

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Ивановский государственный химико-технологический  
университет

Т.Ю. Степанова

## **Механика**

Учебное пособие

Под редакцией Б.Р.Киселева

Иваново 2007

УДК 621.8

Степанова, Т.Ю. Механика: учебное пособие/Т.Ю.Степанова;  
под ред. Б.Р.Киселева; Иван.гос.хим.-технол. ун-т - Иваново,  
2007 – 167 с. - ISBN-5-9616-0239-7.

Учебное пособие содержит основные сведения по статике, по сопротивлению материалов, о различных видах передач, деталях машин, задачи и контрольные вопросы.

Предназначено для студентов специальности «Технология художественной обработки металлов». Табл. 2. Ил. 105, Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета.

Рецензенты: кафедра «механики и инженерной графики» Ивановского института ГПС МЧС России;

кандидат технических наук Н.А.Можин (Ивановская государственная текстильная академия).

ISBN-5-9616-0239-7.

©ГОУВПО Ивановский  
государственный  
химико-технологический  
университет, 2007

## Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов специальности «Технология художественной обработки металлов», изучающих курс механики.

Настоящее пособие состоит из трех частей. В первой части «Статика» приведен материал по статике твердого тела. Вторая часть «Основные сведения о сопротивлении материалов» знакомит студентов-технологов с сопротивлением конструкционных материалов действию статических и динамических нагрузок. Рассматриваются различные виды деформаций и напряжений, возникающих в конструкциях. Третья часть пособия «Детали машин» содержит материал о назначении и конструктивных особенностях наиболее распространенных типовых деталей машин и их соединений.

В каждой части пособия приведены типовые задачи и контрольные вопросы.

# ЧАСТЬ I

## СТАТИКА

### 1.1. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО, СИЛА. ЗАДАЧИ СТАТИКИ

*Статикой* называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием будем понимать состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к земле. В курсе механики рассматриваются обычно только задачи о равновесии твердых тел.

Все встречающиеся в природе твердые тела под влиянием внешних воздействий в той или иной мере изменяют свою форму (деформируются). Величины этих деформаций зависят от материальных тел, их геометрической формы и размеров и от действующих нагрузок. Для обеспечения прочности различных инженерных сооружений и конструкций материал и размеры их частей подбирают так, чтобы деформации при действующих нагрузках были достаточно малы. Вследствие этого при изучении условий равновесия вполне допустимо пренебрегать малыми деформациями соответствующих твердых тел и рассматривать их как недеформируемые или абсолютно твердые. ***Абсолютно твердым телом*** называют такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным. При решении задач статики все тела рассматриваются как абсолютно твердые, хотя часто для краткости их называют просто твердыми телами.

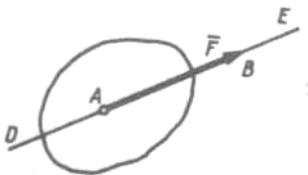
Состояние равновесия данного тела зависит от характера его механических взаимодействий с другими

телами, т.е. от тех давлений, притяжений или отталкиваний, которые тело испытывает в результате этих взаимодействий. Величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике **силой**.

Сила – величина векторная. Ее действие на тело определяется: 1) **числовым значением** или **модулем** силы, 2) **направлением** силы, 3) **точкой приложения** силы.

Модуль силы находят путем ее сравнения с силой, принятой за единицу. Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ), является 1 ньютон (1Н); применяется и более крупная единица 1 килоньютон (1 кН=1000 Н).

Силу, как и все другие векторные величины, будем обозначать буквой с чертой над нею (например,  $\vec{F}$ ), а модуль силы – символом  $|F|$  или той же буквой, но без черты над нею ( $F$ ). Графически сила, как и другие векторы, изображается направленным отрезком (рис. 1.1). Длина этого отрезка выражает в выбранном масштабе модуль силы, направление отрезка соответствует направлению силы, точка А на рис. 1.1 является точкой приложения силы.



**Рис.1.1. Графическое изображение силы**

Прямая DE, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Условимся еще о следующих определениях.

1. **Системой сил** будем называть совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело (или тела). Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, система сил называется **плоской**, а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, - **пространственной**. Кроме того, силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются **сходящимися**, а силы, линии действия которых параллельны друг другу, - **параллельными**.
2. Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется **свободным**.
3. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются **эквивалентными**.
4. Система сил, под действием которой свободное тело может находиться в покое, называется **уравновешенной** или **эквивалентной нулю**.
5. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется **уравновешивающей** силой.

6. Силы, действующие на данное тело (или систему тел), можно разделить на внешние и внутренние. **Внешними** называются силы, которые действуют на это тело (или тела системы) со стороны других тел, а **внутренними** – силы, с которыми части данного тела (или тела данной системы) действуют друг на друга.

7. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются **распределенными**.

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые в механике рассматривают как сосредоточенные, представляют собой по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

**Задачами статики** являются: 1) преобразование систем сил, действующих на твердое тело, в системы им эквивалентные, в частности приведение данной системы сил к простейшему виду; 2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

Решать задачи статики можно или путем соответствующих геометрических построений (геометрический и графический методы), или с помощью численных расчетов (аналитический метод). При решении задач статики применяется аналитический метод, однако следует иметь в виду, что наглядные геометрические построения играют при решении задач механики чрезвычайно важную роль.

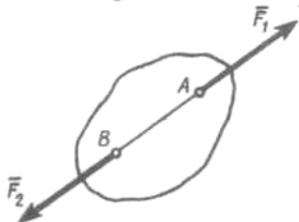
## 1.2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Аксиомы статики, по существу являются не независимыми аксиомами, а следствиями тех же основных законов механики (или аксиомы), их можно сформулировать следующим образом.

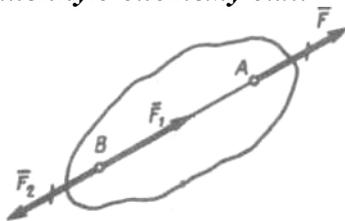
**1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в**

*равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ( $F_1=F_2$ ) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).*

*2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.*



**Рис.1.2. Действие двух сил на свободное абсолютно твердое тело**



**Рис.1.3. Перенос точки приложения силы вдоль линии действия**

Иными словами это означает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

**Следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.**

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке A сила  $\vec{F}$  (рис. 1.3). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим в ней две уравновешенные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  такие, что  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  и  $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ . От этого действие силы  $\vec{F}$  на тело не изменится. Но силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена. В результате на тело будет действовать

только одна сила  $\bar{F}_1$ , равная  $\bar{F}$ , но приложенная в точке В.

Таким образом, вектор, изображающий силу  $\bar{F}$ , можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы (такой вектор называется *скользящим*).

Полученный результат справедлив только для сил, действующих на абсолютно твердое тело. При инженерных расчетах им можно пользоваться лишь тогда, когда определяются условия равновесия той или иной конструкции и не рассматриваются возникшие в ее частях внутренние усилия.

Например, изображенный на рис. 1.4, а стержень АВ будет находиться в равновесии, если  $F_1 = F_2$ . При переносе точек приложения обеих сил в какую-нибудь точку С стержня (рис. 1.4, б) или при переносе точки приложения силы  $\bar{F}_1$  в точку В, а силы  $\bar{F}_2$  в точку А (рис. 1.4, в) равновесие не нарушается. Однако

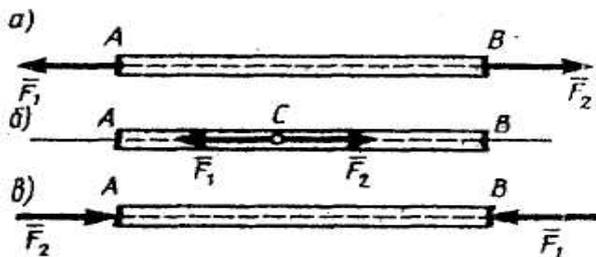


Рис. 1.4. Действие сил на стержень

внутренние усилия будут в каждом из рассматриваемых случаев разными. В первом случае стержень под действием приложенных сил растягивается, во втором случае он напряжен, а в третьем стержень будет сжат.

Следовательно, при определении внутренних усилий переносить точку приложения силы вдоль линии действия нельзя.

Еще два исходных положения относятся к общим законам механики.

**Закон параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.**

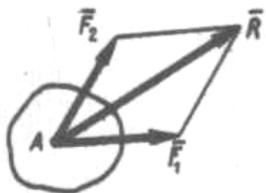


Рис. 1.5. Сложение сил в плоскости

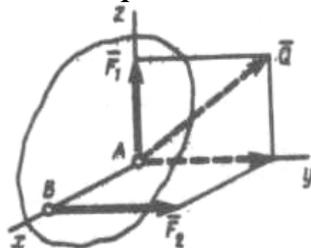


Рис. 1.6. Сложение сил в пространстве

Вектор  $\vec{R}$ , равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 1.5), называется **геометрической суммой векторов  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$** :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Следовательно, закон параллелограмма сил можно еще сформулировать так: **две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической**

*(векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.*

В дальнейшем следует различать понятия суммы сил и их равнодействующей. Поясним это примером. Рассмотрим две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 1.6), приложенные к телу в точках А и В. Показанная на рис. 1.6 сила  $\vec{Q}$  равна геометрической сумме сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  ( $\vec{Q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ), как диагональ соответствующего параллелограмма. Но сила  $\vec{Q}$  не является равнодействующей этих сил, так как нетрудно понять, что одна сила  $\vec{Q}$  не может заменить действие сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  на данное тело, где бы она ни была приложена.

**Закон равенства действия и противодействия: *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие.***

Этот закон является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело А действует на тело В с некоторой силой  $\vec{F}$ , то одновременно тело В действует на тело А с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но в противоположную сторону, силой  $\vec{F}' = -\vec{F}$  (рис. 1.7). Заметим, что силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$ , как приложенные к разным телам, не образуют уравновешенную систему сил.

**Свойство внутренних сил.** Согласно данному закону при взаимодействии две любые части тела действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами. Так как при изучении условий равновесия тело рассматривается как абсолютно твердое, то все внутренние силы образуют при этом уравновешенную систему сил,

которую можно отбросить. Следовательно, при изучении условий равновесия тела необходимо учитывать только *внешние* силы, действующие на это тело.

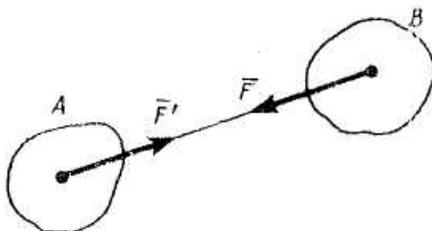


Рис. 1.7. Взаимодействие двух материальных тел

Еще одним исходным положением является принцип отвердевания: *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим* (абсолютно твердым).

Высказанное утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом. Так как на покоящееся тело до и после отвердевания действует одна и та же система сил, то данный принцип можно еще высказать в такой форме: *при равновесии силы, действующие на любое изменяемое (деформируемое) тело, удовлетворяют тем же условиям, что и для тела абсолютно твердого*; однако для изменяемого тела эти условия, будучи *необходимыми*, могут быть *недостаточными*.

Например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, необходимы те же условия, что и для жесткого стержня (силы должны быть равны по модулю и направлены

вдоль нити в разные стороны). Но эти условия не будут достаточными. Для равновесия нити требуется еще, чтобы приложенные силы были растягивающими, т.е. направленными так, как на рис.1.4, а.

Принцип отвердевания широко используется в инженерных расчетах. Он позволяет при составлении условий равновесия рассматривать любое изменяемое тело (ремень, трос, цепь и т.п.) или любую изменяемую конструкцию как абсолютно жесткие и применять к ним методы статики твердого тела.

### 1.3. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

По определению тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется **свободным** (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называются **несвободным**. *Все то, что ограничивает перемещение тела в пространстве, называют связью*. В дальнейшем будем рассматривать связи, реализуемые какими-нибудь телами, и называть связями сами эти тела.

Примерами несвободных тел является груз, лежащий на столе, дверь, подвешенная на петлях, и т.п. Связями в этих случаях будут: для груза – плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери – петли, не дающие двери отойти от косяка.

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому

препятствует связь, будет действовать на неё с некоторой силой, называемой **силой давления на связь**. Одновременно по закону о равенстве действия и противодействия связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. **Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствует тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи** или просто **реакцией связи**.

Значение реакции связи зависит от других действующих сил и заранее неизвестно. **Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу**. Когда связь может препятствовать перемещениям тела по нескольким направлениям, например реакции такой связи тоже заранее неизвестны и должны определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач механики очень важную роль. Рассмотрим поэтому подробнее, как направлены реакции некоторых основных видов связей.

1. Гладкая плоскость (поверхность) или опора. Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1.8, а).

Поэтому **реакция  $\vec{N}$  гладкой поверхности или опоры, направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их**

касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 1.8, б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

2.Н и т ь. Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 1.9), не дает телу М удаляться от точки подвеса нити по направлению АМ. Поэтому реакция  $T$  натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

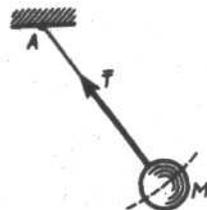
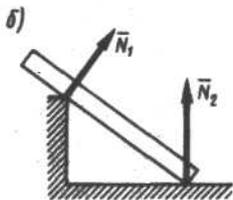
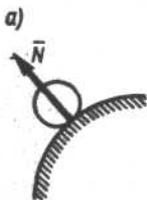


Рис.1.8. Гладкая плоскость

Рис.1.9. Нить

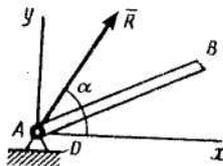


Рис. 1.10. Цилиндрический шарнир

3. Цилиндрический шарнир (подшипник). Цилиндрический шарнир (или просто шарнир) осуществляет такое соединение двух тел, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому вокруг общей оси, называемой **осью шарнира** (например, как две половины ножниц). Если тело АВ прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре  $D$  (рис. 1.10), то точка  $A$  тела не может при этом переместиться ни по какому направлению,

перпендикулярному оси шарнира, Следовательно, **реакция  $\vec{R}$  цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира**, т. е. в плоскости  $Axy$ . В этом случае для силы  $\vec{R}$  неизвестны заранее ни ее модуль  $R$ , ни направление (угол  $\alpha$ ).

4. Сферический шарнир и подпятник. Тела, соединенные сферическим шарниром, могут как угодно поворачиваться одно относительно другого вокруг центра шарнира. Примером служит прикрепление фотоаппарата к штативу с помощью шаровой пяты. Если тело прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре (рис. 1.11, а), то точка  $A$  тела, совпадающая с центром шарнира, не может при этом совершить никакого перемещения в пространстве. Следовательно, **реакция  $\vec{R}$  сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве**. Для нее заранее неизвестны ни ее модуль  $R$ , ни углы с осями  $Axyz$ .

Произвольное направление в пространстве может иметь и реакция  $\vec{R}$  подпятника (подшипника с упором), изображенного на рис. 1.11, б.

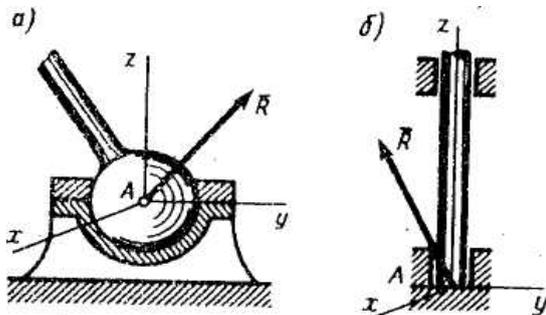


Рис. 1.11. Сферический шарнир и подпятник

5. Невесомый стержень. Невесомым называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Пусть для какого-нибудь находящегося в равновесии тела (конструкции) такой стержень, прикрепленный в точках  $A$  и  $B$  шарнирами является связью (рис. 1.12,  $a$ ). Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в точках  $A$  и  $B$ ; при равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль  $AB$  (см. рис. 1.4,  $a$ ,  $b$ ). Но тогда согласно закону о действии и противодействии стержень будет действовать на тело с силой, тоже направленной вдоль  $AB$ . Следовательно, **реакция  $\bar{N}$  невесомого шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.**

Если связью является криволинейный невесомый стержень (рис. 1.12,  $b$ ), то аналогичные рассуждения приведут к выводу, что его реакция тоже направлена вдоль прямой  $AB$ , соединяющей шарниры  $A$  и  $B$  (на рис. 1.12,  $a$  направление реакции соответствует случаю, когда стержень сжат, а на рис. 1.12,  $b$  - когда растянут).

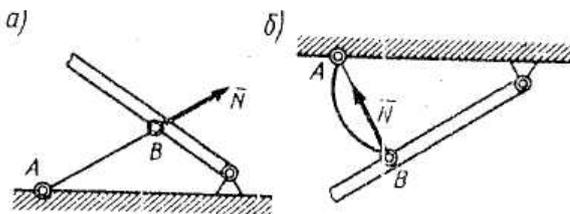


Рис. 1.12. Невесомый стержень

При решении задач реакции связей обычно являются подлежащими определению неизвестными. Нахождение реакций имеет то практическое значение, что, определив их, а тем самым определив по закону о

действию и противодействию и силы давления на связи, получают исходные данные, необходимые для расчета прочности соответствующих частей конструкции.

#### 1.4. СЛОЖЕНИЕ СИЛ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СИЛ. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ, РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛ

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем в дальнейшем называть *главным* вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей; для многих систем сил равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

1. Сложение двух сил. Геометрическая сумма  $\vec{R}$  двух сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  находится по правилу параллелограмма (рис. 1.13, а) или построением

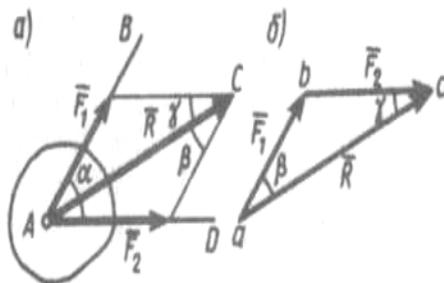


Рис. 1.13. Сложение двух сил

силового треугольника (рис. 1.13, б), изображающего одну из половин этого параллелограмма. Если угол между силами равен  $\alpha$ , то модуль  $R$  и углы  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые сила  $\vec{R}$  образует со слагаемыми силами,

определяются по формулам:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} , \quad (1.1)$$

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha} . \quad (1.2)$$

2. Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости. Геометрическая сумма  $\overline{R}$  трех сил  $F_1, F_2, F_3$ , не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (правило параллелепипеда). В этом убеждаемся, применяя последовательно правило параллелограмма (рис. 1.14).

3. Сложение системы сил. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3 \dots \overline{F}_n$  (рис. 1.15, а) откладываем от произвольной точки  $O$  (рис. 1.15, б) вектор  $\overline{Oa}$ , изображающий в выбранном масштабе силу  $\overline{F}_1$  а - вектор  $\overline{ab}$ , изображающий силу  $\overline{F}_2$ , от точки  $b$  - вектор  $\overline{bc}$ , изображающий силу  $\overline{F}_3$  и т. д.; от конца  $m$  предпоследнего вектора откладываем вектор  $\overline{mp}$ , изображающий силу  $\overline{F}_n$ . Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор  $\overline{Op} = \overline{R}$ , изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n \text{ или } \bar{R} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.3)$$

4. Равнодействующая сходящихся сил. Рассмотрим систему сходящихся сил, т. е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 1.15, а). Так как сила, действующая на абсолютно твердое тело, является вектором скользящим, то система сходящихся сил эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 15, а в точке А).

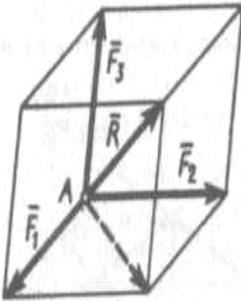


Рис. 1.14

Сложение трех сил  
нележащих в одной плоскости

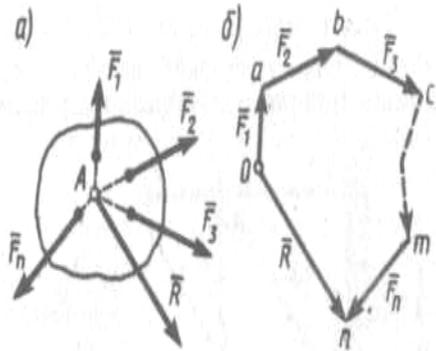


Рис. 1.15

Равнодействующая  
сходящихся сил

Последовательно применяя закон параллелограмма сил, приходем к выводу, что *система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия*. Следовательно, система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ , изображенных на рис.1.15, а, имеет равнодействующую, равную их главному вектору  $\bar{R}$  и приложенную в точке

$A$  (или в любой другой точке, лежащей на линии действия силы  $\vec{R}$ , проведенной через точку  $A$ ).

5. Разложение сил. Разложить данную силу на несколько составляющих - значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение лишь при задании дополнительных условий. Рассмотрим два частных случая:

а) разложение силы по двум заданным направлениям. Задача сводится к построению такого параллелограмма, у которого разлагаемая сила является диагональю, а стороны параллельны заданным направлениям. Например, на рис. 1.13 показано, как сила  $\vec{R}$  разлагается по направлениям  $AB$  и  $AD$  на силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  - составляющие силы  $\vec{R}$  (сила  $\vec{R}$  и прямые  $AB$ ,  $AD$  лежат, конечно, в одной плоскости);

б) разложение силы по трем заданным направлениям. Если заданные направления не лежат в одной плоскости, то задача является определенной и сводится к построению такого параллелепипеда, у которого диагональ изображает заданную силу  $\vec{R}$ , а ребра параллельны заданным направлениям (см. рис. 1.14).

Способом разложения можно в простейших случаях пользоваться для определения сил давления на связи. Для этого действующую на тело заданную силу надо разложить по направлениям реакции связей, так как согласно закону о действии и противодействии сила давления на связь и реакция связи направлены вдоль одной и той же прямой.

**Задача 1.** Кронштейн состоит из стержней  $AC$  и  $BC$ , соединенных со стеной и друг с другом шарнирами, причем

$\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \alpha$  (рис. 1.16). В точке С подвешен груз весом  $P$ . Определить усилия в стержнях, пренебрегая их весом.

**Решение.** Под усилиями в стержнях понимают значения сил, растягивающих или сжимающих эти стержни. Так как стержни считаются невесомыми, то их реакции (они действуют на шарнир С) направлены вдоль стержней. Тогда для определения искомых усилий приложим силу  $\bar{P}$  в точке С и разложим ее по направлениям АС и СВ. Составляющие  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  и будут искомыми силами. Из треугольника CDE найдем:

$$\bar{S}_1 = P / \cos \alpha, \quad \bar{S}_2 = P \operatorname{tg} \alpha.$$

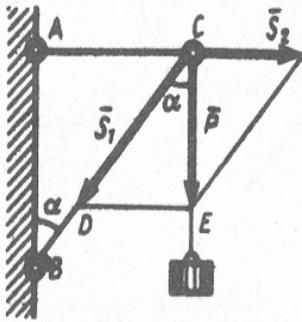


Рис. 1.16. Кронштейн

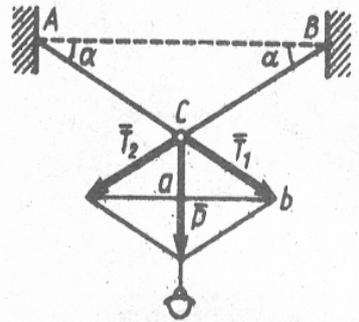


Рис. 1.17. Фонарь на тросах

Таким образом, стержень BC сжимается силой  $\bar{S}_1$ , а стержень AC растягивается силой  $\bar{S}_2$ . С увеличением угла  $\alpha$  усилия в стержнях растут и при  $\alpha$ , близком к  $90^\circ$ , могут достигать очень больших размеров.

**Задача 2.** Фонарь весом  $P = 200$  Н (рис. 1.17) подвешен на двух тросах AC и BC, образующих с горизонтальной прямой одинаковые углы  $\alpha = 5^\circ$ . Определить, с какой силой натянуты тросы.

**Решение.** Приложим силу  $\bar{P}$  в точке С и разложим ее по направлениям тросов. Паралелограмм сил в данном случае будет ромбом; диагонали его взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Из треугольника aCb находим, что  $P/2 = T_1 \sin \alpha$ . Тогда

$$T_1 = T_2 = P / 2 \sin \alpha \approx 1150 \text{ Н.}$$

Из полученной формулы видно, что с уменьшением угла  $\alpha$  натяжение тросов значительно увеличивается (например, при  $\alpha=1^\circ$   $T=5730\text{H}$ ). Натянуть трос так, чтобы он стал горизонтальным, практически нельзя, так как при  $\alpha\rightarrow 0$   $T\rightarrow \infty$ .

## 1.5. ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ И НА ПЛОСКОСТЬ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ И СЛОЖЕНИЯ СИЛ

Аналитический метод решения многих задач статики основывается на понятии о проекции силы на ось. *Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.* Если этот угол острый, - проекция положительна, если тупой, — отрицательна, а если сила перпендикулярна оси, — ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рис.1.18,

$$F_x = F \cos \alpha = ab,$$

$$Q_x = Q \cos \alpha_1 = - Q \cos \varphi = -de, P_x = 0. \quad (1.4)$$

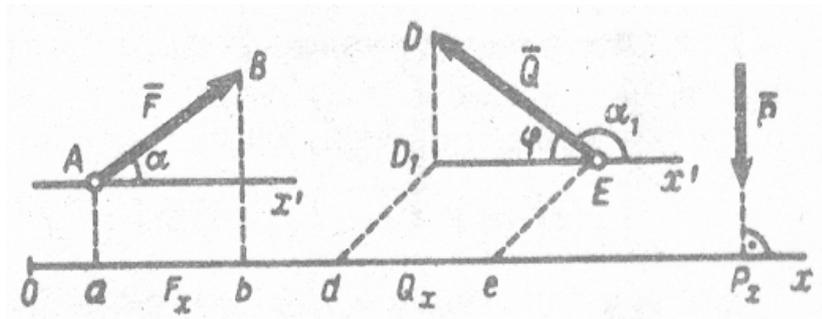


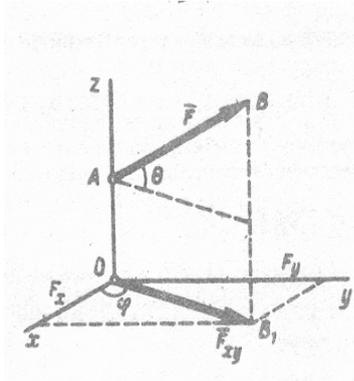
Рис. 1.18. Проекция сил на ось

*Проекцией силы  $\vec{F}$  на плоскость  $Oxy$  называется вектор  $\vec{F}_{xy} = \vec{OB}_1$ , заключенный между проекциями начала и конца силы  $\vec{F}$  на эту плоскость (рис. 1.19). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своими числовыми значениями, но и направлением в плоскости  $Oxy$ . По модулю  $F_{xy} = F \cos \Theta$ , где  $\Theta$  - угол между направлением силы  $F$  и ее проекции  $F_{xy}$ .*

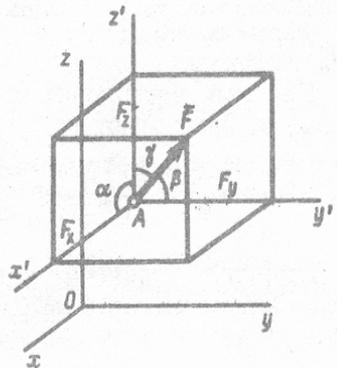
В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 1.19, найдем таким способом, что

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \Theta \cos \varphi, \quad F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \Theta \sin \varphi. \quad (1.5)$$

Аналитический способ задания сил. Для аналитического задания силы необходимо выбрать систему координатных осей  $Oxyz$ , по отношению к которой будет определяться направление силы в пространстве. В механике мы будем пользоваться правой системой координат, т.е. такой системой, в которой кратчайшее совмещение оси  $Ox$  с осью  $Oy$  происходит, если смотреть с положительного конца оси  $Oz$ , против хода часовой стрелки (рис. 1.20).



**Рис.1.19.Проекция сил на плоскость**



**Рис. 1.20. Аналитический способ задания сил**

Вектор, изображающий силу  $\vec{F}$ , можно построить, если известны модуль  $F$  этой силы и углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые сила образует с координатными осями. Таким образом, величины  $F$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и задают силу  $\vec{F}$ . Точка  $A$  приложения силы должна быть задана отдельно её координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Для решения задач механики удобнее задавать силу её проекциями  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  на координатные оси. Зная эти проекции, можно определить модуль силы и углы, которые она образует с координатными осями, по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos \alpha = F_x / F, \quad \cos \beta = F_y / F, \quad \cos \gamma = F_z / F. \quad (1.6)$$

Если все рассматриваемые силы расположены в одной плоскости, то каждую из сил можно задать её проекциями на две оси  $Ox$  и  $Oy$ . Тогда формулы, определяющие силу по её проекциям, примут вид:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad \cos \alpha = F_x / F, \quad \cos \beta = F_y / F. \quad (1.7)$$

Аналитический способ сложения сил. Переход от зависимостей между векторами к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы геометрии: **проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.** Согласно этой теореме, если  $\vec{R}$  есть сумма сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , т.е.  $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ , то

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (1.8)$$

Зная  $R_x, R_y$  и  $R_z$ , по формулам (1.6) находим:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos \alpha = R_x / R, \quad \cos \beta = R_y / R, \quad \cos \gamma = R_z / R. \quad (1.9)$$

Формулы (1.8), (1.9) позволяют решить задачу о сложении сил аналитически.

Для сил, заданных их модулями и углами с осями, для применения аналитического метода сложения надо предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

**Задача 3.** Найти сумму трех лежащих в одной плоскости сил (рис. 1.21, а), если дано:

$$F = 17,32 \text{ Н}, \quad T = 10 \text{ Н}, \quad P = 24 \text{ Н}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \psi = 60^\circ.$$

**Решение.** Вычисляем проекции заданных сил на координатные оси:

$$F_x = F \cos \varphi = 15 \text{ Н}, \quad T_x = -T \cos \psi = -5 \text{ Н}, \quad P_x = 0;$$

$$F_y = -F \sin \varphi = -8,66 \text{ Н}, \quad T_y = T \sin \psi = 8,66 \text{ Н}, \quad P_y = -P = -24 \text{ Н}.$$

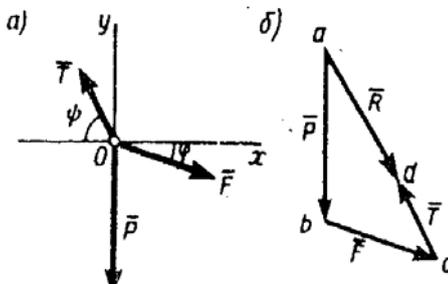
Тогда по формулам (1.8)

$$R_x = 15 - 5 = 10 \text{ Н}, \quad R_y = -8,66 + 8,66 - 24 = -24 \text{ Н}.$$

Следовательно,

$$R = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26\text{Н}; \cos\alpha = 5/13, \cos\beta = -12/13.$$

Окончательно  $R = 26\text{ Н}$ ,  $\alpha = 67^\circ 20'$ ,  $\beta = 157^\circ 20'$ .



**Рис. 1.21. Сложение сил в плоскости**

Для решения той же задачи геометрическим методом надо, выбрав соответствующий масштаб (например, в 1 см - 10 Н), построить из сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}$  и  $\bar{T}$  силовой многоугольник (рис. 1.21, б). Его замыкающая  $\bar{ad}$  и определяет в данном масштабе модуль и направление  $\bar{R}$ . Если, например, при измерении получим  $ad \approx 2,5\text{см}$ , то, следовательно,  $R \approx 25\text{Н}$  с ошибкой по отношению к точному решению около 4%.

## 1.6. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая и главный вектор этих сил были равны нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или в аналитической форме.

### 1. Геометрическое условие равновесия.

Так как главный вектор  $\bar{R}$  системы сил определяется как замыкающая сторона силового

многоугольника, построенного из этих сил (см. рис. 1.15), то  $\bar{R}$  может обратиться в нуль только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой силы, т. е. когда многоугольник замкнется.

**Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.**

## 2. Аналитические условия равновесия.

Аналитически модуль главного вектора системы сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1.10)$$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то  $\bar{R}$  обратится в нуль только тогда, когда одновременно  $R_x = 0$ ,  $R_y = 0$ ,  $R_z = 0$ , т. е., как это следует из формул (1.8), когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0. \quad (1.11)$$

Равенства (1.11) выражают условия равновесия в аналитической форме: **для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.**

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \quad (1.12)$$

3. Теорема о трех силах. При решении задач статики иногда удобно пользоваться следующей теоремой: *если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала какие-нибудь две из действующих на тело сил, например  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Так как по условиям теоремы эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то их линии действия пересекаются в некоторой точке А (рис. 1.22). Приложим силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  в этой точке и заменим их равнодействующей  $\vec{R}$ . Тогда на тело будут действовать две силы: сила  $\vec{R}$  и сила  $\vec{F}_3$ , приложенная в какой-то точке В тела. Если тело при этом находится в равновесии, то силы  $\vec{R}$  и  $\vec{F}_3$ , должны быть направлены по одной прямой, т. е. вдоль АВ. Следовательно, линия действия силы  $\vec{F}_3$  тоже проходит через точку А, что и требовалось доказать.

Обратная теорема места не имеет, т. е. если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то тело под действием этих сил может и не находиться в равновесии; следовательно, теорема выражает только **необходимое** условие равновесия тела под действием трех сил.

Рассмотрим брус АВ, закрепленный в точке А шарниром и опирающийся на выступ D (рис. 1.23). На этот брус действуют три силы: сила тяжести  $\vec{P}$ , реакция  $\vec{N}_D$  выступа и реакция  $\vec{R}_A$  шарнира. Так как брус находится в равновесии, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке. Линии действия сил  $\vec{P}$  и  $\vec{N}_D$  известны и пересекаются в точке К. Следовательно, линия

действия приложенной в точке А реакции  $\vec{R}_A$  тоже должна пройти через точку К, т. е. должна быть направлена вдоль прямой АК. Теорема о трех силах позволила в этом случае определить заранее неизвестное направление реакции шарнира А.

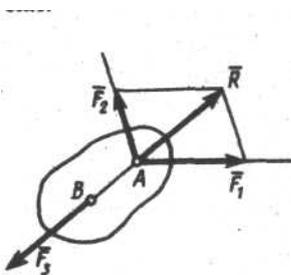


Рис. 1.22. Равновесие тела под действием непараллельных сил

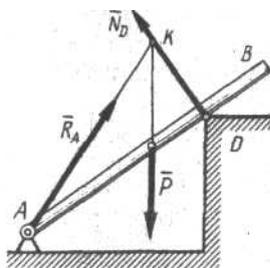


Рис. 1.23. Действие на брус трех непараллельных сил

## 1.7.РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Решаемые методами статики задачи могут быть одного из следующих двух типов: 1) задачи, в которых известны действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении или при каких соотношениях между действующими силами тело будет находиться в равновесии; 2) задачи, в которых известно, что тело заведомо находится в равновесии и требуется найти, чему равны при этом все или некоторые из действующих на тело сил. Реакции связей являются величинами, заранее неизвестными во всех задачах статики.

Приступая к решению любой задачи, следует, прежде всего, установить, **равновесие какого тела надо рассмотреть, чтобы найти искомые величины.** Процесс решения сводится к следующим операциям.

1. Выбор тела, равновесие которого должно быть рассмотрено. Для решения задачи надо рассмотреть равновесие тела, к которому приложены заданные и искомые силы или силы, равные искомым (например, если надо найти давление на опору, то можно рассмотреть равновесие тела, к которому приложена численно равная этой силе реакция опоры и т. п.).

Когда заданные силы действуют на одно тело, а искомые на другое или когда те и другие силы действуют одновременно на несколько тел, может оказаться необходимым рассмотреть равновесие системы этих тел или последовательно равновесие каждого тела в отдельности.

2. Изображение действующих сил. Установив равновесие тела, следует на чертеже изобразить все действующие на это тело внешние силы, включая как заданные, так и искомые силы, в том числе реакции всех связей.

3. Составление условий равновесия. Условия равновесия составляют для сил, действующих на тело, равновесие которого рассматривается.

4. Определение искомых величин, проверка правильности решения и исследование полученных результатов. Большое значение имеет аккуратный чертеж, который помогает быстрее найти правильный путь решения и избежать ошибок при составлении условий равновесия, и определить искомые реакции связей.

Все расчеты при решении задач рекомендуется производить алгебраически. Тогда для искомых величин будут получаться формулы, дающие возможность проанализировать найденные результаты. Кроме того, решение в алгебраическом виде позволяет иногда

обнаружить сделанные ошибки путем проверки размерностей. Числа подставляются только в окончательные результаты.

Рассмотрим задачи на равновесие тела под действием сходящихся сил. Для их решения можно пользоваться геометрическим или аналитическим методом.

**Геометрический метод.** Им удобно пользоваться, когда общее число действующих на тело сил (и заданных, и искомых) равно трем. При равновесии треугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутым (построение следует начинать с заданной силы). Решая этот треугольник, найдем искомые величины.

**Аналитический метод.** Им можно пользоваться при любом числе приложенных сил. Для составления условий равновесия, которых в случае плоской системы сходящихся сил будет два, а в случае пространственной системы - три, надо сначала выбрать координатные оси. Этот выбор можно производить произвольно, но полученные уравнения будут решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно какой-либо неизвестной силе.

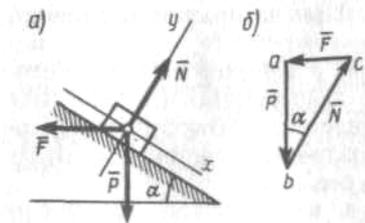
Для составления условий равновесия полезно на первых порах предварительно вычислить проекции всех сил на выбранные оси, внося их в отдельную таблицу.

**Задача 4.** Груз весом  $P$  лежит на гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  (рис. 1.24, а). Определить значение, горизонтальной силы  $\bar{F}$ , которую надо приложить к грузу, чтобы удержать его в равновесии, и найти, чему при этом равна сила давления  $\bar{Q}$  груза на плоскость.

**Решение.** Искомые силы действуют на разные тела: сила  $\bar{F}$  на груз, сила  $\bar{Q}$  - на плоскость. Для решения задачи вместо силы  $\bar{Q}$  будем искать равную ей по модулю, но противоположно

направленную реакцию плоскости  $\vec{N}$ . Тогда заданная сила  $\vec{P}$  и искомые силы  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$  будут действовать на груз, т. е. на одно то же тело. Рассмотрим равновесие груза и изобразим действующие на этот груз силы  $\vec{P}$  и  $\vec{F}$  и реакцию связи  $\vec{N}$ . Для определения искомых сил можно воспользоваться или геометрическими, или аналитическими условиями равновесия. Рассмотрим оба способа решения.

**Геометрический способ.** При равновесии треугольник, построенный из сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$ , должен быть замкнутым.



**Рис. 1.24. Геометрический способ сложения сил**

Построение треугольника начинаем с заданной силы. От произвольной точки  $a$  в выбранном масштабе откладываем силу  $\vec{P}$  (рис. 1.24, б). Через начало и конец этой силы проводим прямые, параллельные направлениям сил  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$ . Точка пересечения этих прямых дает третью вершину  $c$  замкнутого силового треугольника  $abc$ , в котором стороны  $bc$  и  $ca$  равны в

выбранном масштабе искомым силам. Направление сил определяется правилом стрелок: так как здесь равнодействующая равна нулю, то при обходе треугольника острия стрелок нигде не должны встречаться в одной точке.

Модули искомых сил можно найти путем численного расчета из треугольника  $abc$  (в этом случае соблюдать масштаб при изображении сил не надо). Если  $\angle bac = 90^\circ$ , а  $\angle abc = \alpha$ , то получим:

$$F = P \operatorname{tg} \alpha, \quad N = P / \cos \alpha.$$

**Аналитический способ.** Так как система действующих сходящихся сил является плоской, для неё надо составить два условия равновесия. Сначала проводим координатные оси; при этом для получения более простых уравнений ось  $x$  направляем перпендикулярно неизвестной силе  $\vec{N}$ . Далее вычисляем проекции сил  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{N}$  на оси  $x$  и  $y$ , внося их в таблицу:

$\bar{F}_k$	$\bar{P}$	$\bar{F}$	$\bar{N}$
$F_{kx}$	$P \sin \alpha$	$-F \cos \alpha$	$0$
$F_{ky}$	$-P \cos \alpha$	$-F \sin \alpha$	$N$

Теперь составляем уравнения  $\sum F_{kx} = 0$ ,  $\sum F_{ky} = 0$ .

Получим:

$$P \sin \alpha - F \cos \alpha = 0; -P \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$F = P \operatorname{tg} \alpha, N = P \cos \alpha - F - P \sin^2 \alpha / \cos \alpha = P / \cos \alpha.$$

Геометрическое решение в подобных простых задачах (когда действующих сил три) оказывается более компактным, чем аналитическое. Как видно, при  $\alpha < 45^\circ$   $F < P$ , а при  $\alpha > 45^\circ$   $F > P$ ;  $N > P$  при любом  $\alpha > 0$ .

Искомая сила давления груза на плоскость численно равна  $N$ , но направлена в противоположную сторону ( $\bar{Q} = -\bar{N}$ ).

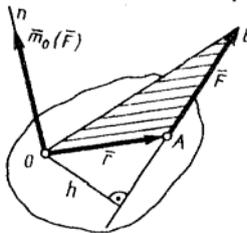
## 1.8. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА. ПАРА СИЛ

### 1.8.1. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА (ИЛИ ТОЧКИ)

Точку, относительно которой берется момент, называют *центром момента*, а момент силы относительно этой точки – *моментом относительно центра*. Если под действием приложенной силы тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то момент силы относительно этой точки будет характеризовать вращательный эффект силы.

Рассмотрим силу  $\bar{F}$ , приложенную к телу в точке  $A$  (рис. 1.25). Из некоторого центра  $O$  опустим перпендикуляр на линию действия силы  $\bar{F}$ ; длину  $h$

этого перпендикуляра называют **плечом силы**  $\vec{F}$  относительно центра  $O$ . Момент силы относительно центра  $O$  определяется: 1) модулем момента, равным произведению  $Fh$ ; 2) положением в пространстве плоскости  $OAB$  («плоскости поворота»), проходящей через центр  $O$  и силу  $\vec{F}$ ; 3) направлением поворота в этой плоскости.



**Рис. 1.25. Момент силы относительно центра**

Из геометрии известно, что положение плоскости в пространстве определяется

направлением нормали (перпендикуляра) к этой плоскости. Таким образом, момент силы относительно центра

характеризуется не только его числовым значением, но и направлением в пространстве, т. е. является величиной векторной.

Введем следующее определение: **моментом силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  называется приложенный в центре  $O$  вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$ , модуль которого равен произведению модуля  $F$  силы на ее плечо  $h$  и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр  $O$  и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра  $O$  против хода часовой стрелки,** (рис. 1.25). Согласно этому определению

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = Fh = 2\text{пл.}\triangle OAB. \quad (1.13)$$

Последний результат следует из того, что пл.  $\Delta OAB = AB \cdot h/2 = Fh/2$ . Измеряется момент силы в ньютон-метрах ( $\text{Н} \cdot \text{м}$ ).

Найдем формулу, выражающую вектор  $\overline{m}_o(\overline{F})$ . Для этого рассмотрим векторное произведение  $\overline{OA} \times \overline{F}$  векторов  $\overline{OA}$  и по определению,

$$|\overline{OA} \times \overline{F}| = 2 \text{пл.} \Delta OAB = |\overline{m}_o(\overline{F})|.$$

Направлен вектор  $\overline{OA} \times \overline{F}$  перпендикулярно плоскости в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение  $\overline{OA}$  с  $\overline{F}$  (если их отложить от одной точки) видно происходящим против хода часовой стрелки, т. е. так же как вектор  $\overline{m}_o(\overline{F})$ . Следовательно, векторы  $\overline{OA} \times \overline{F}$  и  $\overline{m}_o(\overline{F})$  совпадают и по модулю, и по направлению, и, как легко видеть, по размерности, т. е. выражают одну и ту же величину. Отсюда

$$\overline{m}_o(\overline{F}) = \overline{OA} \times \overline{F} \text{ или } \overline{m}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}, \quad (1.14)$$

где  $\overline{r} = \overline{OA}$  - радиус-вектор точки  $A$ , проведенный из центра  $O$ .

Таким образом, *момент силы  $\overline{F}$  относительно центра  $O$  равен векторному произведению радиус-вектора  $\overline{r} = \overline{OA}$ , проведенного из центра  $O$  в точку  $A$ , где приложена сила, на саму силу*. Этот результат может служить другим определением понятия о моменте силы относительно центра.

Отметим следующие свойства момента силы: 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия; 2) момент силы относительно центра  $O$  равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия

действия силы проходит через центр  $O$  (плечо равно нулю).

## 1.8.2. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ

*Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело* (рис. 1.26, а). Система сил  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$ , образующих пару, очевидно, не находится в равновесии (эти силы не направлены вдоль одной прямой). В то же время пара сил не имеет равнодействующей. Равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору  $\vec{R}$ , т. е. сумме этих сил, а для пары  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$ .

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары*. Расстояние  $d$  между линиями действия сил пары называется *плечом пары*. Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой *моментом пары*. Этот момент определяется: 1) его модулем, равным произведению  $Fd$ ; 2) положением в пространстве плоскости действия пары; 3) направлением поворота пары в этой плоскости. Момент силы относительно центра - это величина векторная.

*Моментом пары сил называется вектор  $\vec{M}$  (или  $\vec{M}$ ), модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки* (рис. 1.26, б).

Заметим еще, что так как плечо силы  $\vec{F}$  относительно точки А равно  $d$ , а плоскость, проходящая через точку А и силу  $\vec{F}$ , совпадает с плоскостью действия пары, то одновременно  $\vec{m} = \vec{m}_A(\vec{F}) = \overline{AB} \vec{F}$ . Но в отличие от момента силы вектор  $\vec{m}$  может быть приложен в любой точке (такой вектор называется свободным). Измеряется момент пары в ньютон-метрах.

Моменту пары можно дать другое выражение: момент пары равен сумме моментов относительно любого центра О сил, образующих пару, т. е.

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}')$$

Для доказательства проведем из произвольной точки О (рис. 1.27) радиусы-векторы  $\vec{r}_A = \overline{OA}$  и  $\vec{r}_B = \overline{OB}$ . Тогда согласно формуле (1.14), учтя еще, что  $\vec{F}' = -\vec{F}$ , получим

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}_B \vec{F}, \quad \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}_A \vec{F}' = -\vec{r}_A \vec{F} \quad \text{и,}$$

следовательно,

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \vec{F} = \overline{AB} \vec{F}. \quad (1.15)$$

Так как  $\overline{AB} \vec{F} = \vec{m}$ , то справедливость равенства (1.15) доказана.

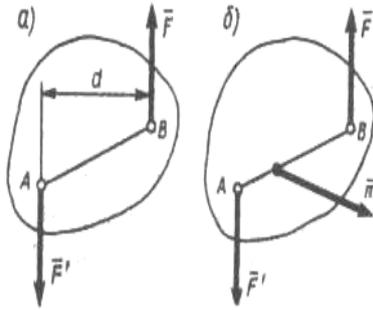


Рис. 1.26. Момент пары

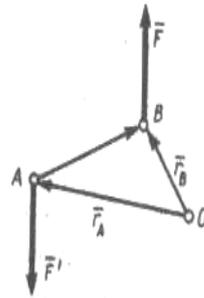


Рис. 1.27. Радиусы - векторы пары сил

Отсюда, в частности, следует уже отмеченный выше результат:

$$\vec{m} = \overline{AB} \vec{F} = \vec{m}_A(\vec{F}) \text{ или } \vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}), \quad (1.15')$$

т.е. **что момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы.** Отметим еще, что модуль момента пары

$$m = Fd. \quad (1.15'')$$

Если принять, что действие пары сил на твердое тело полностью определяется значением суммы моментов сил пары относительно любого центра O, то из формулы (1.15) следует, что **две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны**, т. е. оказывают на тело одинаковое механическое действие. Иначе это означает, что две пары сил, независимо от того, где каждая из них расположена в данной плоскости (или в параллельных плоскостях) и чему равны в отдельности модули их сил и их плечи, если их моменты имеют одно и то же значение  $\vec{m}$ , будут эквивалентны. Так как выбор

центра  $O$  произволен, то вектор  $\vec{m}$  можно считать приложенным в любой точке, т.е. вектор свободный.

В дальнейшем будем обычно на чертеже вместо пары изображать полностью ее характеризующий вектор  $\vec{m}$ . При этом модуль  $m$  определяет модуль момента пары  $m=Fd$ , а направление  $\vec{m}$  определяет плоскость действия пары и направление поворота в этой плоскости.

Из формулы (1.15) следует еще, что если на тело действует несколько пар с моментами  $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ , то сумма моментов всех сил, образующих эти пары, относительно любого центра будет равна  $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n$ , а следовательно, вся совокупность этих пар эквивалентна одной паре с моментом  $\vec{M} = \sum \vec{m}_k$ . Этот результат выражает теорему о сложении пар.

### 1.8.3. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И СЛОЖЕНИЯ ПАР

Рассмотрим действующую на твердое тело пару сил  $\vec{F}, \vec{F}'$  в точках  $A$  и  $B$  (рис. 1.28) и приложим силы  $\vec{F}, \vec{F}'$  в этих точках (первоначально  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  могли быть приложены в любых других точках на их линиях действия). Разложим теперь силу  $\vec{F}$  по направлениям  $AB$  и  $EB$  на силы  $\vec{Q}$  и  $\vec{P}$ , а силу  $\vec{F}'$  — по направлениям  $BA$  и  $AD$  на силы  $\vec{Q}'$  и  $\vec{P}'$ . Очевидно при этом, что  $\vec{P}' = -\vec{P}$ , а  $\vec{Q}' = -\vec{Q}$ .

Силы  $\vec{Q}$  и  $\vec{Q}'$ , как уравновешенные, можно

отбросить. В результате пара сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  будет заменена парой  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}'$  с другим плечом и другими силами, которые можно приложить в точках D, E на их линиях действия.

При этом в силу произвольности в выборе точек D, E и направлений прямых AD и BE пара  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}'$  может оказаться расположенной в плоскости ее действия где угодно (в положение, при котором силы  $\vec{P}$  и  $\vec{P}'$  параллельны  $\vec{F}$ , пару можно привести, проделав указанное преобразование дважды).

Покажем в заключение, что пары  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$  и  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}'$  имеют одинаковые моменты. Обозначим эти моменты соответственно через  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$ , где согласно формуле (1.15')  $\vec{m}_1 = \overline{AB} \vec{F}$ , а  $\vec{m}_2 = \overline{AB} \vec{P}$ .

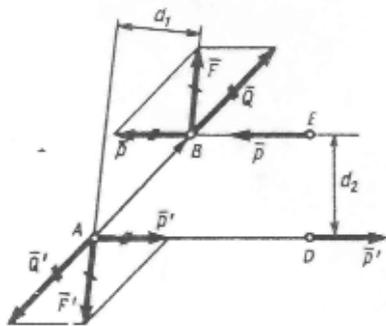


Рис.1.28. Пара сил, приложенных к телу

Так как  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$ , то

$$\overline{AB} \vec{F} = \overline{AB} \vec{P} + \overline{AB} \vec{Q},$$

но  $\overline{AB} \vec{Q} = 0$  - если векторы  $\overline{AB}$  и  $\vec{Q}$  параллельны, следовательно  $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$ .

Из доказанного вытекают следующие свойства пары сил:

1) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;

2) у данной пары, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно произвольно менять

модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.

3) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной.

Теорема об эквивалентности пар. *Две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу.* Путем изменения плеча и перемещения пары в плоскости действия или переноса в параллельную плоскость пары с одинаковыми моментами могут быть преобразованы одна в другую.

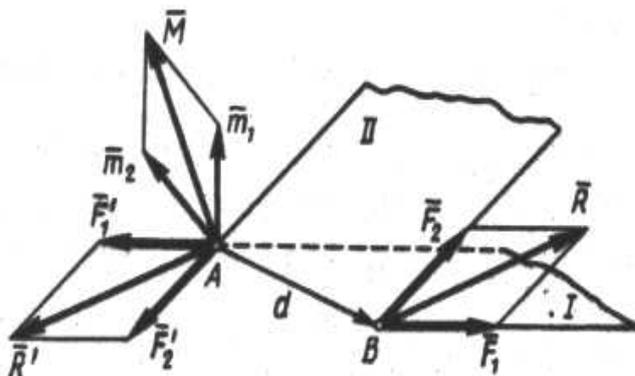


Рис. 1.29. Эквивалентные пары сил

*Система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.*

Рассмотрим сначала две пары с моментами  $\bar{m}_1$  и  $\bar{m}_2$ , лежащие в плоскостях I и II (рис. 1.29). Возьмем на линии пересечения плоскостей отрезок  $AB=d$  и

изобразим пару с моментом  $\bar{m}_1$  силами  $\bar{F}_1, \bar{F}'_1$ , а пару с моментом  $\bar{m}_2$  - силами  $\bar{F}_2, \bar{F}'_2$ , где  $F_1d = m_1, F_2d = m_2$ .

Сложив силы, приложенные в точках А и В, убеждаемся, что пары  $\bar{F}_1, \bar{F}'_1$  и  $\bar{F}_2, \bar{F}'_2$  действительно эквивалентны одной паре  $\bar{R}, \bar{R}'$ ; найдем момент  $\bar{M}$  этой пары. Так как  $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ , то  $\overline{AB} \bar{R} = \overline{AB} \bar{F}_1 + \overline{AB} \bar{F}_2$  или  $\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$ .

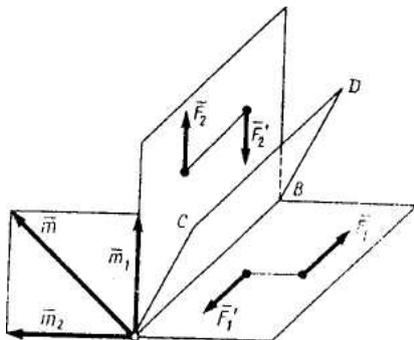
Для двух пар теорема доказана; очевидно, что доказательство сохранится и в том случае, когда плоскости I и II сливаются (слагаемые пары лежат в одной плоскости).

Если на тело действует система n пар с моментами  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$ , то, последовательно применяя результат, полученный для двух пар, найдем, что данная система пар будет действительно эквивалентна одной паре с моментом

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_n = \sum \bar{m}_k. \quad (1.16)$$

Из полученного результата легко найти условие равновесия системы пар, действующих на твердое тело: при равновесии должно быть  $\bar{M} = 0$  или

$$\sum \bar{m}_k = 0. \quad (1.17)$$



**Рис. 1.30. Пары сил, лежащие в перпендикулярных плоскостях**

**Задача 5.** На твердое тело действуют две пары сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}'_1$  и  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}'_2$ , лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 1.30). Модуль момента каждой из пар равен 30 Н·м.

Найти результирующую пару.

**Решение.** Изобразим векторы  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$  моментов слагаемых пар, приложив их в некоторой точке А; тогда момент результирующей пары изобразится вектором  $\vec{m}$ . Следовательно, результирующая пара расположена в плоскости ABCD, перпендикулярной вектору  $\vec{m}$ , а модуль ее момента равен  $30\sqrt{2}$  Н·м.

### 1.8.4. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ В ОДНУ СТОРОНУ

Рассмотрим твердое тело, на которое действуют две параллельные силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис.1.31). Пользуясь аксиомами статики, перейдем от данной системы параллельных сил к эквивалентной ей системе сходящихся сил  $Q_1$  и  $Q_2$ . Для этого приложим в точках А и В две уравновешенные силы  $P_1$  и  $P_2$  ( $P_1 = -P_2$ ), направленные вдоль прямой АВ, и сложим их с силами  $F_1$  и  $F_2$  по правилу параллелограмма. Полученные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  перенесем в точку О, где пересекаются их линии действия, и разложим на первоначальные составляющие. После этого в точке О будут действовать две уравновешенные силы  $P_1$  и  $P_2$ , которые отбросим, и две направленные вдоль одной прямой силы  $F_1$  и  $F_2$ . Эти силы перенесем в точку С и заменим их равнодействующей  $R$ , модуль которой равен:

$$R = F_1 + F_2. \quad (1.18)$$

Сила  $R$  является равнодействующей параллельных сил  $F_1$  и  $F_2$ , приложенных в точках А и В. Для определения положения точки С рассмотрим

треугольник OAC, Oab и OCB, Omb. Из подобия соответствующих треугольников следует, что

$$AC/OC = P_1/F_1,$$

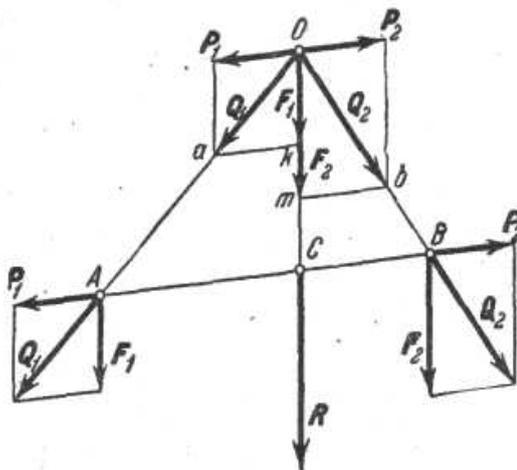
$$BC/OC = P_2/F_2$$

или  $AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$ , так как  $P_1 = P_2$ .

Отсюда, принимая во внимание свойства пропорций и учитывая,

что  $BC + AC = AB$ , а  $F_1 + F_2 = R$ ,

получим:  $BC/F_1 = AC/F_2 = AB/R$ . (1.19).



**Рис.1.31. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону**

*Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону, линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.*

## 1.9. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

### 1.9.1. ТЕОРЕМА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью закона параллелограмма сил.

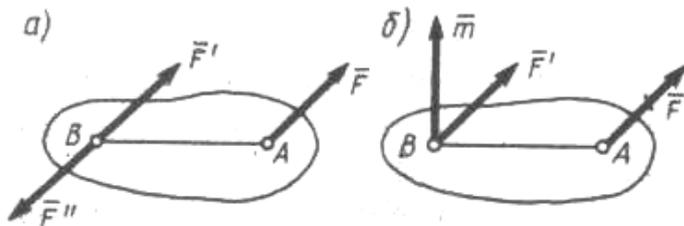


Рис. 1.32. Параллельный перенос сил

*Теорема: силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.*

Пусть на твердое тело действует сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке А (рис. 1.32, а). Действие этой силы не изменяется, если в любой точке В тела приложить две уравновешенные силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  такие, что  $\vec{F}' = \vec{F}$ ,  $\vec{F}'' = -\vec{F}$ . Полученная система трех сил и представляет собой силу  $\vec{F}'$ , равную  $\vec{F}$ , но приложенную в точке В, и пару  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}''$  с моментом

$$\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}). \quad (1.20)$$

Последнее равенство следует из формулы (1.15'). Таким образом, теорема доказана. Результат, даваемый теоремой, можно еще изобразить так, как это показано на рис. 1.32, б (силу  $\vec{F}$  на этом рисунке надо считать отброшенной). Рассмотрим примеры, иллюстрирующие теорему.

Чтобы удержать в равновесии однородный брус АВ длиной  $2a$  и весом  $\vec{P}$ , надо приложить в его середине С направленную вверх силу  $\vec{Q}$ , по модулю равную  $\vec{P}$  (рис. 1.33 а). Согласно доказанной теореме силу  $\vec{Q}$  можно заменить силой  $\vec{Q}'$ , приложенной к концу А бруса, и парой с моментом, модуль которого  $m=Qa$ .

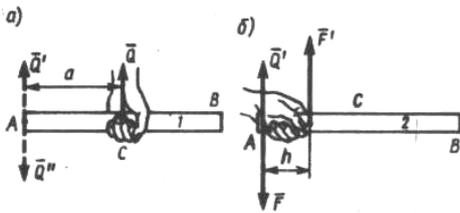


Рис.1.33. Брус

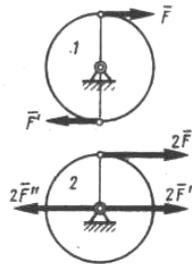


Рис. 1.34. Барабан

Если плечо этой пары уменьшить до величины  $h$  (рис. 1.33, б), то образующие ее силы  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$  надо увеличить так, чтобы было  $Fh=Qa$ . Следовательно, чтобы (удержать брус за его конец А, надо кроме силы  $\vec{Q}$  приложить еще пару  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$ . Этот результат, вытекающий из доказанной теоремы, непосредственно «ощущает» рука человека, удерживающая брус за его середину (рис. 1.33, а) или за конец (рис. 1.33, б).

На барабан 1 радиуса  $r$  намотаны в противоположных направлениях две нити, к концам которых прикладывают силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}' = -\vec{F}$  (рис. 1.34); на барабан 2 того же радиуса намотана одна нить, к которой прикладывают силу, равную  $2\vec{F}$ . Рассмотрим, чем будут отличаться действия этих сил.

На барабан 1 действует только пара сил  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$  с моментом, численно равным  $2Fr$ , вращающим барабан. Силу, действующую на барабан 2, можно заменить силой  $2\vec{F}' = -2\vec{F}$ , приложенной к оси барабана, и парой  $2\vec{F}$ ,  $2\vec{F}''$ . В результате находим, что на этот барабан действуют: 1) пара с численно таким же, как и в первом случае, моментом  $2Fr$ , вращающая барабан, и 2) сила  $2\vec{F}'$ , оказывающая давление на ось барабана.

Итак, оба барабана будут вращаться одинаково. Но при этом ось второго барабана испытывает давление, равное  $2F$ , а ось первого барабана никакого давления не испытывает.

## 1.9.2. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

Решим теперь задачу о приведении произвольной системы сил к данному центру, т. е. о замене данной системы сил другой, ей эквивалентной, но значительно более простой, а именно состоящей, как мы увидим, только из одной силы и пары.

Пусть на твердое тело действует произвольная система сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , ...,  $\vec{F}_n$ , (рис. 1.35, а). Выберем

какую-нибудь точку  $O$  за центр приведения и перенесем все силы в центр  $O$ , присоединяя при этом соответствующие пары (см. рис. 1.32, б). Тогда на тело будет действовать система сил

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n, \quad (1.21)$$

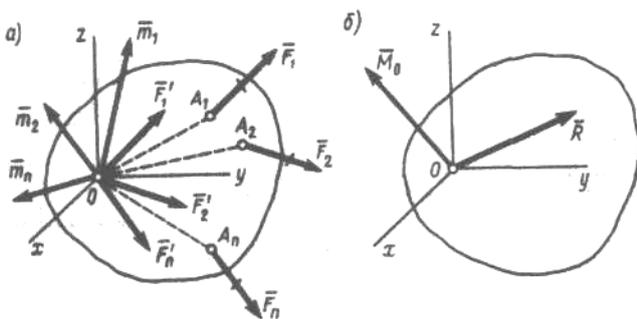
приложенных в центре  $O$ , и система пар, моменты которых согласно формуле (1.18) равны:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_o(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_o(\vec{F}_2), \dots, \vec{m}_n = \vec{m}_o(\vec{F}_n). \quad (1.22)$$

Сходящиеся силы, приложенные в точке  $O$ , заменяются одной силой  $\vec{R}$ , приложенной в точке  $O$ .

При этом  $\vec{R} = \sum \vec{F}'_k$  или, согласно равенствам (1.21),

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad (1.23)$$



**Рис. 1.35.** Замена сходящихся сил одной силой  $R$ , приложенной в центре  $O$

Чтобы сложить все полученные пары, надо сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой  $\vec{M}_o = \sum \vec{m}_k$  или, согласно равенствам (1.21),

$$\overline{M}_o = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k). \quad (1.24)$$

Величина  $\overline{R}$ , равная геометрической сумме всех сил, называется **главным вектором системы сил**; величина  $\overline{M}_o$ , равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра  $O$ , называется **главным моментом системы сил** относительно этого центра.

Таким образом, мы доказали следующую теорему о приведении системы сил: **любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру  $O$  заменяется одной силой  $\overline{R}$ , равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения  $O$ , и одной парой с моментом  $\overline{M}_o$ , равным главному моменту системы сил относительно центра  $O$**  (рис. 1.36, б).

Заметим, что сила  $\overline{R}$  не является здесь равнодействующей данной системы сил, так как заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Из доказанной теоремы следует, что **две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны** (условия эквивалентности систем сил).

Значение  $\overline{R}$  от выбора центра  $O$ , не зависит. Значение  $\overline{M}_o$  при изменении положения центра  $O$  может изменяться вследствие изменения значений моментов отдельных сил. Поэтому всегда необходимо указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Рассмотрим в заключение два частных случая: 1) если для данной системы  $\overline{R}=0$ , а  $\overline{M}_o \neq 0$ , то она

приводится к одной паре сил с моментом  $\overline{M}_O$ . В этом случае значение  $\overline{M}_O$  не зависит от выбора центра  $O$ , так как иначе получилось бы, что одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными друг другу парами, что невозможно; 2) если для данной системы сил  $\overline{R} \neq 0$ , а  $\overline{M}_O = 0$ , то она приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей, равной  $\overline{R}$  и приложенной в центре  $O$ .

### 1.9.3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

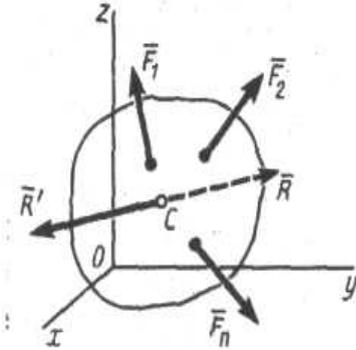
*Покажем, что для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е. выполнялись условия:*

$$\overline{R} = 0, \quad \overline{M}_O = 0, \quad (1.25)$$

где точка  $O$  — любой центр, при  $\overline{R} = 0$  значение  $\overline{M}_O$  от выбора центра  $O$  не зависит.

Условия (1.25) являются необходимыми, так как если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится или к равнодействующей (когда  $\overline{R} \neq 0$ ), или к паре сил (когда  $\overline{M}_O \neq 0$ ) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно условия (1.25) являются и достаточными, потому что при  $\overline{R} = 0$  система сил может приводиться только к паре с моментом  $\overline{M}_O$ , а так как  $\overline{M}_O = 0$ , то имеет место равновесие.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: *если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра  $O$  равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.*



**Рис. 1.36.** Определение равнодействующей системы сил

Пусть система сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  приводится к равнодействующей  $\bar{R}$ , линия действия которой проходит через некоторую точку  $C$  (рис. 1.36). Приложим в этой точке силу  $\bar{R}' = -\bar{R}$ . Тогда система сил

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$  будет находиться в равновесии, и для нее должно выполняться условие  $\bar{M}_O = 0$ , т. е. согласно формуле (1.25) для данных сил (включая силу  $\bar{R}'$ ) должно быть  $\sum \bar{m}_O(\bar{F}_k) + \bar{m}_O(\bar{R}') = 0$ . Но так как  $\bar{R}' = -\bar{R}$  и обе силы направлены вдоль одной и той же прямой, то  $\bar{m}_O(\bar{R}') = -\bar{m}_O(\bar{R})$ . Подставляя это значение  $\bar{m}_O(\bar{R}')$  в предыдущее равенство, найдем из него, что

$$\bar{m}_O(\bar{R}) = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k). \quad (1.26)$$

Теорема доказана. Ею часто бывает удобно пользоваться при вычислении моментов сил.

## 1.10. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

### 1.10.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СИЛЫ И ПАРЫ

Переходя к рассмотрению плоской системы сил (системы сил, как угодно расположенных в одной плоскости), начнем с введения некоторых понятий.

1. Алгебраический момент силы относительно центра. Когда все силы системы лежат в одной плоскости, их моменты относительно любого центра  $O$ , находящегося в той же плоскости, перпендикулярны этой плоскости, т. е. направлены вдоль одной и той же прямой. Тогда, не прибегая к векторной символике, можно направления этих моментов отличить одно от другого знаком и рассматривать момент силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  как алгебраическую величину. Условимся для краткости такой момент называть алгебраическим и обозначать символом  $m_o(\vec{F})$ . *Алгебраический момент силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо*, т. е.

$$m_o(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (1.27)$$

Момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра  $O$  против хода часовой стрелки, и отрицательным - когда по ходу часовой стрелки. Так, для сил, изображенных на рис. 1.37:  $m_o(\vec{P}) = Ph_1$ ,  $m_o(\vec{Q}) = -Qh_2$ .

Заметим, что полученные выше формулы (1.24) и (1.26), содержащие суммы моментов-векторов, сохраняют

свой вид и для алгебраических моментов, но суммы при этом будут не векторные, а алгебраические.

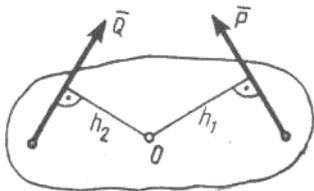


Рис.1.37. Определение моментов сил P и Q

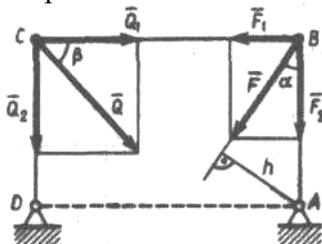


Рис. 1.38. Определение моментов сил F и Q

**Задача 6.** Найти моменты сил  $\bar{F}$  и  $\bar{Q}$  относительно точки A (рис. 1.38), если  $AB=a$ ,  $AD=b$  и углы  $\alpha$ ,  $\beta$  известны.

**Решение.** Опустив из точки A перпендикуляр на линию действия силы  $\bar{F}$ , найдем плечо  $h=a \sin \alpha$ ; тогда с учетом знака  $m_A(\bar{F}) = Fa \sin \alpha$ .

Для силы  $\bar{Q}$  проще не находить плечо, а разложить  $\bar{Q}$  на составляющие  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$ , для которых плечи будут соответственно равны  $AB=a$  и  $AD=b$ , а затем воспользоваться формулой (1.27), т. е. теоремой Вариньона. Тогда с учетом знаков:

$m_A(\bar{Q}) = m_A(\bar{Q}_1) + m_A(\bar{Q}_2) = -Q_1 a + Q_2 b$ . Но  $Q_1=Q \cos \beta$ ,  $Q_2=Q \sin \beta$  и окончательно

$$m_A(\bar{Q}) = Q_1(b \sin \beta - a \cos \beta).$$

Выражение в скобках и является плечом силы  $\bar{Q}$ , что не сразу видно.

Заметим, что  $m_A(\bar{F})$  можно тоже найти, разложив силу  $\bar{F}$  на составляющие  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ . Тогда  $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}_1) = (F \sin \alpha) a$ , так как  $m_A(\bar{F}_2) = 0$ .

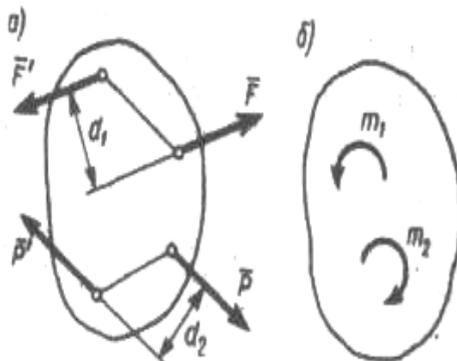
2. Алгебраический момент пары. Поскольку момент пары сил равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы [формула (1.15')], то для пар, лежащих в одной плоскости, момент

пары можно тоже рассматривать как алгебраическую величину, называть алгебраическим и условиться обозначать символом  $m$  (или  $M$ ). Алгебраический момент пары равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:

$$m = \pm Fd. \quad (1.28)$$

Правило знаков здесь такое же, как для момента силы. Так, для изображенной на рис. 1.39, а пары  $\vec{F}, \vec{F}'$  момент  $m_1 = Fd_1$ , а для пары  $\vec{P}, \vec{P}'$  момент  $m_2 = -Pd_2$ . Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, то на рисунках пару изображают часто просто дуговой стрелкой, показывающей направление поворота пары (как на рис. 1.39, б).

Полученные выше формулы (1.16) и (1.17), содержащие суммы моментов-векторов, тоже сохраняют вид для алгебраических моментов, причем суммы будут алгебраическими.



**Рис. 1.39. Определение моментов пар сил**

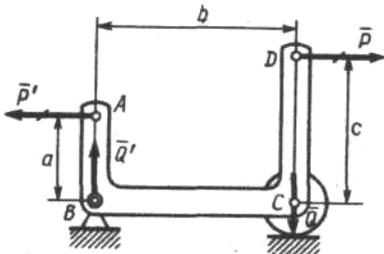
**Задача 7.** Криволинейный рычаг ABCD (рис. 1.40) находится в равновесии под действием двух параллельных сил  $\vec{P}$  и  $\vec{P}'$ , образующих пару. Определить силы давления на опоры, если  $AB=a=15$  см,  $BC=b=30$  см,  $CD=c=20$  см,  $P=P'=300$  Н.

**Решение.** Заменим пару  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}'$  эквивалентной ей парой  $\vec{Q}$ ,  $\vec{Q}'$ , силы которой направлены по направлениям реакций опор. При этом моменты пар должны быть одинаковы, т. е.  $P(c-a)=Qb$ .

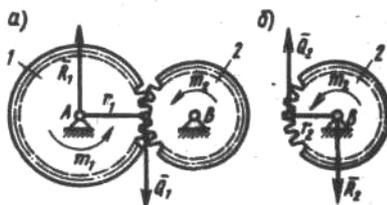
Следовательно, силы давления на опоры численно равны

$$Q=Q'=P(c-a)/b=50 \text{ Н}$$

и направлены так, как показано на чертеже.



**Рис.1.40.** Криволинейный рычаг



**Рис. 1.41.** Зубчатое зацепление

**Задача 8.** На шестерню 1 радиуса  $r_1$  действует пара сил с моментом  $m_1$  (рис. 1.41, а). Определить момент  $m_2$  пары, которую надо приложить к шестерне 2 радиуса  $r_2$ , чтобы сохранить равновесие.

**Решение.** Рассмотрим сначала условия равновесия шестерни 1. На нее действует пара с моментом  $m_1$ , которая может быть уравновешена только действием другой пары, в данном случае пары  $\vec{Q}_1$ ,  $\vec{R}_2$ . Здесь  $\vec{Q}_1$  — перпендикулярная радиусу составляющая силы давления на зуб со стороны шестерни 2, а  $\vec{R}_2$  — тоже перпендикулярная радиусу составляющая реакции оси А (сила давления на зуб и реакция оси А имеют еще составляющие вдоль радиуса, которые взаимно уравновешиваются и в условии равновесия не войдут). При этом, согласно условию равновесия (1.17),  $m_1+(-Q_1r_1)=0$  и  $Q_1=m_1/r_1$ .

Теперь рассмотрим условия равновесия шестерни 2 (рис. 1.41, б). По закону равенства действия и противодействия на нее со

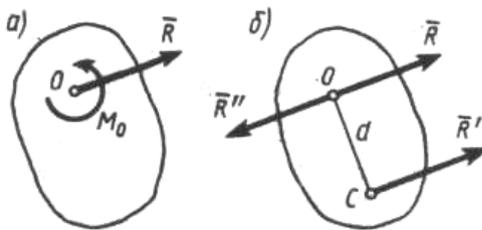
стороны шестерни 1 будет действовать сила  $\bar{Q}_2 = -\bar{Q}_1$ , которая с перпендикулярной радиусу составляющей реакции оси В образует пару  $\bar{Q}_2$ ,  $\bar{R}_2$  с моментом, равным  $-Q_2 r_2$ . Эта пара и должна уравновеситься приложенной к шестерне 2 парой с моментом  $m_2$ ; следовательно, по условию равновесия (1.17),  $m_2 + (-Q_2 r_2) = 0$ . Отсюда, так как  $Q_2 = Q_1$ , находим  $m_2 = m_1 r_2 / r_1$ .

Естественно, что пары с моментами  $m_1$  и  $m_2$  не удовлетворяют условию равновесия (1.17), так как они приложены к разным телам.

Полученная в процессе решения задачи величина  $Q_1$  (или  $Q_2$ ) называется окружным усилием, действующим на шестерню. Как видим, окружное усилие равно моменту вращающей пары, деленному на радиус шестерни:  $Q_1 = m_1 / r_1 = m_2 / r_2$ .

## 1.10.2. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Плоская система сил приводится к силе, равной  $\bar{R}$  и



приложенной в произвольно выбранном центре O, и паре с моментом  $M_o$ , но сила и пара

**Рис.1.42. Приведение плоской системы сил к простейшему виду**

лежат в данном случае в одной плоскости — в плоскости действия сил (рис. 1.42, а, где пара изображена дуговой стрелкой). Значения главного вектора  $\bar{R}$  и главного момента  $M_o$  даются формулами (1.23) и (1.24); при этом вектор  $\bar{R}$  можно определить или геометрически построением силового многоугольника

или аналитически по формулам (1.10). Таким образом, для плоской системы сил

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, & R_y &= \sum F_{ky}, \\ M_o &= \sum m_o(\bar{F}_k), \end{aligned} \quad (1.29)$$

где все моменты в последнем равенстве алгебраические и сумма тоже алгебраическая.

Найдем, к какому простейшему виду может приводиться данная плоская система сил, не находящаяся в равновесии. Результат зависит от значений  $\bar{R}$  и  $M_o$ .

1. Если для данной системы сил  $\bar{R} = 0$ , а  $M_o \neq 0$ , то она приводится к одной паре с моментом  $M_o$ . Значение  $M_o$  в этом случае не зависит от выбора центра  $O$ .

2. Если для данной системы сил  $\bar{R} \neq 0$ , то она приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей. При этом возможны два случая:

а)  $\bar{R} \neq 0$ ,  $M_o = 0$ . В этом случае система, что сразу видно, приводится к равнодействующей  $\bar{R}$ , проходящей через центр  $O$ ;

б)  $\bar{R} \neq 0$ ,  $M_o \neq 0$ . В этом случае пару с моментом  $M_o$  можно изобразить двумя силами  $\bar{R}'$  и  $\bar{R}''$ , беря  $\bar{R}' = \bar{R}$ , а  $\bar{R}'' = -\bar{R}$  (рис. 1.42, б). При этом, если  $d = OC$  - плечо пары, то должно быть

$$Rd = [M_o]. \quad (1.30)$$

Отбросив теперь силы  $\bar{R}$  и  $\bar{R}''$  как уравновешенные найдем, что вся система сил заменяется равнодействующей  $\bar{R}' = \bar{R}$ , проходящей

через точку С. Положение точки С определяется двумя условиями: 1) расстояние  $OC=d$  ( $\overline{OC} \perp \overline{R}$ ) должно удовлетворять равенству (1.30); 2) знак момента относительно центра О силы  $\overline{R}$ , приложенной в точке С, т. е. знак  $m_o(\overline{R})$  должен совпадать со знаком  $M_o$ .

Таким образом, плоская система сил, не находящаяся в равновесии, может быть окончательно приведена или к одной силе, т.е. к равнодействующей (когда  $\overline{R} \neq 0$ ), или к паре сил (когда  $\overline{R} = 0$ ).

**Задача 8.** Привести к центру О систему сил  $\overline{P}$ ,  $\overline{F}_1$ ,  $\overline{F}_2$ ,  $\overline{F}_3$  изображенных на рис. 1.43, если  $P=30$  Н,  $F_1=F_2=F_3= 20$  Н,  $a=0,3$  м,  $b=0,5$  м,  $\alpha=60^\circ$ .

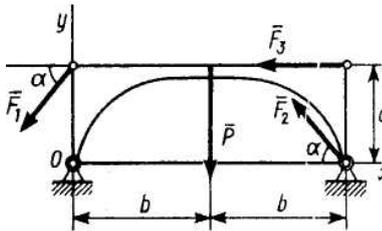


Рис. 1.43. Приведение к центру системы сил

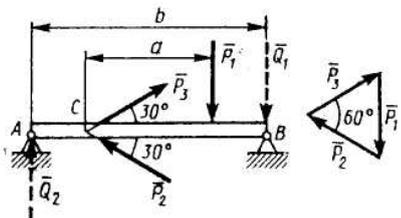


Рис.1.44. Приведение к простейшему виду системы сил

**Решение.** Задача сводится к нахождению главного вектора  $\overline{R}$  заданной системы сил, который будем определять по его проекциям  $R_x$ ,  $R_y$  и главного момента  $M_o$  этих сил относительно центра О. Проводя оси  $Ox$  так, как показано на рисунке, и пользуясь формулами (1.27), получим:

$$R_x = \sum F_{kx} = -F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha - F_3,$$

$$R_y = \sum F_{ky} = -P - F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha,$$

$$M_o = \sum m_o(\overline{F}_k) = -bP + aF_1 \cos \alpha + 2bF_2 \sin \alpha + aF_3.$$

Подставляя сюда числовые значения сил, найдем, что  $R_x = -40$  Н,  $R_y = -30$  Н,  $M_o = 11,3$  Н · м. Таким образом, заданная система сил приводится к приложенной в центре приведения О силе  $\bar{R}$  с проекциями  $R_x = -40$  Н,  $R_y = -30$  Н, ( $R = 50$  Н) и паре сил с моментом  $M_o = 11,3$  Н · м.

**Задача 9.** Привести к простейшему виду систему сил  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , действующих на балку АВ (рис. 1.44), и найти силы давления на опоры А и В, если  $P_1 = P_2 = P_3 = P$ .

**Решение.** Многоугольник, построенный из сил  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ , замкнут; следовательно,  $\bar{R} = 0$ . Сумма моментов всех сил относительно любой точки (например, точки С) равна - Ра. Следовательно, данная система сил приводится к паре с моментом  $m = -Pa$ . Располагая эту пару так, как показано на чертеже пунктиром, заключаем, что силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$  оказывают на опоры давления  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$ , численно равные  $Pa/b$ .

### 1.10.3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил даются равенствами  $\bar{R} = 0$  и  $\bar{M}_o = 0$ , выражаемыми формулами (1.25). Найдем вытекающие отсюда аналитические условия равновесия плоской системы сил. Их можно получить в трех различных формах.

1. Основная форма условий равновесия. Так как вектор  $\bar{R}$  равен нулю, когда равны нулю его проекции  $R_x$  и  $R_y$ , то для равновесия должны выполняться равенства  $R_x = 0$ ,  $R_y = 0$  и  $M_o = 0$ , где в данном случае  $M_o$  — алгебраический момент, а О — любая точка в плоскости действия сил. Но из формул (1.29) следует, что предыдущие равенства будут выполнены, когда действующие силы удовлетворяют условиям:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum m_o = 0. \quad (1.31)$$

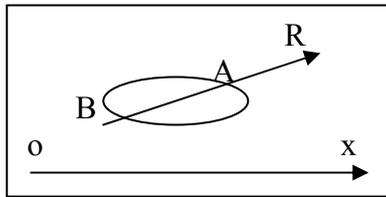
Формулы (1.31) выражают следующие аналитические условия равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.* Одновременно равенства (1.31) выражают условия равновесия твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

2. Вторая форма условий равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров А и В и сумма их проекций на ось Ох, не перпендикулярную прямой АВ, были равны нулю:*

$$\sum \bar{m}_A(\bar{F}_k) = 0, \sum \bar{m}_B(\bar{F}_k) = 0, \sum \bar{F}_{kx} = 0. \quad (1.32)$$

Необходимость этих условий очевидна, так как если любое из них не выполняется, то или  $\bar{R} \neq 0$ , или  $M_A \neq 0$  ( $M_B \neq 0$ ) и равновесия не будет. Докажем их достаточность. Если для данной системы сил выполняются только первые два из условий (1.32), то для нее  $M_A=0$  и  $M_B=0$ . Такая система сил, может не находиться в равновесии, а иметь равнодействующую  $\bar{R}$ , одновременно проходящую через точки А и В (рис. 1.45). Но по третьему условию должно быть  $R_x = \sum F_{kx} = 0$ .

Так как ось Ох проведена не перпендикулярно к АВ, то последнее условие может быть выполнено, только когда  $\bar{R} = 0$ , т. е. когда имеет место равновесие.



**Рис.1.45.Равнодействующая системы сил, проходящая через точки А и В**

3. Третья форма условий равновесия (*уравнения трех моментов*): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров А, В и С, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum \bar{m}_A(\bar{F}_k) = 0, \sum \bar{m}_B(\bar{F}_k) = 0, \sum \bar{m}_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.33)$$

Необходимость этих условий, как и в предыдущем случае, очевидна. Достаточность условий (1.33) следует из того, что если при одновременном выполнении этих условий данная система сил не находилась бы в равновесии, то она должна была бы приводиться к равнодействующей, одновременно проходящей через точки А, В и С, что невозможно, так как эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (1.33) имеет место равновесие.

Во всех рассмотренных случаях для плоской системы сил получаются три условия равновесия. Условия (1.31) считаются основными, так как при пользовании ими никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не налагается.

Равновесие плоской системы параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно направить ось Ох перпендикулярно силам, а ось

Оу параллельно им (рис. 1.46). Тогда проекция каждой из сил на ось  $Ox$  будет равна нулю и первое из равенств (1.33) обратится в тождество вида  $0 \equiv 0$ . В результате для параллельных сил останется два условия равновесия:

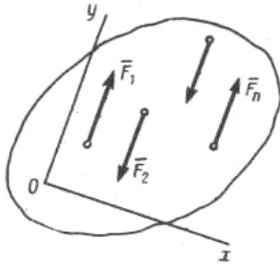
$$\sum F_{ky} = 0, \sum m_o(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.34)$$

где ось  $Oy$  параллельна силам.

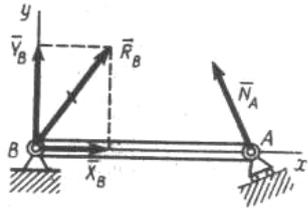
Другая форма условий равновесия для параллельных сил, получающаяся из равенств (1.32), имеет вид:

$$\sum \bar{m}_A(\bar{F}_k) = 0, \sum \bar{m}_B(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.35)$$

При этом точки  $A$  и  $B$  не должны лежать на прямой, параллельной силам.



**Рис. 1.46.**  
Система  
параллельных сил



**Рис. 1.47.** Шарнирные  
опоры: подвижная и  
неподвижная

## 1.10.4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Для получения более простых уравнений следует (если это только не усложняет ход расчета): *а) составляя уравнения проекций, проводить координатную ось перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе; б) составляя уравнения моментов, брать центр моментов в точке, где пересекаются большие неизвестных сил.*

При вычислении моментов иногда бывает удобно разлагать данную силу на две составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих.

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т. п. В технике обычно встречаются следующие три типа опорных закреплений:

1. Подвижная шарнирная опора (рис. 1.47, опора А). Реакция  $\bar{N}_A$  такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.

2. Неподвижная шарнирная опора (рис. 1. 47, опора В). Реакция  $\bar{R}_B$  такой опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач будем реакцию  $\bar{R}_B$  изображать ее составляющими  $\bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_B$  по направлениям координатных осей. Если мы, решив задачу, найдем  $X_B$  и  $Y_B$ , то тем самым будет определена и реакция  $\bar{R}_B$ ; по модулю  $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$ .

Способ закрепления, показанный на рис. 1.47, употребляется для того, чтобы в балке АВ не возникало

дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

3. Жесткая заделка (или неподвижная защемляющая опора; рис. 1.48, а).

Рассматривая заделанный конец балки и стену как одно целое, жесткую заделку изображают так, как показано на рис. 1.48, б. В этом случае на балку в ее поперечном сечении действует со стороны заделанного конца система распределенных сил (реакций). Считая эти силы приведенными к центру А сечения, можно их заменить одной наперед неизвестной силой  $\bar{R}_A$ , приложенной в этом центре, и парой с наперед неизвестным моментом  $m_A$  (рис. 1.48, а). Силу  $\bar{R}_A$  можно в свою очередь изобразить ее составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  (рис. 1.48, б). Таким образом, для нахождения реакции жесткой заделки надо определить три неизвестные заранее величины  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $m_A$ .

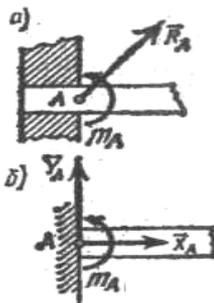


Рис. 1.48.  
Жесткая  
заделка

### 1.10.5. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы тел, соединенных какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с телами, в неё не входящими (например, с опорами).

Если после отбрасывания внешних связей (опор) конструкция остается жесткой, то для нее задачи статики решаются как для абсолютно твердого тела.

Однако могут встречаться такие инженерные конструкции, которые после отбрасывания внешних связей не остаются жесткими.

Примером такой конструкции является трехшарнирная арка (рис. 1.49). Если отбросить опоры А и В, то арка не будет жесткой: ее части могут поворачиваться вокруг шарнира С.

На основании принципа отвердевания система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Но эти условия, как указывалось, будучи необходимыми, не будут являться достаточными; поэтому из них нельзя определить все неизвестные величины. Для решения задачи необходимо дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

Например, составляя условия равновесия для сил, действующих на трехшарнирную арку, мы получим три уравнения с четырьмя неизвестными  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ . Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее половины, получим еще три уравнения, содержащие два новых неизвестных  $X_C$ ,  $Y_C$ , на рис. 1.49 не показанных. Решая полученную систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных.

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел в

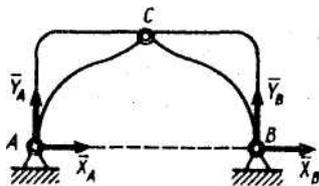
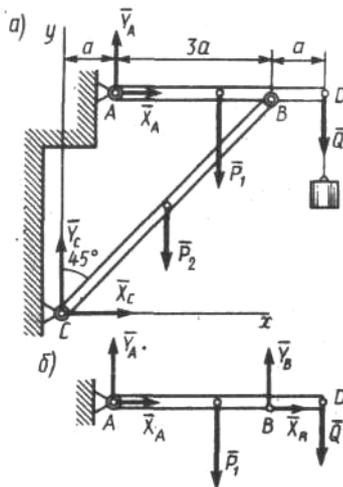


Рис.1.49.Трехшарнирная арка

отдельности. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из  $n$  тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится таким путем  $3n$  уравнений, позволяющих найти  $3n$  неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменится). Если для данной конструкции число всех реакций связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой.

**Задача 10.** Кронштейн состоит из горизонтального бруса AD (рис. 1.50, а) весом  $P_1 = 150$  Н, прикрепленного к стене шарниром, и подкоса CB весом  $P_2 = 120$  Н, который с брусом AD и со стеной также соединен шарнирами (все размеры показаны на чертеже). К концу D бруса подвешен груз весом  $Q = 300$  Н. Определить реакции шарниров A и C, считая брус и подкос однородными.



**Решение.** Рассмотрим сначала равновесие всего кронштейна. На него действуют следующие внешние силы: заданные силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{Q}$  и реакции связей  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{X}_C$ ,  $\bar{Y}_C$ . Кронштейн, освобожденный от внешних связей, не образует жесткой конструкции (брусья

могут поворачиваться вокруг шарнира B), но по принципу

отвердевания действующие на него силы при равновесии должны удовлетворять условиям равновесия статики. Составляя эти условия, найдем:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &\equiv X_A + X_C = 0, \\ \sum F_{ky} &\equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0, \end{aligned}$$

$$\sum \bar{m}_A(\bar{F}_k) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C \cdot a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - Q \cdot 4a = 0.$$

Полученные три уравнения содержат, как видим, четыре неизвестных  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ . Для решения задачи рассмотрим дополнительно равновесие бруса AD (рис. 1.50, б). На него действуют силы  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{Q}$ , реакции  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  и реакции  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$ , которые для бруса AD (когда рассматривается его равновесие) будут силами внешними. Недостающее четвертое уравнение составим, беря моменты действующих на брус AD сил относительно центра B (тогда в уравнение не войдут новые неизвестные  $X_B$ ,  $Y_B$ ):

Решая теперь систему четырех составленных уравнений (начиная с последнего), найдем

$$Y_A = (P_1 - Q)/3 = -50 \text{ Н}, \quad Y_C = 2P_1/3 + P_2 + 4Q/3 = 620 \text{ Н}, \\ X_C = 2P_1/3 + P_2/2 + 4Q/3 = 560 \text{ Н}, \quad X_A = -X_C = -560 \text{ Н}.$$

Из полученных результатов видно, что силы  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  имеют направления, противоположные показанным на чертеже. Реакции шарнира B, если их надо определить, найдутся из уравнений проекций на оси x и y сил, действующих на брус AD, и будут равны:  $X_B = -X_A$ ,  $Y_B = P_1 + Q - Y_A = 500 \text{ Н}$ .

Как видим, при решении задач статики не всегда надо составлять все условия равновесия для рассматриваемого тела. Если в задаче не требуется определять реакции некоторых связей, то надо пытаться сразу составить такие уравнения, в которые эти неизвестные реакции не будут входить. Так мы и поступили в данной задаче при рассмотрении равновесия бруса AD, составляя только одно уравнение моментов относительно центра B.

### 1.10.6. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ (КОНСТРУКЦИИ)

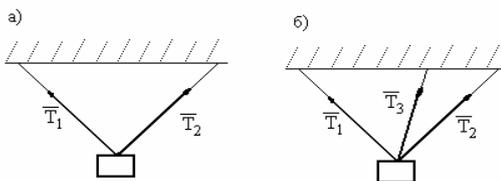
При решении задач статики реакции связей всегда являются величинами заранее неизвестными; число их зависит от числа и вида наложенных связей. Условия равновесия, в которые входят реакции связей и которые служат для их определения, называют обычно

**уравнениями равновесия.** Чтобы соответствующая задача статики была разрешимой, надо, очевидно, чтобы число уравнений равновесия равнялось числу неизвестных реакций, входящих в эти уравнения.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются **статически определенными**, а системы тел (конструкции), для которых это имеет место - **статически определенными**.

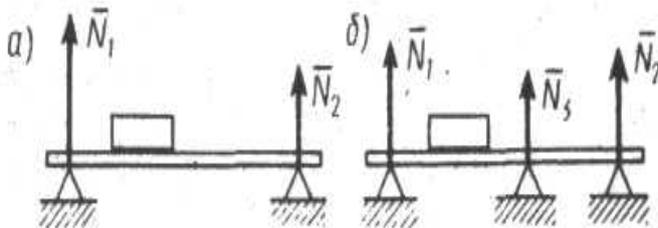
Задачи, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются статически неопределенными, а системы тел (конструкции) для которых это имеет место - **статически неопределеными**.

Например, подвеска, состоящая из двух тросов (рис. 1.51, а), будет статически определенной, так как здесь две неизвестные реакции  $T_1$  и  $T_2$  войдут в два уравнения равновесия (1.12) плоской системы сходящихся сил. Подвеска же, состоящая из трех лежащих в одной плоскости тросов (рис. 1.51, б), будет статически неопределенной, так как в ней число неизвестных реакций равно трем ( $T_1, T_2, T_3$ ), а уравнений равновесия по-прежнему только два.



**Рис. 1.51. Статически определенная (а) и неопределенная (б) системы**

Аналогично, горизонтальная балка, лежащая на двух опорах (рис. 1.52, а) будет статически определенной, так как и здесь две неизвестные реакции  $N_1$  и  $N_2$  входят в два уравнения равновесия (1.35) плоской системы параллельных сил. Такая же балка на трех опорах (рис. 1.52, б) будет статически неопределенной.



**Рис. 1.52. Статически определимая (а) и статически неопределимая (б) системы**

Статическая неопределимость объясняется наложением лишних связей. Например, для обеспечения равновесия балки, изображенной на рис. 1.52, достаточно двух опор и третья опора не нужна (балка считается абсолютно жесткой и не прогибающейся). Статически неопределимые конструкции можно рассчитывать, если учесть их деформации; это делается в курсе сопротивления материалов.

### 1.10.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Внутренними усилиями в каком-нибудь сечении тела или конструкции (балки, арки и др.) называют силы, с которыми части тела, разделенные этим сечением, действуют друг на друга. Метод определения внутренних усилий, аналогичен методу, применяемому при изучении равновесия систем тел. Сначала рассматривают равновесие всего тела (конструкции) в целом и определяют реакции внешних связей. Затем сечением, в котором требуется найти внутренние усилия, разделяют тело на две части и рассматривают равновесие одной из них. При этом, если система действующих на тело внешних сил плоская, то действие отброшенной части заменится в общем случае плоской системой распределенных по сечению сил. Эти силы, как и в случае жесткой заделки (см. рис. 1.48),

заменяются одной приложенной в центре сечения силой с двумя заранее неизвестными составляющими  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  и парой с заранее неизвестным моментом  $m$ .

**Задача 11.** Считая длину балки АВ равной 1 м, найти усилия в поперечном сечении балки, отстоящем от конца А на расстоянии  $AE = 0,6$  м (точка Е левее опоры С).

**Решение.** Внешними связями для балки являются опора С и шарниры А и В. Рассечем балку сечением  $ab$  и рассмотрим равновесие ее левой части (рис. 1.53). Действие отброшенной части, согласно сказанному выше, заменяем двумя силами  $\bar{X}_E$ ,  $\bar{Y}_E$ , приложенными в центре Е сечения, и парой с моментом  $m_E$ . Составляя для действующих на рассматриваемую часть балки сил  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{X}_E$ ,  $\bar{Y}_E$  и пары с моментом  $m_E$  условия равновесия (1.32), получим:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A - X_E = 0, \quad \sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_E - Q = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) \equiv m_E + 0,6 Y_E - 0,5 Q = 0.$$

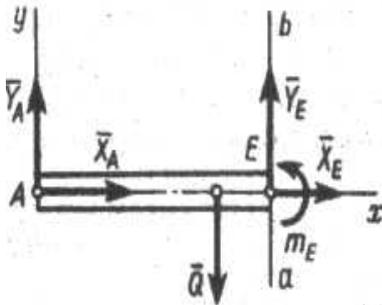


Рис. 1.53. Балка

По данным задачи  $Q = 200$  Н,  $X_A = 150$  Н,  $Y_A = 75$  Н. Пользуясь этими значениями, найдем из составленных уравнений:

$X_E = -150$  Н,  $Y_E = 275$  Н,  $m_E = -65$  Н·м. Таким образом, на левую часть балки в сечении  $ab$  действуют: 1) продольная сила  $\bar{X}_E$ , вызывающая в данном случае

сжатие балки; 2) поперечная сила  $\bar{Y}_E$ , стремящаяся сдвинуть примыкающую к сечению часть балки вдоль линии  $ab$ ; 3) пара с моментом  $m_E$ , называемым *изгибающим моментом*, которая в данном случае вызывает растяжение верхних волокон балки и сжатие нижних.

### 1.10.8. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИЛЫ

В инженерных расчетах часто приходится встречаться с нагрузками, распределенными вдоль данной поверхности по тому или иному закону. Рассмотрим некоторые простейшие примеры распределенных сил, лежащих в одной плоскости.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее *интенсивностью*  $q$ , т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

1. Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой (рис. 1.54, а). Для такой системы сил интенсивность  $q$  имеет постоянное значение. При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей  $\bar{Q}$ .

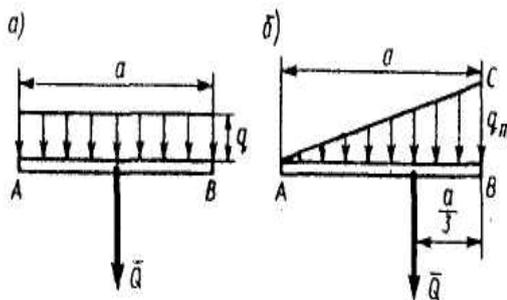


Рис. 1.54. Распределенные силы

По модулю  $Q = a \cdot q$ . (1.36)

Приложена сила  $\bar{Q}$  в середине отрезка АВ.

2. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. 1.54, б). Примером такой

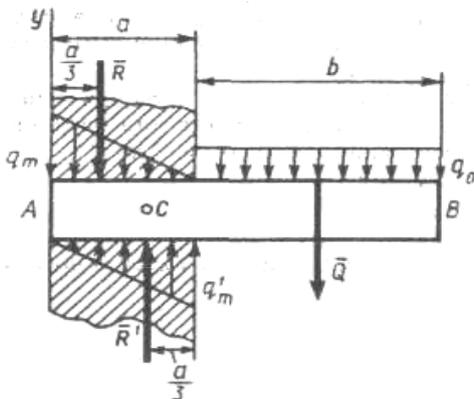
нагрузки могут служить силы давления воды на плотину, имеющие наибольшее значение у дна и падающие до нуля у поверхности воды. Для этих сил интенсивность  $q$  является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения  $q_m$ . Равнодействующая  $\bar{Q}$  таких сил определяется аналогично равнодействующей сил тяжести, действующих на однородную треугольную пластину ABC. Так как вес однородной пластины пропорционален ее площади, то, по модулю,

$$Q = 0,5 a q_m. \quad (1.37)$$

Приложена сила  $Q$  на расстоянии  $a/3$  от стороны BC треугольника ABC.

**Задача 12.** На консольную балку АВ, размеры которой указаны на чертеже (рис. 1.55), действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_0$  Н/м. Пренебрегая весом балки и считая, что силы давления на заделанный конец распределены по линейному закону, определить значения наибольших интенсивностей  $q_m$  и  $q'_m$  этих сил, если  $b = a$ .

**Решение.** Заменяем распределенные силы их равнодействующими



$\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  и  $\bar{R}'$ , где согласно формулам (1.36) и (1.37)  $Q = q_0 b$ ,  $R = 0,5 q_m a$ ,  $R' = 0,5 q'_m a$ ,

и составляем условия равновесия (1.33) для действующих на балку параллельных сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{ky} &\equiv Q + R - R' = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &\equiv Ra/3 - Q(b/2 + a/3) \end{aligned}$$

**Рис.1.55.**  
**Распределенная**

Подставляя сюда вместо  $Q$ ,  $R$  и  $R'$  их значения и полученные уравнения, найдем окончательно  $q_m = (3n^2 + 2n) q_0$ ,  $n = 2$ , получим  $q_m = 16 q_0$ ,  $q'_m = 20 q_0$ , а при  $n = 4$   $q_m = 56 q_0$ , а  $q_m = 64 q_0$ .

## Контрольные вопросы

1. Предмет статики и ее основные задачи.
2. Основные понятия статики: сила, система сил, внешние и внутренние силы, сосредоточенные и распределенные силы.
3. Аксиомы статики и их следствия.
4. Связь, типы связей, реакции связей, принцип освобождения от связей.
5. Система сходящихся сил, условия ее равновесия.
6. Способы сложения сил: геометрический и аналитический.
7. Теорема о трех силах и ее применение к определению направления реакции.
8. Момент силы относительно точки. Понятие векторного и алгебраического момента силы относительно точки.
9. Пара сил. Момент пары сил. Свойства пар сил, сложение пар сил.
10. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
11. Теорема Пуансона о параллельном переносе силы.
12. Приведение плоской системы сил к заданному центру.
13. Понятие главного вектора и главного момента.
14. Условия равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил.
15. Момент силы относительно оси.
16. Условие равновесия тела под действием пространственной системы сил.

## **ЧАСТЬ 2**

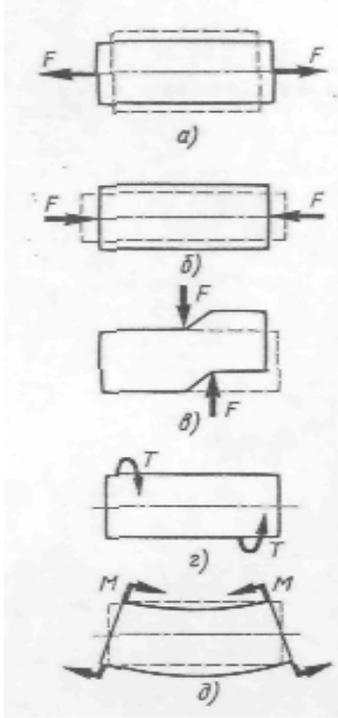
# **ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ**

## **2.1. ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ СИЛ**

На все детали машин и сооружений во время их работы действуют различные внешние силы. При определении значения и направления таких сил, приложенных к телам, находящимся в равновесии, обычно делается допущение, что все тела абсолютно твердые, т. е. недеформируемые. Однако в действительности тела под действием приложенных к ним сил в той или иной степени меняют свою форму и размеры, т. е. деформируются.

Различают упругую и остаточную деформации. Деформация, полностью исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется упругой. Если после снятия нагрузки тело не восстанавливает прежней формы, то деформация является остаточной, или пластической. Характер деформации зависит от значения силы, действующей на тело, размеров тела и механических свойств материала.

В зависимости от направления и плоскости действия сил, приложенных к телу, могут возникать различные виды деформаций — растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб, которые будут рассмотрены применительно к телу наиболее простой формы, каким является прямолинейный брус — тело с прямой осью, у которого длина значительно больше поперечных размеров. Для упрощения расчетов будем считать, что сам брус не имеет массы.



**Рис.2.1** Виды деформации

Деформация растяжения (рис. 2.1, а) или сжатия (рис. 2.1,б) возникает в том случае, когда внешние силы направлены по одной прямой (вдоль оси бруса) и в разные стороны. Если на брус действуют внешние силы, стремящиеся сдвинуть одну его часть относительно другой, то возникает деформация сдвига (рис. 2.1, в). При этом силы образуют пару с очень малым плечом в плоскости продольной оси бруса. Если брус находится под действием сил, создающих противоположные по направлению пары в плоскостях, перпендикулярных продольной оси бруса, то появляется деформация

кручения (рис, 2.1, г) Деформация изгиба (рис. 2.1, д) возникает, если две противоположно направленные пары сил действуют в плоскости продольной оси бруса.

Чтобы любая деталь машины была работоспособна, т. е. могла работать безопасно и быть достаточно долговечной, она не только должна разрушаться, но и деформации, возникающие в ней под действием сил, должны быть весьма малыми и обязательно упругими. Определить минимальные размеры детали, необходимые для обеспечения ее работоспособности в соответствии с действующими на нее силами и свойствами материала, из которого эта

деталь изготовлена, можно методами, изучаемыми в разделе механики «Сопrotивление материалов».

## 2.2. ВНЕШНИЕ СИЛЫ, ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ (СИЛЫ УПРУГОСТИ) И НАПРЯЖЕНИЯ

Нагрузки, действующие на тело при взаимодействии его с другими телами, называются внешними силами. По способу приложения они могут быть *сосредоточенными и распределенными*. Сосредоточенные внешние силы действуют на тело через очень маленькие площадки и с достаточной степенью точности могут считаться приложенными в точке. По характеру действия внешние силы делятся на *постоянные и переменные*. Мы будем рассматривать наиболее простые случаи, когда действуют сосредоточенные постоянные внешние силы.

Как было отмечено, под влиянием внешних сил тело деформируется. При этом силы взаимного сцепления между частицами материала оказывают противодействие внешним силам — так возникают внутренние силы или силы упругости, которые распределены по всей площади поперечного сечения тела в одних случаях равномерно, а в других — неравномерно. Мера внутренних сил, возникающих в теле под влиянием внешних воздействий, называется механическим напряжением.

Так как внутренняя сила (как и всякая сила) является вектором, то и напряжение — также вектор. Составляющие вектора механического напряжения по нормали (перпендикулярно) к рассматриваемому сечению тела ( $\sigma$ ) и по касательной к нему ( $\tau$ ) называются соответственно *нормальным* и *касательным*

механическим напряжением. К буквам  $\sigma$  и  $\tau$  при обозначении напряжений добавляют индексы, поясняющие вид деформаций: «р»-растяжение, «с»-сжатие, «ср»- срез при сдвиге, «к»- кручение, «и»-изгиб.

Единице механического напряжения присвоено наименование паскаль (Па). Паскаль равен механическому напряжению, вызываемому упругой силой 1 Н при равномерном ее распределении по сечению площадью 1 м<sup>2</sup>, расположенному перпендикулярно силе:  $10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2$ .

### 2.3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ, ПРЕДЕЛЬНО ОПАСНЫЕ И ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Мы установили, что внешние силы вызывают деформацию тел, в результате чего появляются внутренние силы (силы упругости), а значит, и напряжения. Если известны внутренние силы, характер их распределения в сечении и размеры последнего, то можно определить так называемые действительные напряжения. Однако не любое действительное напряжение безопасно для материала детали. Внутренние силы, т. е. силы противодействия, не могут возрастать беспредельно без нарушения работоспособности детали. При достижении ими определенного значения наступает критический момент: для пластичных материалов - это появление остаточных деформаций, т. е. переход из зоны упругости в зону пластичности, для хрупких - нарушение целостности, т.е. разрушение. Таким образом, существуют предельно опасные напряжения: в первом случае - *предел текучести* ( $\sigma_T$  и  $\tau_T$ ), во втором - *предел прочности* ( $\sigma_B$  и  $\tau_B$ ). Особым случаем нарушения

работоспособности детали является усталостное разрушение ее материала под влиянием напряжений, циклично изменяющихся во времени. В этом случае предельно опасным напряжением является ***предел выносливости***. Числовые величины предельно опасных напряжений, зависящие от свойств материала и определяющиеся во время механических испытаний, приводятся в справочниках.

Казалось бы, что условие безопасной и долговечной работы детали можно сформулировать так: действительные напряжения должны быть меньше предельно опасных напряжений или равны им. Однако нельзя допустить, чтобы детали машин работали при предельно опасных напряжениях или при напряжениях, весьма близких к ним, так как в этом случае даже малейшее увеличение действительных напряжений, вызванное случайными причинами, может привести к опасным пластическим деформациям детали или к ее разрушению. Поэтому в расчетах ориентируются на более безопасные значения максимальных действительных напряжений - допускаемые напряжения, которые меньше предельно опасных в определенное число раз, называемое нормативным коэффициентом запаса прочности. Допускаемые напряжения обозначают теми же буквами, что и действительные, но заключают их в квадратные скобки. Например,  $\sigma_p$  - действительное напряжение при растяжении, а  $[\sigma_p]$  — допускаемое напряжение при растяжении.

Выбор нормативного коэффициента запаса прочности чрезвычайно сложен и должен как можно точнее учитывать большое число факторов (свойства материала, характер нагрузки, степень ответственности детали и др.). В случае приближенных расчетов

допускаемые напряжения выбирают по справочным таблицам, в которых учтено примерное влияние этих факторов.

Следовательно, окончательное условие прочности любой детали будет таким: *действительные напряжения должны быть  $\sigma \leq [\sigma]$* .

## 2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ (СИЛ УПРУГОСТИ)

Как было сказано ранее, основной задачей, решаемой с помощью методов раздела механики «Соппротивление материалов», является определение минимально необходимых размеров детали, обеспечивающих ее работоспособность. Чтобы решить эту задачу, необходимо, прежде всего, научиться по внешним силам определять внутренние силы, для чего применяют метод сечений (рассматривается находящийся в равновесии брус, к которому приложены известные внешние силы или пары сил).

Сущность метода заключается в следующих четырех действиях:

- мысленно рассекают брус плоскостью, перпендикулярной его оси, в том месте, где требуется определить внутренние силы;

- отбрасывают любую из полученных частей (равновесие оставленной части не нарушится лишь в том случае, если к ней приложить реакции связей - внутренние силы, заменяющие действие отброшенной части; для оставленной части они будут играть роль внешних сил);

- заменяют действие отброшенной части искомыми внутренними силами;

- уравнивают оставленную часть, т.е. определяют внутренние силы.

Следует помнить, что здесь определяется не распределение внутренних сил по сечению, а лишь равнодействующая этих сил (или равнодействующая пара сил).

Проиллюстрируем этот метод на трех простых случаях нагружения бруса (рис. 2.2, I, II, III): брус, изображенный на рис. 2.2, а, мысленно рассекаем плоскостью (рис. 2.2, б); отбрасываем одну часть (на рис. 2.2, в показана оставшаяся часть); заменяем действие отброшенной части внутренними силами с таким расчетом, чтобы соблюдались условия равновесия, т. е. производим третье и четвертое действия (рис. 2.2, г). В этих случаях для равновесия бруса необходимо и достаточно, чтобы внутренние силы приводились к равнодействующей  $N$  (продольной или нормальной силе) или  $Q$  (поперечной или перерезывающей силе). В случае I силы направлены перпендикулярно сечению и, естественно, приводят к появлению нормальных напряжений растяжения  $\sigma_r$ . В случае II силы также направлены перпендикулярно сечению, однако они ориентированы так, что возникают нормальные напряжения сжатия  $\sigma_c$ . В случае III силы действуют в плоскости сечения, поэтому появятся касательные напряжения сдвига  $\tau_{ср}$ .

Теперь рассмотрим применение метода сечений для двух более сложных случаев нагружения (рис. 2.2, IV и V). Первые два действия ничем не отличаются от аналогичных действий в предыдущих примерах (см. рис. 2.2, б и в). Не отличаются и два следующих действия (см. рис. 2.2, г), однако результат они дадут иной. Так как брусья нагружены парами внешних сил, то уравновесить их можно лишь равными парами

внутренних сил.

Очевидно, что в сечении силы упругости в этих случаях приводятся не к равнодействующим силам, а к равнодействующим парам сил.

В случае IV плоскость действия равнодействующей пары внутренних сил совпадает с плоскостью сечения (плоскость действия пары сил перпендикулярна продольной оси бруса), а следовательно, и сами внутренние силы действуют в плоскости сечения. Такая равнодействующая пара внутренних сил называется крутящим моментом, а возникающие напряжения - касательными напряжениями кручения  $\tau_k$ . В случае V равнодействующая пара внутренних сил действует в плоскости, перпендикулярной сечению.

Такая пара, являющаяся результатом действий нормальных сил, называется изгибающим моментом, а напряжения - нормальными напряжениями изгиба  $\sigma_{и}$ .

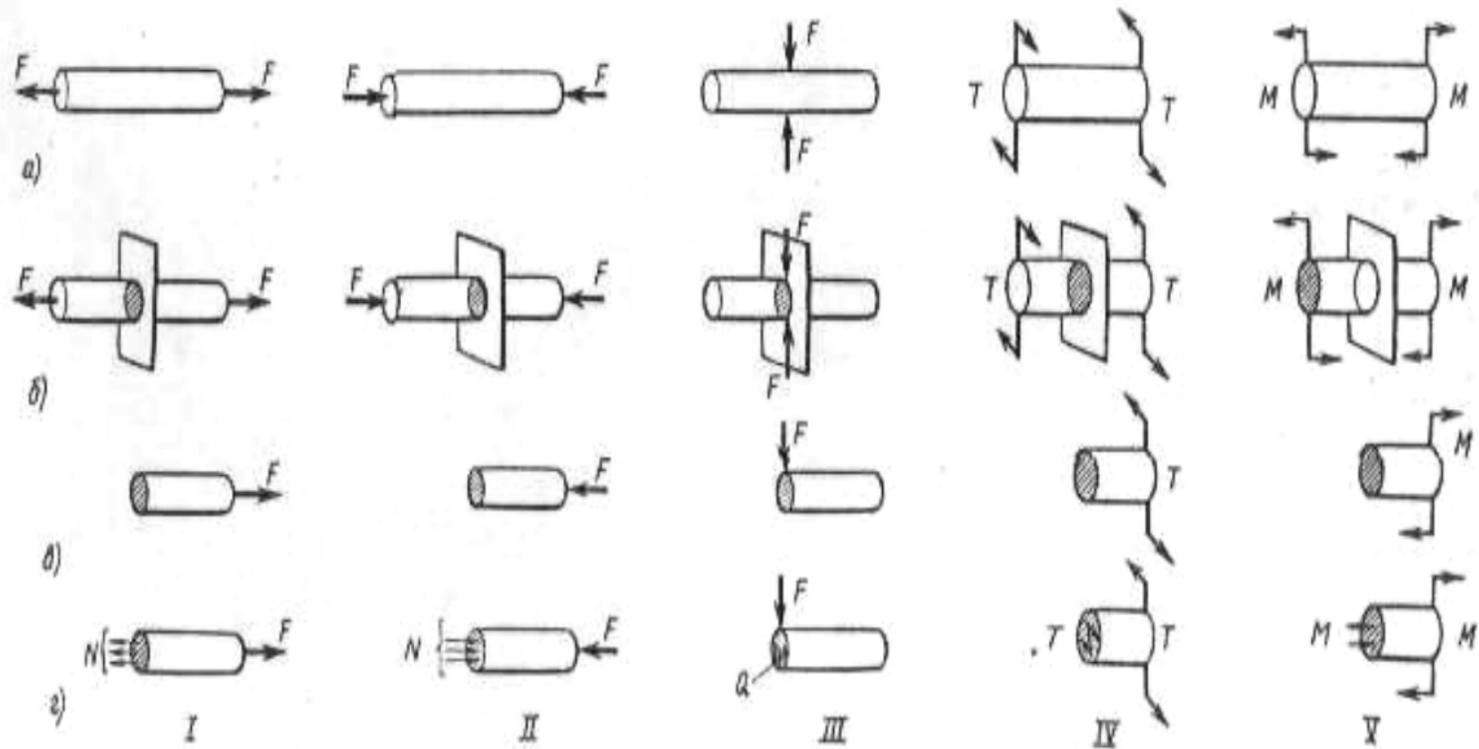


Рис. 2.2. Схемы определения внутренних сил

## 2.5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

При решении практических задач с использованием методов науки о сопротивлении материалов могут встретиться два типовых случая.

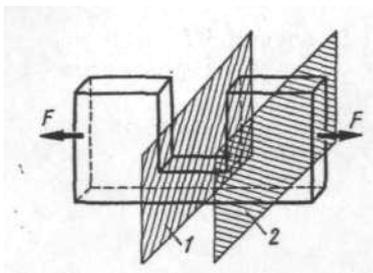


Рис.2.3. Определение внутренних сил в брусе сложной формы

1. Известны внешние силовые факторы (силы, моменты), приложенные к детали, и материал детали. Требуется определить размеры поперечного сечения детали. Такая задача называется **проектным расчетом** и решается так. По справочным данным (или используя более точные методы) определяют допускаемые напряжения. Искомые размеры поперечного сечения детали будут тем меньше (что экономически более целесообразно), чем большие действительные напряжения мы допустим в ней. Поэтому мысленно действительные напряжения приравнивают к самым большим безопасным, т. е. допускаемым, напряжениям. Затем, применив метод сечений, определяют внутренние силовые факторы (силы, моменты). В заключение, зная допускаемые напряжения и внутренние силовые факторы, определяют размеры поперечного сечения по расчетным формулам, в которых учитывается, как распределены силы упругости в сечении (эти расчетные формулы будут приведены далее при рассмотрении каждого вида деформаций).

2. Известны внешние силовые факторы (силы, моменты), действующие на деталь, материал детали и

размеры ее поперечного сечения. Требуется проверить прочность детали. Такая задача называется **проверочным расчетом**.

В этом случае определяют действительные напряжения, сравнивают их с допускаемыми напряжениями и делают вывод о прочности. Как мы знаем, деталь будет прочной, если окажется выполненным следующее условие: действительные напряжения меньше допускаемых напряжений или равны им. Допускаемые напряжения выбирают, как и в первом случае, а действительные определяют по расчетным формулам для каждого вида деформации, используя известные внутренние силовые факторы и размеры поперечного сечения.

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется механическим напряжением, и какие бывают напряжения в зависимости от ориентации их вектора?
2. Какова связь между внешними силами, деформацией, внутренними силами и напряжением?
3. В чем различие между понятиями «действительное напряжение», «предельно опасное напряжение» и «допускаемое напряжение»?
5. Каково основное условие прочности любой детали?
6. В чем сущность основных расчетов — проектного и проверочного?

## **2.6. РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ И СМЯТИЕ**

### **2.6.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ**

Как уже отмечалось, деформация растяжения появляется в том случае, если внешние силы направлены вдоль оси бруса по одной прямой, но в разные стороны. Если представить себе в таком брусе воображаемые продольные волокна материала, то,

очевидно, что все они удлинятся, причем удлинения всех волокон будут одинаковы. Иначе говоря, материал в любой точке поперечного сечения будет деформироваться одинаково, следовательно, и силы упругости во всех точках сечения также будут одинаковы. Но это означает, что во всех точках будут и одинаковые напряжения. При таком равномерном распределении по сечению внутренних сил действительные нормальные напряжения при растяжении

$$\sigma_p = N/S, \quad (2.1)$$

где  $N$  — равнодействующая внутренних сил (продольная сила);  $S$  - площадь поперечного сечения бруса.

## **2.6.2 ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И ОТНОСИТЕЛЬНЫМ УДЛИНЕНИЕМ. АБСОЛЮТНОЕ УДЛИНЕНИЕ**

Опытным путем установлено, что в некоторых пределах нагружения при упругих деформациях напряжение растяжения  $\sigma_p$  оказывается прямо пропорциональным относительному удлинению  $\varepsilon$ , которое является отношением абсолютного удлинения (прироста длины)  $\Delta \ell$  бруса к его первоначальной длине  $\ell$ , т. е.

$$\varepsilon = \Delta \ell / \ell. \quad (2.2)$$

Относительное удлинение является или безразмерным параметром, или выражается в процентах. Если коэффициент пропорциональности между напряжением и относительным удлинением обозначить

буквой  $E$ , то  $\sigma_p = E\varepsilon$ . Эта зависимость была впервые установлена английским ученым Гуком и называется законом Гука. Физический смысл коэффициента пропорциональности легко установить, если сделать допущение, что  $\Delta l = l$ , т. е.  $\varepsilon = 1$ . В этом случае  $E = \sigma_p$ , и можно сказать, что коэффициент  $E$  - это такое напряжение растяжения, которое возникает в материале, если брус удлиняется на величину, равную своей первоначальной длине. Надо отметить, что хотя почти все материалы разрушаются гораздо раньше, чем напряжение достигает числовой величины  $E$ , тем не менее это напряжение отображает действительные свойства материала, его способность сопротивляться упругой деформации растяжения. Коэффициент пропорциональности  $E$ , называемый модулем упругости при растяжении, или модулем продольной упругости, для различных материалов различен.

Для практических расчетов удобнее другое математическое выражение закона Гука, позволяющее определять величину абсолютной деформации бруса под нагрузкой. Получить его несложно, если учесть, что  $\sigma_p = N/S$  и  $\varepsilon = \Delta l / l$ . Тогда  $N/S = E \Delta l / l$ , откуда

$$\Delta l = N l / (ES). \quad (2.3)$$

Следовательно, абсолютное удлинение, полученное брусом, прямо пропорционально продольной силе и длине бруса и обратно пропорционально площади поперечного сечения и модулю упругости.

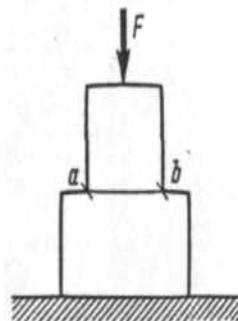
### 2.6.3. СЖАТИЕ И СМЯТИЕ

Внешние силы, деформирующие брус при сжатии, так же как и при растяжении, направлены вдоль оси бруса в противоположные стороны, только при растяжении они направлены «от тела», а при сжатии — «к телу». Внутренние силы упругости при сжатии распределяются по сечению также равномерно, так как материал во всех точках поперечного сечения подвергается одинаковой деформации. Следовательно, действительные напряжения при сжатии рассчитываются аналогично их расчету при растяжении, т. е.

$$\sigma_c = N/S. \quad (2.4)$$

Математические выражения закона Гука, полностью применимого для сжатия, аналогичны рассмотренным выражениям для растяжения.

Особенностью деформации сжатия является то, что она может сопровождаться деформацией смятия. Напряжение смятия возникает на опорной поверхности а - b (рис. 2.4) контактирующих тел, если одно из них нажимает на другое. Именно в этом основное отличие смятия от сжатия: сжатие происходит во внутренних сечениях материала, а смятие — на его поверхности. Возникающие при смятии нормальные напряжения во всех точках опорной поверхности одинаковы, поэтому действительные напряжения смятия



**Рис. 2.4.** Схема взаимодействия тел, вызывающего деформацию смятия

$$\sigma_c = F/S, \quad (2.5)$$

где  $F$  - равнодействующая внешних сил, приложенных к опорной поверхности контактирующих тел;  $S$  - площадь опорной поверхности контакта тел.

#### 2.6.4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ, СЖАТИИ И СМЯТИИ

При проверочном расчете надо определить действительные напряжения и сравнить их с допускаемыми. Прочность будет обеспечена, если действительные напряжения не превысят допускаемых. Математически это записывается так:

$$\text{при растяжении } \sigma_p = N/S \leq [\sigma_p];$$

$$\text{сжатии } \sigma_c = N/S \leq [\sigma_c];$$

$$\text{смятии } \sigma_{см} = F/S \leq [\sigma_{см}].$$

При проектном расчете требуется определить размеры поперечного сечения детали. В этом случае расчет ведется в предположении, что действительные напряжения будут равны (или несколько меньше) допускаемых. Следовательно:

$$\text{при растяжении } S \geq N/ [\sigma_p];$$

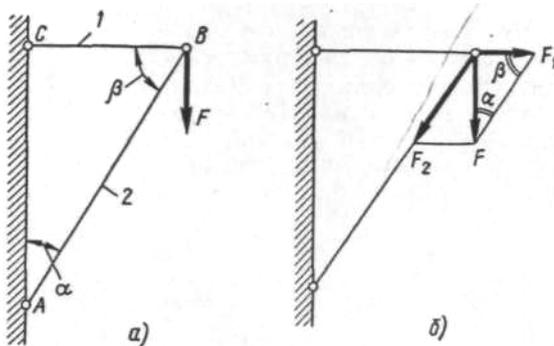
$$\text{сжатии } S \geq N/ [\sigma_c];$$

$$\text{смятии } S \geq F/ [\sigma_{см}].$$

**Задача 1.** Стальные стержни 1 и 2 (рис. 2.5, а) круглого сечения соединены между собой и вертикальной стеной шарнирами. На шарнирный узел В действует вертикальная сила  $F = 10$  кН;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ . Определить из условий прочности необходимые диаметры стержней.

**Решение.** 1. Определение внешних сил, действующих на стержни (при этом делается допущение, что стержни абсолютно твердые, т. е. недеформируемые). Вертикальная сила  $F$  действует на шарнир, которым соединены оба стержня, поэтому ее следует

разложить, чтобы определить составляющие, действующие на каждый из стержней в отдельности. Решая прямоугольный треугольник (рис. 2.5, б), находим соответственно силы, действующие на стержни 1 и 2:  $F_1 = Ftg\alpha$ ;  $F_2 = F/\sin\beta$ .



**Рис. 2.5. Определение внешних сил, действующих на стержень (а), решение прямоугольного треугольника (б)**

Подставив соответствующие числовые величины, получим  $F_1 \approx 5,78$ ,  $F_2 \approx 11,54$  кН. Этот же ответ можно получить, разложив силу  $F$  геометрически и измерив стороны точно построенного параллелограмма сил.

2. Определение внутренних сил, действующих в стержнях. Применив метод сечений, выясним, что для каждого из стержней в любом сечении внутренние силы равны внешним силам и ориентированы так, что стержень испытывает деформацию растяжения, а стержень 2 деформацию сжатия.

3. Определение необходимых размеров поперечных сечений стержней. Используем формулы проектного расчета на прочность при растяжении и сжатии:  $S_p \geq N_p / [\sigma_p]$ ;  $S_c \geq N_c / [\sigma_c]$ .

Учитывая, что  $N_p = F_1$ ,  $N_c = F_2$  и поперечные сечения стержней круглые, напишем расчетные зависимости:

$$\pi d_1^2 / 4 \geq F_1 [\sigma_p]; \quad \pi d_2^2 / 4 \geq F_2 [\sigma_c], \text{ откуда}$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi[\sigma_p]}}; \quad d_2 \geq \sqrt{\frac{4F_2}{\pi[\sigma_c]}}.$$

Таким образом, для определения диаметров стержней

необходимо знать допускаемые напряжения при растяжении и сжатии. Для конструкционной стали, из которой сделаны стержни, по справочнику принимаем  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 10^2$  МПа. После подстановки всех числовых данных определяем  $d_1 \geq 8,6$  мм;  $d_2 \geq 12,2$  мм.

### **Контрольные вопросы**

1. Стержень имеет диаметр  $d = 1$  мм; допускаемое напряжение материала  $[\sigma_p] = 10^2$  МПа. Какой массы груз можно безопасно подвесить на этом стержне?
2. Какую силу  $F$  надо приложить к стальному стержню диаметром  $d = 12$  мм и длиной  $l = 4$  м, чтобы он удлинился на 0,5 см? Какое напряжение возникнет при действии этой силы?
3. Какая существует зависимость между нормальным напряжением и относительной деформацией при растяжении (сжатии)?
4. В чем отличие деформации сжатия от деформации смятия?
5. Как распределены внутренние силы в поперечном сечении при растяжении (сжатии)?
6. Как определяются действительные напряжения при растяжении, сжатии, смятии?

## **2.7. СДВИГ (СРЕЗ)**

### **2.7.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СДВИГЕ (СРЕЗЕ). РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ**

Деформация сдвига возникает в тех случаях, когда внешние силы, действующие на брус, расположены в параллельных плоскостях на очень малом расстоянии друг от друга и направлены в противоположные стороны. При этом происходит разрушение, называемое срезом. Характерным примером сдвига является резание материала ножницами.

Нетрудно представить, что все точки

деформируемых сечений, ограниченных плоскостями действующих сил, смещаются на равные расстояния (см. рис. 2.1, в), т. е. материал в этих точках подвергается одинаковой деформации. Следовательно, справедливо будет такое же рассуждение, какое мы применили при изучении деформации растяжения: одинаковые деформации вызывают возникновение одинаковых внутренних сил и, следовательно, во всех точках сечения действительные напряжения будут одинаковы. Их значения определяются делением равнодействующей  $Q$  внутренних (поперечных) сил на площадь  $S$  поперечного сечения бруса. Так как вектор напряжения расположен в плоскости сечения, то напряжение будет касательным, т. е.

$$\tau_{\text{ср}} = Q/S. \quad (2.6)$$

Как и при растяжении (или сжатии), при сдвиге справедлив закон Гука, т. е. в зоне упругости напряжения прямо пропорциональны относительным деформациям.

Расчет на прочность при сдвиге ничем не отличается от расчета на прочность при растяжении (сжатии). При проектном расчете  $Q/S \leq [\tau_{\text{ср}}]$ , откуда  $S \geq Q/[\tau_{\text{ср}}]$ . При проверочном расчете  $\tau_{\text{ср}} = Q/S \leq [\tau_{\text{ср}}]$ .

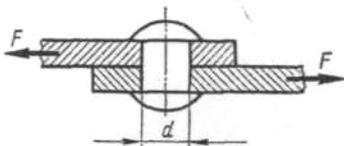
**Задача 2.** Два листа соединены заклепкой (рис. 2.6). На соединение действуют силы  $F = 2,5$  кН. Определить, достаточна ли прочность заклепки, если ее диаметр  $d = 10$  мм, а  $[\tau_{\text{ср}}] = 50$  МПа.

**Решение.** 1. Определение внешних сил, действующих на заклепку. Заклепка воспринимает силы  $F$ , которые действуют на нее в параллельных плоскостях на очень малом расстоянии друг от друга и направлены в противоположные стороны.

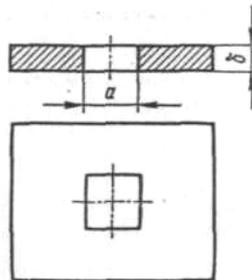
2. Определение внутренних сил, действующих в заклепке. Единственным сечением заклепки, в котором возможна деформация

(исключая деформацию смятия на боковых поверхностях), является сечение, совпадающее со стыком листов. Применяв метод сечений, можно сделать вывод, что равнодействующая внутренних сил  $Q = F$ , а сами силы ориентированы так, что появляются касательные напряжения сдвига.

3. Проверка прочности заклепки. Прочность заклепки будет достаточной, если возникающие в ней действительные напряжения сдвига не превысят допускаемых.



**Рис. 2.6.** Соединение металлических листов заклепкой



**Рис. 2.7.** Стальной лист толщиной  $\delta$  с квадратным отверстием

Действительные напряжения

$$\tau_{cp} = F/S = \frac{2,5 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 10^2}{4} \cdot 10^{-6}} = 3,185 \cdot 10^7 \text{ Па} = 31,85 \text{ МПа.}$$

Так как  $\tau_{cp} < [\tau_{cp}]$ , прочность заклепки на сдвиг достаточна.

**Задача 3.** В стальном листе толщиной  $\delta = 10$  мм на прессе пробили квадратное отверстие со стороной  $a = 20$  мм (рис. 2.7). Определить силу, которая потребовалась для пробивки отверстия, если предел прочности при срезе  $\tau_B = 4 \cdot 10^2$  МПа.

**Решение.** 1. При пробивке отверстия в листе материал разрушился по четырем плоскостям, следовательно, в соответствующих сечениях действительные напряжения достигли предела прочности. При этом происходила деформация сдвига (срез). Таким образом, требуется определить внутреннюю и внешнюю силы по известным напряжениям и размерам, позволяющим подсчитать общую площадь деформируемых

сечений.

2. Определение общей площади деформируемых сечений. Эта площадь состоит из площадей четырех прямоугольников с размерами  $a \times b$ . Таким образом,  $S = 4axb = 4 \cdot 20 \cdot 10 = 800 \text{ мм}^2$ .

3. Определение силы, потребной для пробивки отверстий. Напряжение при сдвиге (срезе)  $\tau_{\text{ср}} = Q/S$ . Внешняя сила  $F$  должна быть равна равнодействующей  $Q$  внутренних сил, действующих в четырех плоскостях среза, т. е.  $F = Q$ . Учитывая, что действительные напряжения при разрушении (срезе) равны предельно опасным,  $\tau_{\text{ср}} = \tau_{\text{в}}$ , окончательно имеем  $\tau_{\text{в}} = F/S$ . После подстановки числовых данных  $F = \tau S = 4 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 800 \cdot 10^{-6} = 32 \cdot 10^4 \text{ Н} = 320 \text{ кН}$ .

### Контрольные вопросы

1. В каких случаях возникает деформация сдвига?
2. Как распределяются напряжения при сдвиге в деформируемом сечении?
3. Как определяются действительные напряжения при сдвиге (срезе)?

## 2.8. КРУЧЕНИЕ

### 2.8.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Деформация кручения возникает, как было отмечено ранее, при действии на брус нагрузок, создающих противоположные пары сил в плоскостях, перпендикулярных продольной оси бруса. Так как при этом прямолинейные образующие круглого бруса принимают вид винтовых линий (это легко наблюдать на резиновом стержне), то можно предположить, что при кручении каждое поперечное сечение по отношению к соседнему поворачивается на некоторый угол. Можно также представить, что брус сложен из множества тончайших дисков; при повороте каждого из них на стыке с соседним происходят перемещения точек

в плоскостях, перпендикулярных оси бруса. Вывод таков: при кручении бруса в каждом сечении происходит деформация сдвига и возникают касательные напряжения.

Однако, если при сдвиге все точки деформируемого сечения прямолинейно смещались на равные расстояния, то при кручении материал в разных точках, находящихся на разных расстояниях от оси бруса, испытывает разные деформации. Чем дальше точка удалена от оси, тем больше перемещение по дуге. Но так как по закону Гука напряжения прямо пропорциональны относительной деформации, то, очевидно, что и напряжения в различных точках одного и того же сечения будут различны и прямо пропорциональны расстоянию точки от центра сечения, называемого полюсом. В точке сечения, совпадающей с полюсом, напряжение будет равно нулю, а наибольшие напряжения  $\tau_{\max}$  возникают в наиболее удаленных от полюса точках, расположенных на поверхности бруса.

Таким образом, первое различие деформаций кручения и сдвига заключается в различных законах распределения напряжений по сечению. Второе различие состоит в том, что использование метода сечений при сдвиге позволяет выявить равнодействующую внутренних сил (поперечную силу  $Q$ ), а при кручении тот же метод приводит к обнаружению равнодействующей пары сил, создающей внутренний крутящий момент  $T$ . Оба различия деформаций необходимо иметь в виду при определении действительных напряжений при кручении.

Вывод расчетной формулы для определения действительных напряжений в опасных точках сечения скручиваемого бруса ( $\tau_{\max}$ ) достаточно сложен и требует большого числа математических преобразований, но

основывается он на известных положениях. Их последовательность, соответствующая порядку действий при математических преобразованиях, такова. В любом сечении скручиваемого бруса должен действовать внутренний крутящий момент сил упругости, равный внешнему вращающему моменту и возникающий следующим образом: в каждой точке деформируемого сечения действует касательное напряжение, по закону Гука прямо пропорциональное относительной деформации; если предположить, что в окрестностях точки, т. е. на очень маленькой площадке, это напряжение остается неизменным, то это равносильно тому, что в сечении действуют элементарные касательные внутренние силы, каждая из которых создает относительно оси бруса (полюса сечения) элементарный внутренний момент: сумма этих элементарных моментов и является внутренним крутящим моментом.

Соответствующие приведенным рассуждениям математические преобразования (при условии, что брус имел круглое поперечное сечение диаметром  $d$ ) приводят к формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\pi d^3 / 16}. \quad (2.7)$$

Выражение  $\pi d^3 / 16$  называют полярным моментом сопротивления сечения кручению и обозначают  $W_p$  (размерность —  $\text{мм}^3$ ). Для практических расчетов можно принять, что

$$W_p = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3. \quad (2.8)$$

Сравнение формул для определения действительных напряжений при сдвиге ( $\tau_{\text{ср}} = Q/S$ ) и

кручении ( $\tau_{\max} = T/W_p$ ) позволяет сделать вывод, что в правых частях приведенных равенств числитель отражает внутренний силовой фактор, а знаменатель — геометрический. Таким образом, числовая величина  $W_p$  характеризует способность бруса, имеющего круглое поперечное сечение заданных размеров, сопротивляться деформации кручения.

### 2.8.2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Типовой деталью, испытывающей деформацию кручения, является вал. При проектном расчете его на прочность надо по предварительно выявленному крутящему моменту и допускаемому напряжению определить необходимый диаметр вала. Исходной является зависимость, в которой, как обычно, в качестве максимальных действительных напряжений используются допускаемые напряжения, т. е.

$$\tau_k = T/(0,2d^3) \leq [\tau_k], \quad (2.9)$$

$$\text{откуда } d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_k]}}. \quad (2.10)$$

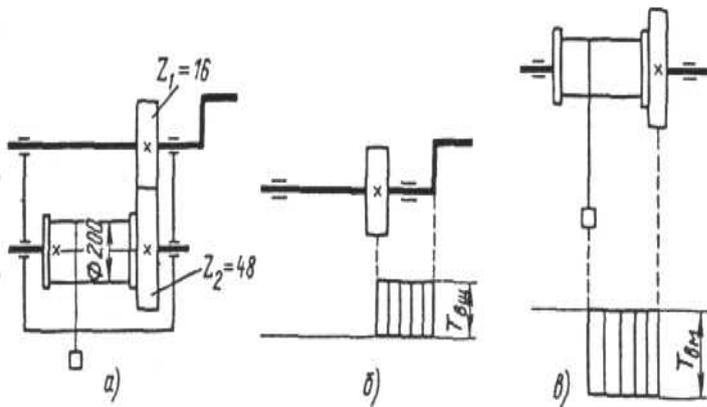
$[\tau_k]$  принимают с учетом запаса прочности 20-25 МПа.

Так как для валов многих машин бывает известен не внешний момент, а передаваемая мощность  $P$  (Вт) и угловая скорость  $\omega$  (1/с) или частота вращения  $n$  (об/мин или об/с) вала, то прежде всего определяют внешний вращающий момент (Нм):  $T=P/\omega$ . Если числовая величина  $n$  дана в об/мин, то  $\omega = \pi n/30$ , если в об/с, то  $\omega = 2\pi n$ .

При проверочном расчете, как и в случаях других деформаций, определяют действительные напряжения и сравнивают их с допускаемыми. Прочность будет обеспечена, если соблюдается условие (2.9)

**Задача 4.** С помощью лебедки поднимается груз, который воздействует на трос с силой  $F=2,5$  кН. Все необходимые размеры лебедки даны на рис. 2.11, а;  $\eta = 0,85$ ; материал валов — среднеуглеродистая сталь. Определить из расчета на кручение диаметры ведущего и ведомого валов.

**Решение.** 1. Определение участков валов, испытывающих деформацию кручения. Рабочий, прикладывая к рукоятке усилие, создает на ведущем валу вращающий момент, которому противодействует момент, создаваемый усилием в зубчатом зацеплении. Очевидно, что в любом сечении вала на этом участке действует равный внешнему внутреннему крутящий момент  $T$ . Изобразив числовую величину этого момента в виде отрезка определенной длины, можно построить график распределения (эпюру) крутящего момента по длине ведущего вала (рис. 2.11,б).



**Рис. 2.8. Лебедка**

На ведомом валу вращающий момент создается массой груза (плечо момента силы — радиус барабана), а противодействует ему момент, создаваемый, так же как и на ведущем валу, усилием в

зубчатом зацеплении. Аналогично предыдущему построению (см. рис. 2.8, б) можно построить эпюру внутреннего крутящего момента (рис. 2.8, в) на ведомом валу лебедки.

2. Определение крутящих моментов.

$$T_{\text{ВМ}} = F \frac{D}{2} = 25 \cdot 10^2 \cdot \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2} = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad T_{\text{ВЩ}} = \frac{T_{\text{ВМ}}^2}{u_{1-2} \eta},$$

где  $u_{1-2} \eta = z_2/z_1 = 48/16 = 3$ . Тогда  $T_{\text{ВЩ}} = 250/(3-0,85) \approx 98 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3. Определение требуемых диаметров валов. Исходная

формула  $d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_k]}}$ . Предварительно определив  $[\tau_k] = 25 \text{ МПа}$ ,

подсчитываем диаметры ведущего и ведомого валов:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{98}{0,2 \cdot 25 \cdot 10^6}} \text{ м или } d_1 \geq 25,5 \text{ мм, окончательно}$$

принимаем нормативный размер  $d_1 = 26 \text{ мм}$ ;

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{250}{0,2 \cdot 25 \cdot 10^6}} \text{ или } d_2 \geq 36,8 \text{ мм, окончательно}$$

принимаем нормативный размер  $d_2 = 38 \text{ мм}$ , который округляют до ближайшего стандартного значения, выбранного по ГОСТ 12080 и ГОСТ 12081.

## Контрольные вопросы

1. Как различаются диаметры двух валов, рассчитанных на кручение, при передаче одинаковых мощностей, но с разными частотами вращения ( $n_1 = 2000 \text{ об/мин}$ ,  $n_2 = 500 \text{ об/мин}$ )?

2. Как, имея в виду неравномерное распределение напряжений при кручении и тот факт, что максимальные напряжения возникают в точках, расположенных на поверхности валов, объяснить целесообразность изготовления не сплошных, а полых валов?

3. Какой внутренний силовой фактор действует в сечении скручиваемого бруса?

4. В чем различие между распределениями напряжений в сечении при сдвиге и кручении?

5. От каких факторов зависит числовая величина напряжения в определенной точке сечения при кручении?

6. В каких точках круглого бруса будут возникать

наибольшие напряжения при кручении?

7. Как подсчитываются действительные максимальные напряжения при кручении?

8. Что необходимо знать, чтобы в проектном расчете на кручение определить требуемый диаметр вала?

## 2.9. ИЗГИБ И СЛОЖНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

### 2.9.1. ОСОБЕННОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА

Деформация изгиба возникает, если брус находится под действием двух противоположно направленных пар сил, расположенных в плоскости его продольной оси. При этой деформации продольные волокна бруса в одной зоне удлиняются, а в другой - укорачиваются (рис. 2.9).

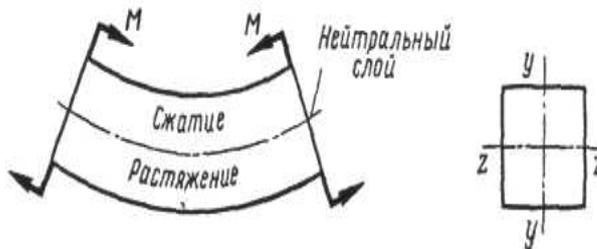
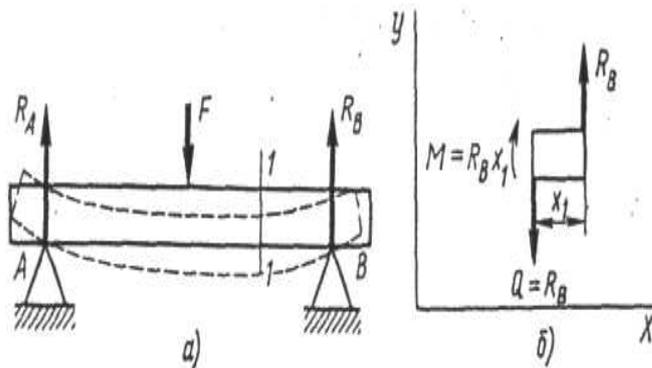


Рис. 2.9. Схема деформации при чистом изгибе

Между зонами растяжения и сжатия располагается нейтральный слой, волокна которого не подвергаются деформации и сохраняют свою длину неизменной. Чем дальше волокна расположены от нейтрального слоя, тем большую деформацию они испытывают. Отсюда можно сделать вывод, что при изгибе в поперечных сечениях бруса под действием внутренних сил возникают нормальные напряжения растяжения и сжатия. В точках, наиболее удаленных от нейтральной оси  $z-z$ , напряжения будут наибольшими.

Нейтральной осью называется прямая линия, по которой поперечное сечение пересекается с нейтральным слоем. В зоне растяжения их обозначают  $+\sigma_{\max}$ , а в зоне сжатия -  $\sigma_{\min}$  т.е. со знаком «+» обозначают напряжения растяжения, со знаком «-» - напряжения сжатия. В точках, расположенных на нейтральной оси, напряжения равны нулю.



**Рис. 2.10.** Схемы изгиба двухопорной балки (а) и применение метода сечения для определения внутренних сил (б)

Мы рассмотрели случай чистого изгиба, когда брус находился под действием пар сил. Но изгиб может возникнуть и при ином нагружении бруса (рис. 2.10, а), например, под действием внешней силы и реакций опор, перпендикулярных оси балки. Брус, испытывающий деформацию изгиба, обычно называют балкой. Деформация бруса носит более сложный характер и называется поперечным изгибом. Для определения внутренних силовых факторов и в этом случае применим метод сечений. Рассмотрим любое сечение, например 1-1. Рассечем брус, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие оставшейся правой части (рис. 2.10, б).

*Для общего случая равновесия тел, нагруженных плоской системой сил, требуется соблюдение трех условий.* Первое условие - равенство нулю суммы сил, направленных параллельно одной из осей (оси  $y$ ), — позволяет сделать вывод, что в сечении должны быть внутренние поперечные силы, равнодействующая которых  $Q = R_v$ . Второе условие — равенство нулю суммы сил, направленных параллельно другой оси (оси  $x$ ), - соблюдается тождественно, так как обе силы (и внешняя, и равнодействующая внутренних сил) направлены перпендикулярно этой оси. Однако для равновесия оставшейся части этого недостаточно, так как силы  $Q$  и  $R_v$  образуют пару сил с плечом  $x_1$ . Третье условие - равенство нулю суммы моментов всех сил - позволяет сделать вывод, что в сечении должны дополнительно действовать внутренние силы, приводящие к образованию уравнивающей пары сил, т. е. изгибающего момента

$$M = R_v x_1. \quad (2.11)$$

Таким образом, окончательно определяется, что в качестве внутренних силовых факторов в сечении действуют поперечная сила и изгибающий момент. Первый из них является следствием деформации сдвига, а второй — деформации изгиба. Как показала практика, главную опасность для прочности материала при поперечном изгибе представляют нормальные напряжения, поэтому в дальнейшем, рассматривая подобные случаи нагружения, мы будем пренебрегать сопутствующим явлением сдвига, т. е. не учитывать внутренние поперечные силы и соответствующие им касательные напряжения.

## 2.9.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

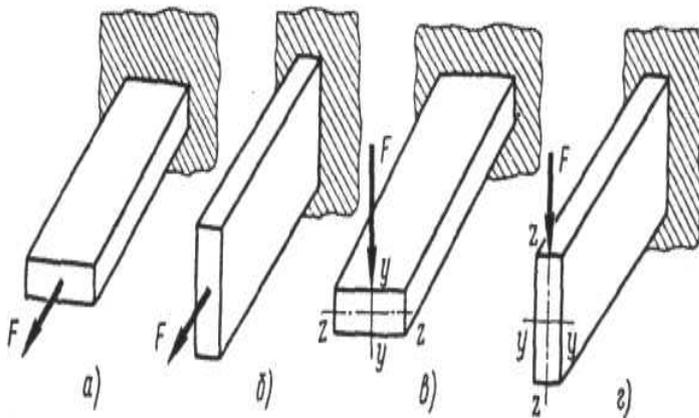
Проанализируем напряженное состояние бруса прямоугольного сечения площадью  $S$ , жестко закрепленного одним концом и нагруженного так, как показано на рис. 2.11, а. В данном случае возникает деформация растяжения, и в любом нормальном поперечном сечении между свободным и закрепленным концами бруса будут одинаковые напряжения, т. е. все сечения равноопасны. Применяя метод сечений, можно точно установить, что в любом сечении силы упругости равны внешней силе  $F$ . Во всех точках сечений напряжения одинаковы (так как внутренние силы при растяжении распределены по сечению равномерно) и равны

$$\sigma_p = N/S. \quad (2.12)$$

Изменив положение бруса в пространстве (рис. 2.11, б), снова проанализируем его напряженное состояние. Оказывается, все выводы, приведенные выше, остались справедливыми.

Если к рассмотренным брусьям (условимся в этом случае называть их балками) приложить силу поиному (рис. 2.11, в и г), то они будут испытывать деформацию изгиба. Опыт подсказывает, что в этом случае не все сечения будут равноопасны, как это имело место при растяжении. Возможные разрушения балок могут произойти, прежде всего, в сечениях, совпадающих с жесткой заделкой и отличающихся от всех остальных тем, что изгибающий момент, создаваемый силой  $F$ , в этих сечениях будет наибольшим. Это связано с тем, что числовая величина

момента зависит не только от силы  $F$ , но и от плеча силы, а именно, для сечений, совпадающих с заделкой, плечо является наибольшим. Числовую величину этого момента можно определить, применив метод сечений.



**Рис. 2.11. Схемы растяжения (а и б) и изгиба (в и г) бруса при его различной ориентации**

Таким образом, первое отличие деформации изгиба от деформации растяжения при рассмотренных случаях нагружения заключается в следующем: при изгибе есть наиболее опасное сечение, а при растяжении все сечения равноопасны.

Проанализируем напряженные состояния балок, изображенных на рис. 2.11, в и г. Опыт подсказывает, что балка, показанная на рис. 2.11, г, лучше сопротивляется деформации, несмотря на то, что размеры поперечных сечений в обоих случаях одинаковы. Положения балок различаются лишь тем, что в первом случае материал в сечении ближе расположен к нейтральной оси ( $z-z$ ), а во втором -

дальше от нее ( $y-y$ ). В предыдущем параграфе было отмечено, что чем дальше от нейтрального слоя расположены в балке волокна, тем больше они деформируются, а значит, большее сопротивление деформации оказывают. Второе отличие деформации изгиба от деформации растяжения таково: сопротивление деформации зависит не только от размеров поперечного сечения балки, но и от ориентации ее по отношению к плоскости действия изгибающего момента. В обоих случаях сечение представляет собой прямоугольник, однако в одном случае он имеет большое основание и малую высоту, а в другом — наоборот.

Следовательно, поскольку основное сопротивление изгибу оказывают (или, как говорят, «работают на изгиб») периферийные слои материала, целесообразно при изгибе применять балки с сечениями, в которых материал расположен дальше от нейтральной оси. Так, при одной и той же площади поперечного сечения в качестве балки применять трубу более целесообразно, чем сплошной материал, так как наружный диаметр трубы окажется больше диаметра сплошного материала. Наиболее выгодными профилями балок являются двутавры и швеллеры (рис. 2.12, а и б), у которых основная часть материала отнесена на значительное расстояние от нейтральной оси. Поскольку формулу для определения максимальных действительных напряжений изгиба вывести достаточно сложно, приведем лишь последовательность рассуждений, сопровождающих этот вывод при использовании метода сечений. Вначале определяется величина относительной деформации (растяжения или сжатия) в произвольной точке интересующего нас сечения изогнутой балки. Затем по закону Гука

определяется напряжение в той же точке. Так как напряжение по существу представляет собой элементарную, нормальную внутреннюю силу, то следующим этапом является определение элементарного внутреннего изгибающего момента этой силы относительно нейтральной оси. Вслед за этим

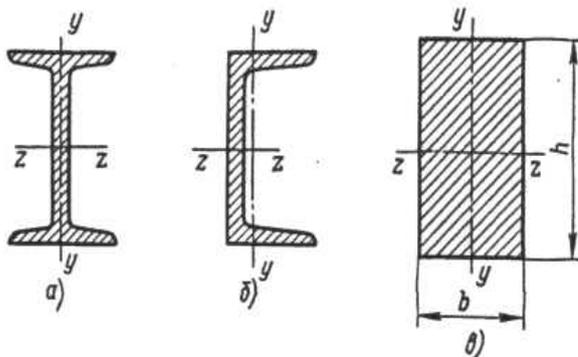


Рис. 2.12. Типовые профили балок

найденные для различных точек элементарные внутренние моменты суммируются по всей площади и эта сумма, т. е. внутренний изгибающий момент, приравнивается к внешнему изгибающему моменту. В результате соответствующих этим рассуждениям математических преобразований формула для определения максимальных напряжений изгиба приобретает вид

$$\sigma_{\text{и max}} = \pm M/W. \quad (2.13)$$

Знаки «±» означают, что в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, но расположенных по разные стороны от нее, возникают различные по характеру деформации нормальные напряжения: в одном случае - напряжения растяжения, в другом -

напряжения сжатия. Величина, обозначаемая буквой  $W$  и называемая осевым моментом сопротивления изгибу, характеризует способность поперечного сечения сопротивляться деформации изгиба относительно нейтральной оси; размерность  $W$  -  $\text{мм}^3$ . Значение момента сопротивления зависит от формы и размеров поперечного сечения и его ориентации по отношению к плоскости изгибающего момента (для указания последнего фактора к букве  $W$  добавляют индекс, соответствующий обозначению нейтральной оси, например  $W_z$  или  $W_y$ ).

Для квадратного сечения (со стороной  $a$ )  $W_z = W_y = a^3/6$ ; для прямоугольного сечения (рис. 2.15, в)  $W_z = bh^2/6$ ;  $W_y = hb^2/6$ ; для круглого сечения  $W_z = W_y \approx 0,1d^3$ . Для сложных сечений типа двутавров и швеллеров значения осевых моментов сопротивления изгибу приводятся в справочниках.

### 2.9.3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

При проектном расчете требуется определить минимальные размеры опасного поперечного сечения, которые обеспечат при заданной нагрузке необходимую прочность. Изгибающий момент в опасном сечении и материал балки (следовательно, и допускаемые напряжения) известны. Как и в случае других деформаций, расчет ведут в предположении, что максимальные действительные напряжения будут равны допускаемым или меньше их, т. е.  $M/W \leq [\sigma_n]$ , откуда  $W \geq M/[\sigma_n]$ .

Затем в зависимости от предполагаемой формы поперечного сечения балки определяют его

необходимые размеры. Если сечение балки круглое, то  $W = 0,1d^3$ ; отсюда определяется искомый диаметр  $d$ . Если же сечение балки представляет собой квадрат со стороной  $a$ , то искомый размер  $a$  находят из равенства  $W = a^3/6$ . Несколько сложнее определить размеры прямоугольного сечения балки. В этом случае необходимо знать ориентацию сечения по отношению к плоскости действующего момента, т. е. положение нейтральной оси. Это позволит из двух зависимостей  $W = bh^2/6$  и  $W = hb^2/6$  выбрать необходимую. Однако определить величины  $b$  и  $h$  можно будет лишь при условии, если известно отношение  $b/h$ .

Если сечение представляет собой стандартный профиль (двутавр, швеллер), то в соответствии с полученной расчетом величиной  $W$  из справочных таблиц подбирают номер соответствующего профиля, причем табличное значение  $W$  должно быть больше его расчетного значения или равно ему.

При проверочном расчете по заданным или предварительно найденным изгибающим моментам в опасном сечении и допускаемым напряжениям определяют максимальные действительные напряжения, т. е. напряжения в наиболее опасных точках опасного сечения, и сравнивают их с допускаемыми:

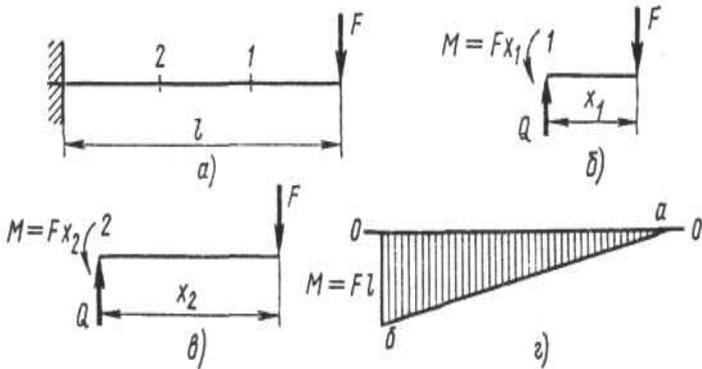
$$\sigma_{и \max} = M/W \leq [\sigma_{и}]. \quad (2.14)$$

#### **2.9.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПАСНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ**

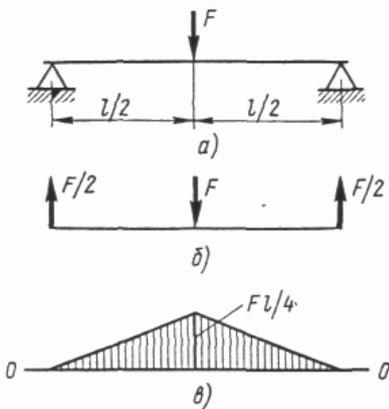
Одним из отличий деформации изгиба от деформации растяжения является наличие опасного сечения, т. е. сечения, в котором действует

максимальный изгибающий момент.

В результате анализа простейшего случая нагружения балки (см. рис. 2.11) положение опасного сечения было найдено лишь на основе ранее приобретенного опыта. Снова вернувшись к этому случаю, приведем более строгие доказательства, изобразив балку упрощенно (рис. 2.13, а). Для определения внутренних силовых факторов воспользуемся методом сечений. Так как этот метод применим лишь к свободному телу, то будем рассматривать равновесие отсеченной правой части (рис. 2.13,б). В сечении будут действовать поперечная сила  $Q = F$  и изгибающий момент  $M = Fx_1$ . В сечении 2 (рис. 2.13, в) будет действовать та же сила  $Q$ , но момент будет другой -  $Fx_2$ . Аналогичные результаты получим и для других сечений. Условившись пренебрегать поперечными силами и вызванными ими касательными напряжениями сдвига, все внимание сосредоточим на изгибающем моменте, который в соответствии с предыдущими рассуждениями изменяется по длине балки по линейному закону прямо пропорционально отрезкам  $x_1$   $x_2$  и т. д. Этот закон можно изобразить графически, построив эпюру изгибающих моментов, т. е. график их изменения по длине балки. Выбрав масштаб для единицы момента, откладываем от осевой линии  $O—O$  (рис. 2.13, г) ординату, соответствующую наибольшему моменту  $Fl$  (условимся момент считать положительным, если он прогибает балку выпуклостью вниз; следовательно, в данном случае момент является отрицательным). Вторая точка для построения эпюры соответствует свободному концу балки. В этом сечении момент равен нулю. Соединив точки а и б, получим соответствующую эпюру.



**Рис. 2.13. Построение эпюры изгибающих моментов для одноопорной (консольной) балки:**  
 а - схема действия внешней силы, б и в — равновесие отсеченных частей, г — эпюра изгибающих моментов



**Рис. 2.14. Построение эпюры изгибающих моментов для двухопорной балки:**  
 а — схема действия внешней силы, б — равновесие балки под действием внешней силы и опорных реакций, в — эпюра изгибающих моментов

Промежуточные между точками а и б ординаты соответствуют моментам в интересующих нас сечениях. Итак, для данного случая опасное сечение — в заделке, а изгибающий момент в нем равен  $Fl$ .

В более сложном случае, когда балка

двухопорная, а действующая сила приложена в середине пролета (рис. 2.14, а), сразу нельзя применить метод сечений, так как по любую сторону от сечения оказывается несвободная часть балки со связями. В подобном случае надо вначале отбросить опоры и заменить их реакциями (рис. 2.14, б), каждая из которых равна  $F/2$ . Применяя многократно метод сечений, вначале рассмотрим равновесие отсеченных частей балки, расположенных правее любого из сечений на участке от правого конца балки до середины пролета. Результат очевиден: если на конце балки момент равен нулю, то к середине пролета он возрастает до значения  $(F/2) (l/2)$ , т. е.  $Fl/4$ . Затем точно так же рассмотрим равновесие отсеченных частей балки, расположенных левее любого из сечений на участке от левого конца балки до середины пролета. Результаты будут аналогичными. Выбрав масштаб единицы момента и установив, что изгибающий момент положителен, отложим вверх от оси  $O-O$  ординату  $Fl/4$  и построим эпюру (рис. 2.14, в). По эпюре видно, что в данном случае опасное сечение находится в середине пролета, а изгибающий момент в нем равен  $Fl/4$ . Именно этой величиной необходимо пользоваться в расчетном уравнении при проектном или проверочном расчете балки на изгиб.

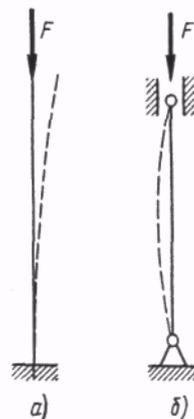
### **2.9.5. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ**

Деформация сжатия, как известно, возникает при действии на брус сил, направленных по его продольной оси навстречу друг другу; при этом поперечные размеры бруса должны мало отличаться от его продольных размеров.

Если поперечные размеры бруса будут во много раз меньше его длины, такой брус называют стержнем, то может возникнуть иное напряженное состояние. Вначале, когда силы невелики, стержень действительно подвергается сжатию, и его ось будет оставаться прямолинейной.

Однако при увеличении сила может достигнуть такого значения, которое выведет стержень из устойчивого положения, и его ось станет криволинейной (рис. 2.15). Естественно, что и работоспособность детали при этом будет нарушена.

Деформация стержня, являющаяся следствием потери его устойчивости под действием сжимающих сил, называется продольным изгибом. Сила, которая соответствует моменту перехода стержня из устойчивого положения в



**Рис.2.15.**  
**Продольный изгиб жестко закрепленного (а) и с шарнирными опорами (б) стержней**

неустойчивое, называется критической, а напряжение сжатия, соответствующее этой силе, - критическим напряжением. Практика показывает, что это напряжение меньше обычного предельно опасного напряжения, ориентируясь на которое выбирают допускаемые напряжения при сжатии. Поэтому, чтобы расчет на прочность при сжатии одновременно гарантировал устойчивость, допускаемые напряжения при таком нагружении стержней снижаются в зависимости от соотношения длины и поперечных размеров стержня, а также способа закрепления его

концов (стержень, изображенный на рис. 2.15, а, менее устойчив, чем стержень, показанный на рис. 2.15, б).

## 2.10. СЛОЖНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотренные ранее растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, поперечный и продольный изгибы относятся к простым деформациям. Однако некоторые детали могут подвергаться одновременно нескольким деформациям. Наиболее часто встречаются такие комбинации простых деформаций, как растяжение (сжатие) с изгибом и изгиб с кручением.

**Растяжение с изгибом.** Если брус нагружен так, как показано на рис. 2.16, а, то он испытывает обычную деформацию растяжения; если же сила действует на него так, как показано на рис. 2.16, б, то брус (теперь это балка) испытывает простую деформацию поперечного изгиба. Определить вид деформации при указанном нагружении на рис. 2.16, в, нетрудно, если предварительно разложить заданную силу  $F$  на две составляющие –  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 2.16, г). В результате этого действия становится ясно, что нагружение аналогично сумме двух первых нагружений, а значит, и напряженное состояние бруса будет соответствовать одновременному появлению в нем напряжений растяжения и изгиба.

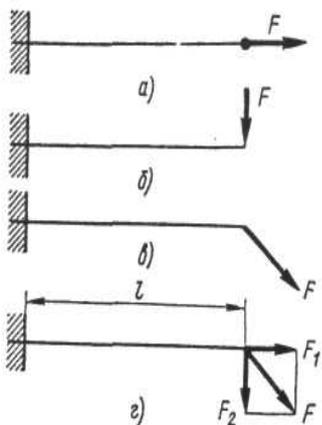
Проанализировав действие силы  $F_1$ , можно сделать следующие выводы: при деформации растяжения все сечения по длине бруса и все точки в сечениях равноопасны; равнодействующая внутренних сил  $N = F_1$ ; напряжение  $\sigma_p = F_1/S$ , где  $S$  - площадь поперечного сечения бруса.

Проанализировав действие силы  $F_2$ , можно

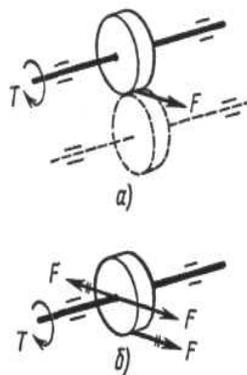
сделать следующие выводы: здесь наиболее опасным является сечение в заделке, где наибольший изгибающий момент  $M = F_2l$ ; в этом сечении наиболее опасны точки, дальше всего расположенные от нейтральной оси; напряжение в этих точках

$$\sigma_{и \max} = \pm F_2l/W , \quad (2.15)$$

где  $F_2l$  - изгибающий момент в заделке;  $W$  - осевой момент сопротивления сечения изгибу.



**Рис. 2.16.** Различные виды деформаций бруса (балки) в зависимости от действующих сил



**Рис. 2.17.** Начальная (а) и результирующая (б) схемы к расчету сил, действующих на вал

Нормальные напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_{и \max}$ , направленные по одной прямой, можно складывать алгебраически. Очевидно, что в итоге наиболее опасным будет сечение в заделке, а в нем наиболее опасны те точки, в которых напряжения суммируются, т. е. имеют одинаковый знак:

$$\sigma_{сум} = F_1/S + F_2l/W . \quad (2.16)$$

**Изгиб с кручением.** Этот вид сложной деформации встречается очень часто. Все валы, испытывая деформацию кручения, вместе с тем подвергаются деформации изгиба под действием сил, передаваемых зубчатыми колесами, ремнями и другими подобными элементами различных передач. На схеме, показанной на рис. 2.17, а, изображен вал с ведущим зубчатым колесом, находящимся в зацеплении с другим (ведомым) колесом. К валу приложен внешний вращающий момент  $T$ , под действием которого в зоне зацепления на ведущем колесе возникает сила, направленная по касательной к начальной окружности, - окружная сила  $F$ .

Чтобы определить, какой вид деформации вала вызывает эта сила, приложим в центре колеса (т. е. к валу) две равные и противоположно направленные силы  $F$  (рис. 2.17, б). Такое добавление уравновешенной системы сил (равнодействующая добавленной системы сил равна нулю) не изменит механического состояния тела и поэтому возможно. В результате получим эквивалентную систему, состоящую из трех сил, две из которых образуют пару, создающую крутящий момент, а третья изгибает вал в горизонтальной плоскости.

В подобных случаях совместного действия изгиба и кручения нельзя алгебраически суммировать (как это мы сделали при совместном действии изгиба и растяжения) напряжения в опасных точках, так как векторы касательных напряжений кручения и нормальных напряжений изгиба направлены не по одной прямой, а под прямым углом. В таких случаях определение суммарного напряжения производят на основе специальных теорий прочности.

**Задача 5.** На строгальном станке обрабатывают деталь (Рис. 2.18). Сила  $F$ , возникающая в результате сопротивления

металла резанию и воспринимаемая резцом, равна 10 кН; размеры сечения резца  $b \times h = 30 \times 40$  мм. Определить наибольший вылет резца, при котором напряжение изгиба не превысит допускаемого  $[\sigma_{изг}] = 102$  МПа.

**Решение.** 1. Резец можно рассматривать как балку, закрепленную одним концом и нагруженную изгибающей силой на другом. Максимальные напряжения изгиба, возникающие в заделке, по условию прочности не должны превышать допускаемых. Зная осевой момент сопротивления изгибу (его легко определить по размерам сечения  $b \times h$ ) и допускаемые напряжения, можно по формуле проектного расчета определить соответствующий им изгибающий момент, а зная момент и силу, легко определить плечо силы, т. е. вылет резца.

2. Определение изгибающего момента, действующего в опасном сечении. Из формулы проектного расчета на изгиб  $M/W = [\sigma_{изг}]$  определяем  $M = [\sigma_{изг}]W$ , где для прямоугольного сечения относительно нейтральной оси  $y-y$   $W = bh^2/6$ . После подстановки числовых данных получим  $M = 10^8 \frac{30 \cdot 40^2 \cdot 10^{-9}}{6} = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3. Определение наибольшего вылета резца. Так как  $M = Fl$ , то  $l = M/F = 800/10^4 = 0,08 \text{ м} = 80 \text{ мм}$ . Следовательно, для обеспечения прочности резца требуется вылет  $l < 80$  мм.

**Задача 6.** Двухавровая балка АВ (рис. 2.19) является опорой подъемного механизма. Поднимаемый груз воздействует на крюк механизма с силой  $F = 40$  кН; длина пролета  $l = 4$  м. Определить размеры профиля балки, если  $[\sigma_{изг}] = 102$  МПа (расчет произвести для случая, когда механизм с грузом находится в середине пролета).

**Решение.** 1. Так как известна схема нагружения балки, можно определить опасное сечение и изгибающий момент в нем. Поскольку также известно допускаемое напряжение, задача сводится к определению  $W$  по формуле проектного расчета. Зная  $W$ , можно по справочнику определить размер стандартного профиля балки (двутавра).

2. Определение опасного сечения и изгибающего момента в нем. Представив конструкцию в виде упрощенной расчетной схемы (см. рис. 2.17) и применив метод сечений, легко определить, что опасное сечение находится в середине пролета, а момент в нем  $M = Fl/4 = 40 \cdot 10^3 \cdot 4/4 = 4 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3. Определение необходимого профиля двутавра. Из

формулы проектного расчета  $M/W \leq [\sigma_n]$  определим, что  $W \geq M/[\sigma_n]$  или  $W \geq 4 \cdot 10^5 \text{ мм}^3$ . Рациональное расположение профиля такое, как на рис. 2.12, а; при этом ось  $z-z$  является нейтральной. Вычисленной минимальной величине  $W = 4 \cdot 10^5 \text{ мм}^3$  по справочнику соответствует двутавр № 27а, у которого  $W_{\text{табл}} = 4,06 \cdot 10^5 \text{ мм}^3$ .

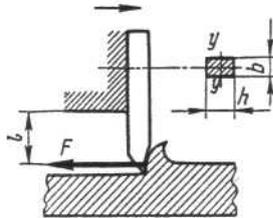


Рис. 2.18. Резец

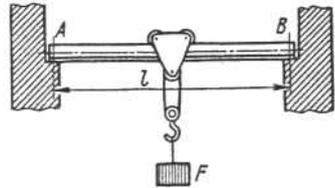


Рис. 2.19. Двутавровая балка

### Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки при чистом и поперечном изгибах?
2. В чем различие между распределениями нормальных напряжений в сечении при изгибе и растяжении?
3. Какие зоны деформации существуют в продольном сечении изогнутого бруса?
4. В каких точках поперечного сечения напряжения при изгибе будут наибольшими?
5. Как определяются действительные максимальные напряжения  $\sigma_{n \max}$  при изгибе?
6. Что такое «эпюра изгибающих моментов» и с какой целью ее строят?
7. В чем сущность деформации продольного изгиба?
8. Какие существуют виды сложных деформаций? Назовите для примера детали и инструменты, испытывающие при работе сложные деформации.

## ЧАСТЬ 3

### ДЕТАЛИ МАШИН

#### 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Деталь** – изделие, изготовленное из однородного по наименованию и марке материала без применения сборочных операций (болт, гайка, кронштейн, вал и т.д.).

**Сборочная единица** – изделие, составные части которого подлежат соединению между собой на предприятии-изготовителе сборочными операциями (свинчиванием, сваркой, клейкой и т.д.).



Рис. 3.1. Схема привода

**Механизм** – совокупность сборочных единиц, деталей и их элементов, которые находятся в определенной взаимосвязи и обеспечивают необходимое функционирование (подвижность с одной степенью или несколькими степенями свободы).

**Привод** – устройство, которое состоит из двигателя, передаточного механизма и системы управления (рис. 3.1).

**Машина** – система, осуществляющая механическое движение, необходимое для выполнения рабочего процесса. В то же время машину определяют как совокупность узлов и механизмов. Основными частями машины являются двигатель, передаточный и исполнительный механизмы, а также система

управления (рис. 3.2). В качестве двигателя в механических системах используются электродвигатели. Рабочая среда механизмов, через которые передается движение – это твердые тела. И соответственно передачи называются механическими.

В зависимости от выполняемых функций машины делятся на транспортные (автомобиль, самолет), энергетические (электродвигатель внутреннего сгорания), технологические (станок, пресс).



**Рис. 3.2 Составные части машины**

### **3.2. ДЕТАЛИ МАШИН И ТРЕБОВАНИЯ К НИМ**

Любая машина состоит из отдельных деталей - изделий, изготовленных из однородного материала без применения сборочных операций. Несколько деталей, соединенных между собой сборочными операциями, образуют сборочную единицу. Детали и сборочные единицы, которые входят в состав самых различных машин, но исполняют в них одну и ту же роль, называют деталями и сборочными единицами общего назначения.

К современным машинам предъявляется много общих требований, главными из которых являются: высокие производительность и коэффициент полезного

действия; простота изготовления; удобство и простота обслуживания; надежность; долговечность; безопасность работы; небольшие масса и габаритные размеры. В соответствии с этим определяются и основные требования к деталям машин:

*прочность* — деталь не должна разрушаться или получать остаточные деформации под влиянием действующих на нее сил;

*жесткость* — упругие деформации элементов детали должны быть весьма малы и не превышать допускаемых, заранее заданных значений;

*износостойкость* — в течение заданного срока работы износ не должен вызывать нарушения характера сопряжения детали и приводить к недопустимому уменьшению прочности;

*надежность* — деталь должна выполнять свои функции, сохраняя эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени;

*малые масса и габаритные размеры* — деталь должна быть прочной, жесткой и износостойкой при минимальных массе и габаритных размерах;

*технологичность* — форма и размеры детали должны быть такими, чтобы при ее изготовлении затраты труда и времени были минимальными;

*соответствие государственным стандартам* - отдельные конструктивные элементы деталей (например, резьба) или форма и размеры деталей в целом (болты и др.) должны соответствовать единым нормативам.

Перечисленные требования учитываются конструктором при создании проекта машины. Этот процесс, называемый проектированием, состоит из нескольких этапов: *эскизного, технического, рабочего.*

Применяемые в машиностроении соединения деталей можно разделить на две основные группы: разъемные и неразъемные. К разъемным соединениям относятся резьбовые, шпоночные (шлицевые), клиновые и штифтовые, а к неразъемным — заклепочные и сварные.

### **3.3. ПЕРЕДАЧИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

#### **3.3.1. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ**

Из курса физики известно, что мощность  $P$  при равномерном вращении прямо пропорциональна произведению вращающего момента  $T$  на угловую скорость  $\omega$  или частоту вращения  $n$ . Следовательно, могут существовать несколько двигателей одного типа (например, электрических), имеющих одну и ту же мощность, но отличающихся вращающим моментом и угловой скоростью (или частотой вращения). В большинстве случаев целесообразнее использовать быстроходные двигатели (с большой угловой скоростью): у них меньшие габаритные размеры и более высокий КПД, однако вращающий момент на валу небольшой.

Для выполнения полезной работы угловая скорость вала машины-орудия, как правило, должна быть значительно ниже угловой скорости вала двигателя, но вращающие моменты требуются большие. Поэтому очевидно, что в большинстве случаев непосредственная связь валов двигателя и рабочей машины невозможна, и между ними необходимо расположить механизм для преобразования вращающих моментов и угловых скоростей, который носит название

механической передачи.

Механические передачи классифицируют:

- по взаимному расположению ведущего и ведомого валов в пространстве - передачи между валами, геометрические оси которых параллельны, пересекаются или скрещиваются, валы соосные;
- принципу передачи движения - передачи трением и передачи зацеплением;
- способу контакта между ведущим и ведомым звеньями - передачи с непосредственным касанием и передачи с гибкой связью.

### 3.3.2. ПЕРЕДАТОЧНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Важнейшей характеристикой любой передачи является передаточное отношение  $u$ , которое показывает, во сколько раз угловая скорость  $\omega$  (или частота вращения  $n$ ) ведущего вала передачи больше или меньше угловой скорости (или частоты вращения) ее ведомого вала. Если обозначить параметры ведущего звена передачи индексом 1, а ведомого - индексом 2, то передаточное отношение

$$u_{1-2} = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2. \quad (3.1)$$

Передаточные отношения в передачах различных типов (ременной, зубчатой, червячной) могут выражаться через отношения диаметров дисков (катков), шкивов, чисел зубьев зубчатых колес, т. е. соответствующих параметров ведущего и ведомого звеньев (конструктивных элементов) передач.

### 3.3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ В ПЕРЕДАЧАХ

Как уже было отмечено, между двигателем и машиной-орудием обычно необходима механическая передача. Если для упрощения не учитывать потери энергии в передаче (ее в таком случае называют идеальной), то подводимую и отводимую мощности можно считать равными. Присвоив ведущему валу передачи, связанному с двигателем, индекс 1, а ведомому, связанному с машиной-орудием, индекс 2, можно это равенство записать так:  $P_1 = P_2$ ; отсюда  $T_1\omega_1 = T_2\omega_2$  (или  $T_1n_1 = T_2n_2$ ), следовательно,  $T_2/T_1 = \omega_1/\omega_2$  (или  $T_2/T_1 = n_1/n_2$ ). Поскольку правые части двух последних выражений являются передаточным отношением, то можно сделать вывод, что

$$u_{1-2} = T_2/T_1 . \quad (3.2)$$

Обычно бывает нужно определить момент  $T_2$  на ведомом валу передачи при известном моменте  $T_1$  на ведущем валу и передаточном отношении  $u_{1-2}$ . Очевидно, что без учета потерь энергии  $T_2 = T_1 u_{1-2}$ . С учетом этих потерь  $T_2 = T_1 u_{1-2} \eta$ , где  $\eta$  - КПД передачи.

При  $u_{1-2} > 1$  передача называется понижательной (редуктором). В этом случае  $\omega_2 < \omega_1$ ;  $n_2 < n_1$ ;  $T_2 > T_1$ . При  $u_{1-2} < 1$  передача называется повышающей (мультипликатором). В этом случае  $\omega_2 > \omega_1$ ;  $n_2 > n_1$ ;  $T_2 < T_1$ .

**Задача 1.** Определить передаточное отношение передачи, если частота вращения ведущего вала  $n_1 = 1440$  об/мин,  $n_2 = 360$  об/мин.

**Решение.** Передаточное отношение передачи определяется по формуле (3.1):

$$u_{1-2} = n_1 / n_2 = 1440 / 360 = 4.$$

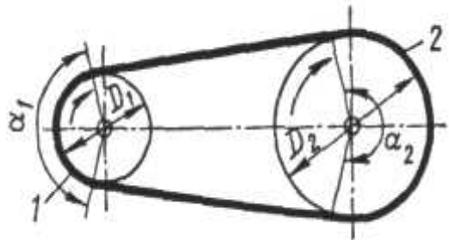
## Контрольные вопросы

1. По каким признакам классифицируют механические передачи?
2. Передаточное отношение  $u_{1-2} = 3$ . Какой вал - ведущий или ведомый - вращается с большей угловой скоростью?
3. Передаточное отношение  $u_{1-2} = 1/3$ . Какой вал - ведущий или ведомый - вращается с большей угловой скоростью?
4. Частота вращения ведущего вала передачи  $n_1 = 1000$  об/мин, передаточное отношение  $u_{1-2} = 4$ . Определить частоту вращения  $n_2$  ведомого вала передачи.
5. Частота вращения ведомого вала передачи  $n_2 = 500$  об/мин, передаточное отношение  $u_{1-2} = 2$ . Определить частоту вращения  $n_1$  ведущего вала передачи.

## 3.4. ПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ ВАЛАМИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОСЯМИ

### 3.4.1. РЕМЕННАЯ ПЕРЕДАЧА

Передача плоским ремнем (плоскоременная) состоит из двух гладких шкивов и охватывающего их ремня (рис. 3.3). Шкивы жестко закреплены на ведущем и ведомом валах. Натяжение ремня обеспечивает на участках контакта со шкивами возникновение сил трения. При вращении ведущего шкива 1 за



счет сил трения дополнительно натягивается одна из ветвей ремня,

Рис. 3.3. Схема ременной передачи

называемая ведущей; опять же ввиду наличия сил трения она вращает ведомый шкив 2.

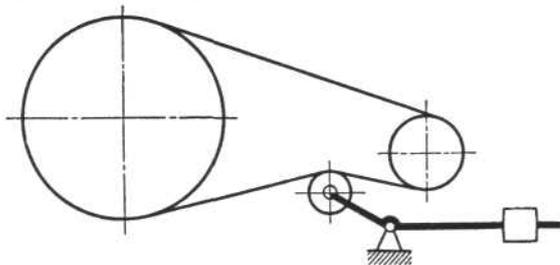
Для определения передаточного отношения ременной передачи условно представим, что ремень не вытягивается и не проскальзывает на шкивах. Такое допущение значительно упростит наши рассуждения и не внесет существенной погрешности в расчеты. Как известно, линейная скорость (м/с) любой точки, лежащей на поверхности вращающегося тела (в нашем случае ведущего шкива),  $V_1 = \pi D_1 n_1 / 60$  или  $V_1 = \omega_1 D_1 / 2$ , где  $D_1$  - диаметр шкива, м;  $n_1$  — частота вращения, об/мин;  $\omega_1$  — угловая скорость, рад/с. Следовательно, и любая точка ремня, совпадающая с рассматриваемой точкой ведущего шкива, движется с той же линейной скоростью, а значит, и те точки ремня, которые контактируют с ведомым шкивом, и совпадающие с ними точки самого ведомого шкива имеют ту же линейную скорость.

Линейная скорость любой точки ведомого шкива  $V_2 = \pi D_2 n_2 / 60$  или  $V_2 = \omega_2 D_2 / 2$ . Сопоставив формулы линейных скоростей точек ведущего и ведомого шкивов, получим  $D_1 n_1 = D_2 n_2$  или  $D_1 \omega_1 = D_2 \omega_2$ , а значит,  $n_1 / n_2 = D_2 / D_1$  или  $\omega_1 / \omega_2 = D_2 / D_1$ . Так как левые части выражений являются передаточным отношением, то можно сделать вывод, что  $u_{1-2} = D_2 / D_1$ .

Следовательно, ***передаточное отношение ременной передачи выражается через отношение диаметров ведомого и ведущего шкивов.***

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (см. рис. 3.3), соответствующие дугам, по которым касаются друг друга ремень и шкив, называют углами обхвата. Поскольку ременная передача передает вращение за счет сил трения между ремнем и шкивом, ее работоспособность существенно зависит от углов обхвата, определяющим из которых

является угол обхвата на меньшем шкиве. Его величина в первую очередь зависит от расстояния между центрами шкивов (межосевого расстояния) и передаточного отношения. Практика показала, что передача работает нормально, если угол обхвата не меньше  $120^\circ$ . Это требование выполняется, если соблюдаются следующие условия:  $\frac{1}{3} \leq u_{1-2} \leq 3$ ; межосевое расстояние не меньше удвоенной суммы диаметров шкивов. Можно обеспечить работоспособность плоскоременной передачи и при больших передаточных отношениях, применив натяжной ролик (рис. 3.4), который увеличивает угол обхвата на меньшем шкиве.



**Рис.3.4. Схема ременной передачи с натяжным роликом**

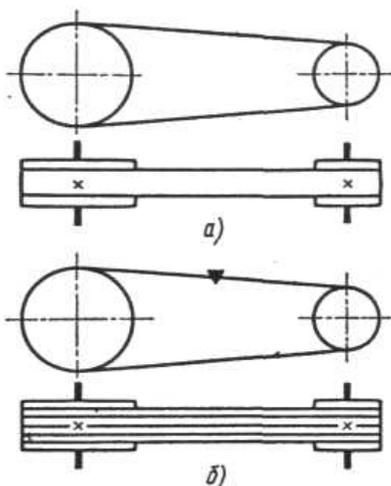
Более совершенным видом передачи движения гибкой связью является передача клиновым и поликлиновым ремнем (клиноремennая и поликлиноремennая). На ободе шкива сделаны канавки, в которые входит ремень, имеющий в поперечном сечении форму трапеции. В этих передачах полезная нагрузка передается за счет сил трения между боковыми поверхностями ремня и канавок шкива.

На кинематических схемах ременные передачи имеют соответствующее условное обозначение (рис. 3.5).

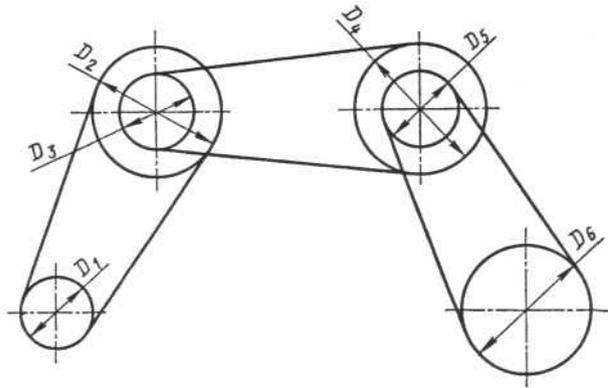
В последнее время стали широко применять передачи зубчатыми ремнями (зубчато-

ременные). На рабочей поверхности ремня имеются выступы - зубья, которые входят в зацепление с аналогичными зубьями на шкивах. Такие передачи работают без скольжения, чем обеспечивается постоянство передаточного отношения.

В некоторых случаях применяют более сложную ременную передачу - многоступенчатую (рис. 3.6), состоящую из нескольких ступеней (пар шкивов). Передаточные отношения отдельных ступеней ( $u_{1-2}$ ,  $u_{3-4}$ ,  $u_{5-6}$ ) выражаются через отношения диаметров ведомых ( $D_2$ ,  $D_4$ ,  $D_6$ ) и ведущих ( $D_1$ ,  $D_3$ ,  $D_5$ ) шкивов. Применительно ко всей передаче  $D_1$  — это диаметр ведущего шкива, а  $D_6$  — ведомого, однако их отношение не будет искомым передаточным отношением всей передачи, так как эти шкивы не связаны единым ремнем. Определим требуемое соотношение, приняв во внимание, что ведущий вал (не шкив) каждой последующей ступени одновременно является ведомым валом предыдущей.



**Рис.3.5. Условные обозначения передач плоским (а) и клиновым (б) ремнями**



**Рис. 3.6.** Схема многоступенчатой ременной передачи

Передаточное отношение первой пары шкивов  $u_{1-2} = n_1/n_2 = D_2/D_1$ , откуда  $n_2 = n_1 D_1/D_2$ .

Передаточное отношение второй пары шкивов  $u_{3-4} = n_3/n_4 = D_4/D_3$ . Так как шкивы диаметрами  $D_3$  и  $D_2$  закреплены на одном валу,  $n_3 = n_2$ , следовательно, частота вращения  $n_4 = n_2 D_3/D_4$ .

Передаточное отношение третьей пары шкивов  $u_{5-6} = n_5/n_6 = D_6/D_5$ , а  $n_5 = n_4$ , следовательно,  $n_6 = n_4 D_5/D_6$ .

Передаточное отношение всей передачи

$$u_{1-6} = n_1/n_6 = \frac{n_1}{n_4 D_5 / D_6} = \frac{n_1}{n_2 D_3 / D_4 D_5 D_6} =$$

$$\frac{n_1}{n_1 D_1 / D_2 D_3 D_4 D_5 D_6} = \frac{D_2}{D_1} \frac{D_4}{D_3} \frac{D_6}{D_5} = u_{1-2} u_{3-4} u_{5-6}. \quad (3.3)$$

Таким образом, **передаточное отношение ременной многоступенчатой передачи равно произведению передаточных отношений отдельных ее ступеней.**

### 3.4.2 ЗУБЧАТАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАЧА С ЭВОЛЬВЕНТНЫМ ПРОФИЛЕМ ЗУБЬЕВ

Цилиндрической зубчатой передачей называется передача с параллельными осями (рис. 3.7).

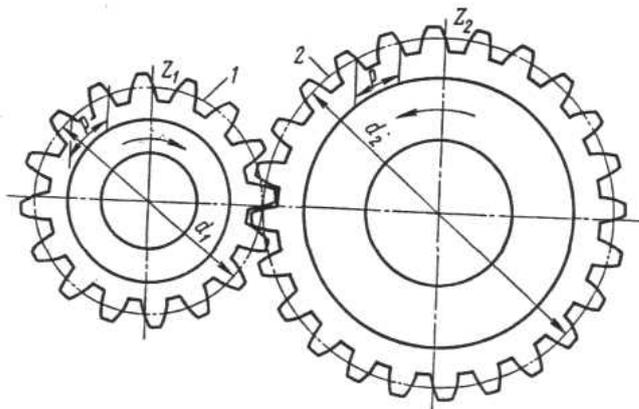


Рис. 3.7. Зубчатая цилиндрическая передача с наружным зацеплением

При вращении ведущего зубчатого колеса его зубья взаимодействуют с находящимися с ними в контакте (зацеплении) зубьями ведомого колеса, в результате чего оно также начинает вращаться. Наиболее распространены передачи с эвольвентным зацеплением, при котором профили зубьев выполнены по эвольвенте (рис. 3.8). Цилиндрическая зубчатая передача работает плавно, с небольшими потерями энергии на трение.

Зубчатые колеса бывают с прямыми, косыми и шевронными (угловыми) зубьями (рис. 3.9). Косозубые и шевронные колеса обеспечивают плавный ход передачи, так как в зацеплении одновременно находится большее число пар зубьев по сравнению с прямозубой

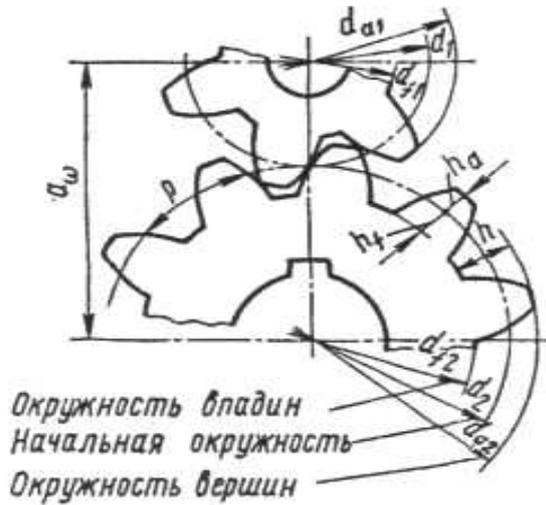
передачей. В отличие от ременной и фрикционной передач в зубчатой передаче проскальзывание невозможно, поэтому передаточное отношение и частота вращения ведомого вала всегда постоянны.

Если при вращении зубчатых колес представить себе в передаче две касающиеся окружности 1 и 2 диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  (см. рис. 3.8, 3.10), которые катятся одна по другой без скольжения, это позволит распространить на зубчатую передачу основные кинематические закономерности фрикционной передачи. Таким образом, для зубчатой передачи передаточное отношение

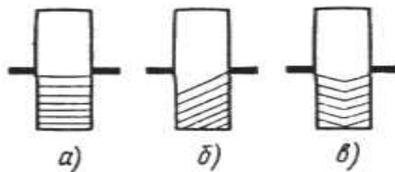
$$u_{1-2} = d_2/d_1. \quad (3.4)$$

Однако воспользоваться приведенным соотношением для практического определения передаточного отношения нельзя, так как диаметры воображаемых окружностей (их называют начальными окружностями) трудно измерить. Поэтому передаточное отношение необходимо выразить через другие, более удобные для измерений или определений величины.

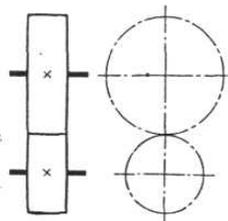
Зацепление зубчатых колес в передаче требует соблюдения основного условия: зуб одного колеса должен точно входить в соответствующую ему при зацеплении впадину другого колеса. Ширину зуба и впадины, а также другие элементы зацепления рассчитывают по так называемым делительным окружностям, на которых основные элементы зубчатого зацепления равны аналогичным теоретическим элементам зуборезного инструмента. Вследствие этого делительные окружности используют при расчетах для настройки зуборезного станка.



**Рис.3.8. Элементы зубчатого зацепления**



**Рис.3.9. Условные обозначения зубчатых колес с прямыми (а), косыми (б) и шевронными (в) зубьями**



**Рис.3.10. Условное обозначение зубчатой цилиндрической передачи**

При изготовлении стандартных зубчатых колес делительная окружность совпадает с начальной. Таким образом, можно сказать, что зубчатое зацепление возможно лишь при равенстве окружных шагов  $p$ , измеренных по дугам делительных окружностей (рис. 3.8). Окружной шаг  $p$  — это расстояние между соседними эквивалентными профилями по дуге делительной окружности (см. рис. 3.8). На одном колесе  $p = \pi d_1/z_1$ , на другом  $p = \pi d_2/z_2$ . Следовательно,  $\pi d_1/z_1 = \pi d_2/z_2$ , откуда  $d_2/d_1 = z_2/z_1$ . Так как  $d_2/d_1 = u_{1-2}$ , то окончательно можно сделать вывод, что

$$u_{1-2} = z_2/z_1. \quad (3.5)$$

Следовательно, *передаточное отношение зубчатой передачи выражается через отношение чисел зубьев ведомого и ведущего колес.*

Зубчатые цилиндрические передачи могут быть с внутренним и наружным зацеплением. При наиболее распространенном способе изготовления зубчатых колес методом обкатки зуборезным инструментом число зубьев не может быть меньше 17; в противном случае инструмент будет подрезать основание зуба и ослаблять его. Наибольшее число зубьев теоретически ничем не ограничено, однако и здесь есть разумный предел. С учетом этих ограничений установлены номинальные величины передаточного отношения:

$$1/5 (1/7) \leq u_{1-2} \leq 5(7). \quad (3.6)$$

Если иметь в виду наиболее распространенные понижающие передачи (т. е. передачи с  $u_{1-2} > 1$ ), то намного увеличить передаточное отношение можно только путем создания многоступенчатых

передач. Например, для трехступенчатой зубчатой передачи (рис.3.11) общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней, т. е.  $u_{1-6} = u_{1-2} u_{3-4} u_{5-6}$ , где  $u_{1-2} = z_2/z_1$ ;  $u_{3-4} = z_4/z_3$ ;  $u_{5-6} = z_6/z_5$ .

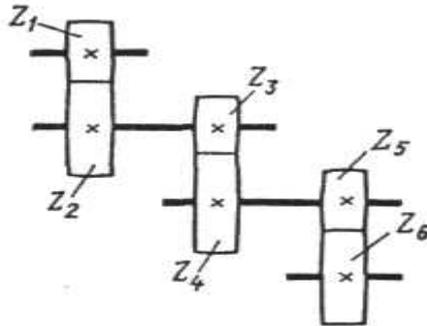


Рис. 3.11. Схема трехступенчатой зубчатой передачи

### 3.4.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Известно, что шаг зубчатой передачи  $p = \pi d/z$ . Отсюда можно определить диаметр делительной окружности (см. рис. 3.8)  $d = pz/\pi$ . Для первого колеса  $d_1 = pz_1/\pi$ , для второго  $d_2 = pz_2/\pi$ . Поскольку величина  $p/\pi$  имеется в обоих выражениях, более удобно взамен ее ввести величину  $m$  (мм), называемую модулем зубчатого колеса:

$$m = p/\pi. \quad (3.7)$$

Значения модуля, являющегося основной геометрической характеристикой зубчатого колеса,

стандартизованы, что облегчает изготовление и подбор зубчатых колес.

Расстояние от делительной окружности до вершины зуба называется высотой головки зуба  $h_a$  (см. рис. 3.8), а от делительной окружности до основания зуба — высотой ножки зуба  $h_f$ . При изготовлении колес стандартным зуборезным инструментом высота головки зуба получается равной  $m$ , а высота его ножки -  $1,25m$ . Таким образом, полная высота зуба  $h = 2,25m$ .

Для цилиндрического зубчатого колеса можно легко определить основные размеры:

диаметр делительной окружности  $d = mz$ ;

диаметр окружности вершин  $d_a = d + 2h_a = m(z + 2)$ ;

диаметр окружности впадин  $d_f = d - 2h_f = m(z - 2,5)$ .

Расстояние между центрами колес (межосевое расстояние)

$$a_o = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}. \quad (3.8)$$

Модуль готового колеса легко определить, измерив диаметр окружности вершин и разделив его на число зубьев, увеличенное на два (с последующим округлением до ближайшей стандартной величины), т. е.

$$m = d_a / (z + 2). \quad (3.9)$$

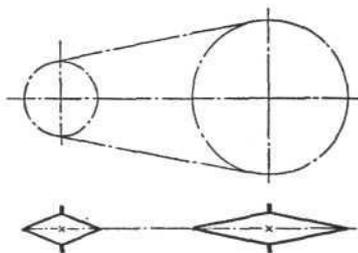
### 3.4.4. ЦЕПНАЯ ПЕРЕДАЧА

Простейшая цепная передача состоит из расположенных на параллельных валах двух звездочек и охватывающей их роликовой, втулочной или зубчатой цепи (рис. 3.12). Как и ременная, это передача с гибкой

связью. В передаче гибким звеном является цепь, входящая в зацепление с зубьями звездочек. Цепная передача имеет некоторые преимущества по сравнению с ременной: отсутствие проскальзывания, а следовательно, постоянство передаточного отношения и возможность передавать большие моменты. К ее недостаткам следует отнести относительно быстрый износ цепей (шарниров), шум и дополнительные динамические нагрузки на валы. Цепные передачи широко применяют в сельскохозяйственных машинах, а также в приводах химических машин.

*Передаточное отношение цепной передачи выражается через отношение зубьев ведомой и ведущей звездочек, т. е.*

$$u_{1-2} = z_2/z_1. \quad (3.10)$$



**Рис. 3.12. Условное обозначение цепной передачи**

**Задача 2.** Определить межосевое расстояние зубчатой передачи, если диаметры делительных окружностей колес  $d_1=100$  мм,  $d_2=30$  мм.

**Решение.** Межосевое расстояние определяют по формуле:

$$a_w = (d_1 + d_2) : 2; \quad a_w = (100 + 30) : 2 = 65 \text{ мм.}$$

Расстояние между центрами колес 65 мм.

## Контрольные вопросы

1. Начертить кинематическую схему трехступенчатой передачи по следующим данным: 1-я ступень - цилиндрическая зубчатая передача ( $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 50$ ,  $m = 3$  мм); 2-я ступень — цилиндрическая фрикционная передача ( $D_1 = 60$  мм,  $u_{1,2} = 2$ ); 3-я ступень - плоскоремennая передача ( $D_2 = 80$  мм,  $u_{1,2} = 1,5$ ). Определить общее передаточное отношение трехступенчатой передачи.

2. Что называется передаточным отношением?

3. Через какие основные параметры ведущего и ведомого звеньев выражается передаточное отношение в различных передачах? Напишите соответствующие формулы.

4. Перечислите основные зависимости между модулем, числом зубьев и диаметрами зубчатого колеса.

## 3.5. ПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ ВАЛАМИ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ И СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОСЯМИ

### 3.5.1. ЗУБЧАТАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАЧА

Механизм с коническими зубчатыми колесами (рис. 3.13, а) применяется при передаче вращения между валами с пересекающимися геометрическими осями, чаще всего перпендикулярными. *Передаточное отношение зубчатой конической передачи выражается, как в цилиндрической передаче, через отношение чисел зубьев ведомого и ведущего колес.*

$$u_{1-2} = z_2 / z_1 . \quad (3.11)$$

Назначение зубчатой конической передачи - изменить межосевой угол расположения валов, что может сочетаться с изменением угловых скоростей и моментов.

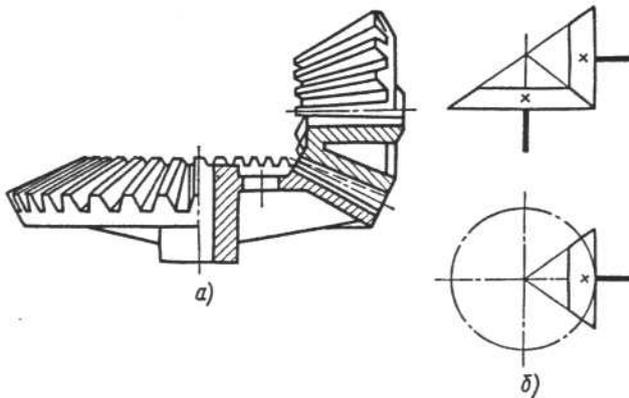


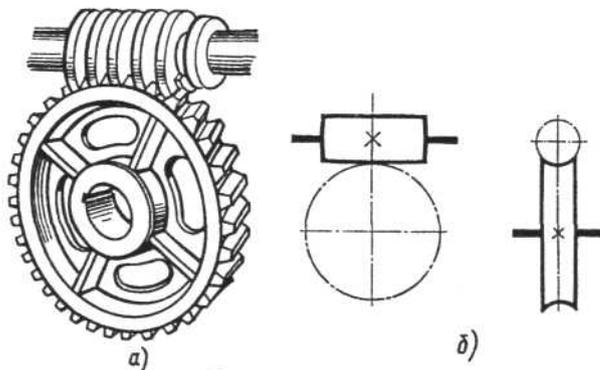
Рис. 3.13. Зубчатая коническая передача (а) и её условное обозначение (б)

### 3.5.2. ЧЕРВЯЧНАЯ ПЕРЕДАЧА

Червячная передача, являющаяся зубчато-винтовой, состоит из червячного (косозубого) колеса с зубьями специальной формы и архимедова червяка (винта с трапецидальной резьбой). Она применяется для передачи вращения между валами, геометрические оси которых скрещиваются (рис. 3.14). Для обеспечения зацепления шаг червяка должен быть равен окружному шагу червячного колеса. Червяк, как и обычный винт, может быть одно- и многозаходным. Если повернуть однозаходный червяк на один оборот, то связанное с ним червячное колесо повернется на угол, соответствующий одному шагу. При двухзаходном червяке поворот будет равен углу, соответствующему двум шагам, и т. д. Чтобы, например, однозаходный червяк повернул колесо на один полный оборот, он должен сам совершить столько оборотов, сколько на колесе зубьев. Следовательно, *передаточное*

*отношение червячной передачи выражается через отношение числа зубьев колеса к числу заходов резьбы на червяке, т. е.*

$$u_{1-2} = z_k / z_{\text{ч.}}$$



**Рис. 3.14. Червячная передача (а) и ее условное обозначение (б)**

Червячная передача по сравнению с другими имеет такие преимущества, как плавность и бесшумность работы, возможность получать большие передаточные отношения. Например, вполне возможна червячная передача, у которой  $z_k = 50$  и  $z_{\text{ч}} = 1$ , т. е.  $u_{1-2} = 50$ , тогда как для одной пары зубчатых колес  $u_{1-2}$  обычно не превышает 5-7. Однако в червячной передаче наиболее низкий КПД из-за больших потерь мощности на трение; чтобы их снизить, для изготовления рабочих частей червячного колеса обычно используют антифрикционные материалы (например, бронзу и чугун).

Особенностью червячной передачи является зависимость выбора ведущего элемента (червяка или колеса) от угла подъема винтовой линии (т. е. числа заходов резьбы) на червяке, что можно объяснить

следующим образом. Червяк - это винт, следовательно, его винтовая поверхность является наклонной плоскостью, «навернутой» на цилиндр. Поэтому силовое взаимодействие в паре «червяк - червячное колесо» аналогично взаимодействию в паре «наклонная плоскость (клин) - груз». Нетрудно представить, что если расположить груз в вертикальных направляющих, перпендикулярных направляющим основания наклонной плоскости, то лишь при большом угле ее наклона этот груз при нажатии на него сверху сможет перемещаться вниз и отжимать при этом влево (или вправо) наклонную плоскость (клин). При малом угле наклона плоскости горизонтальная составляющая силы нажатия будет чрезвычайно мала, что не позволит ей преодолеть силу трения между горизонтальными направляющими и основанием плоскости и переместить клин.

**Задача 3.** Определить заходность червяка, если известно, что частота вращения его 1440 об/мин, а червячное колесо, имеющее 48 зубьев, делает 60 об/мин.

**Решение.** Определим передаточное отношение червячной передачи:

$$u = n_1 / n_2 = 1440 / 60 = 24.$$

Зная число зубьев колеса и передаточное отношение, определяем заходность червяка

$$u = z_2 / z_1, \text{ следовательно } z_1 = \frac{z_2}{u}, \quad z_1 = \frac{48}{24} = 2.$$

### Контрольные вопросы

1. Через какие параметры выражается передаточное отношение червячной передачи?
2. В чем заключается явление самоторможения в червячной передаче?
3. Начертить кинематическую схему трехступенчатой передачи по следующим данным: 1-я ступень – цилиндрическая

зубчатая передача, у которой  $u_{1,2}=3$ ; 2-я ступень – коническая зубчатая передача, у которой  $u_{1,2}=1,5$ ; 3-я ступень – червячная передача ( $z_{ч}=1, z_{к}=40$ ). Определить общее передаточное отношение трехступенчатой передачи.

### 3.6. РАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

*Разъемные* соединения можно многократно разбирать и вновь собирать без разрушения деталей.

#### 3.6.1. РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Резьбовые соединения являются самыми распространенными. Основным элементом деталей соединения является резьба - канавка, прорезанная (выдавленная) по винтовой линии на поверхности детали. Наиболее часто такой поверхностью является цилиндрическая, иногда - коническая. Резьба может быть наружной и внутренней, правой и левой.

Надежность резьбового соединения зависит от силы трения, действующей в его элементах. Так как наибольшая сила трения возникает при треугольной резьбе, то именно такой профиль резьбы чаще всего применяют в резьбовых деталях. Стандартом в качестве основной крепежной резьбы принята метрическая резьба с углом  $60^\circ$  при вершине профиля (основные размеры такой резьбы - наружный диаметр и шаг).

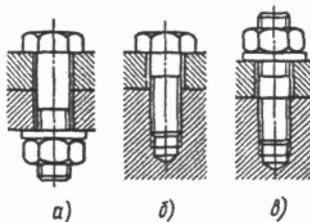
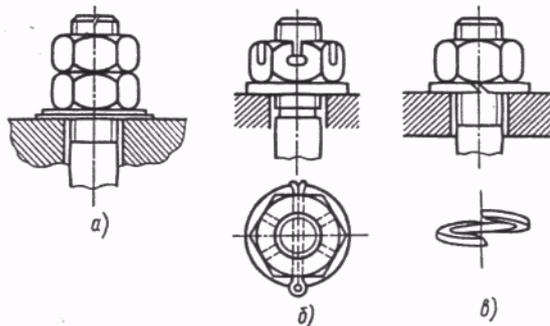


Рис. 3.15. Резьбовые соединения

Резьбовые соединения выполняют с помощью крепежных резьбовых деталей: болтов с гайками (рис. 3.15, а), винтов (рис. 3.15,б), шпилек с гайками (рис. 3.15, в). Болт - это имеющий головку цилиндрический стержень с резьбой; на нарезанную часть стержня болта навертывается гайка. Винт, также имея резьбу, отличается от болта тем, что ввертывается в резьбовое отверстие одной из соединяемых деталей. Шпилька - это цилиндрический стержень, имеющий резьбу с обоих концов; она ввертывается в резьбовое отверстие одной из соединяемых деталей, а на другой ее конец навертывают гайку. При соединении болтом или шпилькой используют шайбу - кольцевую пластинку, предохраняющую деталь от повреждения вращающейся гайкой. Форма гаек, головок болтов и винтов чаще всего шестигранная. У винтов небольших размеров головки иногда делают с прорезью (шлицем) под отвертку.



**Рис.3.16. Замковые устройства резьбовых соединений (гаечные замки)**

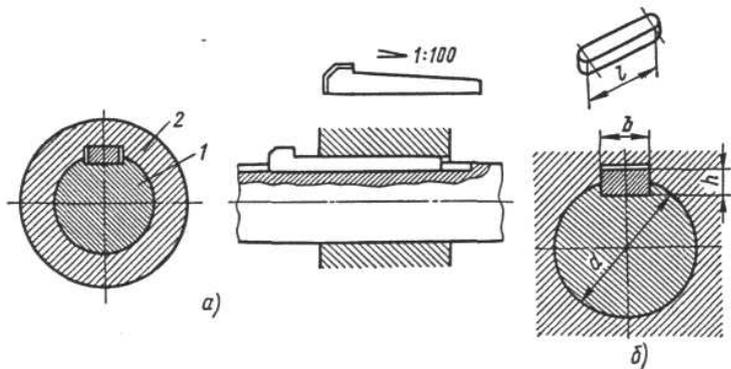
Болтовое соединение применяют для соединения деталей небольшой толщины и при наличии в конструкции места для размещения гайки. В тех случаях, когда одна из деталей имеет значительную толщину (для

нарезания резьбы) и отсутствует место для гайки, применяют соединение винтом. Если соединяемые детали имеют значительную толщину и в то же время частая разборка соединения может вызвать повышенный износ резьбы (например, деталей из чугуна или алюминиевых сплавов), то и винтовое соединение оказывается нерациональным. В этом случае применяют соединение шпилькой.

Несмотря на то, что применяемая в резьбовых деталях треугольная резьба с малым углом подъема винтовой линии обеспечивает самоторможение, иногда, особенно при динамических нагрузках, возможны случаи самоотвинчивания, во избежание которых применяют специальные замковые устройства, наиболее распространенными из которых являются контргайки (рис. 3.16, а), шплинты (рис. 3.16, б) и пружинные шайбы (рис. 3.16, в).

### 3.6.2. ШПОНОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шпоночное соединение образуется призматическим или клиновидным стержнем (шпонкой), одновременно находящимся в пазах вала и насаженной на него детали (втулки, шкива, зубчатого колеса). Основное назначение шпонки — передача вращающего момента. *Клиновую* шпонку (рис. 3.17, а) забивают в пазы между валом 1 и насаженной на него деталью 2 до упора, поэтому она создает напряженное соединение

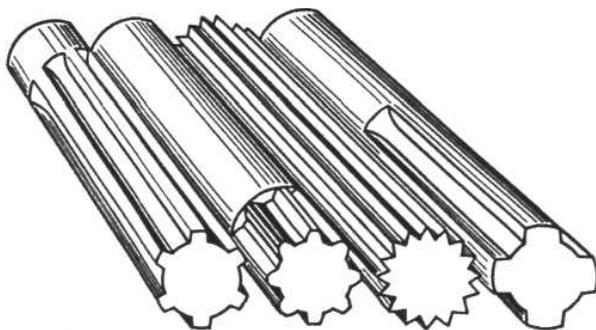


**Рис.3.17. Шпоночные соединения**

еще до приложения рабочей нагрузки. Основной недостаток такой системы - неизбежный перекос насаживаемой на вал детали и, как результат, смещение центра тяжести всего соединения. Последнее, как известно, приводит к появлению при вращении неуравновешенной силы, которая вызывает износ и разрушение опор вала. Поэтому клиновые шпонки применяют сравнительно редко, в основном, в тихоходных неотчетственных передачах.

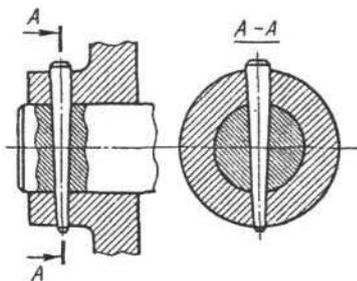
Наиболее распространена *призматическая* шпонка (рис. 3.17, б), которую в отличие от клиновой не забивают, а закладывают в паз вала. Подобное соединение требует большей точности при изготовлении, однако оно отличается ненапряженным состоянием и отсутствием эксцентриситета (смещения осей вала и насаженной на него детали). Призматические шпонки, применяемые в подвижных соединениях (например, при посадке перемещаемых блоков зубчатых колес на валах в коробках скоростей станков), крепятся к валу винтами и называются *направляющими*.

Все виды шпонок стандартизованы, т. е. их размеры согласованы с диаметром вала (так как и вал, и



**Рис.3.18. Шлицевые валы**

шпонка передают один и тот же вращающий момент). Если необходимо подобрать призматическую шпонку, то по ранее рассчитанному диаметру  $d$  вала в таблицах ГОСТа определяют размеры  $b \times h$  шпонки (длину  $l$  шпонки обычно принимают равной  $1,5d$ ), а затем производят проверочный расчет шпонки на смятие.



**Рис.3.19. Соединение коническим штифтом**

Соединение, в котором шпонки выполнены заодно с валом, называют шлицевым (рис. 3.18). Такие соединения по сравнению с обычными шпоночными имеют большую поверхность контакта, а следовательно, и большую нагрузочную

способность, а также обеспечивают более высокую точность, так как в шпоночном соединении участвуют три детали, а в шлицевом - две.

**Задача 4.** Для вала  $d = 60$  мм и крутящим моментом

$M = 740 \text{ Н} \cdot \text{м}$  подобрать размеры призматической шпонки и проверить её на смятие. Принять  $[\sigma]_{\text{см}} = 80 \text{ Н/мм}^2$ ,  $l = 80 \text{ мм}$ .

**Решение.** Шпонка призматическая обыкновенная для вала  $d = 60 \text{ мм}$  имеет сечение  $b \times h = 18 \times 11 \text{ мм}$ . Условное обозначение при  $l = 80 \text{ мм}$ : Шпонка 18 x 11 x 80 ГОСТ 8789. Условие прочности на смятие:  $\sigma_{\text{расч}} = F/S_{\text{см}} \leq [\sigma]_{\text{см}}$ .

Так как  $F = \frac{2M}{d}$ , а  $S_{\text{см}} = 0,45 h l_p$ ,  $l_p = l - b$ , то

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{2M}{0,45dh(l-b)} = \frac{2 \cdot 740 \cdot 10^3}{60 \cdot 0,45 \cdot 11(80-18)} = 80,4 \cong 80 \text{ МПа.}$$

$\sigma_{\text{расч}} = [\sigma]_{\text{см}}$  – условие выполняется.

### 3.6.3. КЛИНОВЫЕ И ШТИФТОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Клиновое соединение состоит из стержня (тяги), втулки (муфты) и клина. Соединяющей деталью является клин, который вставляется в сквозные прорези стержня и втулки. Достоинство такого соединения — возможность быстрой сборки и разборки; при этом углы скоса на клине сделаны такими, чтобы предотвратить возможность саморазборки, т. е. обеспечить самоторможение.

Разновидностью клинового соединения является штифтовое соединение (рис. 3.19). **Штифт** — это **гладкий цилиндрический или конический стержень**. По сравнению с клиновым оно более технологично и обеспечивает взаимозаменяемость деталей.

#### Контрольные вопросы

1. Перечислите виды разъемных соединений и основные крепежные детали.
2. Почему на крепежных резьбовых деталях чаще всего

используют треугольную резьбу?

3. В каких случаях для резьбовых соединений применяют болты, винты, шпильки?

4. Дайте характеристику основных гаечных замков.

5. Какой тип шпонки наиболее часто применяют и почему?

6. Какая деформация возникает в призматической шпонке при передаче соединением вращающего момента?

6. Дайте сравнительную характеристику шпоночных и шлицевых соединений.

### 3.7. НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Неразъемные могут быть разобраны лишь путем разрушения соединительных элементов.

#### 3.7.1. ЗАКЛЕПОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Основным элементом заклепочного соединения является заклепка - цилиндрический стержень с головкой. Заклепку вводят в отверстия соединяемых деталей (обычно листов) и, деформируя выступающую часть, образуют вторую - замыкающую - головку. Наиболее распространены заклепки с полукруглой (рис. 3.20, а), потайной (рис. 3.20, б) и полупотайной (рис. 3.20, в) головками.

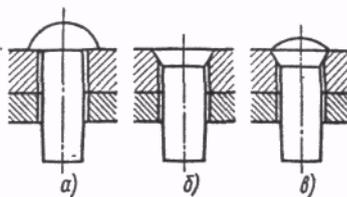
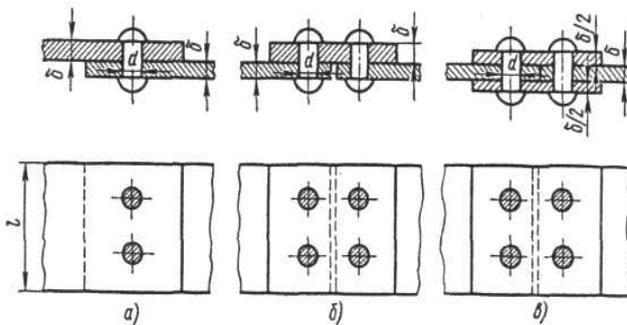


Рис. 3.20. Формы головок заклепок

Вместе с соединяемыми деталями заклепки образуют заклепочные швы, которые могут быть

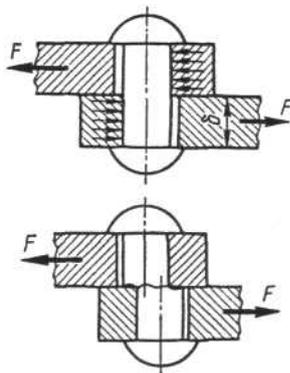


однорядными и многорядными (обычно двух- и

**Рис.3.21. Заклепочные швы:**

**а**-однородный нахлесточный, **б** и **в** – стыковые соответственно с одной и двумя накладками; **δ** и **δ/2** – толщины накладок

трехрядными). По расположению соединяемых листов различают швы нахлесточные и стыковые с одной или двумя накладками (рис. 3.21). При взаимодействии склепанных листов и заклепки (рис. 3.22) в последней возникают деформации смятия и сдвига. В зависимости от числа плоскостей, по которым возможен срез, швы



### Рис.3.22. Схемы деформации заклепки

делятся на односрезные (нахлесточные и стыковые с одной накладкой) и двухсрезные (стыковые с двумя накладками).

Разрушение стержня заклепки при действии силы  $F$  происходит в результате среза по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей.

Условие прочностной надежности соединения по допускаемым напряжениям среза имеет вид:

$$\tau_c = \frac{F}{S} = \frac{4F}{n\pi d^2} \leq [\tau_c], \quad (3.12)$$

где  $S$  – суммарная площадь поперечного сечения  $n$  заклепок диаметром  $d$ ;

$[\tau_c]$  – допускаемое напряжение при срезе.

При проектировании соединений определяют их диаметр:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{n\pi[\tau_c]}}. \quad (3.13)$$

Если заклепка изготовлена из менее прочного материала, чем соединяемые детали, то при нагружении соединения возможно смятие стержня заклепки.

Условие прочностной надежности в этом случае

$$\sigma_{см} = \frac{F}{\delta dn} \leq [\sigma_{см}], \quad (3.14)$$

где  $[\sigma_{см}]$  - допускаемое напряжение смятия;

$\delta$  - толщина листа;

$d$  – диаметр заклепки;

$n$  – число заклепок.

Тогда диаметр заклепки

$$d \geq \frac{F}{\delta n [\sigma_{см}]} \quad (3.15)$$

### 3.7.2. СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Сварные соединения элементов металлоконструкций осуществляют чаще всего методом электросварки. Наиболее распространены соединения стыковые (рис. 3.23, а) и нахлесточные (рис. 3.23, б). В первом случае в шве возникает деформация растяжения, во втором - деформация сдвига. При нахлесточном соединении швы называют *валиковыми*; если они расположены перпендикулярно направлению действия нагрузки, их называют *лобовыми* (см. рис. 3.32, б), если параллельно — *фланговыми* (рис. 3.23, в).

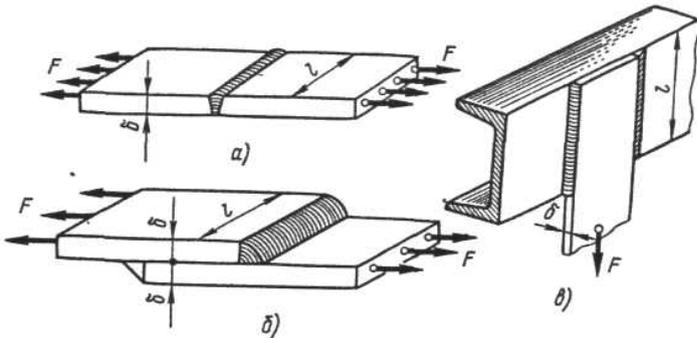


Рис. 3.23. Сварные соединения, выполненные стыковым (а) и валиковым лобовым (б) и фланговым (в) швами

При проектировании соединений определяют его размеры шва  $L$  и  $k_p$ . Общая длина шва определяется по

формуле:

$$L \geq \frac{F}{0,7k_p[\tau_{ш}]}, \quad (3.16)$$

где  $k_p$  – расчетный катет шва, принимаемый  $k_p = (0,9 \dots 1,0) \delta_{\min}$ ,  
 $\delta_{\min}$  – наименьшая толщина сварного элемента,  
 $[\tau_{ш}]$  – допускаемое напряжение в сварном шве при срезе.

**Задача 5.** Определить длину сварного шва полос из стали Ст 3 при статической нагрузке  $F = 300$  кН. Толщина полос равна 10 мм.

**Решение.** Допускаемое напряжение среза в шве  $[\tau_{ш}] = 0,6\sigma_r = 0,6 \cdot 160 = 96$  МПа. Примем  $k_p = \delta = 10$  мм. Вычисляем требуемую длину шва:

$$L = \frac{F}{0,7k_p[\tau_{ш}]} = \frac{300000}{0,7 \cdot 10 \cdot 96} \approx 446 \text{ мм.}$$

Фактическую длину сварного шва берут на 10 ... 15 мм больше расчетной для компенсации ослабления швов из-за дефектов (непровара в начале и кратера в конце шва).

Окончательная длина шва  $L = 446 + 14 = 460$  мм.

### Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды неразъемных соединений.
2. Какие виды деформации возникают в накладках и заклепках конструкции, изображенной на рис. 3.21, в, если к листам накладок приложить центральные осевые силы?
3. Какой вид деформации возникает на стыке головок заклепок с листами (накладками) при образовании заклепочного шва?
4. Какого вида напряжения (нормальные или касательные) возникают в швах соединений, изображенных на рис. 3.23, а и б?
5. Почему накладки в конструкции, изображенной на рис. 3.23, в, должны иметь толщину в два раза меньшую, чем в

конструкциях, показанных на рис. 3.21, а и б?

## 3.8. ДЕТАЛИ И СБОРОЧНЫЕ ЕДИНИЦЫ ПЕРЕДАЧ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 3.8.1. ОСИ И ВАЛЫ

Оси и валы - детали, несущие на себе вращающиеся части машин: зубчатые колеса, шкивы, барабаны, звездочки и т.д. Ось обычно представляет

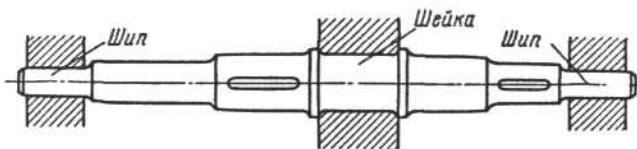


Рис.3.24. Ось

собой сплошное или полое, ступенчатое (реже - гладкое) тело цилиндрической формы (рис. 3.24). Оси бывают *вращающиеся* и *неподвижные*. Например, вагонная ось вместе с закрепленными на ней колесами вращается, ось велосипеда неподвижна, а колесо вращается относительно нее.

Валы делятся на простые, прямые (гладкие и ступенчатые), коленчатые и гибкие. Наиболее распространенные прямые валы, по форме не отличающиеся от осей, существенно отличаются от них по характеру работы. Одно из отличий: валы не могут быть неподвижными, они обязательно вращаются. Но главное отличие в другом: оси только несут на себе части машин, а следовательно, подвергаются только изгибу, а валы, кроме того, еще и передают вращающий момент, а значит, испытывают одновременное действие изгиба и кручения. Например, шпиндель токарного станка представляет собой полый, прямой вал. Вращающему моменту, который передается на

шпиндель от электродвигателя (через промежуточные валы), противодействует момент, создаваемый силой резания. Одна из составляющих силы резания, кроме того, изгибает шпиндель.

Оси рассчитывают, как балки, на поперечный изгиб, а валы - на усталостную прочность (выносливость) в результате совместного действия изгиба и кручения.

Расчет на прочность. В проектном расчете при отсутствии данных об изгибающих моментах диаметр вала приближенно может быть найден по известному значению крутящего момента из условия прочности по заниженным значениям допускаемых напряжений при кручении:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{9550P}{0,2[\tau_k]n}}, \quad (3.17)$$

где  $T$  - крутящий момент в расчетном сечении вала;  
 $[\tau_k]$  - допускаемое напряжение на кручение,  $[\tau_k] = 12 \dots 20$  МПа для стальных валов;

$P$  – передаваемая мощность, кВт;

$n$  – частота вращения вала, об/мин.

Иногда при проектировании минимальный диаметр вала принимают равным  $0,8 \dots 1,2$  диаметра вала приводного двигателя.

**Задача 6.** определить диаметр выходного конца вала редуктора, соединяемого с валом электродвигателя  $d = 32$  мм при  $T_{кр} = 40$  Н·м,  $[\tau_k] = 20$  МПа.

**Решение.** Из условия прочности определяют

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{40 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 20}} = 22 \text{ мм}.$$

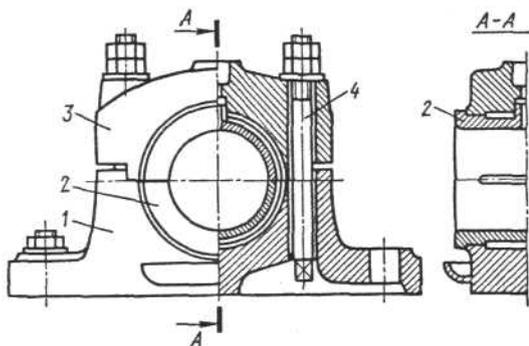
Диаметр выходного конца вала редуктора должен быть не менее  $d_{\text{вых}} = 0,8 \cdot 32 = 26$  мм.

### **3.8.2. ОПОРЫ ОСЕЙ И ВАЛОВ (ПОДШИПНИКИ)**

Вращающиеся оси и валы своими шипами и шейками - цапфами (см. рис. 3.24) - опираются на неподвижные опоры (подшипники). В зависимости от характера трения между вращающимися и неподвижными деталями различают подшипники скольжения и подшипники качения.

**Подшипники скольжения.** Простейший подшипник скольжения для цапфы вала выполняется в виде отверстия в станине или корпусе машины, однако после износа он не может быть восстановлен. Поэтому целесообразней делать подшипники в виде самостоятельного узла - втулки с фланцем. Еще более совершенна конструкция, в которой внутрь такого подшипника запрессовывается сменная втулка из специального антифрикционного материала (например, бронзы), что позволяет при износе заменять не весь подшипник, а лишь втулку.

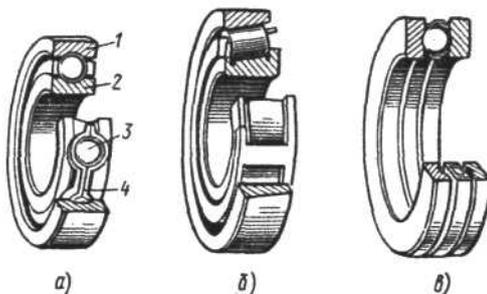
Наиболее часто, особенно при больших нагрузках, применяют подшипник с разрезной втулкой - разъемными вкладышами (рис. 3.25). Он состоит из корпуса 1, разъемного вкладыша 2, крышки 3 и болтов 4. Через отверстие в крышке на трущиеся поверхности поступает масло. Такой разъемный подшипник удобно устанавливать на любом участке вала (неразъемный можно установить лишь на концевой опоре — шипе); в нем также можно регулировать зазор между валом и вкладышем, поджимая болтами 4 крышку с верхней половиной вкладыша.



**Рис. 3.25. Разъемный подшипник скольжения**

Удобство монтажа и демонтажа, а также относительная простота конструкции являются достоинствами подшипников скольжения. Однако у них есть и существенные недостатки, и в первую очередь - большие потери мощности на преодоление трения скольжения.

Подшипники качения. Широкое применение подшипников качения объясняется малой потерей мощности на преодоление трения. Подшипник качения (рис. 3.26) состоит из внутреннего 2 и наружного 1



**Рис. 3.26. Подшипники качения:**  
 а – шариковый радиальный однорядный, б – роликовый конический радиально-упорный одинарный, в – шариковый упорный одинарный.

колец, тел качения 3 (в данном случае шариков) и сепаратора 4. Внутреннее кольцо обычно жестко насаживается на вал, а наружное закрепляется в корпусе. Между вращающимся и неподвижным кольцами расположены тела качения, удерживаемые на постоянном расстоянии друг от друга сепаратором (слово «сепаратор» означает разделитель). В зависимости от формы тел качения подшипники делятся на шариковые и роликовые, а в зависимости от числа рядов тел качения - на одно-, двух- и многорядные. По направлению нагрузок, для восприятия которых предназначены подшипники, различают: радиальные, осевые (упорные) и радиально-упорные подшипники. Радиальные предназначены для противодействия таким внешним силам, которые направлены перпендикулярно продольной оси подшипника (вала), т. е. по линии, совпадающей с одним из радиусов этих деталей; осевые удерживают вал от осевых перемещений, т. е. перемещений в направлении продольной оси подшипника (вала); радиально-упорные одновременно противодействуют как радиальным, так и осевым перемещениям валов.

Все подшипники стандартизованы. В зависимости от соотношения радиальных и осевых размеров их разделяют на серии — легкую, среднюю и тяжелую. При одинаковом внутреннем диаметре меньшую ширину и наружный диаметр имеют подшипники легкой серии. Подшипники различаются также по нагрузочной способности (динамической грузоподъемности), т. е. по способности в течение определенного срока выдерживать без разрушения заданную нагрузку при заданной угловой скорости вращения вала. В справочных таблицах (каталогах подшипников) указывается динамическая грузоподъем-

ность, по которой выбирают подшипник для конкретных условий работы.

### 3.8.3. МУФТЫ

Муфты предназначены для передачи вращения с одного вала на другой, расположенный с ним соосно. Если муфта рассчитана на постоянное соединение валов, то она называется постоянной. К постоянным относятся *поперечно-свертная* (рис. 3.27, а) и *продольно-свертная* (рис. 3.27, б) муфты, состоящие из двух полумуфт, соединенных болтами. Вращающий момент передается шпонками. Подобные муфты, называемые *глухими*, просты по конструкции, однако имеют существенный недостаток - требуют точного центрирования соединяемых валов при сборке.

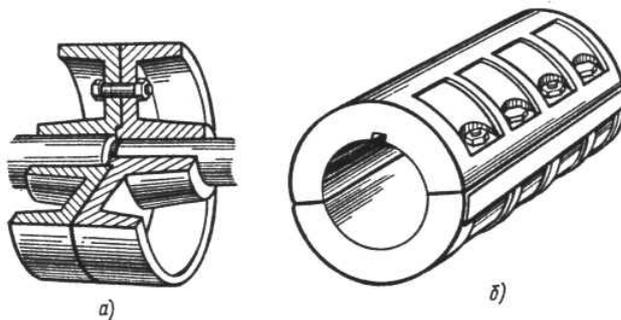
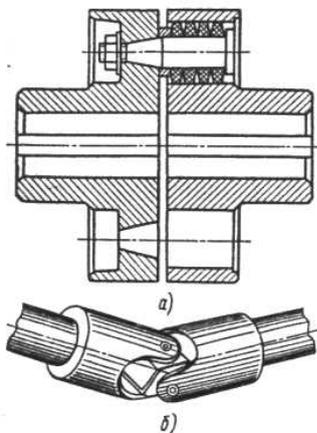


Рис. 3.27. Поперечно-свертная (а) и продольно-свертная (б) муфты

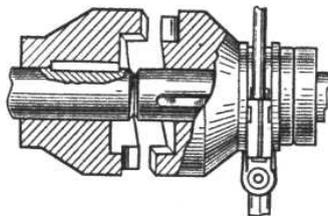
Этого недостатка нет у *компенсирующих* постоянных муфт. Конструкция их сложнее, однако и возможности шире - они могут соединять валы, имеющие смещение и перекося геометрии осей.

Если в такой муфте смещение и перекос валов компенсируются упругими элементами, например стальными пластинчатыми пружинами или резиновыми кольцами, то ее называют *упругой*, если же упругих элементов нет, муфта называется *жесткой*. Из упругих компенсирующих муфт наиболее широкое применение получили втулочно-пальцевые (рис. 3.28,а), не менее часто используют жесткие крестово-шарнирные муфты (рис. 3.28, б), состоящие из двух вилок и крестовины.

При необходимости в процессе работы многократно соединять и разъединять валы применяют сцепные муфты, из которых наиболее часто используют кулачковую (рис. 3.29). Одна из полумуфт жестко соединена с валом, а вторая может перемещаться вдоль него по шпонке или по шлицам. При включении муфты кулачки, имеющиеся на торцовых поверхностях одной полумуфты, входят во впадины другой и передают вращение.



**Рис. 3.28. Упругая втулочно-пальцевая (а) и крестово-шарнирная (б) муфты**

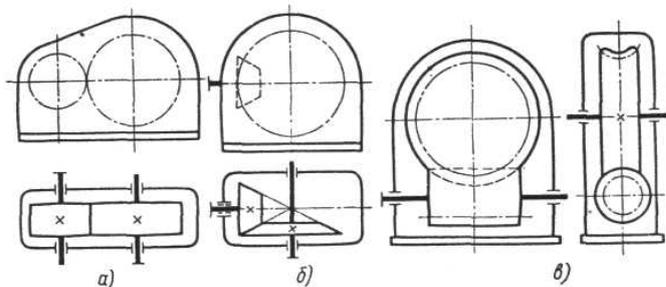


**Рис. 3.29 Кулачковая муфта**

1. Перечислите и поясните основные требования к деталям машин.
2. В чем различие функций, выполняемых валом и осью?
3. Как называются опорные участки вала?
4. Охарактеризуйте сравнительные достоинства и недостатки подшипников скольжения и подшипников качения.
5. Как и по каким признакам классифицируют муфты?

### 3.9. РЕДУКТОРЫ

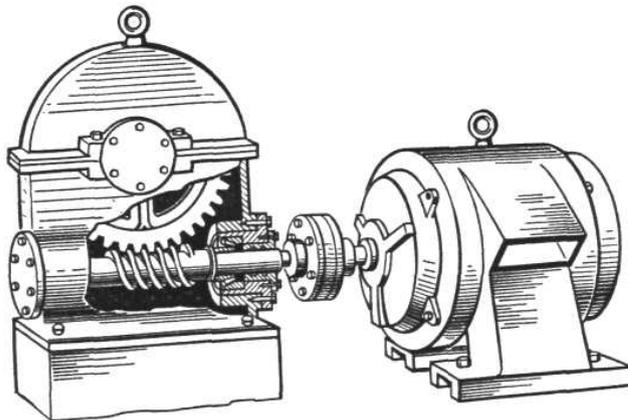
Редуктором называется механизм, состоящий из зубчатых или червячных передач, выполненный в виде отдельного агрегата и служащий для передачи мощности от двигателя к рабочей машине. Основное назначение редуктора — понижение угловой скорости и соответственно повышение вращающего момента на ведомом валу по сравнению с моментом на ведущем валу. В зависимости от вида передачи, которая



**Рис. 3.30.** Схемы редукторов: а - одноступенчатого с цилиндрическими колесами, б – одноступенчатого с коническими колесами, в - одноступенчатого червячного

используется в редукторе, различают зубчатые цилиндрические, зубчатые конические, червячные и комбинированные редукторы (рис. 3.30). Общий вид

привода, состоящего из электродвигателя и червячного редуктора, валы, которых соединены муфтой, показан на рис. 3.31.



**Рис. 3.31. Привод «Электродвигатель — червячный редуктор»**

### **3.10. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРИВОДА И ЕГО ОПТИМИЗАЦИЯ**

Целью кинематического расчета является определение общего передаточного числа привода в зависимости от скорости рабочего вала машины  $n_{р.м}$  и подбора синхронной частоты вращения вала электродвигателя ( $n_c=750, 1000, 1500, 3000$  об/мин), передаточных чисел всех механизмов привода, выбора электродвигателя по расчетной мощности  $N_{эл}^p$  и синхронной частоте вращения  $n_c$ , а также выбор стандартного редуктора по расчетному передаточному отношению  $U_p$  и моменту на тихоходном валу редуктора  $M_{т.в}$ :

$$U_{\text{пр}} = \frac{n_c}{n_{\text{р.в.}}}, \quad (3.18)$$

$$U_{\text{пр}} = U_1 U_2 U_3 \dots U_k, \quad (3.19)$$

где  $U_1 \dots U_k$  – передаточные отношения открытых передач, редуктора.

При известной мощности на рабочем валу машины  $N_{\text{р.в}}$  определяют мощность электродвигателя  $N_{\text{эл}}^{\text{р}}$  по формуле:

$$N_{\text{эл}}^{\text{р}} = \frac{N_{\text{р.в}}}{\eta_{\text{пр}}}, \quad (3.20)$$

где  $\eta_{\text{пр}}$  - КПД привода,

$$\eta_{\text{пр}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_k, \quad (3.21)$$

где  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_k$  - КПД отдельных механических передач, муфт, подшипников.

При условии, что мощность на рабочем валу  $N_{\text{р.в}}$  неизвестна, её определяют расчетным путем.

Например, на ведущем барабане ленточного конвейера известно тяговое (окружное) усилие  $P$ , и диаметр барабана  $D_б$  и скорость вращения  $n_б$ , то момент на барабане будет равен  $M_б = P \frac{D_б}{2}$ , мощность на

барабане определяется по формуле  $N_б = N_{\text{р.в.}} = M_б \frac{\pi n_б}{30}$ ,

где  $N_{\text{р.в.}}$  - мощность на рабочем валу, Вт;

$M_б$  – момент на барабане, Н · м;

$n_б$  – частота вращения барабана, об/мин.

При определении мощности  $N_{\text{р.в.}}$  технологической

машины можно воспользоваться империческими расчетными формулами, приведенными в справочной и технической литературе [3-5].

По расчетной мощности электродвигателя  $N_{эл}^p$  и синхронной частоте  $n_c$  выбирается стандартный электродвигатель серии 4А (асинхронный, обдуваемый, короткозамкнутый).

Расчетная мощность электродвигателя  $N_{эл}^p$  по отношению к номинальной мощности  $N_{эл}$  должна быть в пределах

$$0,85 N_{эл} \leq N_{эл}^p \leq 1,05 N_{эл}, \quad (3.22)$$

т.е. с перегрузкой до 5% и недогрузкой до 15%.

Выбрав электродвигатель, определяем асинхронную скорость вращения вала электродвигателя

$$n_{ac} = n_c \left( 1 - \frac{S}{100} \right), \quad (3.23)$$

где  $S$  - коэффициент проскальзывания ротора относительно статора в магнитном поле при приложении на вал нагрузки, %.

Следующий этап – уточнение передаточного отношения привода и отдельных механических передач.

$$U' = \frac{n_{ac}}{n_{p.v}}, \quad (3.24)$$

$$U'_{пр} = U'_{ред} U'_{откр.п}, \quad (3.25)$$

$$U_{откр.п} = \frac{U'_{пр}}{U'_{ред}}. \quad (3.26)$$

Из справочника выбирают стандартный редуктор по крутящему моменту на тихоходном валу и по передаточному отношению. Все данные сводят в таблицу. Лучшим вариантом является привод, включающий редуктор с моментом на тихоходном валу

$$0,85M_{Т.В} \leq M_{Т.В}^P \leq 1,05M_{Т.В} . \quad (3.27)$$

Если при расчете получается несколько вариантов выбора стандартного редуктора, то производим выбор по основным критериям оптимизации. Критерием оптимизации редуктора является масса, технический уровень редуктора, цена [4].

Технический уровень – это отношение массы редуктора  $m$  к номинальному крутящему моменту ведомого вала  $M_H$ .

$$k_p = \frac{m}{M_H} . \quad (3.28)$$

Таблица 1

Технический уровень редукторов

$k_p, \text{ кг/Н} \cdot \text{ м}$	Качественная оценка технического уровня
$> 0,2$	Низкий уровень
$0,1-0,2$	Средний уровень %; в большинстве случаев производство экономически не оправдано
$0,06-0,1$	Высокий уровень; редуктор соответствует современным требованиям
$< 0,06$	Высший уровень

С ростом технического уровня увеличивается стоимость редуктора, которая определяется по

зависимости

$$\zeta = K_{\zeta} m^{0,825} 10^2, \quad (3.29)$$

где  $K_{\zeta}$  – коэффициент, зависящий от вида термообработки.

Таблица 2  
Значения  $K_{\zeta}$  в зависимости от типа редуктора

Значения коэффициента	Тип редуктора						
	цилиндрический одноступенчатый	червячный одноступенчатый	цилиндрический двухступенчатый	конический цилиндрический	цилиндрический двухступенчатый шевронный	цилиндрический трехступенчатый	червячный двухступенчатый
$K_{\zeta}$	3,4	6,4	4,1	4,6	6,7	4,6	4,3

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С.М. Тарг. - М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.: ил. – ISBN 5-06-00-3523-9: 44-10.
2. Бородин, Н.А. Сопротивление материалов: пособие для вузов / Н.А. Бородин. - М.: Дрофа, 2001. – 288 с.: ил. – ISBN 5-7107-3953-7:60-00.
3. Прикладная механика: учебник для вузов / В.В.Джамай, Ю.Н.Дроздов, Е.А.Самойлов и др.; под ред. В.В.Джамая. – М.: Дрофа, 2004.-414 с.: ил. – ISBN 5-7107-6232-6.
4. Киселев, Б.Р. Проектирование приводов машин химического производства: учеб. пособие для втузов техн. и технол. спец. / Б.Р. Киселев; Иван. гос. хим. – технол. ун-т. – Иваново, 2003. – 143 с. – Библиогр.: с. 141. – 50-00.
5. Киселев, Б.Р. Курсовое проектирование по механике: учеб. пособие / Б.Р. Киселев; Иван. гос. хим. – технол. ун-т. - Иваново, 2003. – 208 с. – Библиогр.: с. 205. – 50-00.

## Содержание

Предисловие .....	3
Часть 1. Статика	
1.1. Абсолютно твердое тело, сила. Задачи статики .....	4
1.2. Аксиомы статики.....	7
1.3. Связи и их реакции.....	13
1.4. Сложение сил. Система сходящихся сил. Геометрический способ сложения сил. Равнодействующая сходящихся сил, разложение сил....	18
1.5. Проекция силы на ось и на плоскость. Аналитический способ задания и сложения сил.....	23
1.6. Равновесие системы сходящихся сил.....	27
1.7. Решение задач статики.....	30
1.8. Момент силы относительно центра. Пара сил	
1.8.1. Момент силы относительно центра (или точки).....	34
1.8.2. Пара сил. Момент пары.....	37
1.8.3. Теорема об эквивалентности и сложения пар.....	40
1.8.4. Сложение двух параллельных сил направленных в одну сторону.....	44
1.9. Приведение системы сил к центру. Условия равновесия	
1.9.1. Теорема о параллельном переносе силы.....	46
1.9.2. Приведение системы сил к данному центру.....	48
1.9.3. Условия равновесия системы сил. Теорема о моменте равнодействующей.....	51
1.10. Плоская система сил	
1.10.1. Алгебраические моменты силы и пары.....	53
1.10.2. Приведение плоской системы сил к простей- шему виду.....	57
1.10.3. Равновесие плоской системы сил. Случай параллельных сил .....	60
1.10.4. Решение задач.....	64
1.10.5. Равновесие систем тел.....	65
1.10.6. Статически определимые и статически неопределимые системы тел (конструкции).....	68
1.10.7. Определение внутренних усилий.....	70
1.10.8. Распределенные силы.....	72

## Часть 2

### Основные сведения о сопротивлении материалов (основные понятия)

2.1. Деформация тел под действием внешних сил.....	75
2.2. Внешние силы, внутренние силы (силы упругости) и напряжения .....	77
2.3. Действительные, предельно опасные и допускаемые напряжения.....	78
2.4. Определение внутренних сил (сил упругости).....	80
2.5. Расчеты на прочность.....	84
2.6. Растяжение, сжатие и смятие	
2.6.1. Распределение напряжений при растяжении.....	85
2.6.2. Зависимость между напряжением и относительным удлинением. Абсолютное удлинение.....	86
2.6.3. Сжатие и смятие.....	88
2.6.4. Расчеты на прочность при растяжении, сжатии и смятии.....	89
2.7. Сдвиг (срез)	
2.7.1. Распределение напряжений при сдвиге (срезе). Расчеты на прочность.....	91
2.8. Кручение	
2.8.1. Распределение напряжений при кручении.....	94
2.8.2. Расчеты на прочность при кручении .....	97
2.9. Изгиб и сложные деформации	
2.9.1. Особенность деформации изгиба.....	100
2.9.2. Распределение нормальных напряжений при изгибе.....	103
2.9.3. Расчеты на прочность при изгибе.....	107
2.9.4. Определение опасного сечения при изгибе.....	108
2.9.5. Продольный изгиб.....	111
2.10. Сложные деформации.....	113

## Часть 3

### Детали машин

3.1. Основные понятия.....	118
3.2. Детали машин и требования к ним.....	119
3.3. Передачи вращательного движения	

3.3.1. Классификация механических передач.....	121
3.3.2. Передаточное отношение.....	122
3.3.3. Преобразование вращающих моментов в передачах....	123
3.4. Передачи между валами с параллельными геометрическими осями	
3.4.1. Ременная передача.....	124
3.4.2. Зубчатая цилиндрическая передача с эвольвентным профилем зубьев.....	129
3.4.3. Геометрические элементы зубчатого зацепления.....	133
3.4.4. Цепная передача.....	134
3.5. Передачи между валами с пересекающимися и скрещивающимися геометрическими осями	
3.5.1. Зубчатая коническая передача.....	136
3.5.2. Червячная передача.....	137
3.6. Разъемные соединения деталей машин	
3.6.1. Резьбовые соединения.....	140
3.6.2. Шпоночные соединения.....	142
3.6.3. Клиновые и штифтовые соединения.....	145
3.7. Неразъемные соединения деталей машин	
3.7.1. Заклепочные соединения.....	146
3.7.2. Сварные соединения.....	149
3.8. Детали и сборочные единицы передач вращательного движения	
3.8.1. Оси и валы.....	151
3.8.2. Опоры осей и валов (подшипники).....	153
3.8.3. Муфты.....	156
3.9. Редукторы.....	158
3.10. Кинематический расчет привода и его оптимизация....	159
Список литературы.....	164

Степанова Татьяна Юрьевна

**Механика**  
**Учебное пособие**

Редактор О.А. Соловьева.

Подписано в печать 11.12.2007. Формат 60x84 1/16.  
Бумага писчая. Усл. печ. л. 9,77. Уч.-изд. л.-10,84. Тираж  
100 экз. Заказ

ГОУ ВПО Ивановский государственный химико-  
технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры  
экономики и финансов ГОУ ВПО «ИГХТУ»

153 000, г. Иваново, пр. Ф. Энгельса, 7