подобия может быть записана в виде:

$$Nu^* = f(Fo^*, Pe^*, Re, Fr, \Gamma_1, \Gamma_2 \dots). \quad (6.7.5)$$

Уравнение (6.7.5) называется обобщенным (критериальным) уравнением массоотдачи.

## Глава 7. Массообмен в аппаратах химической технологии

### 7.1. Непрерывный процесс абсорбции в насадочном аппарате

В насадочной колонне (рис. 7.1.1) проходит непрерывный процесс абсорбции. Газ, содержащий целевой компонент, движется снизу вверх, а в противоположном ему направлении движется жидкость–поглотитель.

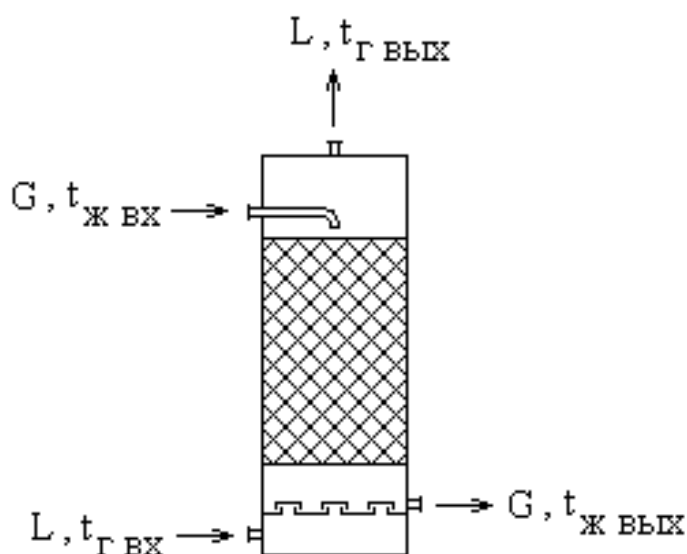


Рис. 7.1.1. Схема движения фаз в насадочном абсорбере

Полагаем, что аппарат работает в стационарном режиме. Равновесие процесса описывается линейным уравнением изотермы Генри. Структура потоков газовой и жидкой фаз описывается диффузионной моделью. Примем также, что движение жидкости совпадает с направлением аксиальной координаты  $0x$ . Тогда с учетом сделанных допущений математическое описание процесса может быть записано следующей системой уравнений.

Уравнение материального баланса по газовой фазе:

$$-v \frac{d\theta_G}{dx} - K_G(\theta_{G_{вх}} - \theta_{G_p}) + D_G \frac{d^2\theta_G}{dx^2} = 0. \quad (7.1.1)$$

Уравнение материального баланса по жидкой фазе:

$$-w \frac{d\theta_L}{dx} + K_G(\theta_{G\text{вх}} - \theta_{G\text{р}}) + D_L \frac{d^2\theta_L}{dx^2} = 0. \quad (7.1.2)$$

Уравнение равновесия:

$$\theta_G = \Gamma \theta_L. \quad (7.1.3)$$

Граничные условия (по Данквертсу):

$$v\theta_{G\text{вх}} = v\theta_G|_{x=H} + D_G \frac{d\theta_G}{dx} \Big|_{x=H}; \quad (7.1.4)$$

$$\frac{d\theta_G}{dx} \Big|_{x=0} = 0; \quad (7.1.5)$$

$$w\theta_{L\text{вх}} = w\theta_L|_{x=0} - D_L \frac{d\theta_L}{dx} \Big|_{x=0}; \quad (7.1.6)$$

$$\frac{d\theta_L}{dx} \Big|_{x=H} = 0. \quad (7.1.7)$$

Здесь  $\theta_G$  и  $\theta_L$  – концентрации целевого компонента в газе и жидкости;  $\theta_{G\text{р}}$  – равновесная концентрация целевого компонента в газе;  $v$  и  $w$  – скорость потока газа и жидкости;  $K_G$  – коэффициент массопередачи;  $\Gamma$  – постоянная Генри;  $x$  – продольная координата;  $H$  – высота насадки; индексы: вх – входящий, вых – выходящий.

Для нахождения функций  $\theta_G(x)$  и  $\theta_L(x)$  достаточно решить одно уравнение (7.1.2). Функцию  $\theta_G(x)$ , после того как найдена функция  $\theta_L(x)$ , можно найти из уравнения материального баланса:

$$G(\theta_{G\text{вх}} - \theta_G) = L(\theta_{L\text{вых}} - \theta_L), \quad (7.1.8)$$

где  $G$  и  $L$  – массовые расходы газа и жидкости.

Используем в уравнении материального баланса (7.1.2) уравнение равновесия (7.1.3) и введем следующие переменные:

$$N = \theta_{L\text{вх}} - \theta_L; \quad Pe = \frac{wH}{D_L}; \quad E = \frac{K_G H \Gamma}{D_L}; \quad z = \frac{x}{H}. \quad (7.1.9)$$

Уравнение материального баланса по жидкой фазе и соответствующие граничные условия примут вид:

$$\frac{d^2 N}{dz^2} - Pe \frac{dN}{dz} - EN = 0; \quad (7.1.10)$$

$$N_{\text{ВХ}} = N|_{z=0} - \frac{1}{Pe} \frac{dN}{dz} \Big|_{z=0}; \quad (7.1.11)$$

$$\frac{dN}{dz} \Big|_{z=1} = 0. \quad (7.1.12)$$

Общее решение дифференциального уравнения (7.1.10) имеет вид:

$$N = A_1 e^{r_1 z} + A_2 e^{r_2 z}, \quad (7.1.13)$$

где  $r_1, r_2$  – корни характеристического уравнения:

$$r^2 - Pe r - E = 0, \quad (7.1.14)$$

т.е.

$$r_{1,2} = \frac{Pe}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + E}. \quad (7.1.15)$$

Константы  $A_1$  и  $A_2$  найдем, используя граничные условия.

Подстановка  $z=0$  и  $N=1$  в (7.1.11) дает:

$$A_1 + A_2 - \frac{1}{Pe} (r_1 A_1 + r_2 A_2) = N_{\text{ВХ}}. \quad (7.1.16)$$

Удовлетворим решение (7.1.10) условию (7.1.12):

$$r_1 A_1 e^{r_1} + r_2 A_2 e^{r_2} = 0. \quad (7.1.17)$$

Решая совместно уравнения (7.1.16) и (7.1.17), находим:

$$A_1 = - \frac{N_{\text{ВХ}} r_2 e^{r_2}}{r_1 e^{r_1} \left( 1 - \frac{r_2 e^{r_2}}{r_1 e^{r_1}} + \frac{1}{Pe} \frac{r_2 e^{r_2}}{e^{r_1}} - \frac{1}{Pe} r_2 \right)}; \quad (7.1.18)$$

$$A_2 = \frac{N_{\text{ВХ}}}{1 - \frac{r_2 e^{r_2}}{r_1 e^{r_1}} + \frac{1}{Pe} \frac{r_2 e^{r_2}}{e^{r_1}} - \frac{1}{Pe} r_2}. \quad (7.1.19)$$

Подставим значения  $A_1$  и  $A_2$  в уравнение (7.1.13) и запишем решение задачи в прежних переменных:

$$\frac{\theta_{Lmax} - \theta_L}{\theta_{Lmax} - \theta_{LVX}} = \frac{e^{\frac{r_2 x}{H}} - \frac{r_2}{r_1} e^{\frac{r_2 - r_1 + r_1 x}{H}}}{1 - \frac{r_2 e^{r_2}}{r_1 e^{r_1}} + \frac{1}{Pe} \frac{r_2 e^{r_2}}{e^{r_1}} - \frac{1}{Pe} r_2}. \quad (7.1.20)$$

На рис. 7.1.2 представлен пример расчета кривых изменения концентрации целевого компонента в жидкой и газовой фазах по высоте насадочного абсорбера, выполненный в системе Mathcad.

Дано	
Объемный расход жидкости $L$ , м <sup>3</sup> /с	$L := 6 \cdot 10^{-3}$
Объемный расход газа $G$ , м <sup>3</sup> /с	$G := 1.6$
Высота насадки $H$ , м	$H := 3$
Диаметр аппарата $D_a$ , м	$D_a := 0.7$
Кэффициент продольной диффузии жидкости $D_x$ , м <sup>2</sup> /с	$D_x := 0.005$
Кэффициент массопередачи $K$ , 1/с	$K := 0.01$
Постоянная Генри $\Gamma$	$\Gamma := 2$
Координата $x$ , м	$x := 0, 0.1 \dots 3$
Решение	
Скорость потока жидкости, м/с	
$w := \frac{4L}{\pi \cdot D_a^2}$	$w = 0.016$
Число Пекле	
$Pe := \frac{w \cdot H}{D_x}$	$Pe = 9.354$
Расчет коэффициентов	
$r1 := \frac{Pe}{2} + \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + \frac{K \cdot H^2 \cdot \Gamma}{D_x}}$	$r1 = 12.285$
$r2 := \frac{Pe}{2} - \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + \frac{K \cdot H^2 \cdot \Gamma}{D_x}}$	$r2 = -2.93$



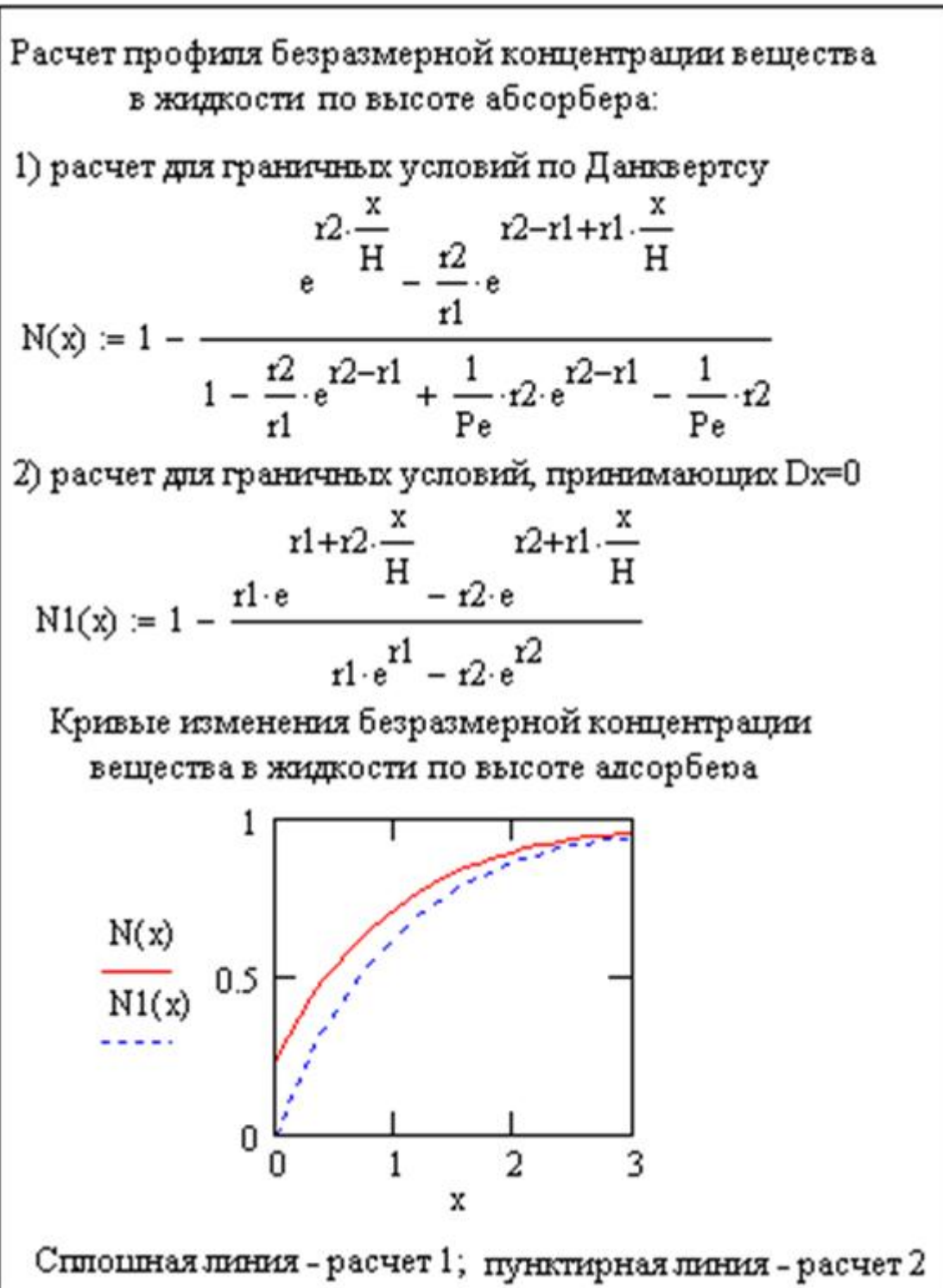


Рис. 7.1.2. Пример расчета насадочного абсорбера

Из приведенных на рис. 7.1.2 кривых видно, что концентрация целевого компонента в жидкости на входе в абсорбер в случае расчета при граничных условиях по Данквертсу уменьшается скачкообразно по причине влияния продольного перемешивания.

## 7.2. Ионный обмен в колонном аппарате с провальными тарелками

В колонном аппарате с секционированным взвешенным слоем ионита осуществляется непрерывный процесс ионообменной адсорбции ионов целевого компонента из раствора. Принцип работы аппарата наглядно виден из рис. 7.2.1, а.

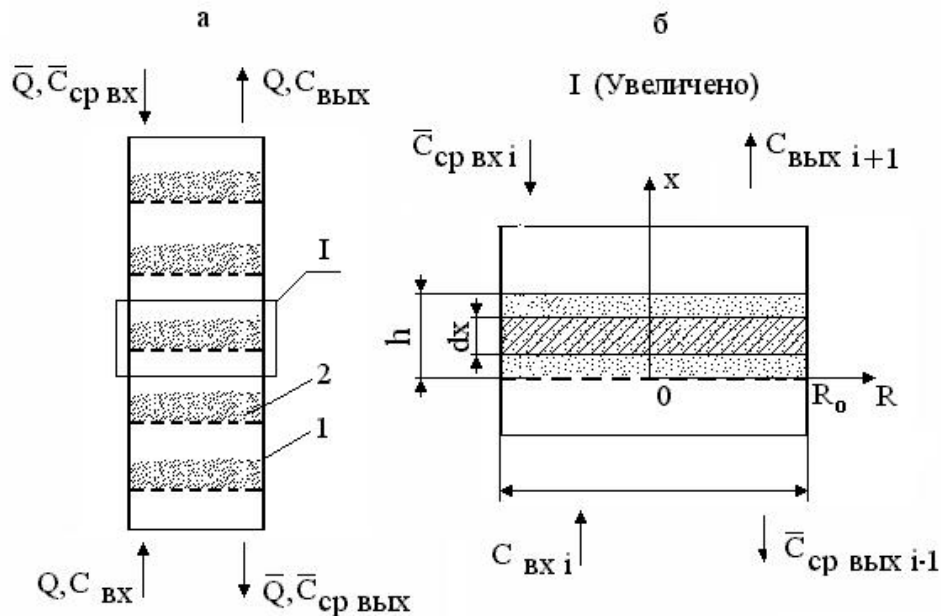


Рис. 7.2.1. Схема работы аппарата с провальными тарелками:

а – общий вид; б – схема движения фаз на тарелке;

1 – корпус; 2 – провальная тарелка

Примем следующие обозначения:  $a_0$  – обменная емкость ионита, кг-экв/м<sup>3</sup>;  $C$  – концентрация сорбируемого иона в растворе, кг-экв/м<sup>3</sup>;  $\bar{C}$  – концентрация сорбируемого иона в ионите, кг-экв/м<sup>3</sup>;  $\bar{D}$  – коэффициент диффузии в ионите, м<sup>2</sup>/с;  $D_x$  – коэффициент продольного перемешивания жидкой фазы, м<sup>2</sup>/с;  $\bar{D}_x$  – коэффициент продольного перемешивания твердой фазы, м<sup>2</sup>/с;  $D_r$  – коэффициент радиального перемешивания жидкой фазы, м<sup>2</sup>/с;  $\bar{D}_r$  – коэффициент радиального перемешивания твердой фазы, м<sup>2</sup>/с;  $D_a$  –

диаметр аппарата, м;  $d_3$  – диаметр зерна ионита, м;  $h$  – высота слоя ионита на тарелке, м;  $N_T$  – число тарелок;  $Q$  – расход раствора м<sup>3</sup>/с;  $\bar{Q}$  – расход ионита м<sup>3</sup>/с;  $r$  – радиальная координата внутри частицы, м;  $r_0$  – радиус частицы ионита, м;  $R$  – радиальная координата внутри аппарата, м;  $R_0$  – радиус аппарата, м;  $v$  – действительная скорость раствора, м/с;  $v_0$  – фиктивная скорость раствора, м/с;  $w$  – действительная скорость ионита, м/с;  $w_0$  – фиктивная скорость ионита, м/с;  $x$  – текущая координата по высоте слоя ионита, м;  $\alpha$  и  $\sigma$  – константы изотермы Фрейндлиха;  $\beta$  – коэффициент массотдачи в жидкой фазе, м/с;  $\varepsilon$  – порозность;  $\tau$  – время, с.

Для построения модели выделим в данном аппарате  $i$ -ю тарелку (рис. 7.2.1, б), для которой примем следующие допущения: ионит и раствор движутся в противоположных направлениях, движение потоков жидкой и твердой фаз описывается двухпараметрической диффузионной моделью, характеризующейся продольным и радиальным перемешиванием, скорость процесса лимитируется как внешней, так и внутренней диффузией, для описания равновесия ионного обмена используем уравнение изотермы Френдлиха.

Полагаем, что направление движения твердой фазы совпадает с направлением координаты  $Ox$ . Выделим в аппарате элемент высотой  $dx$  и составим для него уравнения материального баланса:

по жидкой фазе:

$$\varepsilon v \frac{\partial C(x, R)}{\partial x} - I_v - \varepsilon D_x \frac{\partial^2 C(x, R)}{\partial x^2} - \varepsilon D_r \left[ \frac{\partial^2 C(x, R)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial C(x, R)}{\partial R} \right] = 0; \quad (7.2.1)$$

твердой фазе:

$$-(1-\varepsilon)w \frac{\partial \bar{C}_{cp}(x, R)}{\partial x} + I_w + (1-\varepsilon)\bar{D}_x \frac{\partial^2 \bar{C}_{cp}(x, R)}{\partial x^2} + (1-\varepsilon)\bar{D}_r \left[ \frac{\partial^2 \bar{C}_{cp}(x, R)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{C}_{cp}(x, R)}{\partial R} \right] = 0. \quad (7.2.2)$$

В уравнениях (7.2.1) и (7.2.2) мощности источника (стока) вещества в движущихся потоках жидкой и твердой фаз, обусловленные межфазным массопереносом, связаны равенством:

$$I_v = -I_w = (1 - \varepsilon)w \frac{\partial \bar{C}_{\text{cp}}(x, R)}{\partial x}. \quad (7.2.3)$$

Уравнения (7.2.1) и (7.2.2) должны быть дополнены граничными условиями:

$$C(x, R)|_{x=0} = C_{\text{вх}}(R); \quad (7.2.4)$$

$$\left. \frac{\partial C(x, R)}{\partial x} \right|_{x=h} = 0; \quad (7.2.5)$$

$$\bar{C}_{\text{cp}}(x, R)|_{x=h} = \bar{C}_{\text{cp.вх}}(R); \quad (7.2.6)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{C}_{\text{cp}}(x, R)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (7.2.7)$$

$$\left. \frac{\partial C(x, R)}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ R=0}} = 0; \quad (7.2.8)$$

$$C(x, R)|_{\substack{x=0 \\ R=R_0}} = C_{\text{вх}}^{**} = \text{const}; \quad (7.2.9)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{C}_{\text{cp}}(x, R)}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ R=0}} = 0; \quad (7.2.10)$$

$$\bar{C}_{\text{cp}}(x, R)|_{\substack{x=h \\ R=0}} = \bar{C}_{\text{cp.вх}}^* = \text{const}, \quad (7.2.11)$$

где  $C_{\text{вх}}^*$ ,  $C_{\text{вх}}(R)$ ,  $C_{\text{вх}}^{**}$ ,  $\bar{C}_{\text{cp.вх}}^*$ ,  $\bar{C}_{\text{cp.вх}}(R)$ ,  $\bar{C}_{\text{cp.вх}}^{**}$ .

Для описания равновесия ионного обмена воспользуемся уравнением изотермы Фейндлиха:

$$\bar{C} = \sigma C^\alpha. \quad (7.2.12)$$

В качестве уравнения кинетики используем уравнения диффузии в зерне сферической формы:

$$\frac{\partial \bar{C}(r, x)}{\partial \tau} = \bar{D}_{\text{эф}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \bar{C}(r, \tau)}{\partial r} \right]. \quad (7.2.13)$$

Начальные и граничные условия к уравнению (7.2.13):

$$\bar{C}(r, \tau)|_{x=0} = \tilde{C}_{\text{ср. вх}}; \quad (7.2.14)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{C}(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (7.2.15)$$

$$\bar{D}_{\text{эф}} \left. \frac{\partial \bar{C}(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \beta [C_{\text{вх}} - C_p(\bar{C})], \quad (7.2.16)$$

где

$$\tilde{C}_{\text{ср. вх}} = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} R \bar{C}_{\text{ср. вх}}(h, R) dR. \quad (7.2.17)$$

Система уравнений (7.2.1)–(7.2.16) должна быть дополнена уравнением связи между средней концентрацией сорбируемого иона в частице  $\bar{C}_{\text{ср}}(x, R)$  и локальным её значением  $\bar{C}(x, R, r)$  на поверхности частицы:

$$w \frac{\partial \bar{C}_{\text{ср}}(x, R)}{\partial x} = 3 \frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{r_0} \left. \frac{\partial \bar{C}(x, R, r)}{\partial r} \right|_{r=r_0}. \quad (7.2.18)$$

Для решения системы уравнений (7.2.1) – (7.2.18) используем кусочно-итерационный метод [2]. Примем, что в пределах взвешенного слоя ионита высотой  $h$  на  $i$ -й тарелке имеет место постоянство кинетических параметров процесса и линейность изотермы адсорбции. Уравнение нелинейной изотермы Фрейндлиха (7.2.12) заменяется уравнением касательной к равновесной кривой  $\bar{C} = f(\bar{C})$  в точке с координатами  $(C_{\text{вх}i}; \bar{C}_{\text{pi}})$ :

$$\bar{C} - f(\bar{C}_{\text{вх}i}) = f'(\bar{C}_{\text{вх}i})(C - C_{\text{вх}i}). \quad (7.2.19)$$

В этом случае уравнение изотермы адсорбции примет вид:

$$\bar{C} = mC + u, \quad (7.2.20)$$

где  $m$  – угловой коэффициент;  $u$  – отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат.

Значения коэффициентов  $m$  и  $u$  в уравнении касательной (7.2.20) к нелинейной равновесной зависимости  $\bar{C} = f(C)$  рассчитываются по формулам:

$$m = \alpha \sigma C_{\text{вх}i}^{\alpha-1}; \quad (7.2.21)$$

$$u = \sigma C_{\text{ВХ}i}^{\alpha} (1 - \alpha). \quad (7.2.22)$$

Решение системы уравнений (7.2.13)–(7.2.16), (7.2.20) может быть получено аналитическими методами по аналогии с решением известной задачи теплопроводности в сферической частице для граничных условий третьего рода [3]. Осуществляя замену переменной по формуле:

$$\tau = \frac{x}{w}, \quad (7.2.23)$$

запишем решение системы уравнений (7.2.13)–(7.2.16), (7.2.20) в следующем виде:

$$\frac{\bar{C}_p - \bar{C}_i(r, x)}{\bar{C}_p} = \frac{2(\bar{C}_p - \bar{C}_{\text{ВХ}i})}{\bar{C}_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{\frac{r}{r_0}} e^{-\frac{\mu_n^2 \bar{D}_{\text{эф}} x}{r_0^2 w}}, \quad (7.2.24)$$

где  $\mu_n$  – корни трансцендентного уравнения:

$$\text{tg} \mu = -\frac{\mu}{Bi_m - 1}. \quad (7.2.25)$$

Для получения решения системы уравнений (7.2.1)–(7.2.11) относительно неизвестных функций  $C(x, R)$  и  $\bar{C}_{\text{ср}}(x, R)$  достаточно найти решение для одной функции  $C(x, R)$ , т.е. решить уравнение (7.2.1). Функция  $\bar{C}_{\text{ср}}(x, R)$ , после того как найдена функция  $C(x, R)$ , может быть легко получена из общего уравнения материального баланса. В дальнейшем вместо системы уравнений (7.2.1) и (7.2.2) будем рассматривать только уравнение материального баланса по жидкой фазе (7.2.1) с соответствующими граничными условиями.

Введем в рассмотрение новые переменные и безразмерные величины:

$$N_i = \frac{C_{\text{ВХ}}^* \Big|_{\substack{x=0 \\ R=0}} - C_i}{C_{\text{ВХ}}^* \Big|_{\substack{x=0 \\ R=0}}}; \quad \bar{N}_{\text{ср}i} = \frac{\bar{C}_p - \bar{C}_{\text{ср}i}}{\bar{C}_p}; \quad \bar{N}_{\text{ср.ВХ}} = \frac{\bar{C}_p - \bar{C}_{\text{ср.ВХ}}}{\bar{C}_p}; \quad \xi = \frac{r}{r_0};$$

$$\begin{aligned}
\iota &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}; \zeta = \frac{\bar{C}_p}{C_{\text{BX}}|_{\substack{x=0 \\ R=0}}}; \gamma = \frac{D_r}{D_x}; \chi = \frac{h^2}{r_o^2}; X = \frac{x\sqrt{D_{\text{эф}}}}{h\sqrt{D_x}}; L = \frac{R\sqrt{D_{\text{эф}}}}{h\sqrt{D_r}}; \\
L_o &= \frac{R_o\sqrt{D_{\text{эф}}}}{h\sqrt{D_r}}; E = \frac{\sqrt{D_{\text{эф}}D_x}h}{r_o^2w}; V = \frac{vh}{\sqrt{D_{\text{эф}}D_x}}; W = \frac{wh}{\sqrt{D_{\text{эф}}D_x}}; \quad (7.2.26)
\end{aligned}$$

Подставим в уравнение материального баланса (7.2.1) уравнение (7.2.3), а затем запишем его и соответствующие ему граничные условия в новых переменных (7.2.26):

$$\begin{aligned}
V \frac{\partial N_i(X, L)}{\partial X} - W \zeta \iota \frac{\partial \bar{N}_{i\text{cp}}(X, L)}{\partial X} - \frac{\partial^2 N_i(X, L)}{\partial X^2} - \\
-\gamma \left[ \frac{\partial^2 N_i(X, L)}{\partial L^2} - \frac{1}{L} \frac{\partial N_i(X, L)}{\partial L} \right] = 0; \quad (7.2.27)
\end{aligned}$$

$$N_i(X, L)|_{L=0} = N_{i\text{BX}}(L); \quad (7.2.28)$$

$$\left. \frac{\partial N_i(X, L)}{\partial X} \right|_{X=\sqrt{D_{\text{эф}}/D_x}} = 0; \quad (7.2.29)$$

$$N_i(X, L)|_{\substack{X=0 \\ L=0}} = N_{i\text{BX}}^*; \quad (7.2.30)$$

$$\left. \frac{\partial N(X, L)}{\partial X} \right|_{\substack{X=0 \\ L=0}} = 0; \quad (7.2.31)$$

$$W \frac{\partial \bar{N}_{i\text{cp}}(X, L)}{\partial X} = 3\chi \left. \frac{\partial \bar{N}_i(X, L, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}. \quad (7.2.32)$$

Преобразуем уравнение (7.2.27) для  $i$ -й тарелки. Полагаем, что в правой части решения (7.2.24) можно ограничиться первым слагаемым бесконечного ряда. С учетом этого подставим в правую часть уравнения (7.2.32) вместо  $\bar{N}(X, L, \xi)$  соответствующее выражение из решения (7.2.24) и продифференцируем уравнение (7.2.32) по  $\xi$ . Затем полученное таким образом новое уравнение подставим в уравнение материального баланса (7.2.27), которое для  $i$ -й тарелки может быть записано так:

$$V \frac{\partial N_i(X, L)}{\partial X} + A_1 e^{-\mu_1^2 EX} - \frac{\partial^2 N_i(X, L)}{\partial X^2} - \gamma \left[ \frac{\partial^2 N_i(X, L)}{\partial L^2} - \frac{1}{L} \frac{\partial N_i(X, L)}{\partial L} \right] = 0, \quad (7.2.33)$$

где  $A_1 = \frac{6\zeta_i \chi \iota \bar{N}_{\text{вх}i} (\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)^2}{\mu_1 (\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1)}$ .

Приведем уравнение (7.2.33) к более удобному виду. Для этого произведем замену функции  $N_i(X, L)$  на новую сначала по формуле:

$$N_i(X, L) = \theta_i(X, L) e^{-\mu_1^2 EX}, \quad (7.2.34)$$

а затем с учетом обозначений  $a = V + 2\mu_1^2 E$  и  $b = V\mu_1^2 E + \mu_1^4 E^2$  по формуле:

$$T_i(X, L) = \theta_i(X, L) - \frac{B_1}{b}. \quad (7.2.35)$$

В этом случае уравнение материального баланса (7.2.33) и соответствующие ему граничные условия (7.2.28) – (7.2.31) примут вид:

$$\gamma \left[ \frac{\partial^2 T_i(X, L)}{\partial L^2} + \frac{1}{L} \frac{\partial T_i(X, L)}{\partial L} \right] = - \frac{\partial^2 T_i(X, L)}{\partial X^2} + a \frac{\partial T_i(X, L)}{\partial X} - b T_i(X, L); \quad (7.2.36)$$

$$T_i(X, L) \Big|_{X=0} = T_{\text{вх}i}(L); \quad (7.2.37)$$

$$\frac{\partial T_i(X, L)}{\partial X} \Big|_{X=\sqrt{D_{\text{эф}}/D_x}} = 0; \quad (7.2.38)$$

$$\frac{\partial T_i(X, L)}{\partial X} \Big|_{\substack{X=0 \\ L=0}} = 0; \quad (7.2.39)$$

$$T_i(X, L) \Big|_{\substack{X=0 \\ L=L_0}} = T_{\text{вх}i}^{**}. \quad (7.2.40)$$

Решение системы уравнений (7.2.36) – (7.2.40) будем искать в виде:

$$T_i(X, L) = \psi_i(X) \Phi_i(L). \quad (7.2.41)$$

С учетом (7.2.41) в уравнении (7.2.36) разделим переменные и приравняем каждую часть равенства к постоянной  $-\gamma k^2$ . Получаем



$$\gamma \left[ \frac{\Phi_i''(L)}{\Phi_i(L)} + \frac{1}{L} \frac{\Phi_i'(L)}{\Phi_i(L)} \right] = - \frac{\Psi_i''(X)}{\Psi_i(X)} + a \frac{\Psi_i'(X)}{\Psi_i(X)} - b = -\gamma k^2 \quad (7.2.42)$$

В результате получим два дифференциальных уравнения:

$$\Phi_i''(L) + \frac{1}{L} \Phi_i'(L) + k^2 \Phi_i(L) = 0; \quad (7.2.43)$$

$$\Psi_i''(X) - a \Psi_i'(X) + (b - \gamma k^2) \Psi_i(X) = 0. \quad (7.2.44)$$

Решения уравнений (7.2.43) и (7.2.44) имеют соответственно вид:

$$\Phi_i(L) = C_1 J_0(kL) + C_2 Y_0(kL); \quad (7.2.45)$$

$$\Psi_i(X) = C_3 e^{-p_1 X} + C_4 e^{-p_2 X}, \quad (7.2.46)$$

где  $p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + \gamma k^2}$ ;  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения материального баланса (7.2.36) примет вид:

$$T_i(X, L) = [C_1 J_0(kL) + C_2 Y_0(kL)] (C_3 e^{-p_1 X} + C_4 e^{-p_2 X}). \quad (7.2.47)$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  находим из граничных условий (7.2.38) – (7.2.41).

Учитывая условие (7.2.40) находим, что  $C_2 = 0$ , т.к. концентрация на оси цилиндрического аппарата должна быть конечной и не может содержать Бесселеву функцию второго рода, которая стремится к бесконечности при  $L \rightarrow 0$ . Следовательно, из физических условий задачи постоянная  $C_2$  должна быть равна нулю. Получаем

$$T_i(X, L) = J_0(kL) (C_5 e^{-p_1 X} + C_6 e^{-p_2 X}), \quad (7.2.48)$$

где  $C_5 = C_1 C_3, C_6 = C_1 C_4$ .

Найдем постоянную  $k$  из граничного условия (7.2.40). Для упрощения расчетов положим  $T_{i\text{ВХ}}^{**} = 0$ . Тогда будем иметь:

$$T_{i\text{ВХ}}^* = J_0 k L_0 (C_5 + C_6) = 0. \quad (7.2.49)$$

Отсюда следует, что в процессе ионообменной сорбции должно иметь место равенство

$$J_0(kL_0)=0. \quad (7.2.50)$$

Данная функция имеет бесчисленное множество корней:

$$k_n L_0 = \sigma_n; \quad k_n = \frac{\sigma_n}{L_0}. \quad (7.2.51)$$

Таким образом, общее решение будет суммой всех частных решений

$$T_i(X, L) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n L) (C_{5n} e^{-p_1 X} + C_{6n} e^{-p_2 X}). \quad (7.2.52)$$

Постоянные  $C_{5n}$  и  $C_{6n}$  находим из условиями (7.2.37) и (7.2.38).

В соответствии с условием (7.2.37) получаем:

$$T_{\text{ВХ}i}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{7n} J_0(k_n L), \quad (7.2.53)$$

где  $C_{7n} = C_{5n} + C_{6n}$ .

Умножим обе части равенства (7.2.53) на  $LJ_0(k_m L)$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $L_0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} L T_{\text{ВХ}i}(L) J_0(k_m L) dL &= \int_0^{L_0} \sum_{n=1}^{\infty} C_{7n} L J_0(k_n L) J_0(k_m L) dL = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{7n} \int_0^{L_0} L J_0(k_n L) J_0(k_m L) dL. \end{aligned} \quad (7.2.54)$$

Все интегралы в правой части равенства (7.2.54) равны нулю за исключением одного, когда  $m = n$ . Получаем

$$\int_0^{L_0} L J_0^2(k_n L) dL = \frac{L_0^2}{2} J_1^2(k_n L_0). \quad (7.2.55)$$

Таким образом,

$$C_{7n} = \frac{2 \int_0^{L_0} L T_{\text{ВХ}i}(L) J_0(k_n L) dL}{J_1^2(k_n L_0)}. \quad (7.2.56)$$

Воспользуемся условием (7.2.38). Находим:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{X=\frac{\sqrt{D_{\text{эф}}}}{\sqrt{D_x}}} = - \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n L) \left( p_{1n} C_{5n} e^{-p_{1n} X} + p_{2n} C_{6n} e^{-p_{2n} X} \right) \Big|_{X=\frac{\sqrt{D_{\text{эф}}}}{\sqrt{D_x}}} = 0. \quad (7.2.57)$$

Поскольку  $J_0(k_n L) \neq 0$ , то получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( p_{1n} C_{5n} e^{-p_{1n} X} + p_{2n} C_{6n} e^{-p_{2n} X} \right) \Big|_{X=\frac{\sqrt{D_{\text{эф}}}}{\sqrt{D_x}}} = 0. \quad (7.2.58)$$

Далее, подставляя  $C_{5n} = C_{7n} - C_{6n}$  в уравнение (7.2.58) с учетом найденной постоянной  $C_{7n}$ , находим значение  $C_{6n}$ . Затем, зная  $C_{6n}$  и  $C_{7n}$ , нетрудно найти  $C_{5n}$ . Опуская несложные, но громоздкие вычисления, запишем окончательное решение искомой задачи в прежних переменных:

$$\begin{aligned} \frac{C_i(x, R)}{C_{\text{ВХ}i} \Big|_{x=0} \Big|_{R=0}} = & 1 - e^{-\frac{\mu_1^2 \bar{D}_{\text{эф}} x}{r_0^2 w}} \left\{ \frac{A_1}{b} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\sigma_n \frac{R}{R_0}\right) \left[ p_{1n} e^{-\sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}} \left(p_{1n} - p_{2n} \frac{x}{h}\right)} - p_{2n} e^{-\sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}} \left(p_{2n} - p_{1n} \frac{x}{h}\right)} \right]}{R_0^2 J_1^2(\sigma_n) \left[ p_{1n} e^{-p_{1n} \sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}}} - p_{2n} e^{-p_{2n} \sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}}} \right]} \int_0^R \frac{C_{\text{ВХ}i} \Big|_{x=0} - C_{\text{ВХ}i}(R)}{C_{\text{ВХ}i} \Big|_{x=0} \Big|_{R=0}} dR - \\ & \left. - \frac{A_1}{b} \right] J_0\left(\sigma_n \frac{R}{R_0}\right) dR \left. \right\}. \quad (7.2.59) \end{aligned}$$

Уравнение (7.2.59) позволяет рассчитать распределение концентрации сорбируемого иона в жидкой фазе в радиальном и продольном направлениях на  $i$ -й тарелке. Общая картина поля концентрации сорбируемого иона в растворе для аппарата в целом может быть получена в результате последовательного

решения всех задач (7.2.1) – (7.2.11), (7.2.19) и (7.2.24), составленных для всех тарелок аппарата.

Для определения средней концентрации раствора по высоте аппарата воспользуемся следующей формулой:

$$\tilde{C}_i(x) = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} R C_i(x, R) dR. \quad (7.2.60)$$

Подставляя решение (7.2.59) в формулу (7.2.60) и произведя интегрирование в пределах от 0 до  $R_0$ , получим:

$$\frac{\tilde{C}_i(x)}{C_{\text{ВХ}i}|_{x=0}} = 1 - e^{-\frac{\mu_1^2 \bar{D}_{\text{эф}} x}{r_0^2 w}} \left\{ \frac{A_1}{b} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \left[ p_{1n} e^{-\sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}} \left( p_{1n} - p_{2n} \frac{x}{h} \right)} - p_{2n} e^{-\sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}} \left( p_{2n} - p_{1n} \frac{x}{h} \right)} \right]}{R_0^2 \sigma_n J_1(\sigma_n) \left[ p_{1n} e^{-p_{1n} \sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}}} - p_{2n} e^{-p_{2n} \sqrt{\frac{\bar{D}_{\text{эф}}}{D_x}}} \right]} \int_0^{R_0} R \left[ \frac{C_{\text{ВХ}i}|_{x=0} - C_{\text{ВХ}i}(R)}{C_{\text{ВХ}i}|_{x=0}} - \frac{A_1}{b} \right] J_0 \left( \sigma_n \frac{R}{R_0} \right) dR \right\}. \quad (7.2.61)$$

Уравнение (7.2.61) позволяет рассчитать распределение концентрации целевого компонента в растворе по высоте кипящего слоя ионита, расположенного на тарелке.

Найдем параметры, входящие в уравнения (7.2.25), (7.2.59) и (7.2.61).

Коэффициент массоотдачи в жидкой фазе может быть найден по уравнению Гретца - Нуссельта [4]:

$$Sh = \frac{\beta d_r}{D} = -\frac{1}{2x_{\div}} \ln \left[ 8 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{G_n}{\lambda_n^2} \right) \exp \left( -x_{\div} \lambda_n^2 \right) \right]. \quad (7.2.62)$$

Здесь  $x_{\dot{z}} = \frac{2h}{d_r Re' Sc}$  – безразмерная продольная координата;  $Re' = \frac{v_{от} d_r}{\nu}$  –

число Рейнольдса;  $d_r = \frac{0,423 \varepsilon^{1,25}}{1 - \varepsilon} d_3$  – гидравлический диаметр самого узкого сечения каналов слоя, м;  $G_n, \lambda_n$  – постоянные и собственные значения ряда, определяемые по формулам:

$$\lambda_n = 4n + \frac{8}{3}; \quad G_n = 1,01276 \lambda_n^{-1/3}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (7.2.63)$$

В качестве определяющей скорости в  $Re'$  используется скорость относительного движения жидкой и твердой фаз  $v_{от}$ . Поскольку в аппарате имеет место противоточное движение фаз, то вектор относительной скорости находится сложением векторов  $v_{ж}$  и  $v_{т}$ . Модуль вектора относительной скорости равен:

$$v_{от} = v_{ж} + v_{т}, \quad (7.2.64)$$

где  $v_{ж} = \frac{v_0}{f}$  – скорость движения жидкой фазы в самом узком сечении каналов слоя, м/с;  $v_{т} = \frac{w_0}{1-f}$  – скорость движения ионита, м/с;  $f = 0,95 \varepsilon^{1,75}$  – коэффициент минимального живого сечения каналов.

Порозность псевдооживленного слоя ионита определяется по уравнению [5]:

$$\varepsilon = 1,54 Re_3^{0,264} A_2^{-0,184}. \quad (7.2.65)$$

Коэффициент продольной диффузии жидкой фазы в аппарате со сплошным кипящим слоем ионита находили из следующего выражения [6]:

$$\frac{\varepsilon B_0}{\alpha} = 0,2 + 0,011 Re_3^{0,48}, \quad (7.2.66)$$

где  $\alpha = \frac{Re_{кр}}{Re_3}$ ;  $Re_{кр}$  – критическое значение числа Рейнольдса, определяемое из уравнения [7]:

$$Re_{кр} = \frac{Ar}{1400 + 5,22\sqrt{Ar}}. \quad (7.2.67)$$

Коэффициент радиальной диффузии в жидкой фазе находили из уравнения [8]:

$$D_r = \frac{3}{16} \frac{v_0}{\varepsilon} d_3. \quad (7.2.68)$$

Разработанная модель была применена для расчета ионообменного процесса очистки воды от ионов цинка на ионообменном сорбенте в пульсационной колонне с провальными тарелками. На рис. 7.2.2 приведен пример расчета нижней тарелки ионообменной колонны, выполненный в системе Mathcad. Полученное в результате расчета радиальное распределение концентрации сорбируемого вещества на выходе из нижней тарелки является исходным для расчета вышележащей тарелки.

Дано	
Производительность аппарата по раствору $Q_{ж}$ , м <sup>3</sup> /с	$Q_G := 5.0 \cdot 10^{-5}$
Производительность аппарата по катиониту $Q_{т}$ , м <sup>3</sup> /с	$Q_T := 3.5 \cdot 10^{-7}$
Исходная концентрация раствора $C_{вх}$ , кг-экв/м <sup>3</sup>	$C_{вх} := 0.01$
Диаметр аппарата $D_3$ , м	$D_A := 0.1$
Высота слоя катионита на тарелке $h$ , м	$h := 0.03$
Начальная концентрация ионов цинка в катионите $C_{т вх}$ , кг-экв/м <sup>3</sup>	$C_{т вх} := 0.0$
Степень использования обменной емкости катионита	$\eta_T := 0.9$
Радиус частицы катионита $r_0$ , м	$r_0 := 4 \cdot 10^{-4}$
Порозности кипящего слоя катионита	$\varepsilon := 0.6$

Коэффициент диффузии ионов цинка в катионите $D_r, \text{ м}^2/\text{с}$	$DT := 2 \cdot 10^{-11}$
Коэффициент диффузии ионов цинка в растворе $D, \text{ м}^2/\text{с}$	$D := 1.5 \cdot 10^{-9}$
Константы изотермы Фрейндлиха	$\alpha := 0.1$ $\sigma := 2.2$
Радиальная координата внутри аппарата $R$	$R := 0,001 \dots \frac{DA}{2}$
Продольная координата по высоте слоя ионита $x, \text{ м}$	$x := 0,0005 \dots h$
Плотность ионита $\rho_r, \text{ кг}/\text{м}^3$	$\rho_r := 1300$
Плотность раствора $\rho_{ж}, \text{ кг}/\text{м}^3$	$\rho_g := 1000$
Кинематический коэффициент вязкости $\nu, \text{ м}^2/\text{с}$	$\nu := 1 \cdot 10^{-6}$
<b>Расчет</b>	
Радиус аппарата, $\text{ м}$	
$R0 := \frac{DA}{2}$	$R0 = 0.05$
Площадь поперечного сечения аппарата, $\text{ м}^2$	
$SA := \frac{\pi \cdot DA^2}{4}$	$SA = 7.854 \times 10^{-3}$
Фиктивная скорость раствора $v_\phi, \text{ м}/\text{с}$	
$v_\phi := \frac{QG}{SA}$	$v_\phi = 6.366 \times 10^{-3}$
Фиктивная скорость ионита $w_\phi, \text{ м}/\text{с}$	
$w_\phi := \frac{QT}{SA}$	$w_\phi = 4.456 \times 10^{-5}$
Диаметр зерна ионита, $\text{ м}$	
$dz := 2 \cdot r0$	$dz = 8 \times 10^{-4}$
Действительная скорость раствора, $\text{ м}/\text{с}$	
$v := \frac{QG}{SA \cdot \varepsilon}$	$v = 0.011$
Действительная скорость ионита, $\text{ м}/\text{с}$	
$w := \frac{QT}{SA \cdot (1 - \varepsilon)}$	$w = 1.114 \times 10^{-4}$

Число Архимеда	$Ar := \frac{dz^3 \cdot (\rho_t - \rho_g) \cdot 9.81}{v \cdot \rho_g}$	$Ar = 1.507 \times 10^3$
Число Рейнольдса для зерна	$Rez := \frac{v_{\phi} \cdot dz}{v}$	$Rez = 5.093$
Порозность слоя	$\varepsilon := 1.54 \cdot Rez^{0.264} \cdot Ar^{-0.184}$	$\varepsilon = 0.6157$
Число Рейнольдса для зерна	$Re := \frac{v_{\phi} \cdot DA}{v}$	$Re = 636.62$
Число Рейнольдса критическое	$Re_{kp} := \frac{Ar}{1400 + 5.22 \cdot \sqrt{Ar}}$	$Re_{kp} = 0.94$
Коэффициент	$\alpha_1 := \frac{Re_{kp}}{Rez}$	$\alpha_1 = 0.185$
Коэффициент продольной диффузии жидкой фазы $D_x$ , м <sup>2</sup> /с	$D_x := \frac{v_{\phi} \cdot dz \cdot \varepsilon}{\alpha_1 \cdot (0.2 + 0.011 \cdot Rez^{0.48})}$	$D_x = 7.582 \times 10^{-5}$
Коэффициент радиальной диффузии жидкой фазы $D_r$ , м <sup>2</sup> /с	$D_r := \frac{3}{16} \cdot \frac{v \cdot dz}{\varepsilon}$	$D_r = 2.585 \times 10^{-6}$
Коэффициент минимального живого сечения каналов	$f := 0.95 \cdot \varepsilon^{1.75}$	$f = 0.407$
Скорость движения жидкой фазы в самом узком сечении каналов слоя, м/с	$vg := \frac{v_{\phi}}{f}$	$vg = 0.016$



Скорость движения ионита, м/с

$$v_t := \frac{w\phi}{1-f} \quad v_t = 7.51 \times 10^{-5}$$

Модуль вектора относительной скорости, м/с

$$v_{ot} := v_g + v_t \quad v_{ot} = 0.016$$

Гидравлический диаметр самого узкого сечения каналов слоя, м

$$d_r := \frac{0.423 \cdot \varepsilon^{1.25} \cdot dz}{1 - \varepsilon} \quad d_r = 4.803 \times 10^{-4}$$

Число Рейнольдса

$$Re_{ot} := \frac{v_{ot} \cdot d_r}{\nu} \quad Re_{ot} = 7.557$$

Число Шмидта

$$Sc := \frac{\nu}{D} \quad Sc = 666.6667$$

Безразмерная продольная координата

$$xx := \frac{2 \cdot h}{d_r \cdot Re_{ot} \cdot Sc} \quad xx = 0.025$$

Количество слагаемых в уравнении Гретца-Нуссельта

$$nk := 0..20$$

Число Шервуда

$$Sh := \left( \frac{-1}{2xx} \right) \cdot \ln \left[ 8 \cdot \sum_{nk=0}^{20} \left[ \frac{1.01276 \cdot \left( 4 \cdot nk + \frac{8}{3} \right)^{\frac{-1}{3}}}{\left( 4 \cdot nk + \frac{8}{3} \right)^2} \cdot e^{-xx \cdot \left( 4 \cdot nk + \frac{8}{3} \right)^2} \right] \right]$$

$$Sh = 6.541$$

Коэффициент массоотдачи в жидкой фазе  $\beta$ , м/с

$$\beta := \frac{Sh \cdot D}{d_r} \quad \beta = 2.043 \times 10^{-5}$$

Равновесное значение адсорбции, кг-экв/м<sup>3</sup>

$$СТР := \sigma \cdot C_{вх}^{\alpha} \qquad \qquad \qquad СТР = 1.388$$

Концентрация цинка в катионите на выходе из аппарата, кг-экв/м<sup>3</sup>

$$СТ_{вых} := \eta T \cdot СТР \qquad \qquad \qquad СТ_{вых} = 1.249$$

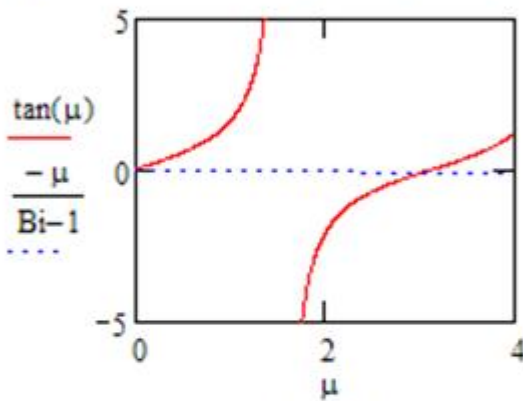
Коэффициент  $m$  в уравнении линейной изотермы сорбции

$$m := \sigma \cdot \alpha \cdot C_{вх}^{\alpha-1} \qquad \qquad \qquad m = 13.881$$

Число Био

$$Bi := \frac{\beta \cdot r_0}{DT \cdot m} \qquad \qquad \qquad Bi = 29.431$$

Первый ненулевой корень характеристического уравнения



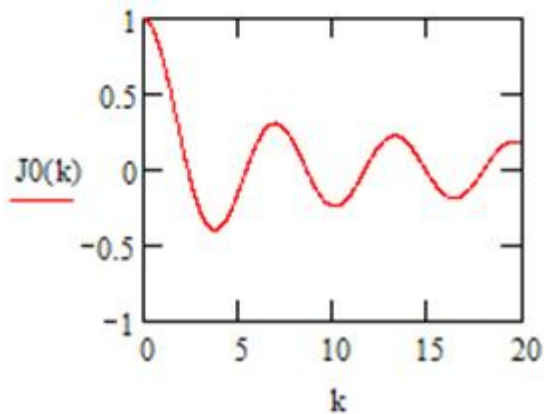
$$F(\mu) := \tan(\mu) + \left( \frac{\mu}{Bi - 1} \right)$$

$$a2 := 3.14 \qquad \qquad a1 := 2$$

$$\mu := \text{root}(F(\mu), \mu, a1, a2)$$

$$\mu = 3.035$$

Корни характеристического уравнения  $J_0(k)=0$



2
5
8
11
17

$i := 0..4$   
Given  
 $J0(k) = 0$   
 $k := \text{Find}(k)$   
 $k_i =$

2.405
5.52
8.654
11.792
18.071

**Коэффициенты и слагаемые**

$$\zeta := \frac{CTP}{C_{вх}} \quad \chi := \frac{h^2}{r0^2} \quad V := \frac{v \cdot h}{\sqrt{DT} \cdot \sqrt{Dx}} \quad E := \frac{\sqrt{DT} \cdot \sqrt{Dx} \cdot h}{r0^2 \cdot w} \quad \gamma := \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$b := V \cdot \mu^2 \cdot E + \mu^4 \cdot E^2 \quad a := V + 2\mu^2 \cdot E$$

$$p1(i) := \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right) - b + \left(\frac{Dx}{Dr} \cdot k_i\right)^2} \quad p2(i) := \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right) - b + \left(\frac{Dx}{Dr} \cdot k_i\right)^2}$$

$$P1(i, x) := p1(i) \cdot e^{-\sqrt{\frac{DT}{Dx}} \cdot \left(p1(i) - p2(i) \cdot \frac{x}{h}\right)} - p2(i) \cdot e^{-\sqrt{\frac{DT}{Dx}} \cdot \left(p2(i) - p1(i) \cdot \frac{x}{h}\right)}$$

$$P2(i) := p1(i) \cdot e^{-p1(i) \cdot \sqrt{\frac{DT}{Dx}}} - p2(i) \cdot e^{-p2(i) \cdot \sqrt{\frac{DT}{Dx}}}$$

$$NT_{\text{ВЫХ}} := \frac{CTP - CT_{\text{ВЫХ}}}{CTP} \quad A1 := \frac{6 \cdot \zeta \cdot \chi \cdot \gamma \cdot NT_{\text{ВЫХ}} \cdot (\sin(\mu) - \mu \cdot \cos(\mu))^2}{\mu \cdot (\mu - \sin(\mu) \cdot \cos(\mu))}$$

$$I(i) := \int_0^{R0} R \cdot \left(NT_{\text{ВЫХ}} - \frac{A1}{b}\right) \cdot J0\left(k_i \cdot \frac{R}{R0}\right) dR$$

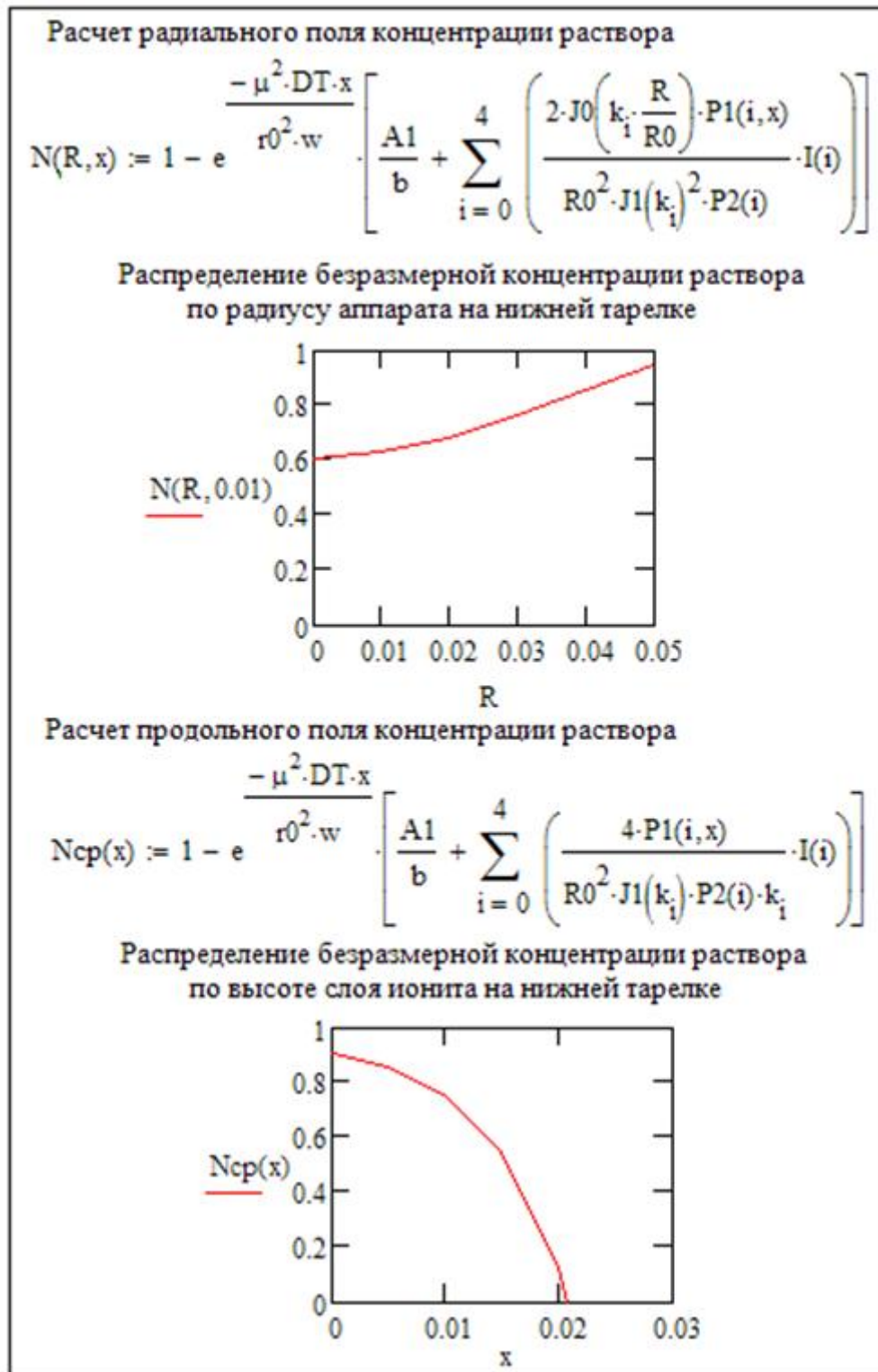


Рис. 7.2.2. Пример расчета ионообменной колонны с провальными тарелками

### 7.3. Сушка сыпучего материала в сушилке с кипящим слоем

В однокамерной сушилке с кипящим слоем происходит процесс непрерывной сушки дисперсного материала (рис. 7.3.1). В сушилку подается  $G_1$  кг/с влажного материала, имеющего температуру  $\bar{t}_1$  °С и влажный воздух, содержащий  $L$  кг/с абсолютно сухого воздуха. Перед калорифером воздух имеет энтальпию  $I_0$  Дж/кг сухого воздуха. После нагрева в калорифере, т.е. на входе в сушилку энтальпия воздуха повышается до  $I_1$  Дж/кг сухого воздуха. В сушилке из материала испаряется  $W$  кг/с влаги и из сушилки удаляется  $G_2$  кг/с высушенного материала с температурой  $\bar{t}_2$  °С.

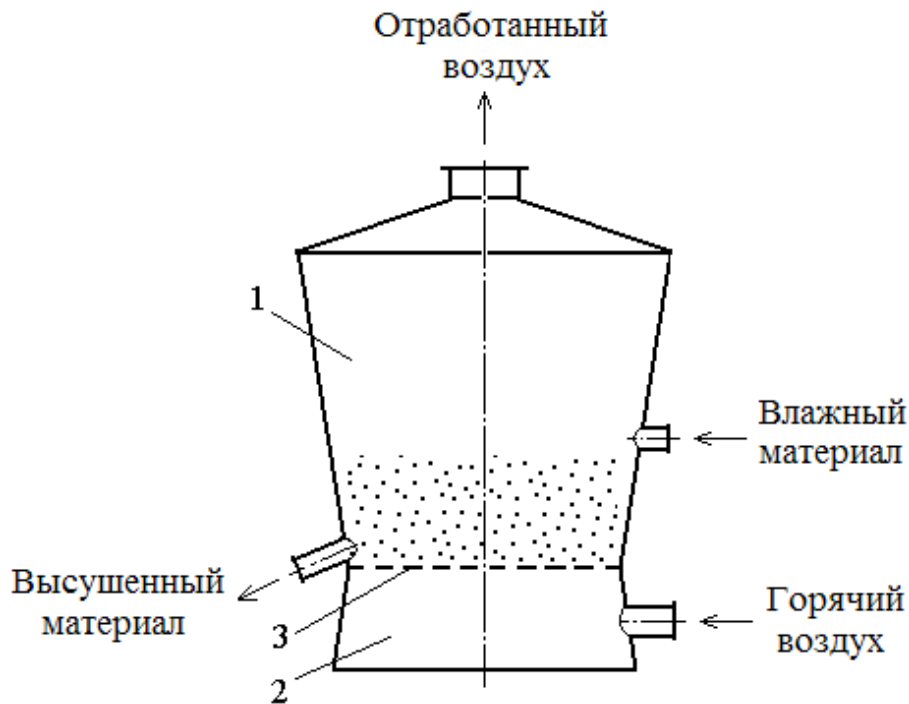


Рис. 7.3.1. Однокамерная сушилка с кипящим слоем:

1 – сушильная камера; 2 – газовая камера;

3 – газораспределительная решетка

Составим уравнение материального баланса для всего материала:

$$G_1 - G_2 = W, \quad (7.3.1)$$

для абсолютно сухого вещества:

$$G_1 \frac{100 - w_1}{100} = G_2 \frac{100 - w_2}{100}, \quad (7.3.2)$$

для влаги, испаряющейся из материала:

$$Lx_0 + W = Lx_2, \quad (7.3.3)$$

где  $w_1, w_2$  – начальная и конечная влажность материала;  $x_0, x_2$  – влагосодержание воздуха до калорифера и после сушилки.

Из уравнения (7.3.1) можно найти количество влаги, удаляемой при сушке:

$$W = G_1 - G_2. \quad (7.3.4)$$

Используя соотношения (7.3.2) и (7.3.4), находим:

$$W = G_1 \frac{w_1 - w_2}{100 - w_2} = G_2 \frac{w_1 - w_2}{100 - w_1}. \quad (7.3.5)$$

Из балансового уравнения (7.3.3) определяем расход абсолютно сухого воздуха на сушку:

$$L = \frac{W}{x_2 - x_0}. \quad (7.3.6)$$

Удельный расход воздуха на испарение из материала 1 кг влаги равен:

$$l = \frac{L}{W} = \frac{1}{x_2 - x_0}. \quad (7.3.7)$$

Составим уравнение теплового баланса сушилки:

$$LI_0 + G_{2\text{см}}\bar{t}_1 + Wc_{\text{в}}\bar{t}_1 + Q_{\text{к}} = LI_2 + G_{2\text{см}}\bar{t}_2 + Q_{\text{п}}, \quad (7.3.8)$$

где  $c_{\text{м}}, c_{\text{в}}$  – удельная теплоемкость высушенного материала и теплоемкость влаги;  $Q_{\text{п}}$  – потери теплоты в окружающую среду.

Из этого уравнения можно определить общий расход теплоты на сушку:

$$Q_{\text{к}} = L(I_2 + I_0) + G_{2\text{см}}(\bar{t}_2 - \bar{t}_1) - Wc_{\text{в}}\bar{t}_1 + Q_{\text{п}}. \quad (7.3.9)$$

Разделив обе части последнего уравнения на  $W$ , получим выражение для расчета удельного расхода теплоты на 1 кг испаренной влаги:

$$q_{\text{к}} = l(I_0 + I_2) + q_{\text{м}} - c_{\text{в}}\bar{t}_1 + q_{\text{п}}, \quad (7.3.10)$$

где  $l = \frac{L}{W}$ ,  $q_M = \frac{G_2 c_M (\bar{t}_2 - \bar{t}_1)}{W}$  – удельный расход теплоты на нагрев высушиваемого материала,  $q_{II} = \frac{Q_{II}}{W}$  – удельные потери теплоты в окружающую среду.

Сформулируем основные допущения модели.

Процесс сушки характеризуется тремя периодами: периодом прогрева материала, периодом постоянной скорости сушки (I период) и периодом падающей скорости сушки (II период). На рис. 7.3.2 показаны соответственно зависимости изменения влажности (рис. 7.3.2, а) и температуры (рис. 7.3.2, б) материала от времени процесса. В связи с тем что, расход теплоты в период прогрева материала (по кривой АВ) и его продолжительность в сравнении с расходами теплоты в I и II периоды и их продолжительностью являются незначительными, расчет периода прогрева материала выполнять не будем. В период постоянной скорости сушки все тепло, подводимое к материалу, затрачивается на поверхностное испарение влаги (прямая ВС). При этом температура материала остается постоянной и равной температуре мокрого термометра  $t_m$ . Скорость сушки в этот период лимитируется скоростью поверхностного испарения. В период падающей скорости сушки испарение влаги с поверхности материала замедляется, и его температура начинает повышаться (по кривой CD). В этот период перенос влаги в частице материала лимитируется как внешней, так и внутренней диффузией, а перенос теплоты определяется как внешним, так и внутренним теплообменом. Будем считать, что высушиваемый материал является монодисперсным. Частицы имеют сферическую форму. Структура потоков материала и сушильного агента описывается моделью идеального смешения.

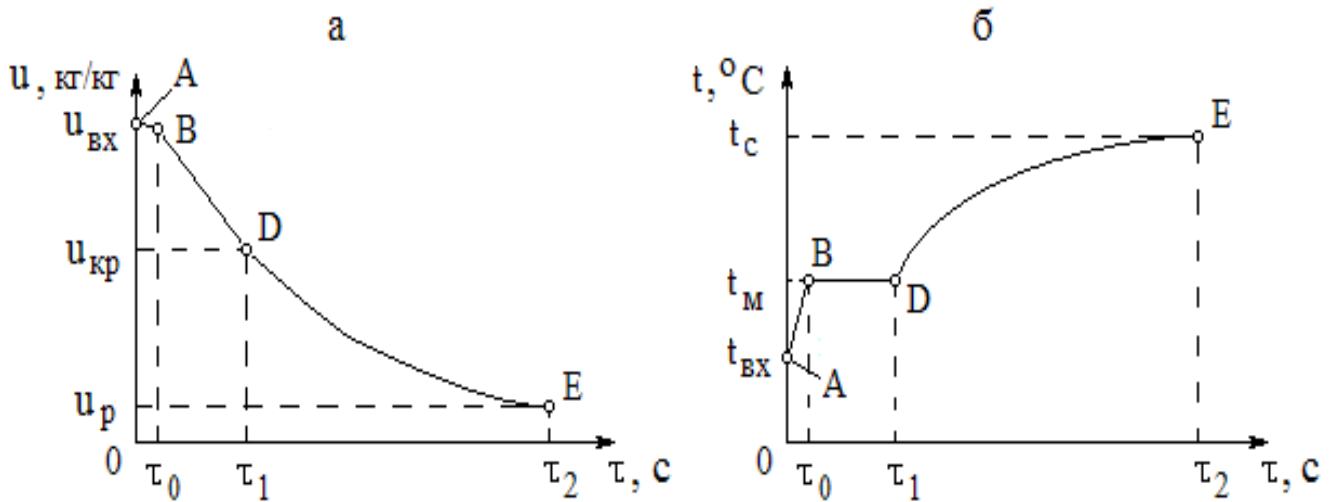


Рис. 7.3.2. Кривая сушки процесса (а) и температурная кривая материала (б)

Уравнение кривой скорости сушки для первого периода сушки может быть представлено в виде:

$$-\frac{du_{\text{cp}}}{d\tau} = N. \quad (7.3.11)$$

Начальное условие к уравнению (7.3.11):

$$u_{\text{cp}}|_{\tau=0} = u_{\text{BX}}, \quad (7.3.12)$$

где  $u_{\text{cp}}$  – влагосодержание частицы;  $u_{\text{BX}}$  – среднее влагосодержание дисперсного материала на входе в сушилку;  $N$  – константа скорости сушки.

Решение уравнения (7.3.11) с условием (7.3.12) имеет вид:

$$u_{\text{cp}}(\tau) = u_{\text{BX}} - N\tau. \quad (7.3.13)$$

В период падающей скорости сушки диффузия влаги из пор к поверхности материала описывается уравнением:

$$\frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau} = k \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right]. \quad (7.3.14)$$

Начальные и граничные условия к уравнению (7.3.14):

$$u(r, \tau)|_{\tau=0} = u_{\text{KP}}; \quad (7.3.15)$$



$$\left. \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (7.3.16)$$

$$k \left. \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \beta [u_p - u(r, \tau)|_{r=r_0}]. \quad (7.3.17)$$

Уравнение для определения среднего влагосодержания в частице:

$$u_{\text{ср}}(\tau) = \frac{3}{r_0^3} \int_0^{r_0} r^2 u(r, \tau) dr. \quad (7.3.18)$$

Здесь  $k$  – коэффициент теплопроводности;  $u_{\text{кр}}$  и  $u_p$  – критическое и равновесное влагосодержание;  $r$  – радиальная координата внутри частицы;  $r_0$  – радиус частицы;  $\beta$  – коэффициент массоотдачи в газовой фазе.

Решение системы уравнений (7.3.14) – (7.3.18) имеет вид:

$$u_{\text{ср}}(\tau) = u_{\text{кр}} + (u_p - u_{\text{кр}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)^2}{\mu_n^2 (\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 k_{\text{эф}} \tau}{r_0^2}}, \quad (7.3.19)$$

где  $\mu_n$  – корни трансцендентного уравнения:

$$\text{tg} \mu = -\frac{\mu}{Bi_m - 1}. \quad (7.3.20)$$

Функция распределения частиц на выходе из сушилки по времени пребывания, характеризующая гидродинамику процесса в режиме идеального смешения, имеет вид:

$$f(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}, \quad (7.3.21)$$

где  $\tau_0$  – среднее время пребывания.

Среднее влагосодержание частицы на выходе из сушилки может быть найдено по уравнению:

$$u_{\text{ВЫХ}} = \int_0^{\tau_{\text{кр}}} u_{\text{ср}}(\tau) f(\tau) d\tau + \int_{\tau_{\text{кр}}}^{\infty} u_{\text{ср}}(\tau) f(\tau) d\tau. \quad (7.3.22)$$

При достаточно большом времени пребывания дисперсного материала в сушилке в правой части решения (7.3.19) можно ограничиться только первыми

слагаемыми бесконечного ряда. С учетом этого подставим (7.3.21), а также (7.3.12) и (7.3.19) соответственно в первое и второе слагаемые уравнения (7.3.22). Получаем

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ВЫХ}} &= \int_0^{\tau_{\text{кр}}} (u_{\text{ВХ}} - N\tau) \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau + \\
 &+ u_p + \int_{\tau_{\text{кр}}}^{\infty} \left[ (u_{\text{кр}} - u_p) A_1 e^{-\frac{\mu_1^2 k \tau}{r_0^2}} \right] \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau = \\
 &= u_{\text{ВХ}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau_0}} \right) + N \left[ e^{-\frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau_0}} (\tau_{\text{кр}} + \tau_0) - \tau_0 \right] + u_p + \\
 &+ \frac{(u_{\text{кр}} - u_p) A_1}{\frac{\mu_1^2 k \tau_0}{r_0^2} + 1} e^{-\left( \frac{\mu_1^2 k}{r_0^2} + \frac{1}{\tau_0} \right) \tau_{\text{кр}}}. \quad (7.3.23)
 \end{aligned}$$

где  $A_1 = \frac{6(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)^2}{\mu_1^2 (\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1)}$ .

Уравнение (7.3.23) позволяет рассчитать среднее влагосодержание дисперсного материала на выходе из сушилки.

Рассмотрим теперь процесс теплообмена в сушилке. В период прогрева материала его температура возрастает от начальной температуры  $t_{\text{ВХ}}$  до температуры мокрого термометра  $t_{\text{М}}$  и остается постоянной до периода падающей скорости сушки. В связи с тем, что при разработке математического описания была принята модель идеального смешения материала в псевдооживленном слое, можно считать, что начальная температура материала во втором периоде сушки равна температуре мокрого термометра, т.е.  $\bar{t}_1 = t_{\text{М}}$ .

Изменение температуры частицы материала во втором периоде сушки описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \bar{t}(r, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \bar{t}(r, \tau)}{\partial r} \right]. \quad (7.3.24)$$

$$\bar{t}(r, \tau)|_{\tau=0} = \bar{t}_1; \quad (7.3.25)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{t}(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (7.3.26)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial \bar{t}(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha \left[ t_c - \bar{t}(r, \tau) \right]_{r=r_0}. \quad (7.3.27)$$

$$\bar{t}_{cp}(\tau) = \frac{3}{r_0^3} \int_0^{r_0} r^2 \bar{t}(r, \tau) dr, \quad (7.3.28)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $\bar{t}$  – температура частицы;  $\bar{t}_1$  – начальная температура частицы;  $t_c$  – температура среды;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи в газовой фазе;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала.

Решение системы уравнений (7.3.24)–(7.3.28) имеет вид:

$$\bar{t}_{cp}(\tau) = \bar{t}_1 + (t_c - \bar{t}_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(\sin \sigma_n - \sigma_n \cos \sigma_n)^2}{\sigma_n^2(\sigma_n - \sin \sigma_n \cos \sigma_n)} e^{-\frac{\sigma_n^2 a \tau}{r_0^2}}, \quad (7.3.29)$$

где  $\sigma_n$  – корни трансцендентного уравнения:

$$tg \sigma = -\frac{\sigma}{Bi - 1}. \quad (7.3.30)$$

Для определения температуры материала на выходе из сушилки может быть использовано уравнение:

$$\bar{t}_2 = \int_{\tau_{кр}}^{\infty} f(\tau) \bar{t}_{cp}(\tau) d\tau. \quad (7.3.31)$$

При достаточно большом времени пребывания дисперсного материала в сушилке в правой части решения (7.3.29) можно ограничиться только первыми

слагаемыми бесконечного ряда. С учетом этого подставим (7.3.21) и (7.3.29) в уравнение (7.3.31). Получаем:

$$\bar{t}_2 = \int_{\tau_{кр}}^{\infty} \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \left[ \bar{t}_1 + (t_c - \bar{t}_1) B_1 e^{-\frac{\sigma_1^2 a \tau}{r_0^2}} \right] d\tau = \bar{t}_1 + \frac{(t_c - \bar{t}_1) B_1}{\frac{\sigma_1^2 a \tau_0}{r_0^2} + 1} e^{-\left(\frac{\sigma_1^2 a}{r_0^2} + \frac{1}{\tau_0}\right) \tau_{кр}} \quad (7.3.32)$$

где  $B_1 = \frac{6(\sin \sigma_1 - \sigma_1 \cos \sigma_1)^2}{\sigma_1^2 (\sigma_1 - \sin \sigma_1 \cos \sigma_1)}$ .

Уравнение (7.3.32) позволяет рассчитать среднюю температуру дисперсного материала на выходе из сушилки.

На рис. 7.3.3 приведен пример расчета процесса сушки дисперсного материала в однокамерной сушилке с кипящим слоем с помощью разработанной математической модели. Расчет выполнен в системе Mathcad.

Исходные данные	
Производительность сушилки по сухому материалу $G_2$ , кг/с	$G_2 := 0.1$
Диаметр аппарата $D_a$ , м	$D_a := 1$
Высота кипящего слоя $H$ , м	$H := 0.3$
Влагосодержание материала, поступающего на сушку $u_{вх}$ , кг/кг	$u_{вх} := 0.35$
Температура воздуха, поступающего в сушилку $t_c$ , °C	$t_c := 200$
Температура материала, поступающего на сушку $\theta_1$ , °C	$\theta_1 := 10$
Средний диаметр частиц материала $d_3$ , м	$d_3 := 1 \cdot 10^{-3}$
Рабочая скорость воздуха $w$ , м/с	$w := 1.8$

Плотность материала $\rho_M$ , кг/м <sup>3</sup>	$\rho_M := 1500$
Плотность сушильного агента, кг/м <sup>3</sup>	$\rho_r := 1$
Динамический коэффициент вязкости сушильного агента $\mu$ , Па·с	$\mu_r := 2 \cdot 10^{-5}$
Коэффициент скорости сушки $N$ , 1/с	$N := 0.001$
Коэффициент массопроводности материала $k$ , м <sup>2</sup> /с	$k := 1 \cdot 10^{-9}$
Коэффициент массоотдачи $\beta$ , м/с	$\beta := 0.14$
Равновесное влагосодержание $u_p$ , кг/кг	$u_p := 0.002$
Критическое влагосодержание $u_{кр}$ , кг/кг	$u_{кр} := 0.15$
Расчет	
Радиус частицы	
$r_0 := \frac{d_3}{2}$	$r_0 = 5 \times 10^{-4}$
Критерий Рейнольдса	
$Re := \frac{w \cdot d_3 \cdot \rho_r}{\mu_r}$	$Re = 90$
Критерий Архимеда	
$Ar := \frac{d_3^3 \cdot \rho_r \cdot 9.81 \cdot \rho_M}{\mu_r^2}$	$Ar = 3.679 \times 10^4$
Порозность слоя	
$\varepsilon := \left( \frac{18 \cdot Re + 0.36 \cdot Re^2}{Ar} \right)^{0.21}$	$\varepsilon = 0.644$

Площадь газораспределительной решетки, м<sup>2</sup>

$$S_p := \frac{\pi \cdot D_a^2}{4} \quad S_p = 0.785$$

Среднее время пребывания, с

$$\tau_0 := \frac{S_p \cdot H \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \rho_M}{G_2} \quad \tau_0 = 1.257 \times 10^3$$

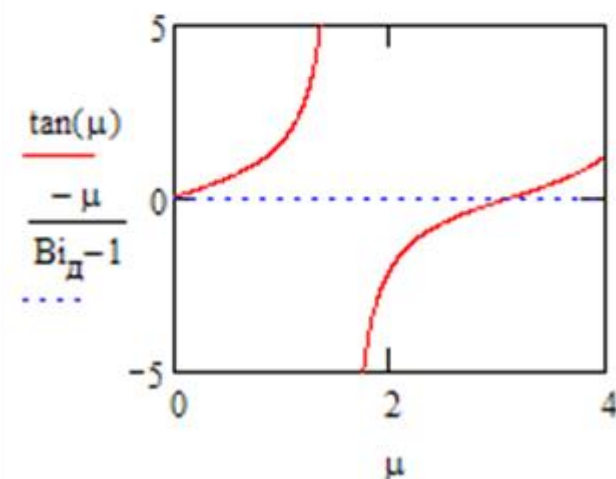
Продолжительность периода постоянной скорости сушки, с

$$\tau_{кр} := \frac{u_{вх} - u_{кр}}{N} \quad \tau_{кр} = 200$$

Диффузионный критерий Био

$$Bi_d := \frac{\beta \cdot r_0}{k} \quad Bi_d = 7 \times 10^4$$

Найдем первый ненулевой корень характеристического уравнения



$$F(\mu) := \tan(\mu) + \left( \frac{\mu}{Bi_d - 1} \right)$$

$$\mu := \text{root}(F(\mu), \mu, 2, 3.142)$$

Корень характеристического уравнения

$$\mu = 3.141$$

Коэффициенты

$$A_1 := \frac{6 \cdot (\sin(\mu) - \mu \cdot \cos(\mu))^2}{\mu^2 \cdot (\mu - \sin(\mu) \cdot \cos(\mu))}$$

$$I_1 := u_{\text{вх}} \cdot \left( 1 - e^{\frac{-\tau_{\text{кр}}}{\tau_0}} \right) + N \cdot \left( \tau_{\text{кр}} \cdot e^{\frac{-\tau_{\text{кр}}}{\tau_0}} + \tau_0 \cdot e^{\frac{-\tau_{\text{кр}}}{\tau_0}} - \tau_0 \right)$$

$$I_2 := u_p + \frac{(u_{\text{кр}} - u_p) \cdot A_1 \cdot e^{-\left(\frac{\mu^2 \cdot k}{r_0^2} + \frac{1}{\tau_0}\right) \cdot \tau_{\text{кр}}}}{\tau_0 \cdot \left(\frac{\mu^2 \cdot k}{r_0^2} + \frac{1}{\tau_0}\right)}$$

Влагосодержание материала на выходе из аппарата, кг/кг

$$u_{\text{вых}} := I_1 + I_2 \qquad u_{\text{вых}} = 0.039$$

Рис. 7.3.3. Пример расчета сушилки с кипящим слоем

#### 7.4. Кристаллизация соли из водного раствора в аппарате с псевдооживленным слоем

В вакуум–кристаллизационной установке с псевдооживленным слоем (рис. 7.4.1) протекает изогидрический процесс кристаллизации соли из водного раствора.

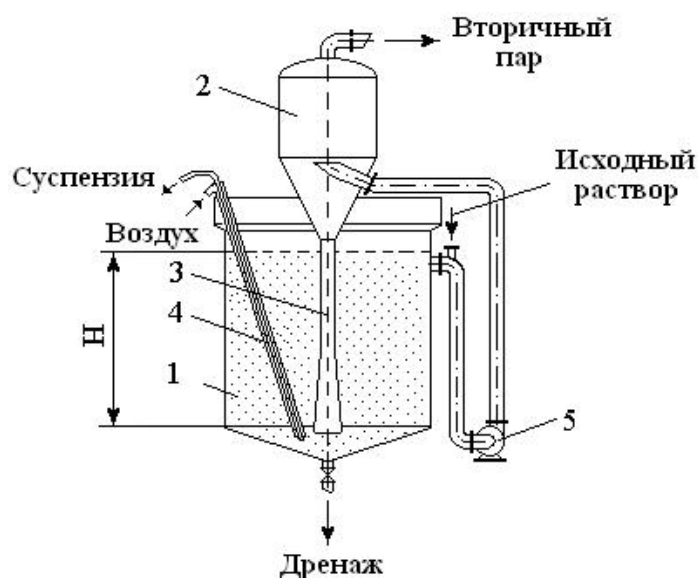


Рис. 7.4.1. Вакуум–кристаллизационная установка:

- 1 – кристаллораститель, 2 – испаритель, 3 – барометрическая труба;  
4 – эрлифт; 5 – насос

Исходный раствор поступает во всасывающую линию циркуляционного насоса 5, где смешивается с циркулирующим раствором. Затем раствор насосом 5 направляется в испаритель 2, находящийся под вакуумом. Здесь часть растворителя испаряется, температура раствора понижается до точки кипения, соответствующей остаточному давлению в испарителе. Вторичный пар удаляется в верхней части испарителя 2. Перенасыщенный в результате охлаждения раствор поступает по барометрической трубе 3 в кристаллораститель 1, где происходит образование и рост кристаллов. Интенсивное перемешивание в условиях псевдооживленного слоя способствует увеличению скорости процесса и получению кристаллов однородной правильной формы. Крупные кристаллы оседают на дно и выводятся из аппарата с помощью эрлифта 4. Пройдя псевдооживленный слой высотой  $H$ , раствор возвращается в циркуляционный контур. Цикл повторяется.

Уравнение материального баланса процесса кристаллизации имеет вид:



$$G_{\text{н}}=G_{\text{кр}}+G_{\text{к}}+W, \quad (7.4.1)$$

где  $G_{\text{н}}$  – расход исходного маточного раствора, кг/с;  $G_{\text{к}}$  – расход маточного раствора, удаляемого из аппарата, кг/с;  $G_{\text{кр}}$  – расход кристаллогидрата, кг/с;  $W$  – расход удаляемого раствора, кг/с.

Для циркуляционного контура можно записать:

$$G_{\text{с}}=G_{\text{н}}+G_{\text{к}}, \quad (7.4.2)$$

где  $G_{\text{с}}$  – расход маточного раствора после смешения, кг/с.

Баланс по абсолютно сухому веществу запишется так:

$$G_{\text{н}}Y_{\text{н}}=G_{\text{кр}}^*+G_{\text{к}}Y_{\text{к}}, \quad (7.4.3)$$

где  $G_{\text{кр}}^*$  – расход безводной кристаллической фазы в пересчете на чистое растворенное вещество, кг/с;  $Y_{\text{н}}$  и  $Y_{\text{к}}$  – концентрации начального и конечного маточного раствора, мас. доли.

Расход безводной кристаллической фазы равен:

$$G_{\text{кр}}^* = G_{\text{кр}} \frac{M}{M_{\text{кр}}}, \quad (7.4.4)$$

где  $M$ ,  $M_{\text{кр}}$  – молекулярная масса соответственно кристаллов (без растворителя) и кристаллогидрата.

Уравнение теплового баланса в общем виде для случая изогидрической кристаллизации в вакуум-кристаллизаторе имеет вид:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 + Q_5 \pm Q_6. \quad (7.4.5)$$

Принятые в уравнении и (7.4.5) обозначения:  $Q_1=G_{\text{н}}c_{\text{р к н}}t_{\text{н}}$  – приход теплоты с исходным маточным раствором;  $Q_2=G_{\text{кр}}q$  – теплота кристаллизации;  $Q_3=G_{\text{кр}}c_{\text{р кр}}t_{\text{к}}$  – расход теплоты с кристаллогидратами;  $Q_4=G_{\text{к}}c_{\text{р к}}t_{\text{к}}$  – расход теплоты с удаляемым маточным раствором;  $Q_5=W \cdot i$  – расход теплоты с парами растворителя;  $Q_6$  – потери теплоты в окружающую среду.

Полагаем, что в кристаллорастителе протекает стационарный процесс кристаллизации. При движении раствора через псевдооживленный слой происходит процесс роста кристаллов и снижение пересыщения раствора. Выделяющаяся при образовании кристаллов скрытая теплота кристаллизации увеличивает температуру раствора. Это приводит к изменению равновесной концентрации раствора. Считаем, что температура раствора и кристаллов в

кристаллорастворителе меняется незначительно. Поэтому можно принять, что равновесная концентрация раствора описывается линейной функцией температуры. Для псевдооживленного слоя также можно принять, что структура потока твердой фазы описывается моделью идеального перемешивания, а потока раствора – моделью идеального вытеснения. При этом направление движения раствора совпадает с направлением аксиальной координаты  $0x$ .

При сделанных допущениях математическая постановка задачи может быть сформулирована в виде следующей системы уравнений [9].

Уравнение материального баланса по раствору:

$$v \frac{dC}{dx} + K(C - C_p) = 0, \quad (7.4.6)$$

где  $C$  – концентрация раствора,  $\text{кг/м}^3$ ;  $C_p$  – равновесная концентрация раствора,  $\text{кг/м}^3$ ;  $K$  – коэффициент массопередачи,  $\text{м/с}$ ;  $v$  – скорость потока раствора.

Уравнение теплового баланса по раствору:

$$v \frac{dt}{dx} + \frac{\alpha_v}{\rho_{\text{сл}} c_{p \text{ сл}}} (t_n - t) = 0, \quad (7.4.7)$$

где  $t$  – температура раствора,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $t_n$  – температура на поверхности раздела твердой и жидкой фаз,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\rho_{\text{сл}}$  – плотность псевдооживленного слоя,  $\text{кг/м}^3$ ;  $c_{p \text{ сл}}$  – теплоемкость псевдооживленного слоя,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $\alpha_v$  – объемный коэффициент теплоотдачи,  $\text{Вт}/(\text{м}^3\cdot\text{К})$ .

Граничные условия заданы в виде:

$$C|_{x=0} = C_n; \quad (7.4.8)$$

$$t|_{x=0} = t_n, \quad (7.4.9)$$

где  $C_n$  и  $t_n$  – концентрация и температура раствора на входе в псевдооживленный слой.

Зависимость между равновесной концентрацией раствора и его температурой:

$$C_p = at + b, \quad (7.4.10)$$

где  $a$  и  $b$  – константы.

Дифференциальное уравнение, выражающее тепловой эффект процесса кристаллизации в зависимости от изменения концентрации раствора:

$$v \frac{dC}{dx} + \frac{\alpha_v}{q} (t_{\text{н}} - t) = 0, \quad (7.4.11)$$

где  $q$  – скрытая теплота кристаллизации, Дж/кг.

Преобразуем уравнения материального (7.4.6) и теплового (7.4.7) балансов, используя соответственно уравнения (7.4.10) и (7.4.11). Получаем

$$v \frac{dC}{dx} + K(C - at - b) = 0, \quad (7.4.12)$$

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{q}{\rho_{\text{сл}} c_{\text{рсл}}} \frac{dC}{dx} = 0. \quad (7.4.13)$$

Введем новые переменные

$$N = C - C_{\text{н}}; \quad \theta = t - t_{\text{н}}. \quad (7.4.14)$$

Математическое описание процесса запишется так:

$$\frac{dN}{dx} + \frac{K}{v} (N - a\theta + B) = 0; \quad (7.4.15)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -A \frac{dN}{dx}; \quad (7.4.16)$$

$$N|_{x=0} = 0; \quad (7.4.17)$$

$$\theta|_{x=0} = 0, \quad (7.4.18)$$

где  $A = \frac{q}{\rho_{\text{сл}} c_{\text{рсл}}}$ ;  $B = C_{\text{н}} - at_{\text{н}} - b$ .

Применим к уравнениям (7.4.15) и (7.4.16) прямое преобразование Лапласа [1]:

$$sN_L(s) - N_{\text{н}} + \frac{K}{v} N_L(s) + \frac{Ka}{v} \theta_L(s) + \frac{KB}{sv} = 0; \quad (7.4.19)$$

$$s\theta_L(s) - \theta_{\text{н}} = -A[sN_L(s) - N_{\text{н}}], \quad (7.4.20)$$

где  $N_{\text{н}} = \theta_{\text{н}} = 0$ .

Из уравнения (7.4.20) выразим функцию  $N_L(s)$  и подставим её значение в уравнение (7.4.19):

$$\frac{s}{A}\theta_L(s) + \frac{K}{vA}\theta_L(s) + \frac{aK}{v}\theta_L(s) + \frac{KB}{sv} = 0. \quad (7.4.21)$$

Отсюда

$$\theta_L(s) = \frac{KBA}{sv\left(s + \frac{K}{v} + \frac{aKA}{v}\right)}. \quad (7.4.22)$$

Применим следующую формулу обратного преобразования Лапласа [1]:

$$\frac{1}{s(s+\beta)} \rightarrow \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t}). \quad (7.4.23)$$

Запишем окончательное решение уравнения теплового баланса (7.4.16) в прежних переменных [9]:

$$t(x) = t_H + A \frac{[C_H - (at_H + b)]}{1 + aA} \left[ 1 - e^{-\frac{K}{v}(1+aA)x} \right]. \quad (7.4.24)$$

Уравнение (7.4.24) позволяет рассчитать распределение температуры раствора по высоте псевдооживленного слоя.

Найденную функцию  $\theta_L(s)$  из выражения (7.4.22) подставим в уравнение (7.4.20) и получим:

$$N_L(s) = -\frac{KB}{sv\left(s + \frac{K}{v} + \frac{aKA}{v}\right)}. \quad (7.4.25)$$

Воспользовавшись формулой (7.4.23), найдем оригинал по изображению и запишем окончательное решение уравнения материального баланса (7.4.15) в прежних переменных [9]:

$$C(x) = C_H - \frac{[C_H - (at_H + b)]}{1 + aA} \left[ 1 - e^{-\frac{K}{v}(1+aA)x} \right]. \quad (7.4.26)$$

Уравнение (7.4.26) позволяет рассчитать распределение концентрации раствора по высоте псевдооживленного слоя.

Для того чтобы воспользоваться решениями (7.4.24) и (7.4.26), необходимо иметь значения параметров, входящих в эти решения.

Скорость раствора в кристаллорастителе с псевдооживленным слоем можно определить следующим образом:

$$v = 2,33 \left( \frac{\varepsilon}{1,05} \right)^3 \sqrt{r \frac{\rho_{кр} - \rho_{ж}}{\rho_{ж}}}, \quad (7.4.27)$$

где  $r$  – средний размер кристаллов, м;  $\rho_{ж}$  – плотность раствора, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_{кр}$  – плотность кристаллической фазы, кг/м<sup>3</sup>;  $\varepsilon$  – порозность слоя.

Значение коэффициента массопередачи может быть найдено по уравнению:

$$K = 0,105 \cdot 10^{-3} f_{уд} v \left( \frac{v_{ж}}{D} \right)^{0,07}, \quad (7.4.28)$$

где  $K$  – коэффициент массопередачи, 1/с;  $D$  – коэффициент диффузии в растворе, м<sup>2</sup>/с;  $f_{уд}$  – удельная поверхность кристаллов, м<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>;  $v_{ж}$  – кинематический коэффициент вязкости раствора, м<sup>2</sup>/с.

Удельная поверхность кристаллов в псевдооживленном слое равна:

$$f_{уд} = 0,447 \sqrt{\frac{(\rho_{кр} - \rho_{ж})(1 - \varepsilon)\varepsilon^3 g}{\nu \mu_{ж}}}, \quad (7.4.29)$$

где  $\mu_{ж}$  – динамический коэффициент вязкости раствора, Па·с.

Плотность псевдооживленного слоя можно определить по формуле:

$$\rho_{сл} = \rho_{ж} \varepsilon + \rho_{кр} (1 - \varepsilon), \quad (7.4.30)$$

Теплоемкость псевдооживленного слоя равна:

$$c_{рсл} = \frac{c_{ж} \rho_{ж} \varepsilon + c_{ркр} \rho_{кр} (1 - \varepsilon)}{\rho_{ж} \varepsilon + \rho_{кр} (1 - \varepsilon)}, \quad (7.4.31)$$

где  $c_{ж}$  – теплоемкость раствора, Дж/(кг·К);  $c_{рсл}$  – теплоемкость кристаллической фазы, Дж/(кг·К).

Для проверки правильности выполненных расчетов обычно сравнивают принятое значение среднего размера кристаллов с расчетным значением. Для этого сначала определяют массу кристаллов в слое по формуле:

$$G_{крсл} = 0,785 D_a^2 H (1 - \varepsilon) \rho_{кр}, \quad (7.4.32)$$

где  $G_{\text{кр сл}}$  – масса кристаллов, кг;  $D_a$  – диаметр кристаллорастителя, м;  $H$  – высота псевдооживленного слоя, м.

Находим коэффициент скорости роста кристаллов:

$$k = \frac{Kr}{1 - \varepsilon}. \quad (7.4.33)$$

Расчетное значение среднего размера кристаллов:

$$r_p = \frac{kvG_{\text{кр сл}}(C_H - C_K)}{\rho_{\text{кр}}KHG_{\text{кр}}}, \quad (7.4.34)$$

где  $G_{\text{кр}}$  – расход кристаллогидрата, кг/с.

Значение расхода кристаллогидрата найдем из совместного решения уравнений (7.4.1) – (7.4.2)

$$G_{\text{кр}} = \frac{G_H(Y_K - Y_H) - WY_K}{Y_K - M/M_{\text{кр}}}. \quad (7.4.35)$$

Расхождение значений  $r_p$  и  $r$  не должно превышать принятой погрешности.

На рис. 7.4.2 приведен расчет кристаллорастителя для кристаллизации  $\text{MgFO}_4$  из водного раствора, выполненный в системе Mathcad.

Дано	
Производительность установки по соли $G_{\text{кр}}$ , кг/с	$G_{\text{кр}} := 0.16$
Объемный расход циркулирующего раствора в кристаллорастворителе $Q_p$ , м <sup>3</sup> /с	$Q_p := 0.065$
Концентрация соли в исходном растворе $C_H$ кг/м <sup>3</sup>	$C_H := 340$
Расход удаляемого растворителя $W$ , м <sup>3</sup> /с	$W := 0.03$
Температура исходного раствора $t_H$ °С	$t_H := 15$
Рабочая высота псевдооживленного слоя $H$ , м	$H := 5$
Коэффициенты в уравнении зависимости равновесной концентрации раствора от температуры	$a := 5 \quad b := 260$
Теплота кристаллизации $q$ , Дж/кг	$q := 6.5 \cdot 10^4$
Теплоемкость кристаллов $c_{\text{кр}}$ , Дж/(кг К)	$c_{\text{кр}} := 950$

Теплоемкость маточного раствора $c_{\text{мр}}$ , Дж/(кг·К)	$c_{\text{мр}} := 3360$
Средний размер кристаллов $r$ , м	$r := 2 \cdot 10^{-3}$
Порозность	$\varepsilon := 0.75$
Плотность кристаллической фазы $\rho_{\text{кр}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\rho_{\text{кр}} := 1680$
Плотность раствора $\rho_{\text{ж}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\rho_{\text{ж}} := 1300$
Коэффициент диффузии соли в воде $D$ , м <sup>2</sup> /с	$D := 3.4 \cdot 10^{-10}$
Кинематический коэффициент вязкости маточного раствора $\nu$ , м <sup>2</sup> /с	$\nu := 5.4 \cdot 10^{-6}$
Продольная координата по высоте псевдооживленного слоя $x$ , м	$x := 0,05 \dots \text{Н}$
Расчет	
Скорость раствора в кристаллорастителе, м/с	
$v := 2.33 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{1.05} \right)^3 \cdot \sqrt{r \cdot \frac{\rho_{\text{кр}} - \rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}}}$	$v = 0.021$
Удельная поверхность кристаллов, м <sup>2</sup> /м <sup>3</sup>	
$f_{\text{уд}} := 0.447 \cdot \sqrt{\frac{(\rho_{\text{кр}} - \rho_{\text{ж}}) \cdot (1 - \varepsilon) \varepsilon^3 \cdot 9.81}{\nu \cdot \nu \cdot \rho_{\text{ж}}}}$	$f_{\text{уд}} = 738.284$
Коэффициент массопередачи, 1/с	
$K := 0.105 \cdot 10^{-3} \cdot f_{\text{уд}} \cdot v \cdot \left( \frac{v}{D} \right)^{0.07}$	$K = 3.132 \times 10^{-3}$

Площадь поперечного сечения кристаллорастворителя, м<sup>2</sup>

$$F_a := \frac{Q_p}{v} \quad F_a = 3.166$$

Диаметр кристаллорастворителя D<sub>a</sub>, м

$$D_a := \sqrt{\frac{4 \cdot F_a}{\pi}} \quad D_a = 2$$

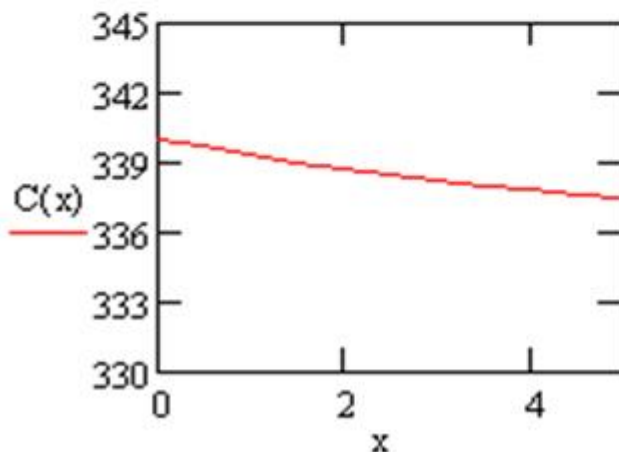
Коэффициент

$$A := \frac{q}{c_{\text{мр}} \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot \varepsilon + c_{\text{кр}} \cdot \rho_{\text{кр}} \cdot (1 - \varepsilon)} \quad A = 0.018$$

Расчет распределения концентрации раствора (кг/м<sup>3</sup>) по высоте кристаллорастворителя

$$C(x) := C_H - \frac{C_H - (a \cdot t_H + b)}{1 + a \cdot A} \cdot \left[ 1 - e^{\frac{-K}{v} \cdot (1 + a \cdot A) \cdot x} \right]$$

Распределение концентрации раствора по высоте кристаллорастворителя



Расчет распределения температуры раствора (°C) по высоте кристаллорастворителя



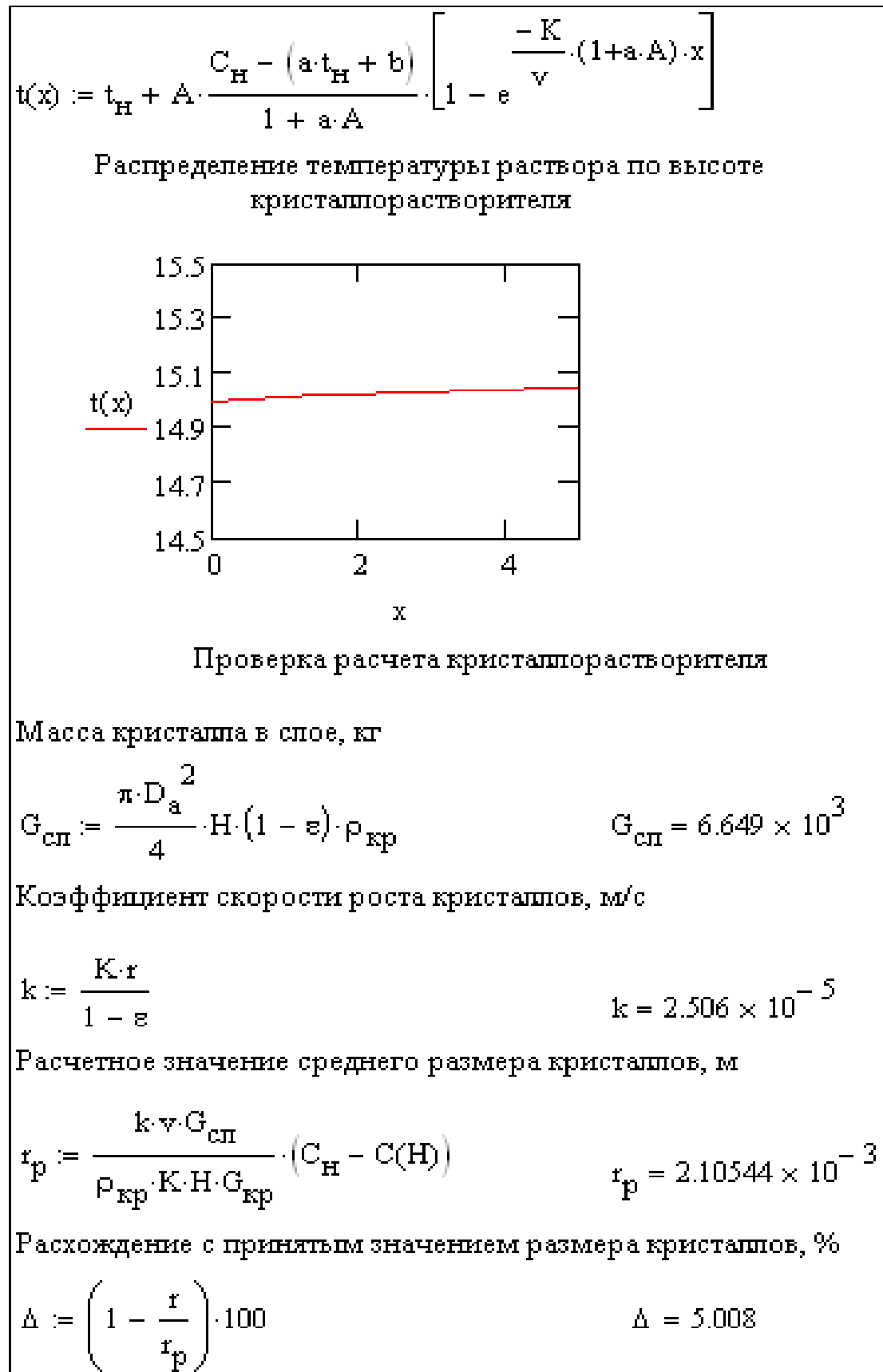


Рис. 7.4.2. Пример расчета кристаллизатора с псевдоожиженным слоем

## 7.5. Выщелачивание листового материала в емкостном аппарате проточного типа

В емкостном аппарате полного смешения проточного типа протекает процесс диффузионного извлечения вещества из пористого твердого тела пластинчатой формы (рис. 7.5.1).

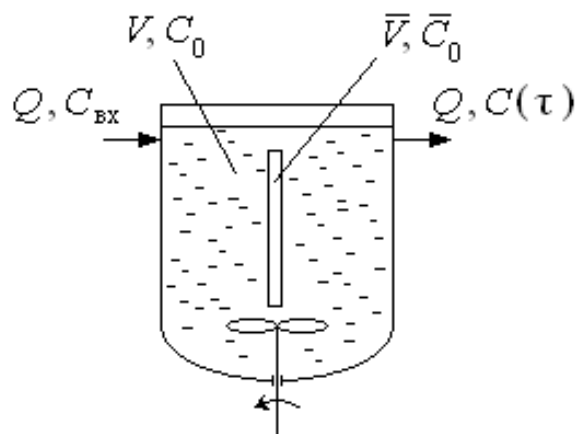


Рис. 7.5.1. Выщелачивание листового материала в емкостном аппарате проточного типа

Примем, что в аппарат помещены неподвижная пластина объемом  $\bar{V}$  с пористостью  $\varepsilon_m$ , начальной концентрацией  $\bar{C}_0$  и раствор объемом  $V$  с концентрацией вещества  $C_0$ . В аппарат поступает раствор с объемным расходом  $Q$  и концентрацией вещества  $C_{вх}$ . Одновременно из аппарата выводится равное количество раствора с концентрацией вещества  $C(\tau)$ . Скорость процесса массообмена между твердой и жидкой фазами лимитируется как внешней, так и внутренней диффузией. С учетом принятых допущений математическое описание процесса включает следующие уравнения:

– уравнение материального баланса аппарата идеального смешения проточного типа:

$$V \frac{dC(\tau)}{d\tau} + \varepsilon_m \bar{V} \frac{d\bar{C}_{cp}(\tau)}{d\tau} = Q[C_{вх} - C(\tau)]; \quad (7.5.1)$$

– уравнение кинетики диффузии для тела пластинчатой формы:

$$\frac{\partial \bar{C}(x, \tau)}{\partial \tau} = \bar{D}_{\text{эф}} \frac{\partial^2 \bar{C}(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq R); \quad (7.5.2)$$

– уравнение для определения средней концентрации вещества в твердом теле:

$$\bar{C}_{\text{ср}}(\tau) = \int_0^R \bar{C}(x, \tau) dx; \quad (7.5.3)$$

– начальные и граничные условия:

$$\bar{C}(x, 0) = \bar{C}_{\text{ср}}(0) = \bar{C}_0; \quad C(0) = C_0; \quad (7.5.4)$$

$$\frac{\partial \bar{C}(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad \bar{C}(0, \tau) \neq \infty; \quad (7.5.5)$$

$$\bar{D}_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{C}(R, \tau)}{\partial x} = \beta [C(\tau) - \bar{C}(R, \tau)]. \quad (7.5.6)$$

Введем в рассмотрение новые переменные и безразмерные величины:

$$\bar{N}(\xi, Fo_m) = C_{\text{вх}} - \bar{C}(x, \tau); \quad \bar{N}_{\text{ср}}(Fo_m) = C_{\text{вх}} - \bar{C}_{\text{ср}}(\tau); \quad N(Fo_m) = C_{\text{вх}} - C(\tau);$$

$$\bar{N}(0) = C_{\text{вх}} - \bar{C}_0; \quad N(0) = C_{\text{вх}} - C_0; \quad Bi_m = \frac{\beta R}{\bar{D}_{\text{эф}}}; \quad Fo_m = \frac{\bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}; \quad \xi = \frac{x}{R};$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_m \bar{V}}{V}; \quad \chi = \frac{QR^2}{V \bar{D}_{\text{эф}}}. \quad (7.5.7)$$

Система уравнений (7.5.1) – (7.5.6) в новых переменных будет иметь вид:

$$\frac{dN(Fo_m)}{dFo_m} + \sigma \frac{d\bar{N}_{\text{ср}}(Fo_m)}{dFo_m} = -\chi N(Fo_m); \quad (7.5.8)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial^2 \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial \xi^2}; \quad (Fo_m > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (7.5.9)$$

$$\bar{N}_{\text{ср}}(Fo_m) = \int_0^1 \bar{N}(\xi, Fo_m) d\xi; \quad (7.5.10)$$

$$\bar{N}(\xi, 0) = \bar{N}_{\text{ср}}(0) = \bar{N}_0; \quad N(0) = N_0; \quad (7.5.11)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(0, Fo_m)}{\partial \xi} = 0; \bar{N}(0, Fo_m) \neq \infty; \quad (7.5.12)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(1, Fo_m)}{\partial \xi} = Bi_m [N(Fo_m) - \bar{N}(1, Fo_m)]. \quad (7.5.13)$$

Для решения краевой задачи (7.5.8) – (7.5.13) будем использовать метод интегральных преобразований Лапласа [1].

Запишем операторное уравнение, соответствующее уравнению (7.5.9):

$$\frac{d^2 \bar{N}_L(\xi, s)}{d\xi^2} - s \bar{N}_L(\xi, s) + \bar{N}_0 = 0, \quad (7.5.14)$$

где  $F$  – комплексный параметр.

Общее решение операторного уравнения (7.5.14) есть

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = A ch \sqrt{s} \xi + B sh \sqrt{s} \xi. \quad (7.5.15)$$

Перейдем в уравнении (7.5.12) в область изображений и подставим в полученное выражение решение (7.5.15):

$$\frac{\partial \bar{N}_L(0, s)}{\partial \xi} = [\sqrt{s} A sh \sqrt{s} \xi + \sqrt{s} B ch \sqrt{s} \xi] \Big|_{\xi=0} = \sqrt{s} B = 0, \quad (7.5.16)$$

откуда  $B = 0$ .

Операторное уравнение (7.5.15) примет вид:

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = A ch \sqrt{s} \xi. \quad (7.5.17)$$

Среднее значение функции  $\bar{N}_L(\xi, s)$ :

$$\bar{N}_{cpL}(s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = \frac{A}{\sqrt{s}} sh \sqrt{s}. \quad (7.5.18)$$

Запишем уравнение материального баланса (7.5.8) и граничное условие (7.5.13) в области изображений:

$$s N_L(s) - N_0 + \sigma [s \bar{N}_{cp.L}(s) - \bar{N}_0] = -\chi N_L(s); \quad (7.5.19)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_L(1, s)}{\partial \xi} = Bi_m [N_L(s) - \bar{N}_L(1, s)]; \quad (7.5.20)$$

Выразим из уравнения (7.5.19) функцию  $N_L(s)$  и подставим её величину в условие (7.5.20):

$$\frac{\partial \bar{N}_L(1, s)}{\partial \xi} = Bi_m \left\{ \frac{N_0}{s + \chi} - \frac{\sigma}{s + \chi} [s \bar{N}_{cpL}(s) - \bar{N}_0] - \bar{N}_L(1, s) \right\}. \quad (7.5.21)$$

Удовлетворим решения (7.5.17) и (7.5.18) условию (7.5.21), а затем из полученного соотношения найдем постоянную  $A$ :

$$A = \frac{Bi_m [sN_0 - (s + \chi)\bar{N}_0]}{s[(s + \chi + Bi_m\sigma)\sqrt{ssh\sqrt{s}} + Bi_m(s + \chi)ch\sqrt{s}]}. \quad (7.5.22)$$

Решение в области изображений будет иметь вид:

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = \frac{Bi_m [sN_0 - (s + \chi)\bar{N}_0] ch(\sqrt{s}\xi)}{s(s + \chi) \left[ \left( \frac{Bi_m\sigma}{s + \chi} + 1 \right) \sqrt{ssh\sqrt{s}} + Bi_m ch\sqrt{s} \right]} = \frac{\phi(s)}{\psi(s)}. \quad (7.5.23)$$

Числитель и знаменатель решения (7.5.23) представляют собой обобщенные полиномы относительно  $s$ . В этом нетрудно убедиться, используя непосредственное разложение гиперболических функций в степенной ряд.

Найдем корни функции  $\psi(s)$ , для чего приравняем её нулю, т.е.

$$\psi(s) = s(s + \chi) \left[ \left( \frac{Bi_m\sigma}{s + \chi} + 1 \right) \sqrt{ssh\sqrt{s}} + Bi_m ch\sqrt{s} \right] = 0. \quad (7.5.24)$$

Отсюда будем иметь: 1)  $s = 0$  (нулевой корень), 2)  $s = -\chi$ , 3) бесконечное множество корней  $s_n$ , определяемых из уравнения:

$$\left( \frac{Bi_m\sigma}{s + \chi} + 1 \right) \sqrt{ssh\sqrt{s}} + Bi_m ch\sqrt{s} = 0. \quad (7.5.25)$$

Осуществим переход от гиперболических функций к тригонометрическим и обозначим  $i\sqrt{s} = \mu$ . Получаем

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{Bi_m(\chi - \mu^2)}{\mu(\chi + Bi_m\sigma - \mu^2)}. \quad (7.5.26)$$

Для выполнения обратного преобразования Лапласа может быть применена вторая теорема разложения:

$$L^{-1} \left[ \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \right] = \frac{\phi(0)}{\psi'(0)} + \frac{\phi(\chi)}{\psi'(\chi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(s_n)}{\psi'(s_n)} \exp(s_n Fo_m). \quad (7.5.27)$$

В соответствии с соотношением (7.5.27) найдем вспомогательные величины

$$\frac{\phi(0)}{\psi'(0)} = \frac{Bi_m[sN_0 - (s+\chi)\bar{N}_0] \left( 1 + \frac{1}{2!} s\xi^2 + \frac{1}{4!} s^2\xi^4 + \dots \right)}{\left\{ s \left[ (s+\chi + Bi_m\sigma)\sqrt{s} \left( \sqrt{s} + \frac{s\sqrt{s}}{3!} + \dots \right) \operatorname{sh}\sqrt{s} + Bi_m(s+\chi) \left( 1 + \frac{1}{2!} s + \dots \right) \right] \right\}}, = -\bar{N}_0, \quad (7.5.28)$$

$$\frac{\phi(\chi)}{\psi'(\chi)} = \frac{Bi_m N_0 \cos\sqrt{\chi}\xi}{\left( \frac{Bi_m\sigma}{2\sqrt{\chi}} - \sqrt{\chi} \right) \sin\sqrt{\chi} + \cos Bi_m \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) \sqrt{\chi}}, \quad (7.5.29)$$

$$\psi'(s_n) = \left\{ s \left[ (s+\chi + Bi_m\sigma)\sqrt{s} \operatorname{sh}\sqrt{s} + Bi_m(s+\chi) \operatorname{ch}\sqrt{s} \right] \right\} = -\frac{\mu_n}{2} \left\{ \left[ (1 + Bi_m)(\chi - \mu_n^2) - 2\mu_n^2 + Bi_m\sigma \right] \sin \mu_n + \mu_n \left[ \chi - \mu_n^2 + Bi_m(\sigma + 2) \right] \cos \mu_n \right\}, \quad (7.5.30)$$

$$\phi(s_n) = Bi_m[sN_0 - (s+\chi)\bar{N}_0] \operatorname{ch}(\sqrt{s}\xi) = -Bi_m \left[ \mu_n^2 N_0 + (\chi - 2\mu_n^2)\bar{N}_0 \right] \cos(\mu_n \xi). \quad (7.5.31)$$

Учитывая найденные значения  $\frac{\phi(0)}{\psi'(0)}$ ,  $\frac{\phi(\chi)}{\psi'(\chi)}$ ,  $\phi(s_n)$  и  $\psi'(s_n)$  получим

решение задачи в виде:

$$F(x, \tau) = \frac{\bar{C}(x, \tau) - C_{\text{BX}}}{\bar{C}_0 - C_{\text{BX}}} = \frac{Bi_m \left( \frac{C_0 - C_{\text{BX}}}{\bar{C}_0 - C_{\text{BX}}} \right) \cos\sqrt{\chi}\xi}{\left( \frac{Bi_m\sigma}{2\sqrt{\chi}} - \sqrt{\chi} \right) \sin\sqrt{\chi} + Bi_m \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) \cos\sqrt{\chi}} e^{-\frac{\chi \bar{D}_\Phi \tau}{R^2}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\frac{\mu_n^2 \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}}, \quad (7.5.32)$$

$$\text{где } A_n = \frac{2Bi_m \left[ \mu_n^2 \left( \frac{C_0 - C_{\text{BX}}}{\bar{C}_0 - C_{\text{BX}}} \right) + \chi - \mu_n^2 \right]}{\left[ (1 + Bi_m)(\chi - \mu_n^2) - 2\mu_n^2 + Bi_m \sigma \right] \sin \mu_n + \mu_n \left[ \chi - \mu_n^2 + Bi_m(\sigma + 2) \right] \cos \mu_n}.$$

Если подставить в соотношение (7.5.3) вместо  $\bar{C}(x, \tau)$  решение (7.5.32), то после интегрирования получим

$$F_{\text{ср}}(\tau) = \frac{\bar{C}_{\text{ср}}(\tau) - C_{\text{BX}}}{\bar{C}_0 - C_{\text{BX}}} = \frac{Bi_m \left( \frac{C_0 - C_{\text{BX}}}{\bar{C}_0 - C_{\text{BX}}} \right) \sin \sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi} \left[ \left( \frac{Bi_m \sigma}{2\sqrt{\chi}} - \sqrt{\chi} \right) \sin \sqrt{\chi} + Bi_m \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) \cos \sqrt{\chi} \right]} e^{-\frac{\chi \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \mu_n}{\mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}}. \quad (7.5.33)$$

Решение (7.5.32) позволяет проанализировать влияние объемного расхода раствора, поступающего в проточный аппарат, соотношения объемов твердой и жидкой фаз в аппарате, толщины пластины и других параметров процесса на распределение концентрации вещества по внутренней координате твердого тела. Уравнение (7.5.33) может быть использовано для определения средней концентрации вещества по объему твердой фазы в любой момент времени.

Используем равенство, отражающее тот факт, что скорость выхода раствора из объема тела пластинчатой формы должна быть равна скорости, с которой раствор проходит через поверхность этого тела:

$$\bar{V} \frac{d\bar{C}_{\text{ср}}(\tau)}{d\tau} = S \bar{D}_{\text{эф}} \left. \frac{\partial \bar{C}(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=R}. \quad (7.5.34)$$

Уравнение материального баланса (7.5.1) может быть записано так

$$V \frac{dC(\tau)}{d\tau} + \varepsilon_M S \bar{D}_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{C}(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R} = Q [C_{\text{ВХ}} - C(\tau)]. \quad (7.5.35)$$

Учтем, что  $\bar{V} = SR$ . Если подставить в уравнение (7.5.35) вместо  $\bar{C}(x, \tau)$  решение (7.5.32), то после дифференцирования, принятия  $x = R$  и интегрирования получим

$$\theta(\tau) = \frac{C(\tau) - C_{\text{ВХ}}}{C_0 - C_{\text{ВХ}}} = \left( \frac{A \sqrt{\chi} \sigma \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2} \sin \sqrt{\chi} + 1 \right) e^{-\frac{\chi \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}} +$$

$$+ \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\chi - \mu_n^2} \left[ \mu_n^2 + (\chi - \mu_n^2) \left( \frac{C_0 - C_{\text{ВХ}}}{C_0 - C_{\text{ВХ}}} \right) \right] \sin \mu_n \left( e^{-\frac{\mu_n^2 \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}} - e^{-\frac{\chi \bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2}} \right). \quad (7.5.36)$$

Уравнение (7.5.36) может быть применено для расчета концентрации раствора на выходе из аппарата в любой момент времени.

Полученные решения (7.5.32), (7.5.33) и (7.5.36) применим для исследования процесса выщелачивания хлористого цинка из фибры при следующих параметрах:  $\bar{C}_0 = 1300 \text{ кг/м}^3$ ;  $C_0 = 720 \text{ кг/м}^3$ ;  $\bar{V} = 4.97 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ ;  $V = 6.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  $Q = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $\varepsilon_M = 0,5$ ;  $R = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $\beta = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ ;  $\bar{D}_{\text{эф}} = 3,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ .

На рис. 7.5.2 приведены программа и результаты расчетов процесса выщелачивания фибры.



Дано

Начальная концентрация хлористого цинка в фибре  $C_{T0}$ , кг/м<sup>3</sup>  $C_{T0} := 1300$

Начальная концентрация раствора  $C_0$ , кг/м<sup>3</sup>  $C_0 := 720$

Концентрация раствора на входе в аппарат  $C_{вх}$ , кг/м<sup>3</sup>  $C_{вх} := 700$

Объем твердой фазы  $V_T$ , м<sup>3</sup>  $V_T := 4.97 \cdot 10^{-4}$

Объем жидкой фазы  $V_ж$ , м<sup>3</sup>  $V_ж := 6.5 \cdot 10^{-3}$

Расход жидкой фазы  $Q$ , м<sup>3</sup>/с  $Q := 4 \cdot 10^{-6}$

Коэффициент диффузии  $D_{эф}$ , м<sup>2</sup>/с  $D_{эф} := 3.8 \cdot 10^{-10}$

Толщина пластины  $h$ , м  $h := 4 \cdot 10^{-3}$

Коэффициент массоотдачи  $\beta$ , м/с  $\beta := 1 \cdot 10^{-5}$

Пористость  $\epsilon_M$   $\epsilon_M := 0.5$

Безразмерная половина толщины пластины  $\xi := 0,01..1$

Время процесса  $\tau$ , с  $\tau := 0,10..25000$

Расчет

Половина толщины пластины, м

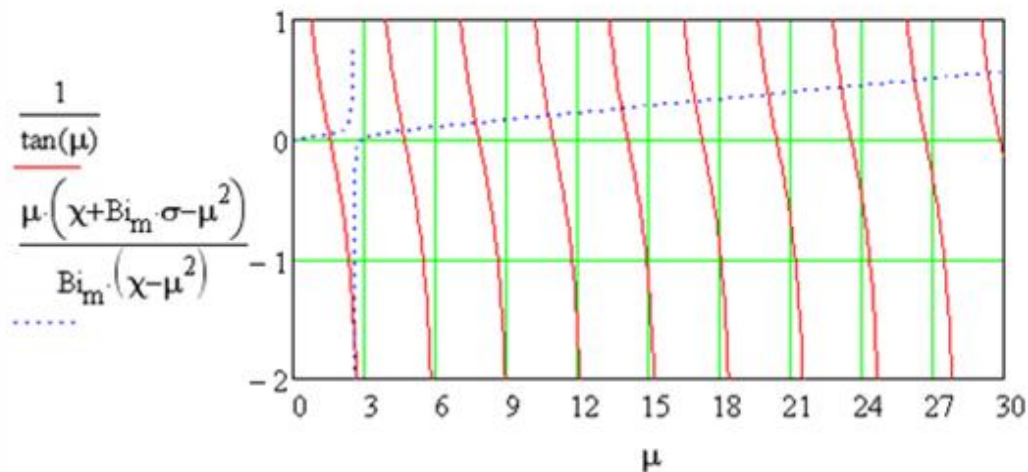
$$R := \frac{h}{2} \quad R = 0.002$$

Коэффициенты

$$\sigma := \frac{\epsilon_M \cdot V_T}{V_ж} \quad \chi := \frac{Q \cdot R^2}{V_ж \cdot D_{эф}} \quad Bi_m := \frac{\beta \cdot R}{D_{эф}}$$

$$\sigma = 0.038 \quad \chi = 6.478 \quad Bi_m = 52.632$$

Расчет корней характеристического уравнения



$n := 0..9$

$$a1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2.55 \\ \pi + 1 \\ 2 \cdot \pi + 0.5 \\ 3 \cdot \pi + 0.01 \\ 4 \cdot \pi + 0.001 \\ 5 \cdot \pi + 0.001 \\ 6 \cdot \pi + 0.001 \\ 7 \cdot \pi + 0.001 \\ 8 \cdot \pi + 0.001 \end{pmatrix} \quad a2 := \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2}\right) - 0.001 \\ 2.7 \\ \pi + \frac{\pi}{2} - 0.001 \\ 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.01 \\ 3 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.01 \\ 4 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.001 \\ 5 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.001 \\ 6 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.001 \\ 7 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.001 \\ 8 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - 0.001 \end{pmatrix}$$

$$F(\mu) := \frac{1}{\tan(\mu)} - \frac{\mu \cdot (\chi + Bi_m \cdot \sigma - \mu^2)}{Bi_m \cdot (\chi - \mu^2)}$$

$$\mu_n := \text{root}(F(\mu), \mu, a1_n, a2_n)$$

$\mu_n =$
1.528
2.557
4.636
7.714
10.797
13.882
16.969
20.058
23.149
26.242

**Расчет распределения относительной концентрации хлористого цинка в неограниченной пластине**

$$A_1 := \frac{Bi_m \cdot \frac{C_0 - C_{BX}}{C_{T0} - C_{BX}}}{Bi_m \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \cdot \cos(\sqrt{\chi}) + \left(\frac{Bi_m \cdot \sigma}{2 \cdot \sqrt{\chi}} - \sqrt{\chi}\right) \cdot \sin(\sqrt{\chi})}$$

$$B1_n := \frac{2Bi_m \cdot \left[ (\mu_n)^2 \left( \frac{C_0 - C_{BX}}{C_{T0} - C_{BX}} \right) + \chi - (\mu_n)^2 \right]}{(\mu_n) \left[ (1 + Bi_m) \cdot [\chi - (\mu_n)^2] - 2(\mu_n)^2 + Bi_m \cdot \sigma \right] \cdot \sin(\mu_n) + \mu_n \cdot [\chi - (\mu_n)^2 + Bi_m \cdot (\sigma + 2)] \cdot \cos(\mu_n)}$$

$$N(\xi, \tau) := A_1 \cdot \cos(\sqrt{\chi} \cdot \xi) \cdot e^{-\chi \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}} + \sum_{n=0}^9 \left[ B1_n \cdot \cos(\mu_n \cdot \xi) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}} \right]$$

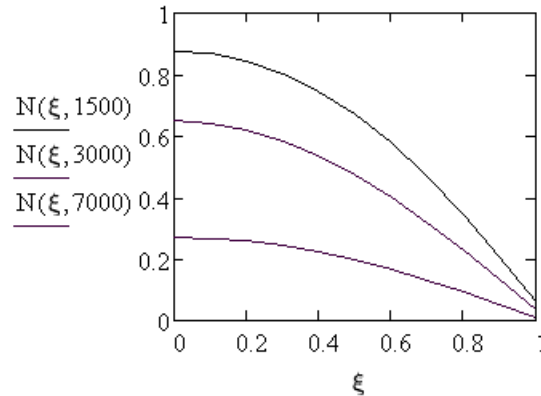


Рис. 7.5.2а. Кривые распределения относительной концентрации хлористого цинка в неограниченной пластине

Расчет кинетической кривой

$$N_{\text{cp}}(\tau) := \frac{A_1 \cdot \sin(\sqrt{\chi}) \cdot e^{-\chi \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}}}{\sqrt{\chi}} + \sum_{n=0}^9 \frac{B1_n \cdot \sin(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}}}{\mu_n}$$

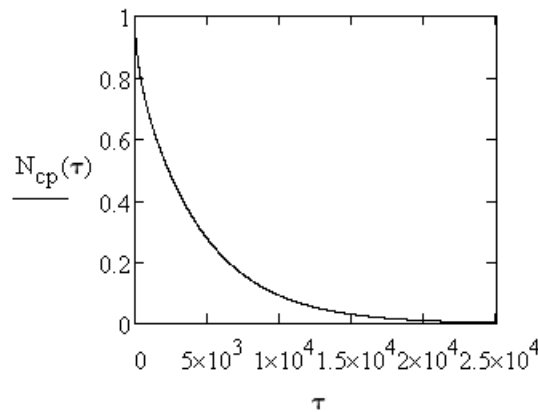


Рис. 7.5.2б. Кривая выщелачивания фибры

Расчет изменения безразмерной концентрации раствора хлористого цинка на выходе из аппарата от времени процесса

$$A_2 := \frac{\sqrt{\chi} \cdot Bi_m \cdot \sigma \cdot \sin(\sqrt{\chi}) \cdot D_{\text{эф}}}{R^2 \cdot \left[ Bi_m \cdot \left( 1 + \frac{\sigma}{2} \right) \cdot \cos(\sqrt{\chi}) + \left( \frac{Bi_m \cdot \sigma}{2 \cdot \sqrt{\chi}} - \sqrt{\chi} \right) \cdot \sin(\sqrt{\chi}) \right]}$$

$$B_{2n} := \frac{2 \cdot \sigma \cdot Bi_m \cdot \left[ (\mu_n)^2 + \left[ \chi - (\mu_n)^2 \right] \left( \frac{C_{\tau 0} - C_{\text{BX}}}{C_0 - C_{\text{BX}}} \right) \right] \cdot \sin(\mu_n)}{\left[ \chi - (\mu_n)^2 \right] \left[ \left( 1 + Bi_m \right) \cdot \left[ \chi - (\mu_n)^2 \right] - 2 \left( \mu_n \right)^2 + Bi_m \cdot \sigma \right] \cdot \sin(\mu_n) + \mu_n \cdot \left[ \chi - (\mu_n)^2 + Bi_m \cdot (\sigma + 2) \right] \cdot \cos(\mu_n)}$$

$$\theta(\tau) := (A_2 \cdot \tau + 1) \cdot e^{-\chi \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}} + \sum_{n=0}^9 \left[ B_{2n} \cdot \left[ e^{-\left( \mu_n \right)^2 \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}} - e^{-\chi \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2}} \right] \right]$$

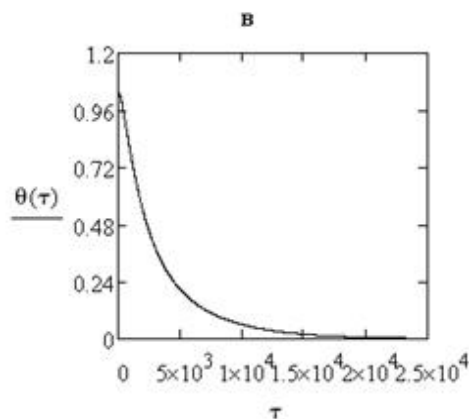


Рис. 7.5.2в. Зависимость изменения безразмерной концентрации раствора хлористого цинка на выходе из аппарата от времени процесса

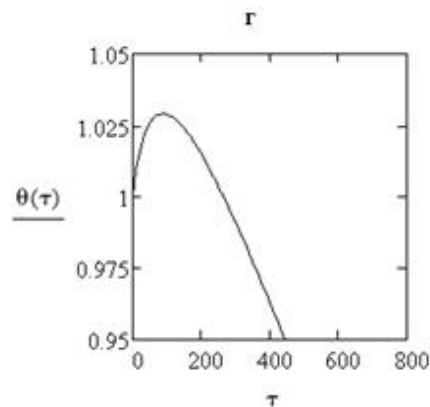


Рис. 7.5.2в.г. Зависимость изменения безразмерной концентрации раствора хлористого цинка на выходе из аппарата от времени процесса

## Список литературы

1. Соловьева, С.И. Применение преобразования Лапласа для решения задач математической физики: учебное пособие по курсу "Уравнения математической физики" / С.И. Соловьева. – М.: МАКС Пресс, 2011. – 40 с.
2. Романков, П.Г. Массообменные процессы химической технологии (системы с дисперсной твердой фазой) / П.Г. Романков, В.Ф. Фролов. – Л.: Химия, 1990. – 384 с.
3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
4. Кишиневский, М.Х. Определение коэффициентов массоотдачи в каналах пористых сред / М.Х. Кишиневский, Т.С. Корниенко, В.Н. Кармаев // Термодинамика необратимых процессов и ее применение. Ч. 1. – Черновцы, 1984. – С. 137–138.
5. Крамович, В.Ф. Кинетики массопередачи при ионообмене в кипящем слое ионита / В.Ф. Крамович, А.А. Комаровский // Гидродинамика, тепло- и массообмен в псевдооживленном слое. – Иваново, 1971. - С. 127–130.
6. Смирнов, Н.Н. Расчет и моделирование ионообменных реакторов / Н.Н. Смирнов, А.И. Волжинский, В.А. Константинов. – Л.: Химия, 1984. – 224 с.
7. Касаткин, А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии / А.Г. Касаткин. – М.: ООО ТИД “Альянс”, 2004. – 753 с.
8. Аэров, М.Э. Гидравлическое и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем / М.Э. Аэров, О.М. Тодес. - Л.: Химия, 1968. – 510 с
9. Пономаренко, В.Г. Кристаллизация в псевдооживленном слое / В.Г. Пономаренко, К.П. Ткаченко, Ю.А. Курлянд. – Киев: Техніка, 1972. – 132 с.

Учебное издание

**Натареев Сергей Валентинович**

ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОМАССООБМЕНА  
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБОРУДОВАНИИ  
ХИМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ

Учебное пособие

Редактор О.А. Соловьева

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный  
химико-технологический университет»  
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7