

**Г.А. Зуева**

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ  
ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА  
ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ  
МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ**

Иваново  
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ивановский государственный химико-технологический университет

Г.А. Зуева

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ  
ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА  
ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ  
МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ**

Иваново 2017

УДК 536.2

**Зуева, Г.А.**

Аналитическое решение задач тепло- и массопереноса для областей с подвижными границами методом дифференциальных рядов [ монография ] / Г.А. Зуева ; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2017.- 92 с.

Монография посвящена аналитическому методу решения одного из труднейших классов краевых задач нестационарной теплопроводности, относящихся к областям с движущимися границами, а именно методу дифференциальных рядов. В работе корректно поставлены и аналитически решены следующие задачи стефановского типа для тел канонической формы ( шар, неограниченный цилиндр, неограниченная пластина ), позволяющие описать процессы фазового и химического превращения в твердом материале ( на примере сублимации, сушки, обжига). Проверена работоспособность метода дифференциальных рядов при решении краевой задачи с неподвижной границей.

При постановке краевых задач учтено наличие внутренних источников теплоты, инициированных механическим нагружением, ИК излучением и комбинированным подводом энергии извне, что позволяет моделировать и рассчитывать совмещенные процессы термической обработки материалов.

Издание может быть полезно научным работникам, инженерам, аспирантам и магистрантам, которые специализируются в области теплофизики, процессов и аппаратов химической технологии и занимаются вопросами математического моделирования тепломассообменных процессов.

*Выражаю благодарность своим учителям и коллегам: доктору технических наук, профессору Блиничеву В.Н., доктору технических наук, профессору Рудобаите С.П., доктору технических наук, старшему научному сотруднику Падохину В.А.*

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета

Рецензенты:

кафедра прикладной математики Ивановского государственного энергетического университета; заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Э.М. Карташов (Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий))

© Зуева Г.А., 2017

© ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», 2017

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	5
1. Методы решения задач тепло- и массопереноса для областей с подвижными границами. Обоснование применимости метода дифференциальных рядов.....	6
2. Задача теплопроводности для шара с внутренними источниками теплоты и движущейся границей (задача Стефана) при моделировании процесса сублимации частицы в потоке газа переменной температуры.....	12
2.1. Общие положения. Физическая модель.....	12
2.2. Математическая модель.....	14
2.3. Анализ решения, компьютерная реализация модели, выводы....	33
3. Сопряженная задача теплопроводности для шара с внутренними источниками теплоты и движущейся границей (задача Стефана) при моделировании термического разложения твердой частицы.....	37
3.1. Общие положения.....	37
3.2. Физическая модель.....	37
3.3. Математическая модель.....	38
3.4. Численная реализация полученного решения, его анализ и выводы.....	42
4. Сопряженная задача теплопроводности для бесконечной пластины с движущейся границей испарения в ней (задача Стефана).....	46
4.1. Общие положения.....	46
4.2. Физическая модель.....	47
4.3. Математическая модель.....	48
4.4. Анализ решения, компьютерная реализация модели, выводы....	55
5. Задача теплопроводности для тела цилиндрической формы с движущейся границей фазового перехода на примере процесса сушки волокна.....	58

5.1. Общие положения.....	58
5.2. Физическая модель.....	58
5.3. Математическая модель.....	61
5.4. Анализ решения, компьютерная реализация модели, выводы.....	74
5.5. Область применимости предложенной модели сушки.....	75
6. Проверка работоспособности метода дифференциальных рядов при решении классических краевых задач теплопроводности с неподвиж- ной границей.....	76
6.1. Общие положения.....	76
6.2. Постановка задачи.....	78
6.3. Математическая модель.....	78
6.4. Анализ решения. Выводы.....	86
<b>Заключение.....</b>	<b>87</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>87</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основой для моделирования процессов термообработки гетерогенных систем является современная теория тепломассопереноса. Сегодня достигнуты определенные успехи в развитии математического описания процессов термической обработки дисперсных, волокнистых и листовых материалов. Однако до сих пор преобладают так называемые балансовые модели. Численные методы решения задач тепломассопереноса, в особенности осложненного фазовыми или химическими превращениями, достаточно громоздки и трудоемки. Аналитические методы теории нестационарного переноса дают возможность наглядного и удобного анализа явлений, позволяют выявить влияние всех параметров процесса, выявить существенные из них, т.е. провести аналитический анализ решения задачи тепломассопереноса. Развитие аналитических методов математического описания тепломассобенных процессов важно также для создания компьютерных, информационных технологий автоматизированного проектирования нового оборудования и ресурсосберегающих химико-технологических систем.

Таким образом, актуальным и имеющим важное практическое значение является дальнейшее развитие единой методологии построения теории явлений переноса в процессах термообработки гетерогенных систем, основанной, в частности, на аналитических методах теории теплопроводности.

В данной работе рассматривается аналитический метод решения задач стефановского типа - метод дифференциальных рядов, который применяется для решения ряда задач тепломассопереноса с подвижной границей. Возможности данного метода проиллюстрированы на примере моделирования процессов сублимации, сушки, реакции термического разложения. Обосновывается возможность применения метода дифференциальных рядов, представлены результаты численного эксперимента.

# **1. Методы решения задач тепло- и массопереноса для областей с подвижными границами. Обоснование применимости метода дифференциальных рядов**

Круг задач теории теплопроводности исключительно обширен и непрерывно пополняется большим количеством новых результатов. Решению уравнений теплопроводности посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов, среди которых надо выделить, в первую очередь, работы А.В. Лыкова [1-3], Г. Карслоу Г. и Д. Егера [4,5], Г.А.Гринберга [6], Б.Я. Любова [7]. Всесторонний анализ, обобщение методов аналитической теории теплопроводности приведены в монографии Э.М. Карташова [8]. Теоретическим основам моделирования тепломассопереноса посвящены работы Рудобашты С.П. [9], Федосова С.В. [10]. Остановимся на обзоре аналитических методов решения краевых задач в области с движущимися границами. Исследования в этом направлении ведутся, начиная с пятидесятих годов прошлого века [11]. Можно назвать ряд работ, в которых аналогичные задачи решаются численными методами [12-19]. Однако недостатком подхода, основанного на применении численных методов, является необходимость выполнения очень большого количества вычислительных операций и ограниченные возможности для аналитического исследования. Отдаем предпочтение аналитическим методам решения еще и потому, что необходимо соблюсти принцип «общности» при математическом описании процессов термообработки, а комбинированный метод предполагает, что на уровне микропроцесса краевая задача должна быть решена аналитически. Представление решения в аналитической форме имеет большую теоретическую ценность и практическую значимость. Аналитическое, в том числе и приближенное решение задачи, ориентированное на использование вычислительной техники, открывает более широкие возможности для моделирования, оптимизации и управления тепло- и массообменными процессами.

Глубокий анализ аналитических методов решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами дан в работах Карташова Э.М. [8, 20].

Круг вопросов, при которых приходится сталкиваться с необходимостью решения уравнения теплопроводности (а также диффузии, волновых и т.п.) для областей, форма которых изменяется со временем, весьма широк и включает как случаи, когда движение границ задано, так и более сложные, когда это движение требуется определить из дополнительных условий задачи (задача Стефана [11]). Именно последний тип задач будет интересовать нас в большей степени. Подобные проблемы возникают при теоретическом изучении процессов переноса энергии или массы, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, в задачах фильтрации, в задачах кинетической теории роста кристаллов, плавления и т.д.

С математической точки зрения краевые задачи теплопроводности в области с движущейся границей (так называемые обобщенные краевые задачи) принципиально отличны от классических задач теплопроводности. Вследствие зависимости характеристического размера области переноса теплоты от времени к этому типу задач в общем случае не применимы классические методы разделения переменных и интегральные преобразования Фурье, так как, оставаясь в рамках классических методов математической физики, не удастся согласовать решения уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Развитие этой проблемы более успешно шло для задач первого типа, когда закон перемещения границы известен. Точные решения задач подобного типа удавалось получить с помощью удачных догадок, искусственных приемов, причем для весьма ограниченного числа случаев движения границы (линейного или параболического), отрабатывая при этом классические методы теории решения дифференциальных уравнений математической физики: тепловых потенциалов [21]; контурного интегрирования [22]; разложения искомой функции в ряд [23, 24]; «мгновенных» собственных функций Гринберга [25] и другие.



Первые попытки получить аналитическим путем точное решение краевой задачи обобщенного типа в области с границей, движущейся по произвольному закону, приводили к системе интегральных уравнений Вольтера II рода (или интегро-дифференциальных), разрешить эту задачу не удавалось вследствие сложности ядер уравнения системы. Устанавливались лишь качественные результаты для такого рода системы, доказывалось существование решения и его единственность [26].

Решение этой проблемы значительно продвинулось вперед в 70-х годах после выхода в свет серии фундаментальных работ Г.А. Гринберга с сотрудниками [6, 25-28]. Было получено функциональное преобразование, переводящее краевую задачу теплопроводности обобщенного типа в подвижную систему координат, в которой преобразованное уравнение теплопроводности допускало точное решение классическим методом разделения переменных для весьма широкого класса новых законов движения границы при соответствующих граничных условиях.

В дальнейшем в [29] было получено точное решение первой обобщенной краевой задачи в конечной области с границей, движущейся по произвольному закону в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Решение второй и третьей краевых задач обобщенного вида во многих случаях приводится в конечном счете к классическим задачам, но с переменным во времени коэффициентом в граничном условии III рода. Этот класс задач рассмотрен в [30-32].

Весьма эффективным методом решения задачи Стефана является метод дифференциальных рядов. Такое название метод получил потому, что его практическое использование предполагает вычисление производных любого порядка от выражений специального вида в общем члене ряда. Метод дает возможность в области с произвольно движущейся границей получить аналитическое решение краевой задачи теплопроводности при любом виде граничных условий. Первая формулировка метода содержится в работе Б.Я. Любова [33]. Ме-

тод дифференциальных рядов получил развитие в работах Карташова Э.М. [29, 24, 20].

В работе [7] метод дифференциальных рядов был использован для моделирования процесса сублимации при обработке металла лучом лазера. Постановка задачи имела следующий вид:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=y(t)} = q - \gamma Q_0 \frac{dy}{dt}; \quad q = const;$$

$$T(\infty, t) = T_0; \quad T(x, 0) = T_0;$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{T(y(t), t)}\right).$$

Здесь  $Q_0$  – разность удельных энтальпий твердой и газовой фазы;  $v_0 = \bar{c}(3/4\pi)^{1/3}$ , где  $\bar{c}$  – средняя скорость звука;  $\alpha = \mu A / R$ ;  $\mu$  – теплота сублимации при 0°К, рассчитанная на единицу массы;  $A$  – атомный вес металла;  $R$  – газовая постоянная;  $q$  – падающий на поверхность полупространства  $x \geq 0$  поток теплоты.

Требовалось определить  $y(t)$  и  $T(x, t)$  при  $0 \leq x \leq y(t)$ . Получено приближенное аналитическое решение данной задачи. При этом искомые функции найдены в виде бесконечного ряда дифференцируемых функций.

С использованием данного метода в работе [7] проведен анализ плавления тел простейшей формы. Отмечено, что строгое доказательство сходимости полученных рядов требует специального рассмотрения, не попадающего в рамки данного исследования. Вместе с тем, сопоставление нулевого и первого приближения решения задачи с известными результатами инженерных расчетов позволяет судить о сходимости метода. Изложенный метод решения задачи более эффективен, чем описанные в литературе инженерные и численные методы, т.к. во-первых, позволяет описать процесс на протяжении всего его течения, а не только на завершающей стадии, во-вторых, учесть влияние начального теп-

лосодержания на динамику изменения размеров и температуры тела. В силу указанных причин именно метод дифференциальных рядов был взят нами на вооружение при решении краевых задач теплопроводности с движущейся границей фазового или химического превращения.

В математическом аспекте главной особенностью таких задач является специфическая связь скорости перемещения поверхности превращения и температуры на этой поверхности.

Данная особенность позволила нам успешно применить метод дифференциальных рядов для решения соответствующих краевых задач с движущейся границей при моделировании процесса сублимации сферической частицы, гетерогенной химической реакции частицы сферической формы, удаления органического растворителя из основы синтетической кожи (сушка пластины), испарения для тела цилиндрической формы (сушка волокна).

Далее проанализируем с этих позиций кинетические уравнения процесса сублимации, гетерогенной химической реакции и процесса испарения с участием твердой фазы.

1. В процессе сублимации, для того чтобы учесть реальный массообмен на границе твердой и газовой фаз, необходимо знать зависимость равновесного давления пара от обратной температуры:

$$\ln P_H = M_2 + M_1 \frac{1}{T}, \quad (1)$$

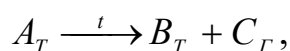
где  $P_H$  – давление насыщенных паров;  $T$  – температура на поверхности;  $M_1, M_2$  – постоянные коэффициенты.

Соответственно, уравнение, задающее закон движения фронта сублимации  $\rho(t)$ , имеет вид:

$$-\gamma \frac{d\rho}{dt} = \beta \left[ \exp \left( M_2 + M_1 \frac{1}{T(\rho(t), t)} \right) - P_G \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\gamma$  – плотность частицы;  $\rho(t)$  – закон движения поверхности сублимирующейся частицы;  $\beta$  – коэффициент массоотдачи;  $P_G$  – давление парогазовой смеси.

2. При описании гетерогенной химической реакции, протекающей по схеме:



константу скорости реакции можно представить следующим образом:

$$k = k_0 \exp(-Q/(RT)) \cdot \left(1 - \frac{P}{P_0}\right), \quad (3)$$

где  $k$  – константа скорости разложения;  $Q$  – энергия активации реакции,  $T$  – температура в реакционной зоне;  $\left(1 - \frac{P}{P_0}\right)$  – множитель, позволяющий учитывать кинетику внешнего массообмена в процессе реакции, т.е. условия отвода газового продукта реакции;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Соответственно уравнение, задающее закон движения фронта реакции в сферической частице, запишется в форме:

$$-\gamma \frac{d\rho}{dt} = k_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT(\rho(t), t)}\right) \cdot C \frac{\Delta P}{P_0}. \quad (4)$$

3. Кинетика массообмена на границе испарения определяется изменением концентрации паров испаряемой жидкости вблизи движущейся границы испарения. Для того чтобы учесть реальный массообмен на границе испарения, необходимо знать зависимость равновесного давления пара от температуры. В подавляющем большинстве случаев экспериментальные результаты представляются в виде линейной зависимости логарифма давления от обратной температуры. Следовательно, уравнение, задающее закон движения фронта испарения жидкости в твердом пористом теле будет иметь вид, аналогичный уравнению (2).

Таким образом, общим для указанных процессов фактором является связь скорости перемещения фронта превращения  $\frac{d\rho}{dt}$  и температуры  $T(\rho(t), t)$  на этой поверхности, что позволяет решать данные задачи методом дифференциальных рядов.

Ниже показано, как проводится моделирование тепломассобмена в ряде химико-технологических процессов на основе решения методом дифференциальных рядов задачи нестационарной теплопроводности с движущейся границей.

## **2. Задача теплопроводности для шара с внутренними источниками теплоты и движущейся границей (задача Стефана) при моделировании процесса сублимации частицы в потоке газа переменной температуры**

### **2.1. Общие положения. Физическая модель**

Реализация парофазного крашения волокнистого материала возможна на основе совмещения процессов измельчения, механической активации – сублимации дисперсного красителя. Для математического описания совмещенного процесса измельчения – механической активации – сублимации твердого дисперсного материала в аппаратах интенсивного действия [34] требуется построение физической и математической модели процесса на уровне частицы. Построим математическую модель сублимации сферической частицы на основе решения задачи Стефана. Данную задачу удастся решить аналитически, т.к. имеется специфическая связь скорости перемещения поверхности сублимации от температуры на этой поверхности (см. далее уравн. 2.4).

Имеющиеся в литературе данные [35] позволяют представить процесс сублимации частицы в виде двух этапов: 1) нагрев частицы, 2) собственно сублимация частицы.

Мы изучали процесс сублимации дисперсных частиц в комбинированном аппарате типа измельчитель-активатор-сублиматор ударного принципа действия. Отличительной особенностью процесса в аппарате такого типа является его проведение при высоких скоростях движения газовой и твердой фазы [34]. Вследствие этого частицы твердой фазы находятся во взвешенном состоянии, идет интенсивный теплообмен ее с высокоскоростной газовой средой.

Газовый поток получает тепло от обогреваемой стенки сублиматора. Кроме того он прогревается за счет деформаций вследствие активного турбулентного движения и ударного нагружения. Очевидно, температура газовой среды имеет переменный во времени характер. К частице твердой фазы тепло подводится от нескольких источников и, прежде всего от газовой фазы, и от теплообменной поверхности. Кроме того, в частице действуют внутренние источники теплоты различной физической природы, создаваемые импульсным ударным нагружением. Анализируя эволюцию внутренних источников теплоты, мы пришли к выводу [36], что они имеют импульсный характер. В силу специфичности и сложности расчета мощности для каждого типа внутреннего источника в первом приближении можно положить, что внутри частицы действуют мгновенные источники теплоты с определенной мощностью и распределенные по радиусу равномерно.

Требование малости времени проведения процесса, что особенно важно для органических веществ, склонных к деструкции, заставляет искать дополнительные способы интенсификации подвода тепловой энергии к частице. Одним из способов интенсификации энергоподвода является сочетание лучистого и конвективного теплообмена [37, 38]. Это возможно, если установить в аппарате радиационные источники теплоты. Лучистая энергия более равномерно поглощается толщей вещества и способствует процессу объемной сублимации [37]. Предполагаем, что лучистый теплообмен осуществляется по закону Бугера [39]. Энергия излучения поглощается не поверхностью, а некоторой толщей вещества. Поэтому в веществе появляются объемные источники теплоты, интенсивность которых уменьшается вдоль направления распространения излучения.

Таким образом, в результате тепловых эффектов, обусловленных подводом внешней тепловой энергии, а также возникающих в результате механоактивации, частица за короткое время получает количество теплоты, достаточное для осуществления процесса сублимации.

Частица, попадающая в зону сублимации, имеет на поверхности температуру, равную температуре начала сублимации. Повышение плотности дефектов

структуры (дислокаций, вышедших на поверхность частицы, вакансий, пор) выше равновесной вызывает увеличение скорости сублимации. При этом происходит понижение как температуры начала испарения, так и энтальпии сублимации.

Кинетика внешнего массообмена в процессе сублимации определяется изменением концентрации паров сублимата вблизи движущейся поверхности частицы. Разность температур между основной массой парогазовой смеси и поверхностью материала обеспечивает подвод тепла к сублимируемой частице, а разность концентраций создает поток пара от ее поверхности.

В процессе сублимации частицы происходит как ее прогрев, так и уменьшение радиуса в соответствии с условиями внешнего массообмена. Следовательно, для математического описания процесса сублимации дисперсных частиц на базе аппаратов ударного действия необходимо решение задачи теплопроводности шара при граничных условиях третьего рода, неравномерном начальном распределении температуры и внутренних источниках теплоты, порожденных ударным нагружением и подводом лучистой энергии. Требуется также решить задачу о кинетике изменения размеров и температуры сублимирующейся сферической частицы, т.е. решить аналитически задачу теплопроводности с движущейся границей. На решении этой задачи мы и остановимся.

## **2.2. Математическая модель**

В соответствии с физическими посылками, рассмотренными выше, построим математическую модель сублимации одиночной частицы твердой фазы в сублиматоре роторно-импульсного типа. Предполагаем, что этап прогрева ее закончен, и на поверхности частицы достигнута некоторая температура  $T_0$ , соответствующая началу процесса сублимации. При этом внутри частицы имеется определенное неравномерное распределение температур.

Для того чтобы учесть реальный массообмен на границе твердой и газовой фаз, необходимо знать зависимость равновесного давления пара от температуры. В подавляющем большинстве случаев экспериментальные результаты

представляются в виде линейной зависимости логарифма давления от обратной температуры:

$$\ln P = a - \frac{b}{T}.$$

Математическая формулировка задачи о сублимации сферической частицы в потоке газа переменной температуры при наличии в ней внутренних источников теплоты, порожденных ударным нагружением и лучистым теплообменом, с учетом массообмена между поверхностью частицы и окружающей средой сводится к задаче теплопроводности с подвижной границей при соответствующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = & a \left( \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{c\gamma} \sum_{i=1}^m A_i \delta(t - t_i) + \\ & + \frac{\mu}{c\gamma} (1 - \omega) E(0) \exp(-\mu(R - r)), \quad t > 0, \quad 0 < r < R; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$T(r,0) = f(r); \quad f(R) = T_0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0; \quad T(0,t) \neq \infty; \quad (2.3)$$

$$-\gamma \frac{d\rho}{dt} = \beta (\exp(M_2 + M_1(1/T(\rho(t),t))) - P(t)); \quad (2.4)$$

$$\rho(0) = R; \quad (2.5)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=\rho(t)} = \alpha_{общ} (\Theta_c - T(\rho(t),t)) + \gamma Q_0 \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.6)$$

Найти  $\rho(t)$  и  $T(r, t)$  при  $0 \leq r \leq \rho(t)$ .

Здесь  $T(r, t)$  – поле температур сферической частицы;  $R, r$  – соответственно начальный и текущий радиус частицы;  $\rho(t)$  – закон движения поверхности сублимирующейся частицы;  $Q_0$  – удельная теплота сублимации;  $M_1, M_2$  – постоянные коэффициенты в уравнении  $\ln P_H = M_2 + M_1/T$ , задающем зависимость



логарифма давления насыщенных паров от обратной температуры;  $P(t)$  – давление парогазовой смеси;  $\beta$  - коэффициент массоотдачи.

Для решения данной задачи применим метод дифференциальных рядов [7]. Решение находим в форме ряда:

для  $r \neq 0$

$$T(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n+1)!} \frac{d^n}{dt^n} s(t) + \frac{1}{c\gamma} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(t-t_i) + W_0 \exp(\mu r) \cdot \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(a\mu^2 t) - 1) + \frac{2}{r} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(a\mu^2 t) + \frac{1}{\mu} t \exp(a\mu^2 t) \right) \right); \quad (2.7)$$

для  $r = 0$

$$T(0,t) = s(t) + \frac{c}{\gamma} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(t-t_i). \quad (2.8)$$

Здесь  $\delta_0(t-t_i)$  – единичная функция Хевисайда;

$$W_0 = \frac{\mu}{c\gamma} (1-w) E(0) \exp(-\mu R);$$

$s(t)$  – произвольная функция, вид которой должен обеспечить сходимость ряда.

Используя методы операционного исчисления, нетрудно показать, что функция (2.7) удовлетворяет уравнению (2.1). Подставив (2.7) в (2.4) и (2.6), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(t)^{2n}}{(2n+1)! a^n} \frac{d^n}{dt^n} s(t) + \frac{1}{c\gamma} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(t-t_i) + W_0 \exp(\mu \rho(t)) \cdot \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(a\mu^2 t) - 1) + \frac{2}{\rho(t)} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(a\mu^2 t) + \frac{1}{\mu} t \exp(a\mu^2 t) \right) \right) = M_3 \ln \frac{l_0}{-\rho'(t) + \frac{\beta}{\gamma} P(t)}; \quad (2.9)$$

$$Q_0 \gamma \frac{d\rho(t)}{dt} = \alpha_{обм} \left( \Theta(t) - M_3 \ln \frac{l_0}{-\rho'(t) + \frac{\beta}{\gamma} P(t)} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(\rho(t))^{2n}}{(2n+1)! a^n} \frac{d^n}{dt^n} s(t) + W_0 \mu \exp(\mu \rho(t)) \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(a\mu^2 t) - 1) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2}{\rho(t)} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(a\mu^2 t) + \frac{1}{\mu} t \exp(a\mu^2 t) \right) \right) + W_0 \exp(\mu \rho(t)) \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left( - \frac{2}{\rho(t)} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(a\mu^2 t) + \frac{1}{\mu} t \exp(a\mu^2 t) \right) \right) \right). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M_3 = M_1; \quad l_0 = \frac{\beta}{\gamma} (\exp(M_2)). \tag{2.11}$$

Температуру на поверхности представили в соответствии с уравнением (2.4) в виде:

$$T(\rho(t), t) = M_3 \ln^{-1} \frac{l_0}{-\rho'(t) + \frac{\beta}{\gamma} P(t)}. \tag{2.12}$$

В математическом аспекте главной особенностью задачи о сублимации является специфическая связь скорости перемещения поверхности твердого тела и температуры на этой поверхности [15, 40].

Система уравнений (2.9, 2.10) позволяет определить функции  $s(t)$  и  $\rho(t)$ . Она описывает кинетику изменения размеров сублимирующейся частицы и температуру твердой фазы.

Введем далее новые переменные:

$$\begin{aligned}
\tau = \frac{at}{R^2}; \quad Y(\tau) = \frac{R - \rho}{R}; \quad N = \frac{Q_0}{cM_3}; \\
Bi' = \frac{\alpha_{общ} R}{\lambda}; \quad \varphi(\tau) = \frac{s(\tau)}{M_3}; \quad \Theta_1(\tau) = \frac{\Theta(\tau)}{M_3}. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

В новых переменных уравнения (2.9) и (2.10) можно переписать в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-Y(\tau))^{2n}}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi(\tau) = \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau)} - \frac{1}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) -$$

$$\frac{W_0}{M_3} \exp(\mu R(1-Y(\tau))) \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2\mu^2\tau) - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{R(1-Y(\tau))} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{1}{\mu} \tau \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right); \quad (2.14)$$

$$N \frac{dY(\tau)}{d\tau} = Bi' \left( \Theta_1(\tau) - \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau)} \right) -$$

$$- \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-Y(\tau))^{2n-1}}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi(\tau) + \frac{RW_0}{M_3} \mu \exp(\mu R(1-Y(\tau))) \cdot \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2\mu^2\tau) - 1) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{2}{R(1-Y(\tau))} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{R^2}{a\mu} \tau \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right) +$$

$$+ \frac{RW_0}{M_3} \exp(\mu R(1-Y(\tau))) \cdot \left( -\frac{2}{R^2(1-Y(\tau))^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{R^2}{a\mu} \tau \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right). \quad (2.15)$$

Излагаемый метод позволяет решить задачу о сублимации сферической частицы при произвольном начальном распределении температур. Однако для конкретности дальнейшего изложения будем считать, что функцию  $f(r)$  можно аппроксимировать выражением:

$$f(r) = D_0 + D_1 r^2, \quad (2.16)$$

где  $D_0, D_1$  – известные постоянные величины. Тогда

$$\varphi(0) = \frac{D_0}{M_3}; \quad \frac{d\varphi}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{6D_1 r^2}{M_3}; \quad \frac{d^n \varphi}{d\tau^n} \Big|_{\tau=0, n>1} = 0. \quad (2.17)$$

Систему нелинейных уравнений (2.14), (2.15) будем решать методом последовательных приближений (методом малого параметра) [7]. Введем условный параметр малости  $\xi$ , который в конечном результате можно положить равным единице, тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\xi Y(\tau))^{2n}}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi(\tau) = \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau)} - \frac{1}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) - \\ - \frac{W_0}{M_3} \exp(\mu R(1-\xi Y(\tau))) \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2\mu^2\tau) - 1) \right) + \\ + \frac{2}{R(1-\xi Y(\tau))} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{1}{\mu} \tau \exp(R^2\mu^2\tau) \right); \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} N \frac{dY(\tau)}{d\tau} = Bi' \left( \Theta_1(\tau) - \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau)} \right) - \\ - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-\xi Y(\tau))^{2n-1}}{(2n+1)!} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(\tau) + \frac{RW_0}{M_3} \mu \exp(\mu R(1-\xi Y(\tau))) \cdot \right. \\ \cdot \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2\mu^2\tau) - 1) + \frac{2}{R(1-\xi Y(\tau))} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{R^2}{a\mu} \tau \exp(R^2\mu^2\tau) \right) + \right. \\ \left. + \frac{RW_0}{M_3} \exp(\mu R(1-\xi Y(\tau))) \cdot \left( -\frac{2}{R^2(1-\xi Y(\tau))^2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{R^2}{a\mu} \tau \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Введем обозначение

$$g(\tau) = \frac{a}{R} Y'(\tau) + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau). \quad (2.20)$$

Будем искать функции  $\varphi(\tau)$  и  $Y(\tau)$  в форме рядов:

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \xi \varphi_1(\tau) + \xi^2 \varphi_2(\tau) + \dots, \quad (2.21)$$

$$Y(\tau) = Y_0(\tau) + \xi Y_1(\tau) + \xi^2 Y_2(\tau) + \dots \quad (2.22)$$

В соответствии с (2.20), (2.22) функция  $g(\tau)$  также будет иметь некоторое разложение по степеням  $\xi$ :

$$g(\tau) = g_H(\tau) + \xi g_1(\tau) + \xi^2 g_2(\tau) + \dots, \quad (2.23)$$

где

$$g_H = g(\tau)|_{\tau=0}.$$

Несложно заметить, что

$$\frac{a}{R} Y_0'(\tau) = g_H - \frac{\beta}{\gamma} P(\tau); \quad (2.24)$$

$$\frac{a}{R} Y_1'(\tau) = g_1(\tau); \quad (2.25)$$

$$\frac{a}{R} Y_2'(\tau) = g_2(\tau); \quad (2.26)$$

Тогда можно получить следующее разложение в ряд по степеням  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau)} &= \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H} + \xi \frac{g_1(\tau)}{g_H \ln^2 \frac{l_0}{g_H}} + \\ &+ \frac{\xi^2}{2!} \left( \frac{2g_1^2(\tau)}{g_H^2 \ln^3 \frac{l_0}{g_1}} + \frac{2g_2(\tau)}{g_H \ln^2 \frac{l_0}{g_1}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

Разложим  $\exp(\mu(1-\xi Y(\tau)))$  в ряд по степеням  $\xi$  и умножим обе части выражения (2.18) на  $(1-\xi Y(\tau))$ , а (2.19) на  $(1-\xi Y'(\tau))$ . Подставим ряды (2.21), (2.22), (2.27) в полученные уравнения и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ . Получим системы уравнений соответственно для определения функций  $\varphi(\tau)$  и  $Y(\tau)$  в нулевом приближении, т.е.  $\varphi_0(\tau)$  и  $Y_0(\tau)$ , в первом приближении -  $\varphi_1(\tau)$  и  $Y_1(\tau)$  и так далее.

В нулевом приближении:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau) = \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H} - \frac{1}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) - \\
& \frac{W_0}{M_3} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^k}{k!} (\exp(R^2 \mu^2 \tau) - 1) + \right. \\
& \left. \frac{2}{R} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2 \mu^2 \tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2 \mu^2 \tau) \right) \right); \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N \frac{dY_0(\tau)}{d\tau} &= Bi' \left( \Theta_1(\tau) - \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau) - \frac{RW_0\mu}{M_3} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^k}{k!} \right) \cdot \\
&\cdot \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2 \mu^2 \tau) - 1) + \frac{2}{R} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2 \mu^2 \tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2 \mu^2 \tau) \right) \right) - \\
&- \frac{2}{\mu R^2} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2 \mu^2 \tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2 \mu^2 \tau) \right). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

В первом приближении:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_1(\tau) - Y_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau) = \\
& = Y_0(\tau) \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H} + \frac{g_1(\tau)}{g_H \ln^2 \frac{l_0}{g_H}} + \\
& + Y_0(\tau) \frac{1}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) - \frac{W_0}{M_3} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^k}{k!} \right) (-Y_0(\tau) \cdot \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2 \mu^2 \tau) - 1)) + \\
& + Y_0(\tau) \frac{W_0}{M_3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu R)^k}{(k-1)!} \right) \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2 \mu^2 \tau) - 1) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{R} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2 \mu^2 \tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2 \mu^2 \tau) \right) \right); \tag{2.30}
\end{aligned}$$

$$N \frac{dY_1(\tau)}{d\tau} - 2NY_0(\tau) \frac{dY_0(\tau)}{d\tau} = 2Y_0(\tau) Bi'' \left( \Theta_1(\tau) - \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H} \right) + 2Y_0(\tau) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \Phi_0(\tau) + 2Y_0(\tau) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \Phi_0(\tau) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \Phi_1(\tau) - \frac{RW_0\mu}{M_3} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^k}{k!} \right) \cdot \\
& \cdot \left( \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2\mu^2\tau) - 1) (-2Y_0(\tau)) - \frac{2Y_0(\tau)}{R} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right) + Y_0(\tau) \cdot \frac{RW_0\mu}{M_3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu R)^k}{(k-1)!} \right) \right) \cdot \\
& \cdot \left( \left( \frac{1}{a\mu^2} (\exp(R^2\mu^2\tau) - 1) + \frac{2}{R} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{2}{\mu R^2} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2\mu^2\tau) + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2\mu^2\tau) \right) \right). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Полученные уравнения решаем методом операционного исчисления, используя преобразования Лапласа – Карсона [41] и учитывая начальные условия (2.17), а также уравнения (2.24 – 2.26).

Приближенное решение системы уравнений (2.24 – 2.26), (2.28 – 2.31) имеет различное выражение для больших и малых значений числа Фурье  $\tau$ . Это связано с вопросом сходимости рядов, входящих в решение, при различных значениях  $\tau$ .

Для малых значений числа Фурье ( $\tau < 0,1$ ) нами найдено следующее решение задачи в нулевом и первом приближении:

$$Y_0(\tau) = \frac{R}{a} l_0 \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\tau\right) - \frac{R\beta}{a\gamma_0} \int_0^\tau P(t) dt; \tag{2.32}$$

$$\Phi_0(\tau) = \left(-N \frac{2R}{a} - \frac{D_0 Bi'}{M_3}\right) \left(\int_0^\tau \frac{1}{2t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \left(\frac{1}{2t} - 1\right) \frac{1}{Bi' - 1} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (1 - \exp((Bi' - 1)^2(\tau - t))\operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{\tau - t}))dt + 2N \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau P(\tau - t) \cdot \\
& \cdot \left( \int_0^t \exp((Bi' - 1)^2(t - \varepsilon))\operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{t - \varepsilon}) \left( \frac{1}{2\varepsilon} - 3 \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon^5}} \right) \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4\varepsilon}\right) d\varepsilon \right) dt + \\
& + 2Bi' \int_0^\tau \Theta_1(\tau - t) \left( \int_0^t \exp((Bi' - 1)^2(t - \varepsilon))\operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{t - \varepsilon}) \left( \frac{1}{2\varepsilon} - 3 \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon^5}} \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4\varepsilon}\right) d\varepsilon \right) dt + \frac{D_0}{M_3} + \frac{3!D_1R^2\tau}{M_3} - \frac{6Bi'D_1R^2}{M_3} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau - t)}} \exp\left(-\frac{1}{4(\tau - t)}\right) \frac{1}{Bi' - 1} \cdot \\
& \cdot (\exp((Bi' - 1)^2 t)\operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{t}) dt - \frac{(Bi' + 2)D_1R^2}{M_3} \int_0^\tau \frac{1}{2t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot \\
& \cdot \left( \frac{1}{2t} - 1 \right) \frac{1}{Bi' - 1} (1 - \exp((Bi' - 1)^2(\tau - t))\operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{\tau - t}))dt) - \frac{2R^2W_0S}{a\mu M_3} \cdot \\
& \cdot \left( \frac{Bi'}{R} + \mu - \frac{1}{R} \right) \int_0^\tau \exp(q(\tau - t)) (\exp(\sqrt{q})\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau - t}} + \sqrt{(\tau - t)q}\right) + \exp(-\sqrt{q})) \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau - t}} + \sqrt{(\tau - t)q}\right) \left( \frac{(Bi' - 1)^2}{(Bi' - 1)^2 - q} \exp((Bi' - 1)^2 t)\operatorname{erfc}\sqrt{t(Bi' - 1)^2} \right) + \\
& + \frac{(Bi' - 1)\sqrt{q}}{(Bi' - 1)^2 - q} \exp(qt)\operatorname{erfc}(\sqrt{qt}) - \frac{q}{(Bi' - 1)^2 - q} \exp(qt) dt - \frac{2Bi'}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) \cdot \\
& \cdot \int_0^{\tau - \tau_i} \frac{1}{2t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \left( \frac{1}{2t} - 1 \right) \frac{1}{Bi' - 1} (1 - \exp((Bi' - 1)^2(\tau - \tau_i - t))) \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{\tau - \tau_i - t}) dt) - \frac{qW_0sz}{2M_3} \left( \mu Bi' + \mu^2 R - \frac{2Bi'}{R} - 2\mu + \frac{2}{R} \right) \cdot \\
& \cdot \int_0^t \exp((Bi' - 1)^2 t)\operatorname{erfc}((Bi' - 1)\sqrt{t}) \exp q(\tau - t) (\exp(\sqrt{q})\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau - t}} + \right. \\
& + \left. \exp(-\sqrt{q(\tau - t)}) + \exp(-\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau - t}} + \sqrt{(\tau - t)q}\right) \right) dt. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$Y_1(\tau) = g_H \left( \ln \frac{l_0}{g_H} \right)^2 \left( Ng_H \left( \ln \frac{l_0}{g_H} \right)^2 + Bi' \frac{a}{R} \right)^{-1} \int (2N\psi_2(t) - 2Bi'h_4(t)) dt -$$



$$\begin{aligned}
& - \int_0^\tau \left( -\frac{1}{G_1} + \frac{G_{1+1}}{G_1} \exp(G_1^2(\tau-t) \operatorname{erfc}(G_1\sqrt{\tau-t})) \right) (Gh_1(t) + (G+2)\psi_1(t) + 2h_2(t) + \\
& + 2N\psi_2(t) - 2Bi'h_4(t)) dt + \frac{G}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) l_0 \frac{R}{a} \exp\left(\frac{M_3}{T_0}\right) \left( -\frac{1}{G_1} \frac{(\tau - \tau_i)^2}{2} - \right. \\
& - \frac{G_1 + 1}{G_1^3} (\tau - \tau_i) + \frac{G_1 + 1}{G_1^5} (\exp(G_1^2(\tau - \tau_i)) - 1) - \frac{G_1 + 1}{|G_1|^5} \exp(G_1^2(\tau - \tau_i)) \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc}\sqrt{G_1^2(\tau - \tau_i)} + \frac{G_1 + 1}{G_1^4} 2\sqrt{\frac{\tau - \tau_i}{\pi}} + \frac{G_1 + 1}{G_1^2} \sqrt{\frac{1}{\pi(\tau - \tau_i)}} \frac{4(\tau - \tau_i)^2}{3} + \frac{\tau_i}{G_1} \left( 2\sqrt{\frac{\tau - \tau_i}{\pi}} - \right. \\
& - \frac{1}{G_1} (1 - \exp(G_1^2(\tau - \tau_i)) \operatorname{erfc}(G_1\sqrt{\tau - \tau_i})) - \tau_i ((\tau - \tau_i) \frac{1}{G_1} - \\
& + \frac{\exp(G_1^2(\tau - \tau_i)) - 1}{G_1^3} + |G_1|^{-3} \exp(G_1^2(\tau - \tau_i)) \operatorname{erfc}\sqrt{G_1^2(\tau - \tau_i)} - \frac{2\sqrt{\tau - \tau_i}}{G_1^2\sqrt{\pi}}) - \\
& - \frac{R\beta}{a\gamma} \int_0^\tau P(\tau-t) (t - (G_1 + 1)) \left( \frac{t}{G_1} + \frac{1 - \exp(G_1^2 t)}{G_1^3} \right) |G_1|^{-3} \exp(G_1^2 t) \operatorname{erfc}\sqrt{G_1^2(\tau - \tau_i)} - \\
& - \frac{2\sqrt{t}}{G_1^2\sqrt{\pi}}) dt + - \frac{R\beta}{a\gamma} \left( \int_0^\tau P(\tau-t) dt \right) \left( \frac{1}{G_1} (2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{1}{G_1} (1 - \exp(G_1^2 \tau) \operatorname{erfc}(G_1\sqrt{\tau}))) - \right. \\
& - \frac{1}{G_1} \left( \tau - \frac{\exp(G_1^2 \tau) - 1}{G_1^2} \right) - (|G_1| \operatorname{erfc}\sqrt{G_1^2 \tau} - \frac{2\sqrt{\tau}}{G_1^2\sqrt{\pi}}) \left. \right) + F_2 \frac{R}{a} l_0 \cdot \\
& \cdot \exp\left(-\frac{M_0}{T_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{q^2}\right) (1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau)) - \int_0^\tau (\tau - t) \exp(q(\tau - t)) (1 - \exp(G_1^2 t) \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc}(G_1\sqrt{t})) dt + G_1 \left( \frac{1}{(G_1^2 - q)^2} \frac{\exp(G_1^2 \tau) - 1}{G_1^2} - \frac{1}{(G_1^2 - q)^2} \frac{\exp(q\tau) - 1}{q} - \frac{1}{(G_1^2 - q)} \right. \\
& \cdot \left. \left(\frac{1}{q^2}\right) (1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau)) \right) - \left( \frac{1}{(G_1^2 - q)^2} \frac{\exp(q\tau) - 1}{q} - \frac{1}{(G_1^2 - q)} \left(\frac{1}{q^2}\right) (1 - \right. \\
& - \exp(q\tau)(1 - q\tau)) \left. \right) - \frac{1}{(G_1^2 - q)^2} \exp(G_1^2 \tau) \frac{\operatorname{erf}(-G_1\sqrt{t})}{-|G_1|} + \frac{1}{(G_1^2 - q)^2} \cdot \\
& \cdot \frac{\exp(q\tau) \operatorname{erf}(-\sqrt{qt})}{\sqrt{q}} - \frac{1}{(G_1^2 - q)} \int_0^\tau \frac{1}{q} \exp(qt) \operatorname{erf}\sqrt{qt} \exp(q(\tau - t)) dt) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - F_2 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau \exp(-q(\tau-t)) P(\tau-t) \left( \frac{\exp(qt)-1}{q} + \frac{G_1+1}{(G_1^2-q)} \frac{1}{|G_1|} \exp(G_1^2 t) \operatorname{erf} \sqrt{G_1^2 t} + \right. \\
& + \frac{G_1+1}{G_1^2+q} \sqrt{\frac{1}{q}} \exp(qt) \operatorname{erf}(\sqrt{qt}) + \left. \frac{(G_1+1)G_1}{G_1^2-q} \frac{\exp(G_1^2 t)-1}{G_1^2} - \frac{(G_1+1)G_1}{G_1^2-q} \right) dt + \\
& + F_1 \frac{R}{a} l_0 \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\right) \left( -\frac{\tau^2}{2G_1} - \frac{G_1+1}{G_1^3} \tau + \frac{G_1+1}{G_1^3} \frac{\exp(G_1 \tau)-1}{G_1} + \right. \\
& + \frac{1}{|G_1|^5} \exp(G_1^2 \tau) \operatorname{erf} \sqrt{G_1^2 \tau} - \\
& - \frac{1}{G_1^4} 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{1}{G_1^2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{4\tau^2}{3} \left. \right) - F_1 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau P(\tau-t) \left( -\frac{t}{G_1} + (G_1+1) \left( \frac{\exp(G_1^2 t)-1}{G_1^3} - \right. \right. \\
& - |G_1|^{-3} \exp(G_1^2 t) \operatorname{erf} \sqrt{G_1^2 t} + \left. \frac{1}{G_1^2} 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \right) dt + F_3 \frac{2R}{a} l_0 \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\right) \left( (-q)^{-3} (1 - \right. \\
& - \exp(q\tau) (1 - q\tau + \frac{(q\tau)^2}{2})) \left( 1 - \frac{G_1^2}{G_1^2-q} \right) + \frac{\exp(G_1^2 \tau)-1}{(G_1-q)^3} - \frac{2q+1-G_1^2}{(q+1)(G_1^2-q)^3} G_1^2 \cdot \\
& \cdot \frac{\exp(q\tau)-1}{q} + \frac{-G_1^2}{(q+1)(G_1^2-q)^2} \left( \frac{1}{q^2} (1 - \exp(q\tau) (1 - q\tau)) - \operatorname{sign}(G_1) \cdot \right. \\
& \cdot (G_1^2-q)^{-3} \exp(G_1^2 \tau) \operatorname{erf} \sqrt{G_1^2 \tau} + G_1 q^{-\frac{1}{2}} \frac{2q+1-G_1^2}{(q+1)(G_1^2-q)^3} \exp(q\tau) \operatorname{erf}(\sqrt{q\tau}) + \\
& + \frac{G_1}{(q+1)(G_1^2-q)^2} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{q}} \exp(q(\tau-t)) \operatorname{erf} \sqrt{qt} dt + \frac{G_1}{G_1^2-q} \int_0^\tau (\tau-t) \operatorname{erf} \sqrt{q\tau} dt + \\
& + F_3 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau \exp(q(\tau-t)) P'(\tau-t) \left( \frac{\exp(G_1^2 t)}{(G_1^2-q)} - \frac{\exp(qt)}{G_1^2-q} - (G_1+1) \frac{1}{(G_1^2-q)|G_1|} \cdot \right. \\
& \cdot \exp(G_1^2 t) \operatorname{erf} \sqrt{G_1^2 t} + \frac{(G_1+1)\exp(qt)}{(G_1^2-q)\sqrt{q}} \operatorname{erf} \sqrt{qt} + \frac{G_1}{G_1^2-q} \frac{\exp(G_1^2 t)-1}{G_1^2} - \frac{G_1}{G_1-q} \cdot \\
& \cdot \frac{\exp(q\tau)-1}{q} \left. \right) dt - \\
& - 2F_3 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau \exp(q(\tau-t)) P(\tau-t) \left( \frac{\exp(G_1^2 t)}{(G_1^2-q)^2} - \frac{\exp(qt)}{(G_1^2-q)^2} - \frac{t \exp(qt)}{(G_1^2-q)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(G_1 + 1) \frac{1}{(G_1^2 - q)|G_1|} \exp(G_1^2 t) \operatorname{erf} \sqrt{G_1^2 t} + \frac{(G_1 + 1) \exp(qt)}{(G_1^2 - q)^2 \sqrt{q}} \operatorname{erf} \sqrt{qt} + \\
& + \frac{(G_1 + 1) \exp(qt)}{(G_1^2 - q) \sqrt{q}} \cdot \\
& \cdot \int_0^t \operatorname{erf} \sqrt{q \varepsilon} d\varepsilon + \frac{G_1}{G_1^2 - q} \frac{\exp(G_1^2 t) - 1}{G_1^2} - \frac{G_1}{G_1^2 - q} \frac{\exp(qt) - 1}{q} - \frac{G_1}{G_1^2 - q} q^{-2} (1 - \\
& - \exp(qt)(1 - qt)) dt + \\
& + 2F_3 \frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) \frac{\tau^2}{2} - 2F_4 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau (\tau - t) P(t) dt + F_5 \frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) \cdot \\
& \cdot (\frac{1}{q^2})(1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau)) - F_5 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau \exp(q(\tau - t)) P(\tau - t) \frac{\exp(qt) - 1}{q} dt + \\
& + F_6 \frac{2R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) (-\frac{1}{q^3})(1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau + \frac{(q\tau)^2}{2})) + F_6 \frac{R \beta}{a \gamma} \cdot \\
& \cdot \int_0^\tau \exp(q(\tau - t)) P'(\tau - t) \frac{\exp(qt) - 1}{q} dt - F_6 \frac{2R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau \exp(q(\tau - t)) P(\tau - t) \cdot \\
& \frac{1 - \exp(qt)(1 - qt)}{q^2} dt; \tag{2.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tau) &= 2 \int_0^\tau (Gh_1(\tau - t) + (G + 2)\psi_1(\tau - t) + 2h_2(\tau - t) + 2N\psi_2(\tau - t) - 2Bi'h_4(\tau - t)) \cdot \\
& \cdot (\int_0^\tau \exp(-G_1^2(t - \varepsilon)) \operatorname{erfc}(G_1 \sqrt{t - \varepsilon}) (\frac{1}{2\varepsilon} - 3) \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon^5}} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp(-\frac{1}{4\varepsilon}) d\varepsilon) dt + \\
& + \frac{G_1}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i (\frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) \frac{2}{G_1} \cdot \\
& \cdot \delta_0(\tau - \tau_i) (2\sqrt{\frac{\tau - \tau_i}{\pi}} \exp(-\frac{1}{4(\tau - \tau_i)}) - \operatorname{erfc}(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau - \tau_i}}) - \\
& - \frac{1}{G_1} \operatorname{erfc}(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau - \tau_i}}) + \frac{1}{G_1} \exp(G_1 + (G_1^2(\tau - \tau_i))) \operatorname{erfc}(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau - \tau_i}} + G_1 \sqrt{\tau - \tau_i})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2R}{a} l_0 \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\right) \tau_i \delta_0(\tau - \tau_i) \exp(G_1^2(\tau - \tau_i)) \cdot \\
& \cdot (\exp(G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau - \tau_i}} + G_1 \sqrt{\tau - \tau_i}\right)) - \\
& \frac{2R}{a} \frac{\beta}{\gamma_0} \int_0^\tau P(\tau - t) \exp(G_1^2 t) (\exp(G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{t}} + G_1 \sqrt{t}\right)) dt + \\
& + \frac{2R}{a} \frac{\beta}{\gamma_0} \left(\int_0^\tau P(\tau) dt\right) \exp(G_1^2 \tau) \cdot (\exp(G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} + G_1 \sqrt{\tau}\right)) + \\
& + F_2 \frac{2R}{a} l_0 \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\right) \left(-\frac{G_1^2}{(q - G_1^2)^2} (\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} - \frac{\exp(G_1^1 \tau)}{2}\right) \cdot \right. \\
& \cdot (\exp(G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} + G_1 \sqrt{\tau}\right) + (\exp(-G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} - G_1 \sqrt{\tau}\right))) - \frac{q^2 - 2G_1^2 q}{q(q - G_1^2)^2} \cdot \\
& \cdot (\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} - \frac{\exp(q\tau)}{2}\right) (\exp(\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} + \sqrt{q\tau}\right) + \exp(-\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} - \sqrt{q\tau}\right))) + \\
& + \frac{q^2}{q + G_1^2} \int_0^\tau \frac{\exp(q(\tau - t))}{q} \frac{\exp(q\tau)}{2} (\exp(\sqrt{q}) + \exp(-\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{t}} - \right. \\
& \left. - \sqrt{qt}\right)) dt) - G_1 \left(-\frac{G_1^2}{(q - G_1^2)^2} \frac{\exp(q\tau)}{2\sqrt{q}} (\exp(\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} + \sqrt{q\tau}\right) + \exp(-\sqrt{q}) \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} - \sqrt{q\tau}\right)) + \frac{G_1^2}{(q - G_1^2)^2} \frac{\exp(G_1^1 \tau)}{2} (\exp(-G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} - G_1 \sqrt{\tau}\right) - \\
& - (\exp(G_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} + G_1 \sqrt{\tau}\right)) + \frac{q^2}{q + G_1^2} \int_0^\tau \frac{\exp(q(\tau - t)) - 1}{q} \left(\frac{\sqrt{q} \exp(q\tau)}{2} (\exp(-\sqrt{q})) \cdot \right. \\
& \cdot \exp(\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{t}} + \sqrt{qt}\right) + \sqrt{\frac{1}{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right)) dt) - F_2 \frac{2R}{a} \frac{\beta}{\gamma} \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{t}} - \sqrt{qt}\right) - \frac{G_1^1 \exp(G_1^1 t)}{2} \exp(|G_1|) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau}} + G_1 \sqrt{\tau}\right) + \left(\frac{q \exp(qt)}{(q - G_1^2)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{G_1 \sqrt{q} \exp(qt)}{(q - G_1^2)^2} \exp(\sqrt{q}) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{t}} + \sqrt{qt}\right)\right) dt + F_1 \frac{2R}{a} l_0 \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\right) \left(\frac{1}{G_1} \left(2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau}}\right) - \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{G_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau}}\right) - \frac{1}{G_1} \exp(G_1 + G_1^1\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + G_1\sqrt{\tau}\right)\right) - F_1 \frac{2R\beta}{a} \frac{\beta}{\gamma} \int_0^\tau P(\tau-t) \exp(G_1 + G_1^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t}} + G_1\sqrt{t}\right) dt + F_3 \frac{2R}{a} l_0 \cdot \\
& \cdot \exp\left(-\frac{M_3}{T_0}\right) \int_0^\tau \exp(G_1 + G_1^2(\tau-t)) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau-t}} + G_1\sqrt{\tau-t}\right) \left(t + \frac{q}{2} t^2 \exp(qt)\right) dt + \\
& + F_3 \frac{2R\beta}{a} \frac{\beta}{\gamma} \int_0^\tau P'(\tau-t) dt + 4F_3 \frac{2R\beta}{a} \frac{\beta}{\gamma} \exp(qt) \int_0^\tau t P(\tau-t) dt. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^k k}{k!}; \quad S_l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu R)^k k}{k!}; \quad q = \mu^2 R^2; \quad z = \frac{1}{a\mu^2};$$

$$G = N \frac{R}{a} g_H \ln^2\left(\frac{l_0}{g_H}\right) + B_i'; \quad G_1 = G - 1;$$

$$h_1(\tau) = Y_0(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau); \quad \psi_1(\tau) = Y_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau);$$

$$h_2(\tau) = Y_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)!} \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau); \quad \psi_2(\tau) = Y_0(\tau) \frac{dY_0(\tau)}{d\tau}; \quad h_4(\tau) = Y_0(\tau) \theta_1(\tau);$$

$$\begin{aligned}
F_1(\tau) &= \ln^{-1}\left(\frac{l_0}{g_H}\right) (2B_i' - G) + \frac{W_0 G z \mu}{M_3} \left(-S - S_1 + \frac{2S_1}{\mu R}\right) + \\
& + \frac{W_0 z \mu}{M_3} \left(-2SR\mu^2 - 2S - 2RS_1\mu - 2S_1 - \frac{2S_1}{\mu R}\right);
\end{aligned}$$

$$F_2(\tau) = \frac{W_0 G z \mu}{M_3} \left(S + S_1 - \frac{2S_1}{\mu R}\right) + \frac{W_0 z \mu}{M_3} \left(2SR\mu^2 + 2S + RS_1\mu + 2S_1 + \frac{2S_1}{\mu R}\right);$$

$$F_3(\tau) = \frac{2S_1 W_0 G R}{M_3 a \mu} + \frac{R W_0}{M_3 a} \left(2SR + R^2 S_1 \mu^2 - \frac{2S_1}{\mu}\right).$$

При решении задачи использовали тот факт, что при малых значениях  $\tau$  комплексный параметр  $p$  стремится к бесконечности и, в частности,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \operatorname{sh} \sqrt{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \operatorname{ch} \sqrt{p} = \frac{1}{2} \exp(\sqrt{p}),$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} ((Bi' - 1) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p}}{\sqrt{p}} + \operatorname{ch} \sqrt{p}) = \frac{\exp \sqrt{p} ((Bi' - 1) + \sqrt{p})}{2\sqrt{p}}.$$

Для больших значений  $\tau$  ( $\tau \geq 0,1$ ) нами получено следующее решение задачи в нулевом и первом приближении:

$Y_0(\tau)$  имеет по-прежнему вид (2.32);

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau) = & (-N \frac{2R}{a} g_H - \frac{D_0 Bi'}{M_3} - \frac{(Bi' + 2) D_1 R^2}{M_3} + N \frac{2R \beta}{a \gamma} P_4 + Bi' \frac{G_0}{M_3}) (\frac{1}{Bi'} + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_k^2 \tau)}{Bi' \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k}) + N \frac{R^3 \beta}{a^2 \gamma} P_3 + Bi' \frac{G_0}{M_3} - \frac{R^2}{a} - \frac{(Bi' 3! D_1 R^2)}{M_3} \cdot \\ & \cdot (\frac{\tau}{Bi'} - \frac{Bi' + 2}{6Bi'} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_k^2 \tau)}{\mu_k (Bi' \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k)}) + \frac{D_0}{M_3} - \frac{3! D_1 R^2}{M_3} \tau - \frac{Bi'}{c \gamma M_3} \cdot \\ & \cdot \frac{Bi'}{c \gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) (\frac{1}{Bi'} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_k^2 (\tau - \tau_i))}{Bi' \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k}) + (\frac{W_0 S z}{M_3} (\mu Bi' + \mu^2 R - \\ & - \frac{2Bi'}{R} - 2\mu + \frac{2}{R})) (\frac{1}{Bi'} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_k^2 (\tau - \tau_i))}{Bi' \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k}) - (\frac{\sqrt{q}}{(Bi' - 1) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q}} + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 \exp(-\mu_k^2 \tau)}{(\mu_k^2 + q) (Bi' \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k)}) - \frac{R^2 W_0 S 2}{a \mu M_3} (\frac{Bi'}{R} + \mu - \frac{1}{R}) (\tau \exp(q\tau) \cdot \\ & \cdot \frac{\sqrt{q}}{(Bi' - 1) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q}} + \frac{\exp(q\tau)}{2\sqrt{q} ((Bi' - 1) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} - \exp(q\tau) \cdot \\ & \cdot \frac{\exp(q\tau) (Bi' \operatorname{ch} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{sh} \sqrt{q})}{2((Bi' - 1) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 \exp(-\mu_k^2 \tau)}{(\mu_k^2 + q) (Bi' \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k)}); \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
Y_1(\tau) = & 1/(N + Bi' \frac{a}{R} / (g_H (\ln \frac{l_0}{g_H})^2)) (\int_0^\tau (2N\psi_2(t) - 2Bi'h_4(t) + 2\psi_1(t) + 2h_2(t)) dt - \\
& - \int_0^\tau (Gh_1(t) + 2N\psi_2(t) + (G + 2)\psi_1(t) + 2h_2(t) - 2Bi'h_3(t)) (2 \sum_{k=1}^\infty \exp(-\xi_k^2 (\tau - t)) \cdot \\
& \cdot \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)}) dt + \frac{G}{c\gamma M_3} \sum_{i=1}^m A_i (\frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0})) (\delta_0(\tau - \tau_i) (\frac{\tau - \tau_i}{3G} + \\
& + \frac{1}{30G} - \frac{G+2}{18G^2} + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k^5 (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \exp(-\xi_k^2 (\tau - \tau_i) + \tau_i) (\frac{1}{3G} - \\
& - 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k^5 (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \exp(-\xi_k^2 (\tau - \tau_i)))) + \frac{R \beta}{a \gamma} (\int_0^{\tau_i} P(t) dt) (\frac{1}{3G} - \\
& - 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k^3 (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \exp(-\xi_k^2 \tau)) - \frac{R \beta}{a \gamma} (\int_0^{\tau_i} P(t) dt) (\frac{1}{3G} - \\
& - \\
& 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k^3 (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \exp(-\xi_k^2 (\tau - t)) dt + F_2 (\frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0})) (-\frac{2}{q(13G + 2)} + \\
& + \frac{1}{q((G - 1) \text{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q})} (\tau \exp(q\tau) (\sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q} + \text{sh} \sqrt{q}) + \frac{\exp(q\tau)}{2} \text{sh} \sqrt{q} + \\
& + (G \text{sh} \sqrt{q} - \text{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q} + \frac{G \sqrt{q} \text{sh} \sqrt{q}}{2} + q \frac{\text{sh} \sqrt{q}}{2}) \frac{\exp(q\tau) (\sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q} - \text{sh} \sqrt{q})}{q((G - 1) \text{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q})}) + \\
& + 2 \sum_{k=1}^\infty \exp(-\xi_k^2 \tau) \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{(\xi_k^2 + q) \xi_k (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} - \frac{R \beta}{a \gamma} \int_0^{\tau_i} P(t) \exp(qt) \cdot \\
& \cdot (\frac{\sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q} - \text{sh} \sqrt{q}}{q((G - 1) \text{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \text{ch} \sqrt{q})} + \frac{2}{6G - q(G + 2)} + 2 \sum_{k=1}^\infty \exp(-\xi_k^2 (\tau - t))) \cdot \\
& \cdot \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k (\xi_k^2 + q)} \frac{1}{(G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)}) dt + \frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) (\frac{\tau}{3G} + \frac{1}{30G} - \frac{G+2}{18G^2} + \\
& + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k^5 (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \exp(-\xi_k^2 \tau) dt) - \frac{R \beta}{a \gamma} \int_0^{\tau_i} P(t) \cdot (\frac{1}{3G} - \\
& - 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{\xi_k^3 (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \exp(-\xi_k^2 (\tau - t)) dt) + F_3 2 (\frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0})) \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left( \frac{2}{18q^3G - q^3(G+2)} + \frac{\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q}}{q((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} (\exp(q\tau) - q\tau \exp(q\tau)) - \right. \\
& - \tau q \exp(q\tau) \frac{\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q}}{q^2((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} - \frac{G \operatorname{ch} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{sh} \sqrt{q}}{2q\sqrt{q}((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})^2} \cdot \\
& \cdot \tau q \exp(q\tau) + q \exp(q\tau) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{q}}{2q((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} + \frac{\exp(q\tau) \operatorname{ch} \sqrt{q}}{4q\sqrt{q}} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q}} - \exp(q\tau) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{q}}{q^2((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} - \\
& - \exp(q\tau) \frac{G \operatorname{ch} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{sh} \sqrt{q}}{2q\sqrt{q}((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})^2} - \frac{\exp(q\tau)(\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q})}{4q^2\sqrt{q}} \cdot \\
& \cdot \frac{3G \operatorname{ch} \sqrt{q} + \sqrt{q}(G+4) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q}}{4q^2\sqrt{q}((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})^2} + \frac{2 \exp(q\tau)(\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q})}{q^3} \cdot \\
& \cdot \frac{((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q}) + (G \frac{\operatorname{ch} \sqrt{q}}{\sqrt{q}} + \frac{\operatorname{sh} \sqrt{q}}{2})^2}{q^3((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\xi_k^2 \tau) \cdot \\
& \cdot \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{(\xi_k^2 + q)^3 \xi_k (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} + F_3 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau P'(t) \exp(qt) \cdot \left( \frac{2}{6G - q(G+2)} + \right. \\
& + \exp(q(\tau - t)) \frac{\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q}}{q((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\xi_k^2 (\tau - t)) \cdot \\
& \cdot \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{(\xi_k^2 + q) \xi_k (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} \Big) dt - \\
& 2F_3 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^\tau P(t) \exp(qt) \cdot \left( \frac{2}{-12qG + q^2(G+2)} + \right. \\
& + (\tau - t) \exp(q(\tau - t)) \frac{\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q}}{q((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} + \\
& + \frac{\exp(q(\tau - t) \operatorname{sh} \sqrt{q})}{2q((G-1)\operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})} -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{\exp(q(\tau-t)(\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} - \operatorname{sh} \sqrt{q}))((G-1) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q} + G \frac{\sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q}}{2} + \frac{q \operatorname{sh} \sqrt{q}}{2})}{q^2 ((G-1) \operatorname{sh} \sqrt{q} + \sqrt{q} \operatorname{ch} \sqrt{q})^2} + \\
& + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\xi_k^2 (\tau-t)) \frac{\xi_k \cos \xi_k - \sin \xi_k}{(\xi_k^2 + q)^2 \xi_k (G \cos \xi_k - \xi_k \sin \xi_k)} dt + \\
& + F_4 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^{\tau} P(t)(\tau-t) dt + F_5 \frac{R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) q^{-2} (1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau)) - \\
& - F_5 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^{\tau} P(\tau-t) \exp(q(\tau-t)) \cdot \\
& \cdot \frac{\exp(qt) - 1}{q} dt + F_6 \frac{2R}{a} l_0 \exp(-\frac{M_3}{T_0}) (-q)^{-3} (1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau + \frac{(q\tau)^2}{2})) + \\
& + F_6 \frac{R}{a} \int_0^{\tau} P'(\tau-t) \exp(q(\tau-t)) \frac{\exp(qt) - 1}{q} dt - F_6 \frac{R \beta}{a \gamma_0} \int_0^{\tau} P(\tau-t) \exp(q(\tau-t)) \cdot \\
& \cdot (-q)^{-2} (1 - \exp(q\tau)(1 - q\tau)) dt. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$\mu_k$  – корни уравнения;

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{-\mu}{Bi' - 1};$$

$\xi_k$  – корни уравнения

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{-\xi}{G-1};$$

$$\Theta(t) = G_3 t + G_0;$$

$$P(t) = P_3 t + P_4,$$

где  $G_3, G_4, P_3, P_4$  – известные постоянные;

$$F_4 = 2Bi' \frac{1}{\ln \frac{l_0}{g_H}} + \frac{RW_0 z \mu}{M_3} (-2S - S_1 + \frac{2S}{R} + \frac{2S_1}{R} - \frac{2S_1}{\mu R^2});$$

$$F_5 = \frac{RW_0 z \mu}{M_3} (-2S + S_1 - \frac{2S}{R} - \frac{2S_1}{R} + \frac{2S_1}{\mu R^2});$$

$$F_6 = \frac{RW_0}{M_3 a} \left( 2SR + 2S_1 R - \frac{2S}{R} - \frac{2S_1}{\mu} \right).$$

Окончательно решение в первом приближении будет иметь вид:

$$Y(\tau) = Y_0(\tau) + Y_1(\tau); \quad (2.38)$$

$$\rho(\tau) = R(1 - Y(\tau));$$

при  $\bar{r} \neq 0$  ( $\bar{r} = \frac{r}{R}$ ):

$$\begin{aligned} T(\bar{r}, \tau) = & s_o(\tau) + s_1(\tau) + \frac{\bar{r}^2}{6} \left( \frac{ds_0(\tau)}{d\tau} + \frac{ds_1(\tau)}{d\tau} \right) + \frac{1}{c\gamma} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i) + \\ & + W_0 \exp(\mu R \bar{r}) \left( \frac{1}{a\mu} (\exp(R^2 \mu^2 \tau) - 1) + \frac{2}{\bar{r}R} \left( \frac{1}{a\mu^3} - \frac{1}{a\mu^3} \exp(R^2 \mu^2 \tau) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\tau R^2}{\mu a} \exp(R^2 \mu^2 \tau) \right); \end{aligned}$$

при  $\bar{r} = 0$

$$T(0, \tau) = s_o(\tau) + s_1(\tau) + \frac{1}{c\gamma} \sum_{i=1}^m A_i \delta_0(\tau - \tau_i).$$

Аналогичным образом можно получить более высокие приближения решения данной задачи.

### 2.3. Анализ решения, компьютерная реализация модели, выводы

Предложенная математическая модель процесса сублимации позволяет определить непосредственно время сублимации частицы любого размера при указанных условиях. Действительно, если положить в уравнении (2.38)  $Y(\tau)$  равным 1 и подставить конкретные выражения  $Y_0(\tau)$  и  $Y_1(\tau)$ , соответствующие определенной области значений  $\tau$ , то получим алгебраическое уравнение отно-

сительно переменной  $\tau$ . Корень данного уравнения определит время полной сублимации частицы при заданных условиях.

Полученное уравнение можно решать одним из итерационных методов, например, методом простой итерации [42], представив его в виде

$$\tau = f(\tau).$$

Данный метод сходится при условии, что

$$|f'(\tau)| < 1.$$

Это условие в нашем случае выполняется естественным образом. Так, в нулевом приближении оно соответствует неравенству

$$P(\tau) < P^*.$$

Действительно, в любой момент времени давление парогазовой смеси должно быть меньше давления насыщенных паров при той же температуре.

Полученная математическая модель, разработанное алгоритмическое и программное обеспечение позволяют провести расчет процесса сублимации сферической частицы с неравномерным начальным распределением температуры при переменной температуре среды, с учетом действия внутренних источников теплоты, обусловленных ударным нагружением. При этом учитывается как реальный массообмен на поверхности частицы, так и область изменения числа Фурье.

Расчет позволяет получить следующие зависимости:

1) закон движения поверхности частицы в зависимости от времени ( $\tau \leq 0,1$ ;  $\tau > 0,1$ ) без учета и с учетом ударного нагружения, лучистого теплообмена (рис. 2.1);

2) поле температур в зависимости от времени с учетом и без учета действия внутренних источников теплоты (рис. 2.2).

Модель дает возможность рассчитать время полной сублимации частицы любого радиуса при заданных условиях (табл.1).

Таблица 1

Время полной сублимации частицы бензойной кислоты исходного радиуса  $R$  при заданных условиях ( $R = 7 \cdot 10^{-4}$  м;  $Bi = 0,02$ ;  $\beta = 0,1$ )

Условия сублимации	Л– У–	Л– У+	Л+ У–	Л+ У+
$P(t) = 0$	0,33	0,30	0,25	0,22
$P(t) = 1 + t$	0,37	0,32	0,28	0,24

В таблице введены следующие обозначения: + (–) – учитывается (не учитывается) действие внутренних источников теплоты, порожденных: Л – потоком лучистой энергии, У – ударным нагружением;  $t$ , с.

Вычислительный эксперимент был проведен для частицы бензойной кислоты. Из графиков, представленных на рис. 2.1, 2.2, видно, что наличие внутренних источников теплоты в частице ускоряет как прогрев частицы, так и массообмен на ее поверхности.

Анализ результатов вычислительного эксперимента, построенного на основе аналитического решения методом дифференциальных рядов краевой задачи с перемещающейся границей, позволил показать, что для интенсификации процесса сублимации органических веществ целесообразно:

- 1) проводить его в аппаратах ударного принципа действия с целью создания в частицах твердой фазы дополнительных источников теплоты;
- 2) установить в аппарате источники лучистой энергии.

Расчеты по предложенной математической модели показали, что в аппаратах интенсивного действия с несколькими источниками теплоты можно достичь малого времени сублимации, что важно, т.к. при длительном времени обработки возможна термическая деструкция материала.

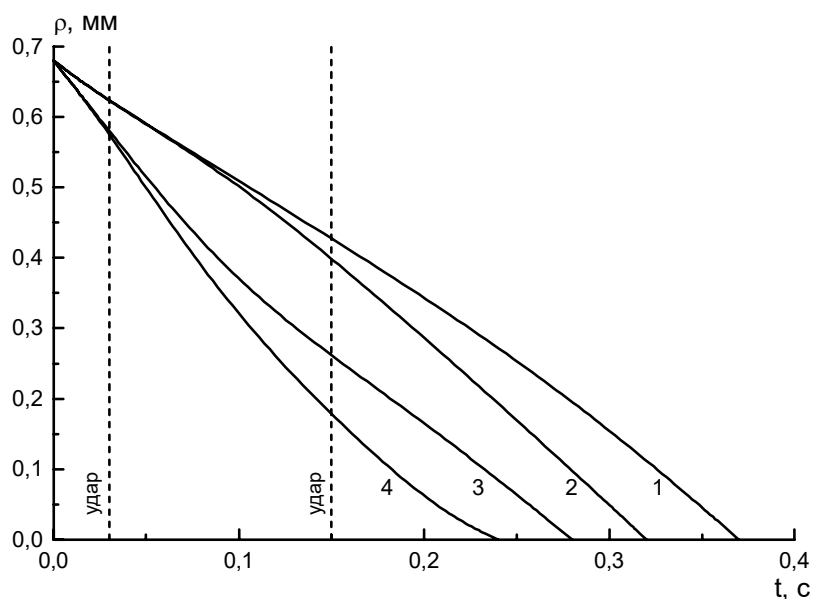


Рис. 2.1. Закон движения поверхности частицы в зависимости от времени с учетом и без учета действия внутренних источников теплоты, обусловленных ударным нагружением и подводом лучистой энергии: 1 – без учета внутренних источников теплоты; 2 – с учетом ударного нагружения; 3 – с учетом подвода лучистой энергии; 4 – с учетом ударного нагружения и подвода лучистой энергии

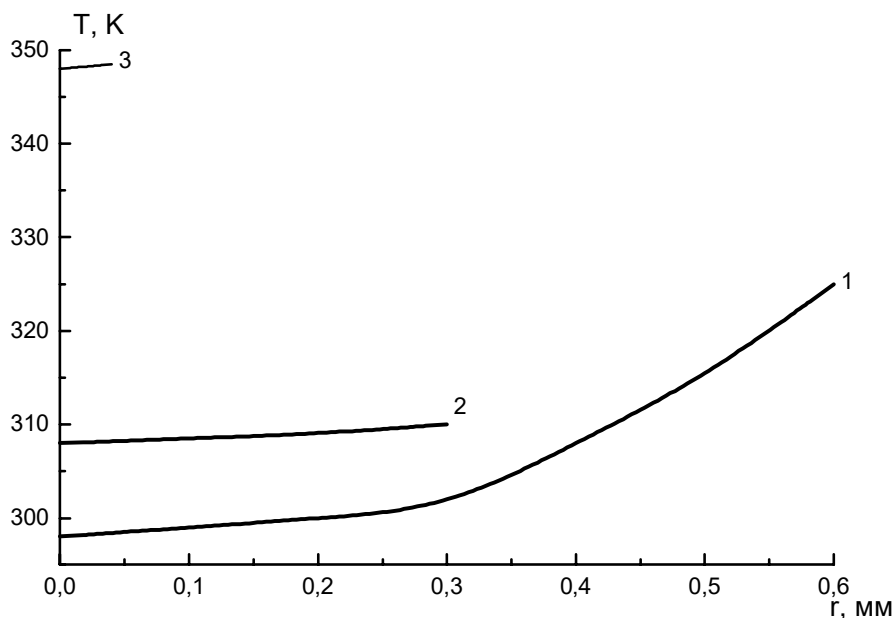


Рис. 2.2. Поле температур в частице в зависимости от времени ( $Bi = 0,02$ ;  $\beta = 0,1$ ;  $t = 0,2$  с): 1 – исходное поле температур; 2 – без учета внутренних источников теплоты; 3 – с учетом внутренних источников теплоты

### **3. Сопряженная задача теплопроводности для шара с внутренними источниками теплоты и движущейся границей (задача Стефана) при моделировании термического разложения твердой частицы**

#### **3.1. Общие положения**

Рассмотрим еще один химико-технологический процесс, математическую модель которого целесообразно построить на основе решения задачи Стефана методом дифференциальных рядов. Для расчета совмещенного процесса обжига-измельчения-механической активации в соответствии со стратегией системного подхода требуется построение физической и математической модели процесса на уровне частицы [43]. Математическая модель термического разложения твердой частицы может быть построена на основе аналитического решения задачи теплопроводности шара с движущейся границей превращения, т.к. имеет место специфическая зависимость скорости перемещения поверхности реакции от температуры на этой поверхности (см. далее уравн. 3.6).

#### **3.2. Физическая модель**

При описании топохимической реакции, протекающей в аппарате типа реактор-измельчитель, на данном этапе приняты следующие допущения: основное вещество равномерно распределено по радиусу отдельной частицы; поверхностная концентрация постоянна; собственно химическое превращение протекает по схеме  $A_r \rightarrow B_r + C_r$ ; константу скорости разложения можно представить следующим образом:

$$k = k_0 \exp(-E/(RT))(1 - P/P_0), \quad (3.1)$$

где  $E$  – энергия активации реакции,  $T$  – температура в реакционной зоне. Множитель  $(1 - P/P_0)$  в уравнении (3.1) позволяет учитывать кинетику внешнего массообмена в процессе реакции, т.е. условия отвода газового продукта реак-

ции. Чем выше концентрация  $C_r$  в окружающей среде, тем меньше скорость реакции.

Собственно химическое превращение протекает на поверхности раздела  $A_r - B_r$ . Образовавшийся газ  $C_r$  диффундирует через пленку продукта реакции  $B_r$ . С течением времени граница реакции продвигается к центру частицы (рис. 3.1).

### 3.3. Математическая модель

Сначала нами была решена аналитически задача о термическом разложении твердой частицы в предположении, что скорость истирания пленки высока, и отвод продукта не является лимитирующей стадией реакции [44]. На следующем этапе построения модели мы усложнили постановку задачи [45], принимая во внимание, что в реальных условиях скорость истирания пленки конечна, и газ диффундирует через образующуюся пленку продукта  $B_r$ . Вместе с тем полагаем, что образуется пленка с высокой пористостью, и диффузия не является лимитирующей стадией реакции.

Нами построена математическая модель термического разложения твердой частицы в наиболее общем виде. В ней учтены механоактивационные эффекты, возникающие при импульсном механическом нагружении частиц дисперсной фазы. Считаем, что тепло к частице подводится от газовой среды с переменной температурой, а также за счет импульсных источников теплоты, действующих внутри частицы. Механоактивационные эффекты учитываются также в понижении энергии активации химической реакции и температуры начала реакции.

Математическая формулировка задачи имеет вид:

*Уравнение прогрева инертного ядра частицы:*

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a_1 \left[ \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right] + \frac{1}{c_1 \gamma_1} \sum_{i=1}^n A_{i1} \delta(t - t_i), \quad t > 0, \quad 0 < r < \rho(t). \quad (3.2)$$

Начальные и граничные условия:

$$T(r,0) = f(r), \quad 0 \leq r \leq R; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0; T(0,t) \neq \infty; \quad (3.4)$$

$$\rho(0) = R. \quad (3.5)$$

Закон движения фронта реакции в сферической частице:

$$-\gamma \frac{d\rho}{dt} = K_0 \exp(-(Q_0 - \Delta Q)/(R_0 \cdot T(\rho(t),t))) \cdot C \cdot \left(1 - \frac{P_0}{P_l}\right); \quad (3.6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=\rho(t)} = \lambda_2 \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=\rho(t)} + \gamma_1 (Q_0 - \Delta Q) \frac{d\rho}{dt}; \quad (3.7)$$

$$T(\rho(t),t) = \phi(\rho(t),t). \quad (3.8)$$

Уравнение прогрева пленки продукта реакции:

$$\frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} = a_2 \left[ \frac{\partial^2 \phi(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial r} \right] + \frac{1}{c_2 \gamma_2} \sum_{i=1}^m A_{2i} \delta(t - t_i); \quad t > 0, \rho(t) < r < R. \quad (3.9)$$

Граничное условие:

$$\lambda_2 \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha [\theta(t) - \phi(R,t)]. \quad (3.10)$$

Требуется найти  $\rho(t)$ ;  $T(r,t)$  при  $0 \leq r \leq \rho(t)$ ;  $\phi(r,t)$  при  $\rho(t) \leq r \leq R$ ,  $t > 0$ .

Данная краевая задача представляет собой задачу о теплопроводности сопряженных сферических областей с движущейся границей превращения (задача Стефана).

В математическом аспекте главной особенностью задачи о термическом разложении является связь скорости перемещения границы реакции и температуры на этой границе (см. ур. 3.6).



Для решения этой задачи применяли метод дифференциальных рядов [7].

Решение находили в виде рядов:

при  $r \neq 0$

$$T(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n+1)! a_1^n} \frac{d^n}{dt^n} s(t) + \frac{1}{c_1 \gamma_1} \sum_{i=1}^m A_{1i} \delta_0(t - t_i); \quad (3.11)$$

$$\phi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n+1)! a_2^n} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) + \frac{1}{c_2 \gamma_2} \sum_{i=1}^k A_{2i} \delta_0(t - t_i); \quad (3.12)$$

при  $r=0$

$$T(0; t) = s(t). \quad (3.13)$$

Излагаемый метод позволяет решить задачу при любом начальном распределении температур в частице. Для конкретности изложения считаем, что функцию  $f(r)$  можно аппроксимировать выражением:

$$f(r) = D_0 + D_1 \cdot r^2. \quad (3.14)$$

Метод малого параметра при решении данной краевой задачи позволяет получить приближенное аналитическое решение с любой степенью точности.

Здесь представлено решение в нулевом приближении при малых числах Фурье ( $F_0 \leq 0,01$ ).

Решение имеет вид:

$$\rho(\tau) = R \cdot (1 - Y_0(\tau)); \quad Y_0(\tau) = \frac{\gamma_1}{3 \cdot (Q_0 - \Delta Q)} \left( \frac{\lambda_2}{a_2} \varphi_0(\tau) - \frac{\lambda_1}{a_1} \cdot s_0(\tau) \right), \quad (3.15)$$

при  $r=0$

$$T(0, \tau) = s_0(\tau); \quad (3.16)$$

при  $r \neq 0$

$$T(r, \tau) = s_0(\tau) + \frac{r^2}{6R^2} \frac{ds_0(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{c_1 \gamma_1} \sum_{i=1}^m A_{i1} \delta_0(\tau - \tau_i), \quad (3.17)$$

где

$$1) \quad 0 < r \leq \rho(\tau);$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad s_0(\tau) = & D_0 - \frac{D_0 2}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right) + 3! D_1 R^2 \left(\tau - 4\sqrt{\tau/\pi} \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right) + \right. \\
 & + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2}{3!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right) \left. \right) - \frac{2}{c_1 \gamma_1} \sum_{i=1}^m A_{1i} \int_0^\tau \delta_0(\tau - \tau_i - t) \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot \left(\frac{1}{2t} - 1\right) dt + \frac{2}{c_2 \gamma_2} \cdot \sum_{i=1}^k A_{2i} \cdot \\
 & \int_0^\tau \delta_0(\tau - \tau_i - t) \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot \left(\frac{1}{2t} - 1\right) dt + 2 \int_0^\tau \psi_1(\tau - t) \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \cdot \\
 & \cdot \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) \cdot \left(\frac{1}{2t} - 1\right) dt, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

где

$$\psi_1(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \frac{d^n}{d\tau^n} \varphi_0(\tau). \tag{3.19}$$

$$\phi(r, \tau) = \varphi_0(\tau) + \frac{r^2}{6R^2} \frac{a_1}{a_2} \frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{c_2 \gamma_2} \sum_{i=1}^k A_{2i} \delta_0(\tau - \tau_i), \tag{3.20}$$

где

$$1) \quad \rho(\tau) < r \leq R;$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \varphi_0(\tau) = & 2\operatorname{Bi} \int_0^\tau \theta(\tau - t) \cdot \left(\int_0^t \exp((\operatorname{Bi} - 1)^2 \frac{a_2}{a_1} (t - \varepsilon)) \cdot \operatorname{erfc}((\operatorname{Bi} - 1) \cdot \right. \\
 & \cdot \sqrt{a_2/a_1} \cdot \sqrt{t - \varepsilon}) \cdot \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 3\right) \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon^5}}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a_1}{a_2 4\varepsilon}\right) d\varepsilon \left. \right) dt + D_0 - \\
 & - 2B_i D_0 \int_0^\tau \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} (B_i - 1)} (1 - \exp((\operatorname{Bi} - 1)^2 \frac{a_2}{a_1} (\tau - t))) \cdot \\
 & \cdot \operatorname{erfc}((\operatorname{Bi} - 1) \sqrt{a_2/a_1} \cdot \sqrt{\tau - t}) \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a_1}{a_2 4t}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{a_2 2t} - 1\right) dt + \\
 & + 3! \frac{a_1}{a_2} D_1 R^2 \left(\tau - \frac{a_2}{a_1} \cdot \left(\frac{2 + \operatorname{Bi}}{3!}\right) 2\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}(B_i - 1)} (1 - \exp((\text{Bi} - 1)^2 \frac{a_2}{a_1} (\tau - t))) \text{erfc}((\text{Bi} - 1) \sqrt{a_2/a_1} \cdot \\
& \cdot \sqrt{\tau - t})) \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{a_1}{a_2 4t}) \cdot (\frac{a_1}{a_2 2t} - 1) dt - 2\text{Bi} \cdot \\
& \cdot \int_0^{\tau} dt \int_0^t \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}(B_i - 1)} (1 - \exp((\text{Bi} - 1)^2 \frac{a_2}{a_1} (t - \varepsilon))) \text{erfc}((\text{Bi} - 1) \cdot \sqrt{a_2/a_1} \cdot \\
& \cdot \sqrt{t - \varepsilon})) \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{\pi\varepsilon} \exp(-\frac{a_1}{a_2 4\varepsilon}) (\frac{a_1}{a_2 \varepsilon \cdot 2} - 1) d\varepsilon - \frac{\text{Bi}}{c_2 \gamma_2} \sum_{i=1}^k A_{2i} \int_0^{\tau} \delta_0(\tau - t - \tau_i) \cdot \\
& \cdot \int_0^{\tau} \exp((B_i - 1)^2 \frac{a_2}{a_1} (t - \varepsilon)) \text{erfc}((\text{Bi} - 1) \sqrt{a_2/a_1} \cdot \sqrt{t - \varepsilon}) \cdot (\frac{1}{2\varepsilon} - 3) \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon^5}} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{a_1}{a_2 \cdot 4\varepsilon}) d\varepsilon dt. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

### 3.4. Численная реализация полученного решения, его анализ и выводы

По данной математической модели проведен расчет кинетики топохимической реакции с учетом механоактивационных эффектов. Расчет позволяет построить следующие зависимости: закон изменения во времени радиуса, ограничивающего поверхность реакции без учета и с учетом действия внутренних источников теплоты (рис. 3.2); поле температур непрореагировавшего ядра частицы (рис. 3.3); поле температур пленки продукта реакции (рис. 3.4). Расчеты проведены для процесса термического разложения карбоната кальция:



Вычислительный эксперимент, а также анализ экспериментальных данных [46] показал, что процесс термического разложения частицы протекает достаточно медленно, поэтому для его интенсификации целесообразно осуществлять реакцию в реакторе-измельчителе. Это позволит повысить скорость разложения как за счет увеличения удельной поверхности частиц, так и в ре-

зультате инициации механоактивационных эффектов (возникновения внутренних источников теплоты, снижения энергии активации реакции).

Математическая модель позволяет рассчитывать кинетику топохимических реакций при заданных условиях. Действительно, масса непрореагировавшего ядра частицы в момент времени  $t$

$$N(t) = \frac{4}{3} \pi \gamma \rho^3(t), \quad (3.22)$$

тогда количество вещества, разложившегося в единицу времени, находим согласно

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi\gamma\rho^2(t) \frac{d\rho}{dt},$$

где  $\rho(t)$  вычисляем по формуле (3.15).

Кроме того, данная модель позволяет определить время полного разложения частицы любого радиуса в аппарате комбинированного действия. Для этого достаточно в соответствии с (3.15) решить алгебраическое уравнение

$$Y_0(\tau) = 1 \quad (3.21)$$

относительно  $\tau$ . Корень данного уравнения определит время полного разложения частицы исходного радиуса  $R$  при заданных условиях. В общем случае получаем нелинейное алгебраическое уравнение, которое можно решить одним из итерационных методов, представив выражение (3.21) в виде

$$\tau = \psi(\tau).$$

В нулевом приближении в случае отсутствия внутренних источников теплоты время полного разложения частицы определяем по формуле [45]:

$$t = R\gamma P_0 \exp(Q/(Rf(R)))/(ck_0 \Delta P).$$

Отметим, что полученная математическая модель содержит аналитическое решение задачи, что предпочтительнее численного решения. Эта модель является составной частью математического описания совмещенных процессов, включающих измельчение и термическое разложение в реакторах с механическим нагружением обрабатываемого материала. Системный подход позволяет применить построенную модель при описании обжига в реакторах различного конструктивного оформления.

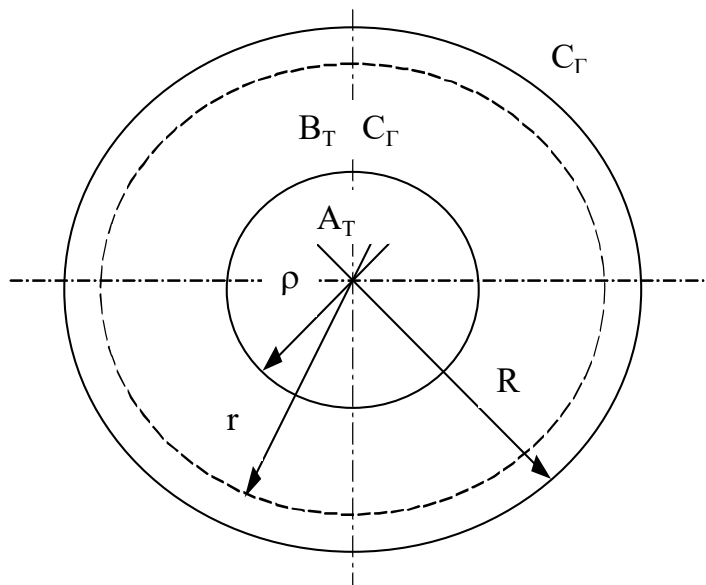


Рис. 3.1. К расчету термического разложения регулирующей сферической частицы

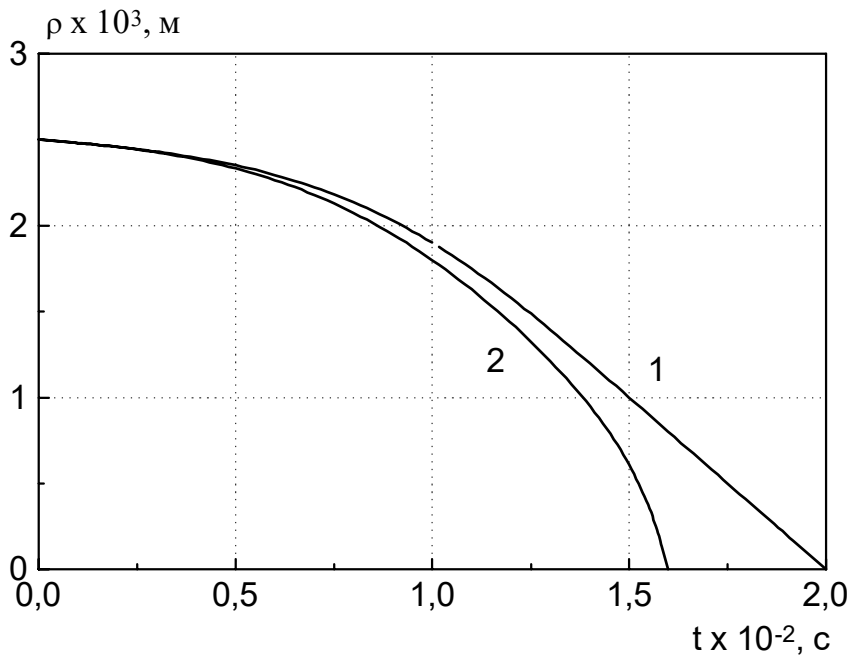


Рис.3.2. Зависимость  $\rho(t)$  при  $Bi = 0,02$ ;  $\theta = 1273\text{K}$  без учета (1) и с учетом (2) ударного нагружения

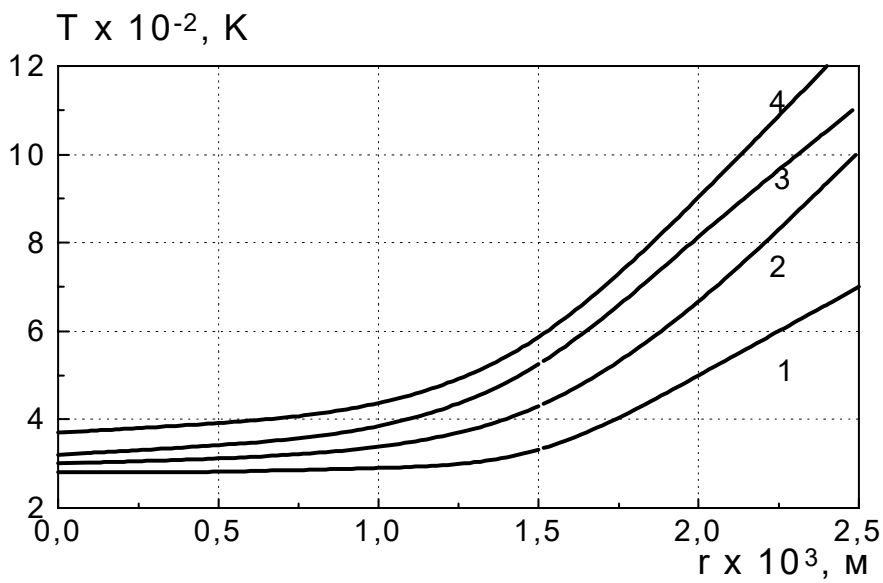


Рис. 3.3. Поле температур инертного ядра  $\text{CaCO}_3$  при  $Bi = 0,02$ ;  $\theta = 1273\text{K}$ ;  $t = 0$  (1), 10 (2), 30 (3), 50 (4) с

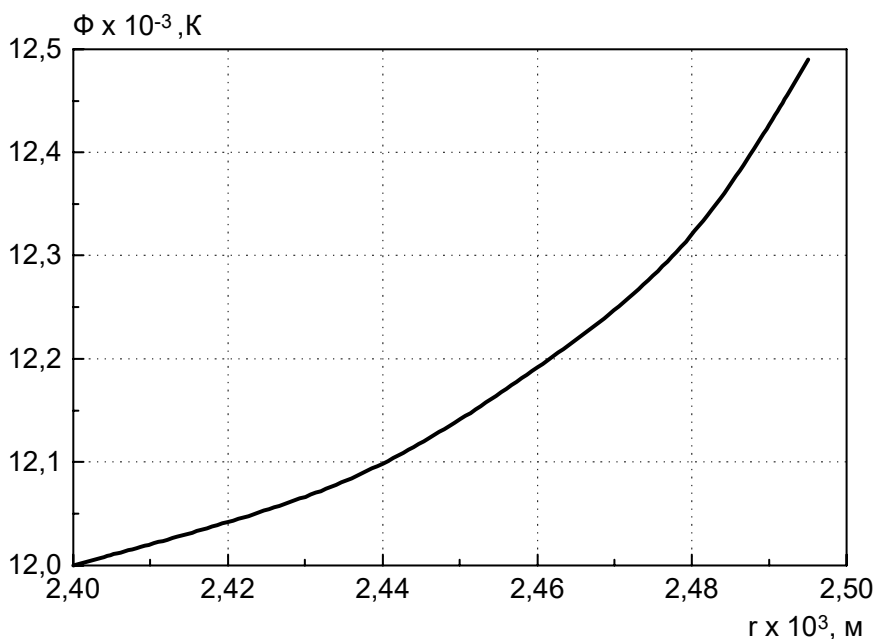


Рис. 3.4. Поле температур пленки продукта реакции при  $Bi = 0,02$ ;  $\theta = 1273\text{K}$ ,  $t = 50 \text{ с}$

#### 4. Сопряженная задача теплопроводности для бесконечной пластины с движущейся границей испарения в ней (задача Стефана)

##### 4.1. Общие положения

Для расчета процесса отгонки органического растворителя из высокопористой основы материала в токе перегретого пара требуется построение физической и математической модели процесса. Процесс разделяется на отдельные стадии, включающие, в частности, прогрев пластины кожи, испарение растворителя, испарение воды.

Математическая модель процесса испарения может быть построена на основе аналитического решения задач теплопроводности пластины, а также на основе решения сопряженных задач теплопроводности пластины с движущейся границей фазового перехода. Решение таких задач возможно, т.к. имеет место специфическая связь скорости перемещения поверхности испарения от температуры на этой поверхности (см. далее уравнение 4.6).

## 4.2. Физическая модель

При моделировании периода падающей скорости испарения растворителя считаем, что происходит углубление локализованного фронта испарения растворителя. Температура поверхности материала становится выше  $93^{\circ}\text{C}$ , но не достигает температуры испарения воды ( $100^{\circ}\text{C}$ ). На поверхность пластины  $x=R$  теплота поступает конвективно от перегретого пара  $q_{\alpha}$ . Граница испарения растворителя  $x = y(\tau)$  ( $0 \leq y(\tau) \leq R$ ) продвигается в глубь пластины. Слой высушенного материала прогревается. На движущуюся границу испарения растворителя  $x = y(\tau)$  теплота поступает за счёт теплопроводности ( $q_{\lambda}$ ) и за счёт конденсации водяного пара ( $q_{\text{конд}}$ ). Вся подведённая теплота идёт на испарение растворителя с движущейся границы раздела фаз. Влажный внутренний слой не прогревается. Схема, иллюстрирующая период падающей скорости испарения растворителя, представлена на рис. 4.1.

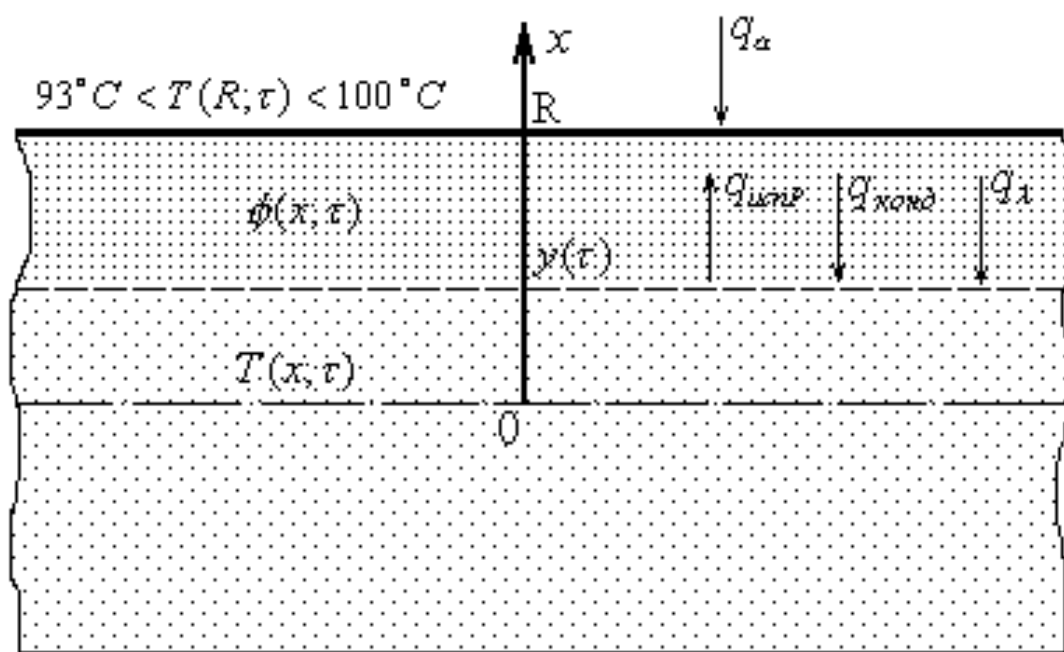


Рис. 4.1. Схема тепловых потоков в период падающей скорости испарения растворителя

Кинетика массообмена на границе испарения определяется изменением концентрации паров растворителя вблизи движущейся границы испарения. Для



того чтобы учесть реальный массообмен на границе испарения, необходимо знать зависимость равновесного давления пара от температуры. В подавляющем большинстве случаев экспериментальные результаты представляются в виде линейной зависимости логарифма давления от обратной температуры:

$$\ln P_p^* = M_1 - \frac{M_2}{T}.$$

Таким образом, необходимо решить сопряженную задачу теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях третьего рода, неравномерном начальном распределении температуры, с движущейся границей фазового превращения (задача Стефана).

### 4.3. Математическая модель

Математическая постановка задачи об испарении жидкости из пластины сводится к сопряженной задаче теплопроводности с подвижной границей при соответствующих краевых условиях:

$$\frac{\partial \phi(x; \tau)}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \phi(x; \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0; \quad y(\tau) < x < R; \quad (4.1)$$

$$\lambda_\phi \frac{\partial \phi(x; \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R} = \alpha_1 [\theta(\tau) - \phi(R; \tau)]; \quad (4.2)$$

$$\phi(y(\tau); \tau) = T(y(\tau); \tau); \quad (4.3)$$

$$\lambda_\phi \frac{\partial \phi(x; \tau)}{\partial x} \Big|_{x=y(\tau)} + \gamma \cdot r_p^* \cdot \frac{dy}{d\tau} + q_{\text{конд}} = 0; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T(x; \tau)}{\partial x} \Big|_{x=y(\tau)} = 0; \quad (4.5)$$

$$-\gamma \frac{dy(y)}{d\tau} = \beta_1 \left[ \exp \left( M_2 - \frac{M_1}{T(y(\tau); \tau)} \right) - P_P(\tau) \right]; \quad (4.6)$$

$$y(0) = R; \quad (4.7)$$

$$T(x; \tau) = f_1(x); T(y(\tau); \tau) = T_{испр}; 0 \leq x \leq y(\tau). \quad (4.8)$$

Требуется найти:  $y(\tau)$  и  $\phi(x; \tau)$  при  $y(\tau) \leq x \leq R$ .

Здесь  $\phi(x; \tau)$  – поле температур слоя высушенного материала;  $P_P(\tau)$  – парциальное давление растворителя;  $\beta_1$  – коэффициент массоотдачи;  $f_1(x)$  – известное, симметричное относительно центральной плоскости пластины, распределение температуры.

Для решения данной задачи применим метод дифференциальных рядов [7]. Поместим начало координат в середину пластины, и будем считать распределение температур в ней четной функцией  $x$ . Тогда распределение температур внутри сухого слоя ( $y(\tau) \leq x \leq R$ ) в любой момент времени можно представить выражением

$$\phi(x; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot \frac{d^n}{d\tau^n} \cdot B(\tau), \quad (4.9)$$

удовлетворяющим уравнению (4.1), где  $B(\tau)$  – произвольная функция, вид которой должен обеспечить сходимость ряда.

Подставив (4.9) в (4.3) – (4.6), получим систему уравнений для определения функций  $y(\tau)$  и  $B(\tau)$ :

$$y(0) = R; \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(2n)}(\tau)}{(2n)! a^n} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) = \frac{M_2}{\ln \frac{l_0}{-y'(\tau) + \frac{\beta}{\gamma} P(\tau)}}; \quad (4.11)$$

$$-\gamma r^* \frac{dy(\tau)}{d\tau} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(2n-1)}(\tau)}{(2n-1)! a^n} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) + q_{\text{конд}}; \quad (4.12)$$

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n-1}}{(2n-1)! a^n} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) = \alpha \left[ \Theta(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{(2n-1)! a^n} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) \right]. \quad (4.13)$$

Здесь

$$l_0 = \frac{\beta}{\gamma} \exp(M_1).$$

Выполнение начальных условий задачи обеспечивается соответствующим выбором величин  $\frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau)$  при  $\tau = 0$ . Если, например, начальное распределение температур аппроксимируем выражением

$$\phi(x, 0) = D_0 + D_1 x^2 + D_2 x^4,$$

тогда

$$B(0) = D_0, \quad \left. \frac{dB}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 2! a D_1; \quad \left. \frac{d^2 B}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = 4! a D_2. \quad (4.14)$$

Введем далее новые переменные:

$$F_0 = \frac{a\tau}{R^2}; \quad X(F_0) = \frac{R - y(F_0)}{R}; \quad s(F_0) = \frac{B(F_0)\lambda}{q_{\text{конд}}}.$$

Заметим, что в силу (4.13)

$$s(0) = \frac{D_0 \lambda}{q_{\text{конд}}}; \quad s'(0) = \frac{2! D_1 R^2 \lambda}{q_{\text{конд}}}; \quad s''(0) = \frac{4! D_2 R^4 \lambda}{q_{\text{конд}}}. \quad (4.15)$$

В новых переменных уравнения (4.10 – 4.13) можно переписать в виде:

$$X(0)=0; \quad (4.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-X)^{(2n)}(Fo)}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) = \frac{M_3}{\ln \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(Fo) + \frac{\beta}{\gamma} P(Fo)}}; \quad (4.17)$$

$$N \frac{dX}{dFo} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-X)^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) + 1; \quad (4.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) = \text{Bi} \left[ \Theta_1(Fo) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) \right]. \quad (4.19)$$

Здесь

$$M_3 = \frac{M_2 \lambda}{q_{\text{конд}}}; \quad N = \frac{r^* \lambda}{c q_{\text{конд}}}; \quad \Theta_1 = \frac{\Theta \lambda}{R}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}.$$

Решаем систему (4.16 – 4.19) методом последовательных приближений, точнее, методом малого параметра. Введем параметр малости  $\xi$ , который в конечном результате можно положить равным нулю, тогда имеем:

$$X(0)=0; \quad (4.20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\xi X(Fo))^{(2n)}(Fo)}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) = \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(Fo) + \frac{\beta}{\gamma} P(Fo)}; \quad (4.21)$$

$$N \frac{dX}{dFo} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \xi X(Fo))^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) + 1; \quad (4.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) = \text{Bi} \left[ \Theta_1(Fo) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} s(Fo) \right]. \quad (4.23)$$

Введем обозначение

$$g(Fo) = \frac{a}{R} X'(Fo) + \frac{\beta}{\gamma} P(Fo). \quad (4.24)$$

Будем искать функции  $s(Fo)$  и  $X(Fo)$  в форме рядов:

$$X(Fo) = X_0(Fo) + \xi X_1(Fo) + \xi^2 X_2(Fo) + \dots; \quad (4.25)$$

$$s(Fo) = s_0(Fo) + \xi s_1(Fo) + \xi^2 s_2(Fo) + \dots; \quad (4.26)$$

$$X'(Fo) = X'_0(Fo) + \xi X'_1(Fo) + \xi^2 X'_2(Fo) + \dots. \quad (4.27)$$

В соответствии с (4.24), (4.25) функция  $g(Fo)$  будет также иметь некоторое разложение по степеням  $\xi$ :

$$g(Fo) = g_H(Fo) + \xi g_1(Fo) + \xi^2 g_2(Fo) + \dots, \quad (4.28)$$

где

$$g_H = l_0 \exp\left(\frac{M_2}{f_1(0)}\right),$$

в то же время

$$g_H(Fo) = \frac{a}{R} X'_0(Fo) + \frac{\beta}{\gamma} P(Fo),$$

$$g_1(\text{Fo}) = \frac{a}{R} X_1'(\text{Fo}), g_2(\text{Fo}) = \frac{a}{R} X_2'(\text{Fo}), \dots \quad (4.29)$$

Разложим в (4.21) выражение

$$\ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\text{Fo}) + \frac{\beta}{\gamma} P(\text{Fo})}$$

в ряд по степеням  $\xi$ :

$$\begin{aligned} & \ln^{-1} \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\text{Fo}) + \frac{\beta}{\gamma} P(\text{Fo})} = \\ & = \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H} + \frac{\xi}{1!} \frac{\frac{g_1(\text{Fo})}{g_H}}{\left(\ln \frac{l_0}{g_H}\right)^2} + \frac{\xi^2}{2!} \left( \frac{2\left(\frac{g_1(\text{Fo})}{g_H}\right)^2}{\left(\ln \frac{l_0}{g_H}\right)^3} + \frac{2\frac{g_2(\text{Fo})}{g_H}}{\left(\ln \frac{l_0}{g_H}\right)^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

Подставим ряды (4.25 – 4.27) и (4.30) в систему уравнений (4.20-4.23) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ . Получим системы уравнений соответственно для определения функций  $X(\tau)$  и  $s(\tau)$  в нулевом приближении, то есть  $X_0(\tau)$  и  $s_0(\tau)$ , в первом приближении -  $X_1(\tau)$  и  $s_1(\tau)$  и так далее.

В нулевом приближении:

$$X_0(0)=0; \quad (4.31)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{d\text{Fo}^n} s_0(\text{Fo}) = M_3 \ln^{-1} \frac{l_0}{g_H}; \quad (4.32)$$

$$N \frac{dX_0(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{d\text{Fo}^n} s_0(\text{Fo}) + 1; \quad (4.33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{d\text{Fo}^n} s_0(\text{Fo}) = \text{Bi} \left[ \Theta_1(\text{Fo}) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{d\text{Fo}^n} s_0(\text{Fo}) \right]. \quad (4.34)$$

В первом приближении:

$$X_1(0)=0; \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} s_1(Fo) - X_0(Fo) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s_0(Fo) = \\ & = M_3 \ln^{-2} \left( \frac{l_0}{g_H} \right) \frac{g_1(Fo)}{g_H}; \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$N \frac{dX_1(Fo)}{dFo} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s_1(Fo) - X_0(Fo) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-2)!} \frac{d^n}{dFo^n} s_0(Fo); \quad (4.37)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} s_1(Fo) = -Bi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} s_1(Fo). \quad (4.38)$$

Полученную систему уравнений решаем методом операционного исчисления, используя преобразования Лапласа – Карсона [41], с учетом начальных условий (4.15) и уравнений (4.29).

Приближенное решение системы имеет различное выражение для больших и малых значений числа Фурье Fo. Это связано с вопросом сходимости рядов, входящих в решение, при различных значениях Fo.

Для немалых значений числа Фурье ( $Fo > 0,01$ ) нами найдено следующее решение задачи в нулевом приближении:

$$X_0(Fo) = \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left(-\frac{M_2}{f_1(0)} Fo\right) - \frac{\beta}{\gamma} \int_0^{Fo} P(t) dt \right); \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} s_0(Fo) = & \left( \frac{1}{Bi} - \frac{NRg_H}{aBi} - \frac{D_0\lambda}{q_{конд}} - \frac{D_1\lambda R^2}{q_{конд}} \right) \cdot \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp(-\pi^2 (k + \frac{1}{2})^2 Fo)}{(k + \frac{1}{2})\pi} \right) + \\ & + \frac{D_0\lambda}{q_{конд}} + \frac{2!D_1R^2\lambda}{q_{конд}} Fo + \frac{NR\beta}{a\gamma Bi} \int_0^{Fo} f_1(Fo-t)P(t)dt + \int_0^{Fo} f_2(Fo-t)\Theta_1(t)dt - \end{aligned}$$

$$-\frac{2!D_1R^2\lambda}{q_{\text{конд}}}\left(\text{Fo}-\frac{1}{2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\exp(-\pi^2(k+\frac{1}{2})^2\text{Fo})}{(k+\frac{1}{2})^3\pi^3}\right). \quad (4.40)$$

Здесь

$$f_2(t) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp(-\pi^2(k+\frac{1}{2})^2 t)}{(k+\frac{1}{2})^2 \pi^2}.$$

Окончательно решение в нулевом приближении примет вид:

$$y_0(\tau) = R\left(1 - \frac{1}{R}(l_0 \exp(-\frac{M_0}{f_1(0)}\tau) - \frac{\beta}{\gamma_0} \int_0^\tau P(t)dt)\right); \quad (4.41)$$

$$\phi_0(x, \tau) = B_0(\tau) + \frac{x^2}{2!} \frac{1}{a} B_0'(\tau) + \dots, \quad (4.42)$$

где  $B_0(\tau)$  определяется в соответствии с (4.15) и (4.40).

Формулы (4.39), (4.40) удовлетворяют заданным начальным условиям

$$X_0(0) = R,$$

$$s_0(0) = \frac{D_0\lambda}{q_{\text{конд}}}.$$

#### 4.4. Анализ решения, компьютерная реализация модели, выводы

Полученное аналитическое решение задачи теплопроводности пластины с движущейся границей фазового перехода дает возможность в любой момент времени определить количество испарившейся жидкости, а также установить температуру в любом сечении пластины. Данная модель позволяет определить время, за которое жидкость полностью будет удалена из пластины.



Нами разработано алгоритмическое и программное обеспечение расчета процесса испарения по данной модели, что позволяет получить, например, следующие зависимости:

1) закон движения поверхности испарения в зависимости от времени (рис. 4.2.);

2) поле температур высушенного слоя материала в зависимости от времени (рис. 4.3).

Заметим, что при фиксированных значениях критерия Фурье из рассматриваемой области в формулу (4.40) входят абсолютно сходящиеся числовые ряды. Для инженерных расчетов достаточно двух членов ряда (4.42), т.к. поле температур при указанных выше условиях, как правило, аппроксимируется квадратичной функцией координаты  $x$ .

Сопоставление приближенного решения и результатов эксперимента показывает, что нулевое приближение отличается от экспериментальных данных менее чем на 10%, а первое – менее, чем на 4%.

В качестве примера на рис. 4.1. представлены результаты сопоставления экспериментального и приближенного аналитического определения  $y(\tau)$  (экспериментальные данные приведены для процесса сушки синтетической кожи от п-ксилола [47]).

Таким образом, уже нулевое решение удовлетворяет требованиям инженерного расчета.

Аналитическое решение данной задачи легло в основу математической модели процесса удаления органического растворителя из пластины синтетической кожи в токе перегретого водяного пара как на стадии падающей скорости испарения растворителя, так и на стадии падающей скорости испарения воды.

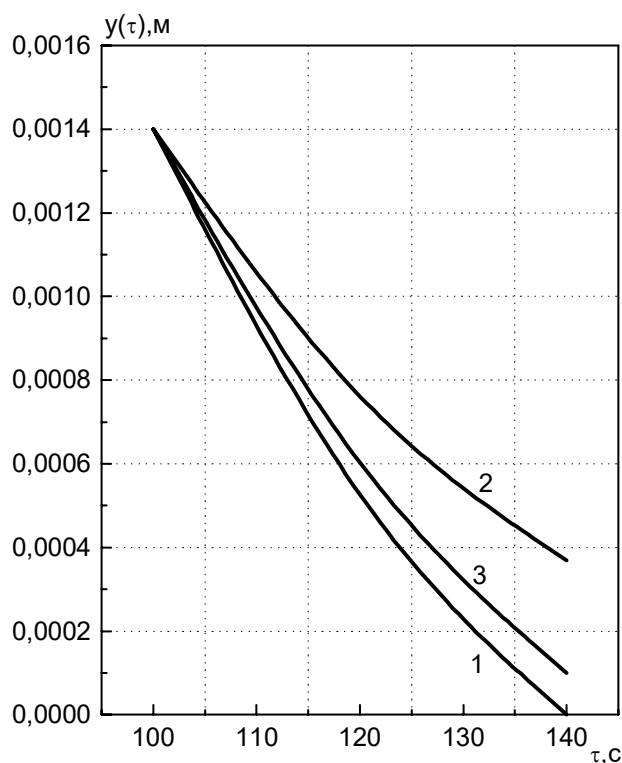


Рис. 4.2. Изменение во времени положения границы испарения жидкости из пластины на стадии падающей скорости сушки ( $\Theta = 110^{\circ}\text{C}$ ): 1 – эксперимент; 2 – нулевое приближение; 3 – первое приближение

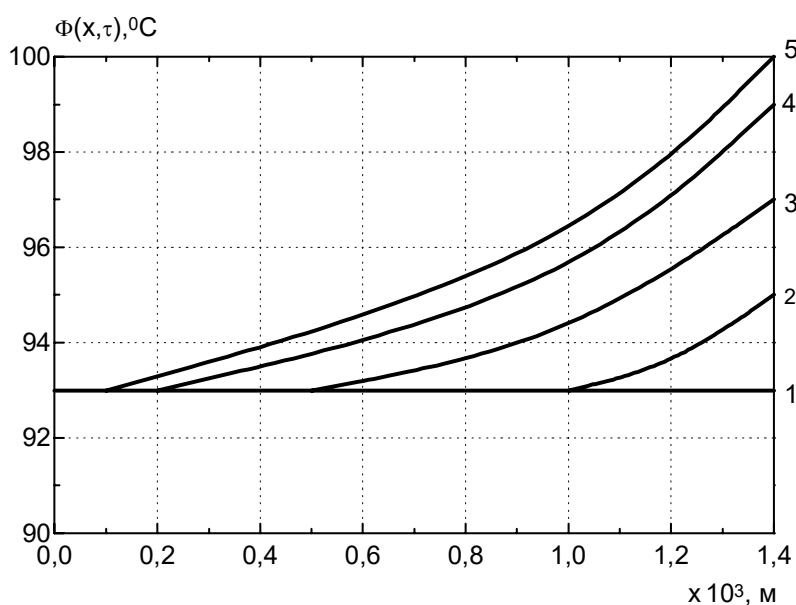


Рис. 4.3. Изменение во времени поля температур высушенного слоя пластины ( $R = 0,0014 \text{ м}$ ;  $\Theta = 110^{\circ}\text{C}$ ): 1 – начальное поле температур влажного слоя; 2 – поле температур высушенного слоя соответственно через 10 с; 3 – через 20 с; 4 – через 30 с; 5 – через 40 с

## **5. Задача теплопроводности для тела цилиндрической формы с движущейся границей фазового перехода на примере процесса сушки волокна**

### **5.1. Общие положения**

Нагрев и сушка волокна составляют основу многих технологий переработки волокнистых материалов, технологий композитов, биокompозитов, материалов медицинского назначения, текстильной и пищевой промышленности. Сушка является энергоёмким процессом. Необходимость сохранения качества высушиваемых материалов приводит к увеличению длительности процесса, следовательно, к значительному потреблению тепловой и электроэнергии.

С целью расчёта процесса сушки волокнистого материала аналитически решен ряд задач нестационарной теплопроводности для тел цилиндрической формы, в том числе и с движущейся границей фазового перехода, с учетом интенсифицирующего влияния внутренних источников теплоты различной физической природы.

При конвективной сушке волокна за счёт передачи теплоты от нагретого воздуха к его поверхности посредством конвекции последовательно протекают следующие стадии процесса: прогрев волокна; испарение влаги с поверхности волокна; углубление локализованного фронта испарения. В соответствии с физической моделью строили математическую модель для каждой стадии сушки, в частности, описывали первый и второй периоды сушки. Моделирование периода с падающей скоростью сушки (второй период сушки) требует решения задачи теплопроводности с движущейся границей.

### **5.2. Физическая модель**

Когда содержание влаги в материале достигает критического значения, начинается период «падающей скорости сушки», в котором на скорость сушки, наряду с внешним диффузионным сопротивлением, оказывает влияние диффузионное сопротивление материала (смешанно-диффузионный кинетический

режим). По мере убыли влаги в материале роль внутреннего диффузионного сопротивления возрастает и на заключительной стадии сушки оно доминирует – наступает внутридиффузионный кинетический режим сушки, при котором процесс полностью контролируется диффузионным сопротивлением материала. У ряда материалов, к числу которых относятся, в первую очередь, гранулированные и волокнистые полимеры, высушиваемые от внутренней влаги, после удаления поверхностной влаги в первом периоде сушки процесс сразу переходит во внутридиффузионный кинетический режим, т. е. переходная область смешанно-диффузионного кинетического режима отсутствует. Основной движущей силой внутреннего массопереноса является градиент влагосодержания материала. Обусловленный им поток влаги называют массопроводностью [9] или диффузией влаги в материале [2].

С момента начала периода падающей скорости сушки у ряда материалов может происходить углубление локализованного фронта испарения воды. К этим материалам относятся макрокапиллярно-пористые материалы (при определяющем радиусе пор  $r_{\text{опр}} > 10^{-6}$  м), гидрофобные капиллярно-пористые и коллоидные капиллярно-пористые материалы, содержащие тем или иным путём иммобилизованную внутреннюю влагу. У всех этих материалов затруднён перенос влаги к его поверхности из глубинных слоёв, т. к. не работает механизм капиллярного массопереноса. Это заставляет поверхность испарения отступать в глубь материала в процессе сушки.

Рассмотрим этот случай более детально - применительно к телу цилиндрической формы. На поверхность волокна теплота поступает конвективно от потока горячего воздуха, имеющего температуру  $\theta(t)$ . Граница испарения  $r = y(t)$  отступает в глубь цилиндра. Просушенный цилиндрический слой ( $y(t) < r < R$ , рис. 5.1) материала прогревается. На движущуюся границу испарения теплота поступает за счет теплопроводности. Примем, что вся подведенная теплота идет на испарение влаги с движущейся границы раздела фаз, поэтому внутренний влажный слой материала ( $0 < r < y(t)$ , рис. 5.1) не прогрева-

ется. Следует заметить, что через сухой слой проходит парообразная влага, а в ядре волокна находится вода. Их плотности отличаются в  $\sim 1000$  раз. Кинетика массообмена на границе испарения определяется изменением концентрации паров воды вблизи движущейся границы испарения. Для того чтобы учесть реальный массообмен на границе испарения, необходимо знать зависимость равновесного давления пара от температуры. Примем, что на поверхности испарения влагосодержание материала не ниже максимального гигроскопического. Из этого следует, что давление пара у поверхности является функцией только температуры. Зависимость давления насыщенного пара от температуры в подавляющем большинстве случаев представляют в виде линейной зависимости логарифма давления от обратной температуры [48]:

$$\ln P_H = M_1 - \frac{M_2}{T} .$$

Схема, иллюстрирующая период падающей скорости сушки, представлена на рис. 5.1. Расчет по предложенной модели проводим до тех пор, пока влагосодержание материала не достигнет заданного значения.

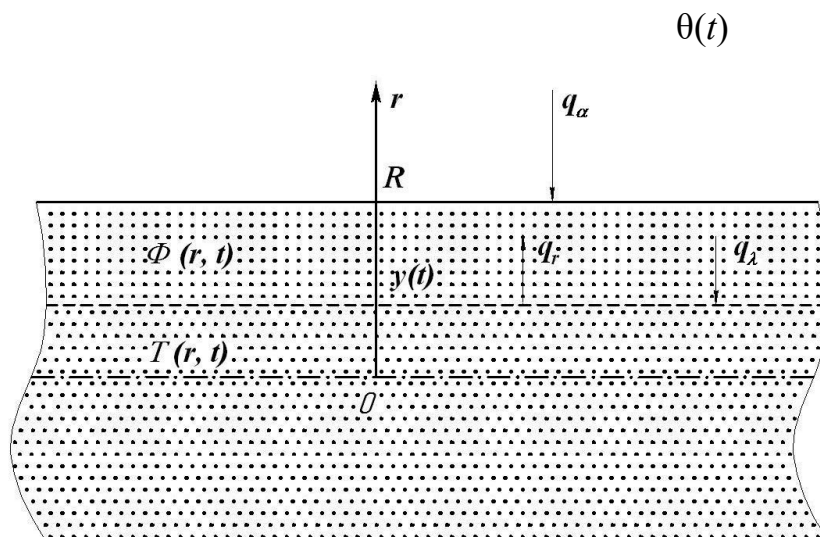


Рис. 5.1. Схема тепловых потоков в периоде падающей скорости сушки

### 5.3. Математическая модель

Поместим начало координат на центральной оси цилиндра и будем считать распределение температур четной функцией  $r$ . Математическая постановка задачи о сушке волокна во втором периоде при указанных выше условиях сводится к сопряженной задаче теплопроводности для неограниченного цилиндра с подвижной границей фазового перехода, при соответствующих краевых условиях (задача Стефана):

$$\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \right), \quad t > 0, y(t) < r < R; \quad (5.1)$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi(R, t)}{\partial r} = \alpha(\theta(t) - \Phi(R, t)); \quad (5.2)$$

$$\Phi(y(t), t) = T(y(t), t); \quad (5.3)$$

$$\lambda \frac{\partial \Phi(y(t), t)}{\partial r} + \varepsilon \rho r^* \frac{dy}{dt} = 0; \quad (5.4)$$

$$- \varepsilon \rho \frac{dy}{dt} = K_p \left( \exp \left( M_2 - \frac{M_1}{T(y(t), t)} \right) - P(t) \right); \quad (5.5)$$

$$y(0) = R; \quad (5.6)$$

$$T(r, t) = f_1(r), \quad 0 \leq r \leq y(t). \quad (5.7)$$

Требуется найти  $y(t)$ ,  $\Phi(r, t)$  при  $t > 0$ ,  $y(t) \leq r \leq R$ .

Здесь  $\Phi(r, t)$  – поле температур высушенного слоя (К);  $P(t)$  – парциальное давление водяного пара в воздухе (Па);  $f_1(r)$  – симметричное относительно центральной оси цилиндра распределение температуры во влажном материале в момент начала второго периода сушки;  $\rho$  – плотность воды ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $\varepsilon$  – пористость материала ( $\text{м}^3/\text{м}^3$ );  $r^*$  – теплота парообразования ( $\text{кДж}/\text{кг}$ );

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\beta} + \frac{R - y(t)}{D_3}, \quad (5.8)$$

$\frac{1}{K}$  – общее сопротивление массопередаче ( $\text{с}/\text{м}$ );

$K_p = \frac{K}{R_{\text{п}}^* \bar{T}}$  – коэффициент массопередачи по газовой фазе, отнесённый к разности парциальных давлений пара (кг/(м<sup>2</sup> с Па);

$K$  – коэффициент массопередачи, выраженный по газовой фазе и отнесённый к разности концентраций пара (кг/(м<sup>2</sup> · с · кг/м<sup>3</sup> ));

$R_{\text{п}}^* = 462 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  – газовая постоянная водяного пара;

$\bar{T}$  – средняя температура водяного пара на интервале от  $T(y(t), t)$  до  $\theta$ ;

$\beta$  – коэффициент массоотдачи, отнесённый к разности концентраций пара (кг/м<sup>3</sup>);

$D_3$  – эффективный коэффициент диффузии пара в пористой среде (высохшем слое) (м<sup>2</sup>/с) [9].

Данная задача Стефана (5.1-5.8) решена нами аналитически с использованием метода дифференциальных рядов [8]. Аналитическое решение этой задачи возможно, т.к. имеет место специфическая связь скорости перемещения границы испарения от температуры на этой поверхности (ур. 5.5). Модель позволяет определить поле температур высушенного слоя и закон перемещения границы испарения, т.е. рассчитать кинетику процесса сушки волокна. Метод позволяет найти решение при любом начальном распределении температур. Для определенности будем предполагать, что имеет место квадратичное начальное распределение температур в цилиндре, симметричное относительно центральной его оси. Тогда распределение температур внутри высушенного слоя в любой момент времени можно представить выражением (дифференциальным рядом), удовлетворяющим уравнению (5.1):

$$\Phi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t), \quad (5.9)$$

где  $B(t)$  – произвольная функция, вид которой должен обеспечить сходимость ряда (5.9). В выражении (5.5) отражена указанная выше симметрия тепловых полей в нашей задаче.

Уравнение (5.4) описывает тепловой баланс на перемещающейся в процессе сушки границе фазового перехода. Подставив (5.9) в (5.4), находим

$$-\varepsilon\rho r^* \frac{dy}{dt} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ny^{2n-1}(t)}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t). \quad (5.10)$$

Кроме того, ясно, что в силу (5.3) и (5.9) справедливо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}(t)}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = f_1(y(t)). \quad (5.11)$$

Граничное условие (5.2) с учетом (5.9) примет вид

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nR^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = \alpha(\theta(t)) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t). \quad (5.12)$$

Выражения (5.5), (5.6), (5.10), (5.11), (5.12) служат для определения функции  $y(t)$  и  $B(t)$ .

Выполнение начальных условий задачи обеспечивается соответствующим выбором величин  $\frac{d^n B(t)}{dt^n}$  при  $t = 0$ . Будем считать, что начальное распределение температур можно аппроксимировать выражением:

$$\Phi(r,0) = f_1(r) = D_0 + D_1 r^2, \quad (5.13)$$

где  $D_0, D_1$  - постоянные величины. Тогда

$$B(0) = D_0; \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2^2 a D_1; \left( \frac{d^n B(t)}{dt^n} \right)_{\substack{t=0 \\ n>1}} = 0. \quad (5.14)$$

Обозначим

$$v(t) = -\frac{dy}{dt} > 0. \quad (5.15)$$

$$v(t) = -\frac{dy}{dt} = \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \exp\left(-\frac{M_1}{\Phi(y(t),t)} + M_2\right) - \frac{P(t)K}{\varepsilon\rho}.$$

Пусть

$$g(t) = v(t) + \frac{p(t)K_p}{\varepsilon\rho} = \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \exp\left(-\frac{M_1}{\Phi(y(t),t)} + M_2\right) \quad (5.16)$$

или



$$g(t) = -y'(t) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(t). \quad (5.17)$$

Введем обозначения:

$$l_0 = \frac{k}{\varepsilon\rho} \exp(M_2). \quad (5.18)$$

Тогда

$$g(t) = l_0 \exp\left(-\frac{M_1}{\Phi(y(t), t)}\right). \quad (5.19)$$

Разделив обе части уравнения (5.19) на  $g(t)$  и логарифмируя его, получим

$$\Phi(y(t), t) = \frac{M_1}{\ln\left(\frac{l_0}{g(t)}\right)}. \quad (5.20)$$

Получили еще один вид граничного условия на границе фазового перехода.

При  $t = 0$  из (5.16) получим

$$g(0) = l_0 \exp\left(-\frac{M_1}{f_1(R)}\right) = v_n + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(0) = const. \quad (5.21)$$

$$\text{Обозначим } g(0) = g_n. \quad (5.22)$$

$$v(0) = v_n = l_0 \exp\left(-\frac{M_1}{\Phi(y(t), t)}\right) - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(0). \quad (5.23)$$

Из (5.20) и (5.22) получим тождество

$$f_1(R) = \frac{M_1}{\ln \frac{l_0}{g_n}}. \quad (5.24)$$

При малых значениях  $t$  функцию  $g(t)$  следует искать в виде формального ряда [7]:

$$g(t) = g_n + \xi g_1(t) + \xi^2 g_2(t) + \dots \quad (5.25)$$

Функция  $g(t)$  – это производная для некоторой функции  $z(t)$ , т.е

$$z'(t) = g(t).$$

Тогда с учетом (5.17)  $z(t)$  можно выразить в виде:

$$z(t) = -y(t) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \int_0^t P_r(t) dt. \quad (5.26)$$

При малых значениях  $t$  функцию  $z(t)$  можно представить в виде формального ряда:

$$z(t) = g_H t + \xi z_1(t) + \xi^2 z_2(t) + \dots. \quad (5.27)$$

Приравнивая (5.26) и (5.27), получим

$$z(t) = -y(t) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \int_0^t P_r(t) dt = g_H t + \xi z_1(t) + \xi^2 z_2(t) + \dots. \quad (5.28)$$

В формуле (5.20) выражение  $\ln \frac{l_0}{g(t)}$  представим в виде ряда по степеням малого

параметра  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \ln \frac{l_0}{g(t)} &= -\ln \frac{g(t)}{l_0} = -\ln \left( \frac{g_H}{l_0} + \xi \frac{g_1(t)}{l_0} + \xi^2 \frac{g_2(t)}{l_0} + \dots \right) = \\ &= -\ln \left( \frac{g_H}{l_0} \left( 1 + \xi \frac{g_1(t)}{g_H} + \xi^2 \frac{g_2(t)}{g_H} + \dots \right) \right) = -\ln \frac{g_H}{l_0} - \ln \left( 1 + \xi \frac{g_1(t)}{g_H} + \xi^2 \frac{g_2(t)}{g_H} + \dots \right) \\ &\cong \ln \frac{l_0}{g_H} - \xi \frac{g_1(t)}{g_H} - \xi^2 \frac{g_2(t)}{g_H} + \dots, \end{aligned} \quad (5.29)$$

т.к.  $\ln(1+x) \cong x$  при  $x \rightarrow 0$ . Здесь  $g_1(t) = z_1'(t)$ ,  $g_2(t) = z_2'(t)$ ,  $\dots$ .

Температуру в просушенном слое ищем в виде ряда (5.9).

Перепишем условие (5.3) на границе раздела фаз в виде:

$$\Phi(y(t), t) = \frac{M_1}{\ln \frac{l_0}{g(t)}} = T(y(t), t) = f_1(y(t)). \quad (5.30)$$

Подставим ряд (5.9) в (5.30):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}(t)}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = \frac{M_1}{\ln \left( \frac{l_0}{-y'(t) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(t)} \right)}. \quad (5.31)$$

Подставив ряд (5.9) в (5.7)), получим (5.10). Подставив ряд (5.9) в (5.2), получим (5.12).

Выпишем получившуюся систему уравнений для определения функций

$y(t)$  и  $B(t)$ :

$$y(0)=R; \quad (5.32)$$

$$\Phi(y(t),t) = \frac{M_1}{\ln(l_0(-y(t) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P_r(t))^{-1})}; \quad (5.33)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}(t)}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = \frac{M_1}{\ln \left[ \frac{l_0}{-y'(t) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(t)} \right]}; \quad (5.34)$$

$$-\varepsilon\rho r^* \frac{dy}{dt} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ny^{2n-1}(t)}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t); \quad (5.35)$$

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nR^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = \alpha(\theta(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n}}{(n!)^2 2^{2n} a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t)). \quad (5.36)$$

Введем безразмерные величины

$$X(t) = \frac{R - y(t)}{R}, \quad \tau = \frac{at}{R^2}, \quad (5.37)$$

а также обозначим  $N = \frac{r^*}{cR}$ . Тогда систему уравнений (5.32)-(5.36) для опре-

деления  $B(\tau)$  и  $X(\tau)$  можно переписать в виде:

$$X(0) = 0; \quad (5.38)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - X(\tau))^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) = \frac{M_1}{\ln \left[ \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(\tau)} \right]}; \quad (5.39)$$

$$N \frac{dX}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - X(\tau))^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau); \quad (5.40)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) = \text{Bi} \left( \theta(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) \right), \quad (5.41)$$

где  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ .

Систему нелинейных уравнений (5.38)-(5.41) будем решать методом последовательных приближений. Введем условный параметр малости  $\xi$ , который в конечном результате можно положить равным единице [7], тогда в (5.39), (5.40) имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \xi X(\tau))^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau) = \frac{M_1}{\ln \left( \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P_r(\tau)} \right)}; \quad (5.42)$$

$$N \frac{dX}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - \xi X(\tau))^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B(\tau). \quad (5.43)$$

Представим искомые функции в форме рядов:

$$X(\tau) = X_0(\tau) + \xi X_1(\tau) + \xi^2 X_2(\tau) + \dots, \quad (5.44)$$

$$B(\tau) = B_0(\tau) + \xi B_1(\tau) + \xi^2 B_2(\tau) + \dots \quad (5.45)$$

Тогда

$$X'(\tau) = X_0'(\tau) + \xi X_1'(\tau) + \xi^2 X_2'(\tau) + \dots \quad (5.46)$$

В новых переменных уравнение (5.17) примет вид:

$$g(\tau) = \frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P_r(\tau). \quad (5.47)$$

В уравнении (5.39) имеем выражение

$$\ln \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P_r(\tau)} = \ln \frac{l_0}{g(\tau)}. \quad (5.48)$$

Из уравнения (5.48), учитывая (5.29), получим следующее разложение в ряд по малому параметру:

$$\ln \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P_r(\tau)} \cong \ln \frac{l_0}{g_H} - \xi \frac{g_1(\tau)}{g_H} - \xi^2 \frac{g^2(\tau)}{g_H} - \dots \quad (5.49)$$

Нам требуется в уравнении (5.39) разложить в ряд по  $\xi$  выраже-

$$\text{ние} \left( \ln \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P_r(\tau)} \right)^{-1}. \text{ Несложно показать, что}$$

$$\left( \ln \frac{l_0}{\frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P_r(\tau)} \right)^{-1} = \frac{1}{\ln \frac{l_0}{g_n}} + \frac{\xi}{1!} \frac{\frac{g_1(\tau)}{g_n}}{\left( \ln \frac{l_0}{g_n} \right)^2} \dots \quad (5.50)$$

После подстановки рядов (5.44), (5.45), (5.46), (5.50) в уравнения (5.42), (5.43), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ , получим в *нулевом приближении* (из равенства коэффициентов при  $\xi^0$ ):

$$X_0(0) = 0; \quad (5.51)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) = \frac{M_1}{\ln \frac{l_0}{g_n}}; \quad (5.52)$$

$$N \frac{dX_0(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)! 2^{2n-1}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau); \quad (5.53)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) = \text{Bi}(\theta(\tau)) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau). \quad (5.54)$$

Система уравнений (5.52-5.54) служит для нахождения функций  $B_0(\tau)$  и  $X_0(\tau)$ .

Из равенства коэффициентов при  $\xi$  получаем систему уравнений для нахождения  $B_1(\tau)$  и  $X_1(\tau)$  (*первое приближение*):

$$X_1(0) = 0; \quad (5.55)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau) - X_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) = \frac{M_1 \frac{g_1(\tau)}{g_n}}{\left( \ln \frac{l_0}{g_n} \right)^2}; \quad (5.56)$$

$$N \frac{dX_1(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)! 2^{2n-1}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau) - X_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau); \quad (5.57)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau) = -\text{Bi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau). \quad (5.58)$$

Приравнивание коэффициентов при  $\xi^2$  дает систему уравнений для нахождения  $B_2(\tau)$  и  $X_2(\tau)$ , т.е. позволяет найти *второе приближение* решения задачи:

$$X_2(0) = 0; \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_2(\tau) - X_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau) - X_0^2(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) - \\ & - X_1(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) = M_1 \left[ \frac{\left( \frac{g_1(\tau)}{g_n} \right)^2 + \frac{g_2(\tau)}{g_n}}{\left( \frac{\ln l_0}{g_n} \right)^3 + \left( \frac{\ln l_1}{g_n} \right)^2} \right]; \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} N \frac{dX_2(\tau)}{d\tau} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_2(\tau) - \\ & - X_1(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau) - X_0^2(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(n!)^2 2^{2n} \cdot 2} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) - \\ & - X_0(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_1(\tau); \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_2(\tau) = -\text{Bi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_2(\tau). \quad (5.62)$$

Подставим выражения  $g(\tau)$  и  $X(\tau)$  в виде рядов в уравнение (5.48), записанное в следующем виде:

$$g(\tau) = \frac{a}{R} X'(\tau) + \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P(\tau). \quad (5.63)$$

Тогда

$$g_n - \frac{K}{\rho} P(\tau) + \xi g_1(\tau) + \xi^2 g_2(\tau) + \dots = \frac{a}{R} \frac{d}{d\tau} (X_0(\tau) + \xi X_1(\tau) + \xi^2 X_2(\tau) + \dots).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ :

$$\xi^0: \frac{a}{R} \frac{d}{d\tau} X_0(\tau) = g_n - \frac{K_p}{\varepsilon \rho} P(\tau);$$

$$\xi^1: \frac{a}{R} \frac{d}{d\tau} X_1(\tau) = g_1(\tau);$$

$$\xi^2: \frac{a}{R} \frac{d}{d\tau} X_2(\tau) = g_2(\tau), \text{ и т.д.}$$

Получим решение первого уравнения

$$X_0(\tau) = \frac{R}{a} \int_0^\tau \left( g_n - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(t) \right) dt = \frac{R}{a} \left( g_n \tau - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \int_0^\tau P(t) dt \right),$$

$$X_0(\tau) = \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) \tau - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \int_0^\tau P(t) dt \right). \quad (5.64)$$

С учетом замены (5.37)

$$y_0(\tau) = R(1 - X_0(\tau)) = R \left[ 1 - \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) \tau - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \int_0^\tau P(t) dt \right) \right]. \quad (5.65)$$

Заметим, что условие  $y_0(0) = R$  выполнено.

Кроме того, продифференцировав (5.64) по  $\tau$ , имеем:

$$\frac{dX_0(\tau)}{d\tau} = \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(\tau) \right). \quad (5.66)$$

Подставив эту производную в (5.53), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)! 2^{2n-1}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) = N \frac{dX_0(\tau)}{d\tau} = N \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(\tau) \right). \quad (5.67)$$

Подставим выражение (5.67) в уравнение (5.54). Получим дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $B_0(\tau)$ :

$$N \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) \tau - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(\tau) \right) = \text{Bi} \left( \theta(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) \right), \quad (5.68)$$

которое надо решить при начальных условиях

$$B_0(0) = D_0; \quad \left( \frac{dB_0(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2^2 a D_1; \quad \left( \frac{d^n B_0(t)}{dt^n} \right)_{t=0} = 0. \quad (5.69)$$

Для его решения воспользуемся методом операционного исчисления (методом преобразования по Лапласу-Карсону). Согласно общим правилам операционного исчисления [41], найдем изображение для уравнения (5.68):

$$1. \text{L} \left[ N \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} P(\tau) \right) \right] = N \frac{R}{a} \left( l_0 \exp\left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) - \frac{K_p}{\varepsilon\rho} \bar{P}(p) \right); \quad (5.70)$$

$$2. L[\theta(\tau)] = \theta(p); \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned}
3. L \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) = B_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{d^n}{d\tau^n} B_0(\tau) \right] = \\
= \bar{B}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}} p^n \left[ \bar{B}_0(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{d\tau^k} B_0(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \right] = \\
= \bar{B}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n B_0(p)}{(n!)^2 2^{2n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{(n!)^2 2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \frac{d^k}{d\tau^k} B_0(\tau) \Big|_{\tau=0} = \\
= \bar{B}_0(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(n!)^2 2^{2n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{(n!)^2 2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \frac{d^k}{d\tau^k} B_0(\tau) \Big|_{\tau=0} = \\
= \bar{B}_0(p) I_0(\sqrt{p}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{(n!)^2 2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \frac{d^k}{d\tau^k} B_0(\tau) \Big|_{\tau=0}. \quad (5.72)
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(n!)^2 2^{2n}} = I_0(\sqrt{p})$  - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка [49].

С учетом начальных условий (5.69), а также преобразований (5.70)-(5.72), изображающее уравнение для (5.68) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
N \frac{R}{a} \left( I_0 \exp \left( -\frac{M_1}{f_1(R)} \right) - \frac{K_p}{\varepsilon \rho} \bar{P}(p) \right) = Bi \bar{\theta}(p) - \\
- Bi \left[ \bar{B}_0(p) I_0(\sqrt{p}) - D_0 (I_0(\sqrt{p}) - 1) - \frac{2^2 a D_1}{p} (I_0(\sqrt{p}) - 1) - \frac{p}{(1!)^2 2^2} \right]. \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Выразим  $\bar{B}_0(p)$ , представив его в форме, удобной для нахождения оригинала:

$$\begin{aligned}
\bar{B}_0(p) = D_0 + (-N \frac{R}{a} \frac{g_H}{Bi} - D_0 - \frac{2^2 a D_1}{(1!)^2 2^2}) \frac{1}{I_0(\sqrt{p})} + \\
+ \frac{N R K_p}{Bi a \varepsilon \rho} \frac{\bar{P}(p)}{I_0(\sqrt{p})} + \frac{\bar{\Theta}(p)}{I_0(\sqrt{p})} + \frac{2^2 a D_1}{p} - 2^2 a D_1 \frac{1}{p I_0(\sqrt{p})}. \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Перейдем в формуле (5.74) к оригиналам, определим оригиналы каждого слагаемого в порядке сложности их нахождения:

$$1) \text{ первое слагаемое: } L[D_0] = D_0; \quad (5.75)$$



$$2) \text{ пятое слагаемое: } L\left[\frac{2^2 a D_1}{p}\right] = 2^2 a D_1 \tau; \quad (5.76)$$

3) второе слагаемое:

сначала найдем оригинал для  $\frac{1}{I_0(\sqrt{p})}$ :

$$\text{т.к. } I_\nu(x) \cong \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, \text{ при } x \rightarrow 0, \text{ то } I_0(x) \cong 1 \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$I_\nu(x) \cong \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}}, \text{ при } x \rightarrow \infty, \text{ то } I_0(x) \cong \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \text{ при } x \rightarrow \infty [50].$$

Следовательно,

$$L\left[\frac{1}{I_0(\sqrt{p})}\right] = \begin{cases} 1, & \text{при } \sqrt{p} \rightarrow 0 (\tau \rightarrow \infty); \\ 2 \exp(-\frac{1}{4\tau}), & \text{при } \sqrt{p} \rightarrow \infty (\tau \rightarrow 0). \end{cases} \quad (5.77)$$

Тогда:

$$L\left[-N \frac{R g_n}{a \text{Bi}} - D_0 - \frac{2^2 a D_1}{(1!)^2 2^2} \frac{1}{I_0(\sqrt{p})}\right] = \begin{cases} (-N \frac{R g_n}{a \text{Bi}} - D_0 - \frac{2^2 a D_1}{(1!)^2 2^2}), & \text{при } \tau \rightarrow \infty; \\ 2(-N \frac{R g_n}{a \text{Bi}} - D_0 - \frac{2^2 a D_1}{(1!)^2 2^2}) \exp(-\frac{1}{4\tau}), & \text{при } \tau \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.78)$$

4) шестое слагаемое в (5.74):

если учесть, что  $L\left[\frac{1}{p} F(p)\right] = \int_0^\tau f(t) dt$  [41] и воспользоваться формулой (5.77), то

можно найти, что

$$L\left[\frac{2^2 a D_1}{p I_0(\sqrt{p})}\right] = \begin{cases} \tau, & \text{при } \tau \rightarrow \infty; \\ \frac{1}{2} \left(4\tau \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right) + E_i\left(-\frac{1}{4\tau}\right)\right), & \text{при } \tau \rightarrow 0, \end{cases} \quad (5.79)$$

где  $E_i(x)$  - интегральная показательная функция [50],  $\left(E_i\left(-\frac{1}{4\tau}\right) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0\right)$ ;

5) четвертое слагаемое в (5.74): для этого учтем, что

$$L[f(p)g(p)] = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\theta)g(\theta)d\theta. \text{ Тогда}$$

$$L\left[\frac{\bar{\theta}(p)}{I_0(\sqrt{p})}\right] = \begin{cases} \theta(\tau), & \text{при } \tau \rightarrow \infty; \\ 0, & \text{при } \tau \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.80)$$

6) аналогично находится оригинал для третьего слагаемого в (5.74):

$$L\left[\frac{N R K \bar{P}(p)}{Bi a \varepsilon p I_0(\sqrt{p})}\right] = \begin{cases} \frac{N R K_p}{Bi a \varepsilon p} P(\tau) & \text{при } \tau \rightarrow \infty; \\ 0 & \text{при } \tau \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.81)$$

Окончательно выражение для оригинала (5.74):

$$B_0(\tau) = \begin{cases} \frac{NR}{aBi} \left(-g_n + \frac{K_p}{\varepsilon p} P(\tau)\right) + \Theta(\tau) + aD_1, & \tau \rightarrow \infty; \\ D_0 + 4aD_1\tau + \left(-\frac{NRg_n}{aBi} - D_0\right) 2 \exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right), & \tau \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.82)$$

Таким образом, получили решение задачи в нулевом приближении.

Закон перемещения границы испарения:

$$y_0(\tau) = R \left[ 1 - \frac{R}{a} \left( g_n \tau - \frac{K_p}{\varepsilon p} \int_0^\tau P(\xi) d\xi \right) \right]. \quad (5.83)$$

Температура просушенного слоя материала

$$\Phi_0(\xi, \tau) \approx B_0(\tau) + \frac{\xi^2}{4} B_0'(\tau) + \dots, \quad (5.84)$$

где  $B_0(\tau)$  определяется по формуле (5.82).

#### 5.4. Анализ решения, компьютерная реализация модели, выводы

Расчет по модели и сопоставление его результатов с экспериментальными данными показали, что при малых значениях  $\tau$  ( $\tau < 0,1$ ) следует использовать нижнее выражение в (5.82).

Строгое доказательство сходимости использованного выше процесса последовательных приближений требует специального рассмотрения, не попадающего в рамки данной работы. Изложенный метод решения задачи об испарении более эффективен, чем описанные в литературе инженерные и численные методы, так как он позволяет: описать процесс на протяжении всего его течения; решать задачу при произвольном распределении температуры в теле перед сушкой; учесть влияние начального теплосодержания на динамику изменения границы фазового перехода и температуры тела и т.п. Изложенная теория содержит ряд допущений, в которые входит и предположение о независимости теплофизических характеристик от температуры. Преодоление этого ограничения возможно с использованием *зонального метода расчета* [9].

С целью проведения численного эксперимента представленная модель была проанализирована в среде MathCAD для волокон различных типов. Здесь приведен пример расчета по модели для сушки льняного волокна. Необходимые данные о параметрах льняного волокна были взяты из [51].

Исходные данные для расчета следующие:  $R=0,0007\text{м}$ ;  $\alpha = 2,76 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  $\lambda = 0,046 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;  $a = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $E(0) = 5 \times 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^3$ ;  $\mu = 0,1$ ;  $\omega = 0,1$ ;  $A_i = 10^5 \text{ Вт}/\text{м}^3$  ( $i = 1,2$ ).

На рис. 5.2 представлено изменение во времени границы испарения  $y(t)$ , а на рис. 5.3 - температурное поле  $\Phi(r,t)$  цилиндрического слоя «высушенного» материала ( $\rho(t) \leq r \leq R$ ),  $T(r, 0) = 293 \text{ К}$ . В соответствии с физической моделью внутренний влажный слой материала не изменяет своей температуры.

Нами получена расчетная формула для нахождения текущего влагосодержания материала  $u_{\text{нов}}$  в период падающей скорости по определенному зако-

ну перемещения границ испарения  $y(t)$ , если известно исходное значение влагосодержания  $u^c$ :

$$u_{\text{нов}} = \frac{u^c \cdot y^2}{R^2}. \quad (5.85)$$

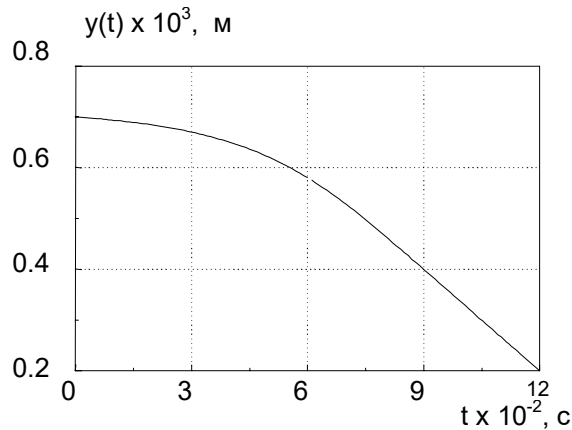


Рис. 5.2. Изменение во времени границы испарения  $y(t)$  при  $Bi = 0,02$ ;  $\theta = 328 \text{ К}$ ,  $R = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

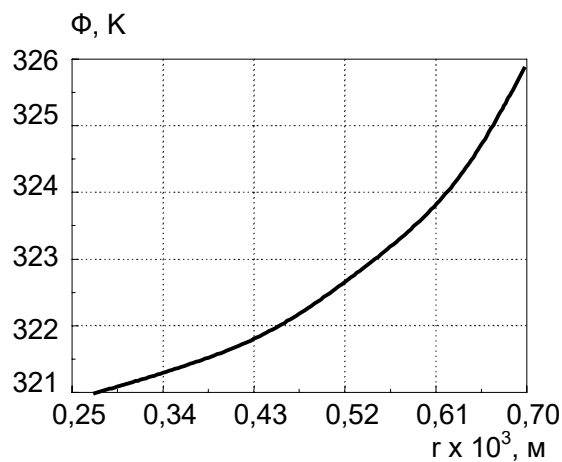


Рис. 5.3. Температурное поле «высушенного» цилиндрического слоя материала при  $Bi = 0,02$ ;  $\theta = 328 \text{ К}$ ,  $t = 960 \text{ с}$ ,  $R = 0,0007 \text{ м}$ ,  $\rho(t) = 0,0003 \text{ м}$

### 5.5. Область применимости предложенной модели сушки

Предложенная нами модель, в первую очередь, применима для гидрофобных капиллярно-пористых материалов, содержащих внутреннюю влагу, которая каким-то образом была ими иммобилизована. В таких материалах жидкофазная влага не может подтягиваться к поверхности материала за счёт капил-

лярных сил, т.к. стенки пор не смачиваются жидкостью. Поэтому, естественно, по мере испарения влаги с поверхности тела мениски жидкофазной влаги будут отступать в глубь тела, т.е. будет наблюдаться углубление поверхности испарения.

Далее, она может работать применительно к капиллярно-пористым материалам, содержащим макрокапилляры (определяющий радиус пор  $r_{\text{опр}} > 10^{-7}$  м). Чем крупнее поры, тем обоснованнее будет её применение. Капиллярный потенциал  $\psi$  (Дж/кг) для горизонтального капилляра определяется выражением [2]:

$$\psi = \psi_{\text{max}} = \frac{2\sigma \cdot \cos\eta}{r \cdot \rho_{\text{ж}}}, \quad (5.86)$$

в котором  $\sigma$  – поверхностное натяжение жидкости, Па·с;  $\eta$  – краевой угол смачивания, град;  $r$  – радиус капилляра, м;  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости, м.

Из уравнения (5.86) видно, что чем больше радиус капилляра, тем меньше капиллярный потенциал и, следовательно, тем меньше роль капиллярных сил во внутреннем массопереносе. В крупных порах капиллярно-пористого материала большую роль во внутреннем массопереносе играет диффузия пара, а вклад жидкофазного потока влаги в материале отступает на второй план [9]. Исходя из вышеизложенного, математическую модель внутреннего массопереноса с движущейся границей можно также рекомендовать для макрокапиллярно-пористых материалов с крупными порами ( $r_{\text{опр}} > 10^{-6}$  м).

## **6. Проверка работоспособности метода дифференциальных рядов при решении классических краевых задач теплопроводности с неподвижной границей**

### **6.1. Общие положения**

Интересно было проверить, работает ли метод дифференциальных рядов при решении классических краевых задач теплопроводности с неподвижной границей.

Кроме того, заметим, что принципиальной стороной аналитической теории теплопроводности является возможность варьирования классическими методами дифференциальных уравнений математической физики при решении конкретной краевой задачи. Объясняется это тем, что решение одной и той же тепловой задачи можно искать в различных классах функций. Эти функции должны быть такими, чтобы они, во-первых, достаточно легко находились, и, во-вторых, обеспечивали сходимость процесса настолько хорошо, чтобы можно было сделать требуемые в задаче заключения о свойствах полученного решения. Представление аналитического решения одной и той же задачи в различных эквивалентных функциональных формах (тождественных в смысле числа) имеет большую практическую ценность, так как позволяет варьировать решение в зависимости от постановки задачи: например, представление решения тепловой задачи в форме ряда Фурье, удобной для больших времен от начала процесса, или в виде формулы суммирования Пуассона, более подходящей для малых времен от начального состояния и используемого, например, в теории закалки. Аналитический метод дает возможность получить решение тепловой задачи в виде математического выражения для температуры как функции пространственных координат и времени, в отличие от графических, численных и экспериментальных методов. Решение должно удовлетворять определенному дифференциальному уравнению, из которого оно получено, и определенным начальным и граничным условиям, налагаемым самим конкретным процессом. Однако при этом почти во всех случаях приходится математически упрощать рассматриваемый процесс для того, чтобы этот метод мог дать желаемые результаты; и хотя решения, полученные при этих условиях, вовсе не являются физически «точными», все же предпочтительным методом вычисления температурного поля следует считать формальный аналитический метод. Применяемый в данной работе метод дифференциальных рядов позволяет находить распределение температур в теле с изменяющимися размерами (например, в результате фазового или химического превращения).

Проверили работоспособность метода при решении классических краевых задач теплопроводности с неподвижной границей. В качестве модельной была рассмотрена задача теплопроводности ограниченного стержня с граничным условием первого рода и с неравномерным начальным распределением температуры в нем.

## 6.2. Постановка задачи

Дан тонкий однородный стержень длиной  $\pi$ , изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого задана функцией

$$T(x,0) = \frac{\pi}{8} x(\pi - x).$$

Концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Требуется определить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени.

## 6.3. Математическая модель

Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} T(0,t) &= 0, \\ T(\pi,t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

и при начальном условии

$$T(x,0) = \frac{\pi}{8} x(\pi - x). \quad (6.3)$$

Начало координат поместим в середину стержня, и будем считать распределение температур четной функции  $z$  ( $z = x - \pi/2$ ). Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (6.4)$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0; \tag{6.5}$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = 0;$$

$$T(z, 0) = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{8} z^2; \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = 0 \text{ – условие симметрии.} \tag{6.7}$$

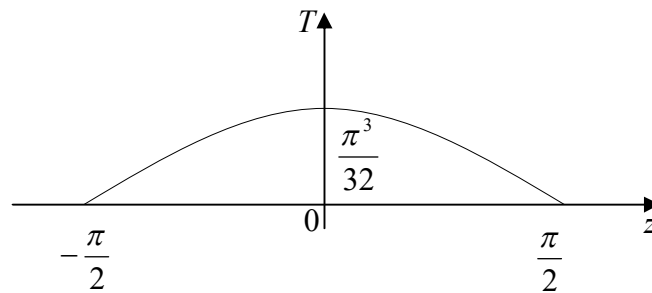


Рис. 6.1. Начальная температура в стержне

Решение.

Суть метода дифференциальных рядов состоит в том, что распределение температуры внутри тела, представляется выражением

$$T(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t), \tag{6.8}$$

удовлетворяющем уравнению теплопроводности (6.4).

Функция  $B(t)$  – произвольная функция, вид которой должен обеспечивать сходимость ряда (6.8).

Докажем, что функция (6.8) является решением уравнения (6.4):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{a^n} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} B(t),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = B'(t) + \frac{z^2}{2!} B''(t) + \frac{z^4}{4!} B'''(t) + \dots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nz^{2n-1}}{(2n)!} \frac{1}{a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t),$$



$$\frac{\partial T}{\partial z} = zB'(t) + \frac{z^3}{3!}B''(t) + \frac{z^5}{5!}B'''(t) + \dots,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n-1)z^{2n-1}}{(2n)!} \frac{1}{a^n} \frac{d^n}{dt^n} B(t),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = B'(t) + \frac{z^2}{2!}B''(t) + \frac{z^4}{4!}B'''(t) + \dots,$$

$$T(z,t) = B'(t) + \frac{z^2}{2!}B''(t) + \frac{z^4}{4!}B'''(t) + \dots \quad (6.9)$$

Следовательно, функция (6.8) удовлетворяет уравнению (6.1).

Легко видеть, что  $T(0,t) = B(t)$ , таким образом,  $B(t)$  указывает изменение температуры в центральной точке стержня.

Всюду далее положим коэффициент температуропроводности  $a = 1$ .

$$T(0,0) = B(0) = \frac{\pi^3}{32}; \quad (6.10)$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = 0; \quad (6.11)$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = 0.$$

Представим функцию  $B(t)$  в форме ряда:

$$B(t) = B_0(t) + \xi B_1(t) + \xi^2 B_2(t) + \dots, \quad (6.12)$$

где  $\xi$  – условный параметр малости, который в конечном результате можно положить равным единице. После подстановки ряда (6.12) в (6.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ , получим в нулевом приближении

$$T\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B_0(t) = 0. \quad (6.13)$$

Мы, по сути, решили задачу только в нулевом приближении, найдя  $B_0(t)$ . Заметим, что из (6.6)

$$T(z,0) = B(0) + \frac{z^2}{2!} B'(0) + \frac{z^4}{4!} B''(0) + \dots = -\frac{\pi}{8} z^2 + \frac{\pi^3}{32}.$$

$$z^0 : B(0) = \frac{\pi^3}{32};$$

$$z^2 : \frac{1}{2!} B'(0) = -\frac{\pi}{8};$$

$$z^4 : \frac{1}{4!} B''(0) = 0, \text{ и т.д.}$$

$$B(0) = \frac{\pi^3}{32}; \tag{6.14}$$

$$B'(0) = -\frac{\pi}{4}; \tag{6.15}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} B(0) = 0, \text{ для } n \geq 2. \tag{6.16}$$

Применим преобразование Лапласа–Карсона [7, 8]:

$$B(t) \div \bar{B}(p); \tag{6.17}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} B(t) \div p^n \left[ \bar{B}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{dt^k} B(t) \right) \Big|_{t=0} \right]; \tag{6.18}$$

$$\frac{d}{dt} B(t) \div p [\bar{B}(p) - B(0)];$$

$$\frac{d^2}{dt^2} B(t) \div p^2 \left[ \bar{B}(p) - \sum_{k=0}^1 \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{dt^k} B(t) \right) \Big|_{t=0} \right] = p^2 \left[ \bar{B}(p) - B(0) - \frac{1}{p} B'(0) \right];$$

$$\frac{d^3}{dt^3} B(t) \div p^3 \left[ \bar{B}(p) - B(0) - \frac{1}{p} B'(0) - \frac{1}{p^2} B''(0) \right].$$

Перейдем в уравнении

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = 0 \tag{6.19}$$

к изображениям:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B(t) \div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} P^n \left[ \bar{B}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{dt^k} B(t) \right) \Big|_{t=0} \right] = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} p^n B(p) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} p^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{dt^k} B(t) \right) \Big|_{t=0} = B(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 p\right)^n}{(2n)!}; \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B(t) = B(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} B(t) \div \\
& \div \bar{B}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} p^n \left[ B(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{dt^k} B(t) \right) \Big|_{t=0} \right] = \\
& = \bar{B}(p) + \bar{B}(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{(2n)!} p^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} p^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k} \left( \frac{d^k}{dt^k} B(t) \right) \Big|_{t=0} = \\
& = \bar{B}(p) \left( 1 + ch \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{p} \right) - 1 \right) - \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} p B(0) + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} p^2 \left( B(0) + \frac{1}{p} B'(0) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} p^3 \left( B(0) + \frac{1}{p} B'(0) + \frac{1}{p^2} B''(0) + \dots \right) \right] = \\
& = \bar{B}(p) ch \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{p} \right) - \\
& - \left[ B(0) \left( \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} p + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} p^2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} p^3 + \dots \right) + \frac{1}{p} B'(0) \left( \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} p^2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} p^3 + \dots \right) \right] = \\
& = \bar{B}(p) ch \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{p} \right) - \left[ \frac{\pi^3}{32} \left( ch \frac{\pi}{2} \sqrt{p} - 1 \right) - \frac{\pi}{8} \frac{1}{p} \left( ch \frac{\pi}{2} \sqrt{p} - 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 p}{2!} \right) \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\bar{B}(p)ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right) - \frac{\pi^3}{32}\left(ch\frac{\pi}{2}\sqrt{p} - 1\right) - \frac{2!\pi}{8} \frac{1}{p} \left( ch\frac{\pi}{2}\sqrt{p} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 p}{2!} - 1 \right) = 0; \quad (6.20)$$

$$\bar{B}(p) = \frac{\frac{\pi^3}{32}\left(ch\frac{\pi}{2}\sqrt{p} - 1\right) - \frac{2!\pi}{8} \frac{1}{p} \left( ch\frac{\pi}{2}\sqrt{p} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 p}{2!} - 1 \right)}{ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)};$$

$$\bar{B}(p) = \frac{\pi^3}{32} \left( 1 - \frac{1}{ch\frac{\pi}{2}\sqrt{p}} \right) - \frac{2!\pi}{8} \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{ch\frac{\pi}{2}\sqrt{p}} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 p}{2!ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)} \right);$$

$$\bar{B}(p) = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi^3}{32ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)} - \frac{2!\pi}{8p} + \frac{2!\pi}{8p} \frac{1}{ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)} + \frac{2!\pi}{8p} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 p}{2!ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)};$$

$$\bar{B}(p) = \frac{\pi^3}{32} - \frac{2!\pi}{8p} + \frac{2!\pi}{8p} \frac{1}{ch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)} = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{4p} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{pch\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{p}\right)}. \quad (6.21)$$

Используя соотношения [7]

$$\frac{1}{ch\sqrt{p}} \div 1 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp\left(-\pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 t\right)}{(2k+1)\pi}; \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{pch\sqrt{p}} \div t - \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp\left(-\pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 t\right)}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)^3 \pi^3}, \quad (6.23)$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{B}(p) & \div \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi^3}{16} \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{4t}{\pi^2} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp\left(-\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 4t\right)}{\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^3 \pi^3} \right) = \\ & = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{\pi^2}t - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp\left(-4 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 t\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^3} \right); \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} B'(t) & = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(-4 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(-4 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 t\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^3} \right) = \\ & = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \exp\left(-4 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 t\right)}{k + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Получаем решение

$$T(z, t) = B(t) + \frac{z^2}{2!} B'(t) + \dots, \text{ где } B(t) \text{ из (6.24) и } B'(t) \text{ из (6.25).}$$

Проверим:

$$B(0) = \frac{\pi^3}{32};$$

$$B'(0) = -\frac{\pi}{4}.$$

Следует отметить, что при малых значениях  $t$  ряд (6.22) сходится медленно, и поэтому для описания начала процесса целесообразно использовать другой способ отыскания оригинала выражения (6.21):

Используем соотношение

$$\frac{1}{pch\sqrt{p}} \div \div 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[ t + \frac{1}{2}(2k+1)^2 \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{2k+1}{2\sqrt{t}} \right) - (2k+1) \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2}{4t} \right) \right\}. \quad (6.26)$$

При малых значениях  $t$  ряд (6.26) быстро сходится и удобен для численных расчетов.

Тогда

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{4}t + \\ &+ \frac{\pi^3}{16} \frac{4}{\pi^2} 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{4t}{\pi^2} + \frac{1}{2}(2k+1)^2 \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{2k+1}{2\sqrt{\frac{4t}{\pi^2}}} \right) - (2k+1) \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2}{4\frac{4t}{\pi^2}} \right) \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{4t}{\pi^2} + \frac{1}{2}(2k+1)^2 \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{(2k+1)\pi}{4\sqrt{t}} \right) - 2(2k+1) \sqrt{\frac{t}{\pi^3}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) \right\} + \\ &+ \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{4}t; \\ B(0) &= \frac{\pi^3}{32}; \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} B'(t) &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \operatorname{erfc} \frac{(2k+1)\pi}{4\sqrt{t}} + \left[ \frac{4t}{\pi^2} + \frac{(2k+1)^2}{2} \right] \frac{(2k+1)\pi}{4} \left( -\frac{1}{2} \right) t^{-3/2} \cdot \right. \\ &\cdot \left( -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) - \frac{(2k+1)}{\sqrt{\pi^3} 2\sqrt{t}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) - 2(2k+1) \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left. \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16} \left( -\frac{1}{t^2} \right) \right) \right) \right\} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \operatorname{erfc} \frac{(2k+1)\pi}{4\sqrt{t}} + \left[ \frac{4t}{\pi^2} + \frac{(2k+1)^2}{2} \right] \left( -\frac{\pi}{8} \right) \frac{2k+1}{\sqrt{t^3}} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left( -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) - \frac{(2k+1)}{\sqrt{t\pi^3}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) - \frac{(2k+1)^3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{t^3}} \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$B'(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{4\sqrt{t}} \right]; \quad (6.28)$$

$$B'(0) = -\frac{\pi}{4}, \text{ т.к. } \operatorname{erfc} \infty = 0;$$

$$B''(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi}{4} \left( -\frac{1}{2} t^{-3/2} \right) \left( -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right) \right);$$

$$B''(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \exp\left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{16t} \right); \quad (6.29)$$

$$B''(0) = 0.$$

Получаем решение

$$T(z, t) = B(t) + \frac{z^2}{2!} B'(t) + \frac{z^4}{4!} B''(t) + \dots \quad (6.30)$$

где  $B(t)$  из (6.27),  $B'(t)$  из (6.28),  $B''(t)$  из (6.29).

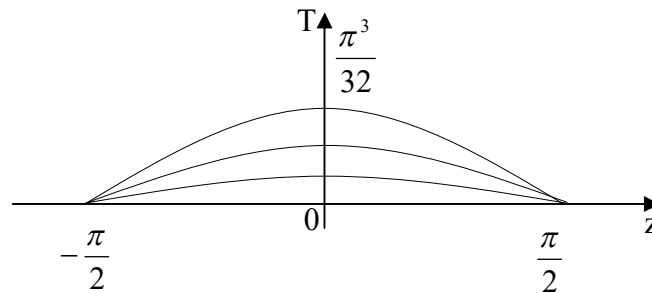


Рис. 6.2. Поле температур в стержне

#### 6.4. Анализ решения. Выводы

Аналитическое решение данной краевой задачи получили в виде функциональной формы, отличной от форм, найденных методом Фурье [52] и методом преобразования Лапласа [3]. Выражение получилось более громоздким, но тождественным им в смысле числа. Таким образом, метод дифференциальных рядов был успешно использован нами при решении классической краевой задачи, следовательно, он работоспособен. Однако метод дифференциальных рядов трудоемок, и его целесообразно использовать при решении краевых задач с движущимися границами (задач типа Стефана), так как классические методы в этом случае неприемлемы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании метода дифференциальных рядов аналитически решен ряд сопряженных задач теплопроводности для тел канонической формы (шара, пластины, цилиндра) с внутренними источниками теплоты, движущейся границей фазового перехода или химического превращения (на примере сублимации, сушки, реакции термического разложения и др.). Обоснована возможность применения данного метода. Продемонстрирована работоспособность метода дифференциальных рядов при решении классических краевых задач теплопроводности с неподвижной границей.

Развитый метод решения задач теплопроводности с движущейся границей может найти применение при моделировании тепломассообменных процессов химической технологии при наличии перемещающейся границы раздела фаз, будет полезен магистрантам, аспирантам при изучении методов математического моделирования тепломассопереноса, осложненного фазовым или химическим превращением.

### Список литературы

1. Лыков, А.В. Теория тепло- и массопереноса / А.В. Лыков. – М.: ГЭИ, 1963. – 535 с.
2. Лыков, А.В. Теория сушки / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 471 с.
3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
4. Carslaw and Jager. Conduction of Heat in Solids. – London, 1948.
5. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 487 с.
6. Гринберг, Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей / Г.А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1969. – т.33. – №2. – С. 269-273.
7. Любов, Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах / Б.Я. Любов. – М.:



Наука, 1975. – 256 с.

8. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.
9. Рудобашта, С.П. Массоперенос в системах с твердой фазой / С.П. Рудобашта. – М.: Химия, 1980. – 248 с.
10. Федосов, С.В. Тепломассоперенос в технологических процессах строительной индустрии: монография / С.В. Федосов. – Иваново: ИПК «Прес-Сто», 2010. – 364 с.
11. Рубинштейн, А. Проблема Стефана / А. Рубинштейн. – Рига: Звайгзне, 1967. – 457 с.
12. Будаков, Б.М. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана / Б.М. Будаков, Ф.П. Васильев, А.Б. Успенский // Численные методы в газовой динамике: Сб. – М.: Изд-во МГУ. – 1965. – № 15. – С. 139-156.
13. Фомин, Л.В. Численное решение задачи Стефана методом прямых / Л.В. Фомин // Промышленная техника. – 1986. – Т.8. – № 5. – С.10-13.
14. Вабищевич, П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей / Вабищевич П.Н. – М.: Из-во МГУ, 1987. – 165 с.
15. Scyirrmann. Unsteady-state mass transfer by fluid particles of changing volume // Int. J. Mass Transfer. – 1990, Vol. 33. – N 2. – pp. 253-266.
16. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
17. Волынский, В.Ю. Ячеечная модель сушки пластины с перемещающейся зоной парообразования / В.Ю. Волынский, В.А. Зайцев, В.Е. Мизонов, С.Б. Суханов // Известия вузов. Вестник ТГТУ, 2005. – Т. 11. – № 2. – С. 381-387.
18. Федосов, С.В. Ячеечная модель замерзания и оттаивания влаги в ограждающих конструкциях / С.В.Федосов, Н.Н. Елин, В.Е. Мизонов, А.А. Сахаров // Строительные материалы, 2013. – №3. – С. 70-74.
19. Акулич, П.В. Тепломассообмен капель раствора в условиях нестационарного и комбинированного теплового воздействия / П.В. Акулич, А.А. Акулич

- // Тезисы докл. и сообщений VI Минского междунар. форума по тепло-массообмену. – Минск, 2016. – Т. 3. – С. 83-87.
20. Карташов, Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами / Э.М. Карташов // ИФЖ. – 2001. – Т. 74. – №2. – С. 171-195.
  21. Карташов, Э.М. Метод функций Грина при решении краевых задач уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях / Э.М. Карташов, В.М. Нечаев // Прикл. матем. и мех. (ZAMM, ГДР). – 1978. – № 58. – С. 199-208.
  22. Квальвассер, В.И. Метод нахождения функции Грина краевых задач уравнения теплопроводности для отрезка прямой с равномерно движущимися границами / В.И. Квальвассер, Я.Ф. Рутнер // Докл. АН СССР. – 1964. – Т.156. – №6. – С. 1273-1276.
  23. Карташов, Э.М. Метод решения обобщенных тепловых задач в области с границей, движущейся по параболическому закону / Э.М. Карташов, Б.Я. Любов // Журн. техн. физ. – 1971. – Т. 61. – № 1. – С. 3-16.
  24. Любов, Б.Я. Метод решения краевых задач диффузии для областей с границей, движущейся по произвольному закону / Э.М. Карташов, Б.Я. Любов // Изв. вузов. Серия Физика. – 1970. – № 12. – С.97-101.
  25. Гринберг, Г.А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях / Г.А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т.31. – № 2. – С. 393-403.
  26. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 714 с.
  27. Гринберг, А. О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри бесконечной или конечной области движущимися поверхностями, на которых задан переменный ход температуры или концентрации / А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33. – № 6. – С. 1051-1060.

28. Гринберг, Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей, форма которых меняется со временем без соблюдения подобия / Г.А. Гринберг, В.А. Косс // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33. – № 4. – С. 755-756.
29. Карташов, Э.М. Метод решения обобщенных краевых задач уравнения теплопроводности в области с границей, движущейся по произвольному закону / Э.М. Карташов, Г.М. Бартнев, Б.Я. Любов // В кн. Тепло и массоперенос. Минск. – 1972. – Т.8. – С.274-285.
30. Карташов, Э.М. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами / Э.М. Карташов, Б.Я. Любов // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83-11.
31. Любов, Б.Я. Теплопроводность тела при переменном коэффициенте теплообмена / Б.Я. Любов, Н.И. Яловой // Инж.-физ. журн. – 1969. – Т. 17. – №4. – С. 679-687.
32. Соломатов, В.В. Температурное поле неограниченной пластины при переменных значениях коэффициента теплообмена и температуры внешней среды / В.В. Соломатов, Э.И. Гончаров // Инж.-физ. журн. – 1968. – Т. 14. – № 4. – С. 743-745.
33. Любов, Б.Я. Вычисление скорости затвердевания металлического слитка / Б.Я. Любов // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 68. – № 5. – С. 847-850.
34. Блиничев, В.Н. Повышение эффективности массообменных процессов за счет механоактивации гомогенных и гетерогенных сред / В.Н. Блиничев // Сб. трудов Междунар. научно-технич. конф., посвященной 105-летию А.Н. Плановского «Повышение эффективности процессов и аппаратов в химических и смежных отраслях промышленности». – Москва. – 2016. – Т.2. – С. 36-44.

35. Дульнев, Г.Н. Тепло- и массообмен сублимирующегося однородного материала / Г.Н. Дульнев, Р.А. Испарян, Н. Ярышев // Сб. тр. Ленингр. ин-та механ. и оптики. – Л. – 1967. – №1. – С. 20-34.
36. Структура физико-механических эффектов и явлений, протекающих в процессе измельчения – сублимации дисперсных материалов / Г.А. Зуева, В.А. Падохин, В.Н. Блиничев, Б.В. Васильев // Разработка теории и конструктивного оформления процессов тонкого измельчения, классификации, сушки и смешения материалов // Межвуз. сб. – Иваново, 1998. – С.6-11.
37. Волынец С.З. Исследование процесса сублимации в поле электромагнитного излучения различного спектра волн // Дис... канд.техн.наук. – М. – 1969. – 133 с.: ил.
38. О порообразовании в щелочно-галогидных монокристаллах под действием импульса электромагнитного излучения / В.Е. Рогалин, Т.И. Самойлов, Н.А. Тищенко, М.П. Шапольская // Физика твердого тела. – 1980. – Т.22. – №12. – С. 3549-3554.
39. Шашков, А.Г. Системно-структурный анализ процесса теплообмена и его приложение / А.Г. Шашков. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 280 с.
40. Действие излучения большой мощности / С.И. Анисимов, Д.И. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходаков. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
41. Диткин, В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высш. шк., 1965. – 407 с.
42. Бахвалов, Н. Численные методы / Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков. Изд-во «Бином». – 2003. – 634 с.
43. Постникова, И.В. Системный подход к расчету процессов в аппарате комбинированного действия / И.В. Постникова, В.Н. Блиничев // Теоретические основы химической технологии. – 2014. – Т.14. – №3. – С. 260-267.
44. Зуева, Г.А. Моделирование термического разложения сферической частицы / Г.А. Зуева, В.Н. Блиничев, И.В. Постникова // ТОХТ. – 1999. – Т. 33. – №3. – С. 323-327.

45. Зуева, Г.А. Математический анализ тепло- и массообмена при топохимической реакции частицы для малых и больших значений критерия Фурье / Г.А. Зуева, В.Н. Блиничев, В.А. Падохин, И.В. Постникова // Сб. докладов III Межд. научн.-техн. конф. «Теоретические и экспериментальные основы создания нового оборудования». – Иваново, 1997. – С. 248-257.
46. Колобердин, В.И. Влияние механической обработки на химическую активность минерального сырья / В.И. Колобердин // Интенсификация процессов механической переработки сыпучих материалов: Межвуз. сб. научн. трудов / Иванов. хим.-техн. ин-т. – Иваново, 1987. – С. 50-62.
47. Зуева, Г.А. Математическое моделирование процесса сушки синтетической кожи от органического растворителя перегретым водяным паром / Г.А. Зуева, В.Н. Блиничев, А.А. Покровский, В.А. Падохин // Сб. докл. V междунар. научн. конф. «Теоретические и экспериментальные основы создания новых высокоэффективных химико-технологических процессов и оборудования». – Иваново, 2001. – С. 216.
48. Несмеянов, А.Н. Давление пара химических элементов / А.Н. Несмеянов, – М.: АН СССР, 1961. – 396 с.
49. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
50. Голосков, Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П. Голосков. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
51. Первичная обработка лубяных волокон. Научно – исследовательские труды. Вып. 5. Кострома: Костромское областное издательство, 1947. – 243 с.
52. Кошляков, Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.Н. Смирнов. М.: Гос. изд. физ.–мат. лит-ры, 1962.–767 с.

Научное издание

Зуева Галина Альбертовна

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ  
ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА  
ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ  
МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ**

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 1.02. 2017. Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. 5,35. Тираж 70 экз . Заказ

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный  
химико-технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании  
кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВО «ИГХТУ»  
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7