525

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Методические указания

Иваново

2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Методические указания по математике

Составители: Г.Н. Кокурина,
А.А. Митрофанова,
Г.А. Зуева

Иваново 2014

Составители: Г.Н. Кокурина, А.А. Митрофанова, Г.А. Зуева

УДК 512

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: метод.указания / сост. Г.Н. Кокурина, А.А. Митрофанова, Г.А. Зуева; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2014. – 52 с.

Методические указания содержат изложенный в краткой форме теоретический материал, относящийся к основам линейной алгебры и аналитической геометрии. Приведены задачи и упражнения с ответами, представлен разбор решения типовых задач.

Предназначены студентам, изучающим математику, а так же всем желающим пополнить, укрепить и систематизировать свои знания при самостоятельном изучении математики.

Рецензент:

доктор химических наук, профессор В.В. Рыбкин

(Ивановский государственный химико-технологический университет

1. Основы линейной алгебры

Основные определения и понятия. *Определение матрицы. Виды матриц. Транспонирование матриц. Алгебраические операции над матрицами. Определители второго, третьего порядка. Обратная матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Решение систем линейных уравнений.*

1.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется таблица чисел, составленная из m строк и n столбцов. Элементы строки обозначаются индексом i, столбцы индексом j. Любой элемент матрицы можно обозначить a_{ij}. Это означает, что элемент a_{ij} находится в i-й строке и в j-м столбце. Например, a_{32}–элемент, находящийся на пересечении третьей строки и второго столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если в матрице число строк n совпадает с числом ее столбцов, то такую матрицу называют *квадратной матрицей* порядка n.

Матрица вида $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, в которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы матрицы – нули, называется *единичной матрицей*. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц: $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. $A = (a) = a$.

Если $m = 1$, то $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – матрица-строка;

если $n = 1$, то $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$– матрица-столбец.

Транспонированием матрицы называется операция замены строк матрицы столбцами, а столбцов строками, обозначения A^{T}.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, в противном случае она называется *вырожденной*.

Действия с матрицами

Сложение вводится только для матриц одинаковой размерности.

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$A+B=C=(c_{ij})$, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Свойства сложения:

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $A+0=A$;
4. $A+(-A)=0$ ($-A$ – *противоположная* матрица);
5. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

Умножение матрицы на число:

Произведением матрицы A на число k называется матрица, каждый элемент которой умножается на k: $kA=(ka_{ij})$.

Свойства умножения матрицы на число:

1. $1\cdot A=A$;
2. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$;
3. $A\cdot(\alpha+\beta)=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$;
4. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$.

Здесь α и β – числа.

Произведение двух матриц:

Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ является матрица $C_{m\times p}$ такая, что элемент i-й строки $(i=\overline{1,m})$ и j-го столба $(j=\overline{1,n})$ матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

1. Умножение матрицы A на матрицу B *имеет смысл только в том случае, если число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B.*

2. В результате получается матрица, которая имеет столько строк, сколько в первой матрице и столько столбцов, сколько во второй матрице.

Если $A\cdot B=B\cdot A$, то матрицы называются *перестановочными*.

Свойства произведения:

1. $(AB)C=A(BC)$;
2. $(A+B)C=AC+BC$;
3. $A(B+C)=AB+AC$;
4. $(\alpha A)B=\alpha(AB)$;

5. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Пример 1.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти *EA* и *AE*.

Решение:

$E \cdot A$ не имеет смысла, т.к. число столбцов матрицы E равно 3, а число строк матрицы A равно 2;

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти *AB*.

Решение:

$A_{4\times3}$, $B_{3\times2}$, число столбцов первой матрицы совпадает с числом столбцов второй матрицы, поэтому можем умножать

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot3-1\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot1-1\cdot1+2\cdot0 \\ 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Найти $C=A^2+2B$.

Решение:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2-3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}; \; 2B = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-14 & 8-5 \\ 10 & 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти *AB*.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Пример 5.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти *AB* и *BA*.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3+3 & 1-3+2 & 0+6+1 \\ 4+0+12 & 2+0+8 & 0+0+4 \\ 2+2+9 & 1-2+6 & 0+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+0 & 6+0+0 & 2+4+0 \\ 1-2+2 & 3+0+4 & 1-4+6 \\ 3+4+1 & 9+0+2 & 3+8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители

Определитель квадратной матрицы – это число, которое получается из элементов этой матрицы по определенному правилу.

Обозначение: $|A|$, ΔA, $\det A$.

Общее правило вычисления определителя 2-го порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Общее правило вычисления определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.
2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный.
3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.
4. Общий множитель всех элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

5. Если все элементы двух рядов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
6. Если элементы, какого-либо ряда определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.
7. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 1.

Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

<u>Решение:</u>

$\Delta A = 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 5 = 7$;

Пример 2.

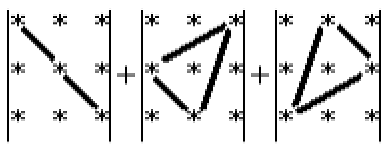
Найти $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

<u>Решение:</u>

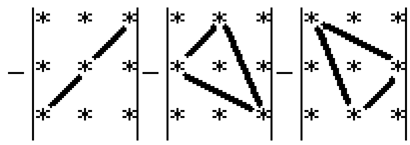
$\Delta = a^2b^2 - ab \cdot ab = a^2b^2 - a^2b^2$.

Для запоминания правила вычисления определителя 3-го порядка полезно пользоваться *«правилом треугольников»*:

слагаемые со знаком «+» берутся по главной диагонали и основаниям треугольников, параллельных главной диагонали, т.е.



слагаемые со знаком «–» берутся по второй диагонали и основаниям треугольников, параллельных этой диагонали, т.е.



Таким образом,

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Пример 3.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

а) вычислить определитель матрицы A по правилу треугольников;
б) составить транспонированную матрицу и вычислить ее определитель.

Решение:

а) вычислим определитель матрицы: $\det A = 60 - 6 + 84 - 28 + 18 - 60 = 68$;

б) составим транспонированную матрицу: $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Вычислим ее определитель: $\det A^{\mathrm{T}} = 60 + 84 - 6 + 18 - 28 - 60 = 68$ ($\left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A| = 68$ по свойству (1)).

Пример 4 .

Вычислить определители, используя свойства определителей:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -8 \\ 7 & 3 & -12 \end{vmatrix}$; 4) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

5) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -68$ (применили свойство 2: 1-й и 2-й столбцы поменяли местами).

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (применили свойство 3).

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -8 \\ 7 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 68 = -136$ (применили свойство 4).

4) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (применили свойство 5).

5) $\varDelta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1+1 \\ -1 & 2 & 3+1 \\ 7 & 3 & 9-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 68.$

Вычисление определителей более высокого порядка происходит по правилу разложения определителя по элементам строки (столбца), при помощи понятия алгебраического дополнения к элементу.

1.3. Миноры и алгебраические дополнения

К каждому элементу определителя можно составить *минор*. Минором элемента a_{ij} называется новый определитель (n-1)-го порядка, который получается из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Обозначение: M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} соответствующий минор.

Свойство определителя (разложение определителя по элементам некоторого ряда): определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Пример 1.

Вычислить определитель третьего порядка, разложив его по элементам первой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + (-2) = -12.$$

Пример 2.

Вычислить определитель 4-го порядка, сведя его к определителям более низких порядков:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{(2)+(1)\cdot(-2) \\ (3)+(1)\cdot(-3) \\ (4)+(1)\cdot(-4) \\ \textit{столбцы}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -10 & -8 \\ 1 & 2 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ 2 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{(1)+(3) \\ (2)+(3)\cdot(-3) \\ \textit{столбцы}}}{=}$$

$$=4\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & -7 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 6 & -7\end{vmatrix}=4\cdot(-7+6)=-4.$$

1.4. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если она при умножении на A (как слева, так и справа) дает единичную матрицу ($A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$).

Понятие *обратной матрицы* существует *только для квадратной невырожденной матрицы.*

Если существует обратная матрица, то сама матрица называется *обратимой*, само действие называется *обращением*.

Теорема. Любая невырожденная матрица имеет обратную и находится по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти обратную матрицу, нужно:

1. найти $\det A$;
2. найти алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы и составить из них матрицу;
3. транспонировать полученную матрицу;
4. каждый элемент матрицы умножить на $\frac{1}{\det A}$.

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем определитель матрицы: $\det A=6+4=10\neq 0$, следовательно, матрица невырожденная и имеет обратную.

Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы:

$A_{11}=(-1)^2\cdot 3=3$; $A_{12}=(-1)^3\cdot 4=-4$; $A_{21}=(-1)^3\cdot(-1)=1$; $A_{22}=(-1)^4\cdot 2=2$.

Составим матрицу из полученных алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, транспонируем ее: $\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$.

Вычислим обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Выполним проверку: по определению обратной матрицы должно выполняться $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Действительно $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} + \frac{2}{5} & \frac{2}{10} - \frac{1}{5} \\ \frac{12}{10} - \frac{6}{5} & \frac{4}{10} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Пример 2.

Найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>:

Найдем определитель матрицы: $\det A = -7 + 12 + 0 + 9 - 0 - 0 = 14 \neq 0$, следовательно, матрица A невырожденная и имеет обратную. Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы A:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$; $\quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$; $\quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$;

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$; $\quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$; $\quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$;

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$; $\quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $\quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$.

Составим матрицу из полученных алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

транспонируем ее: $\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислим обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

1.5. Ранг матрицы

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом* этой матрицы.

Обозначение: rang A.

Пример 1.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, rang A=2, т.к. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=10\neq 0$.

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, rang A=1, т.к. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, но существует определитель (минор) первого порядка, например, $|6|$, отличный от нуля.

c) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rang A=0, т.к. все определители матрицы равны нулю.

d) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, rang A=3, т.к. $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-12$.

Определение. Минор, определяющий ранг матрицы, называется *базисным минором.* Строки и столбцы, формирующие базисный минор, *называются базисными строками и столбцами*.

Определение. Система столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю и такие, что: $\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k=0$.

Теорема о базисном миноре. Столбцы матрицы A, входящие в базисный минор, образуют линейно независимую систему. Любой столбец матрицы A линейно выражается через столбцы из базисного минора.

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A.

Замечание. Слово «столбцы» можно заменить словом «строки».

<u>Способы вычисления ранга матрицы.</u>

Первый способ. *Метод окаймляющих миноров*. При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка D, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры (k+1)-го порядка, окаймляющие минор D: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Пример 2.

Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot1-1\cdot1\neq0$, отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы А. Минор третьего порядка

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\neq0,$$

окаймляющий минор M_2, также отличен от нуля. Однако оба минора четвертого порядка, окаймляющие M_3,

$$M_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

равны нулю. Поэтому ранг матрицы A равен 3, а базисным минором является, например, представленный выше минор M_3.

Второй способ. *Метод элементарных преобразований*. Вычисление ранга матрицы основано на следующем утверждении: элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

При этом *элементарными преобразованиями* матрицы являются следующие: перестановка двух строк или столбцов; умножение строки (столбца) на отличное от нуля число; прибавление к какой-либо строке (столбцу) строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Используя эти элементарные преобразования, приводят матрицу к такому виду матрицы, ранг которой легко найти, например,

когда все элементы матрицы равны нулю, кроме тех, которые стоят на главной диагонали a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, $a_{кк}$, тогда ранг матрицы равен $к$;

или когда матрицу можно привести к треугольному виду. Заметим, что если матрица n-го порядка имеет вид верхней треугольной матрицы, т.е. матрицы, у которой все элементы под главной диагональю равны нулю, то ее определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. В этом случае ранг матрицы равен числу элементов главной диагонали, отличных от нуля.

Пример 3.

Методом элементарных преобразований найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 48 & -14 \\ 9 & 16 & 24 & 98 & -31 \\ 14 & 24 & 25 & 146 & -45 \\ 9 & 16 & 24 & 94 & -25 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Обозначим i-ю строку матрицы A символом α_i. На первом этапе выполним элементарные преобразования $\alpha_2' = \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1$; $\alpha_3' = \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1$; $\alpha_4' = \alpha_4 - \alpha_3 + \alpha_1$.

На втором этапе выполним преобразования $\alpha_3'' = \alpha_3' + \alpha_2'$; $\alpha_4'' = \alpha_4' - \alpha_2'$.

В результате получим

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 48 & -14 \\ 9 & 16 & 24 & 98 & -31 \\ 14 & 24 & 25 & 146 & -45 \\ 9 & 16 & 24 & 94 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 48 & -14 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 48 & -14 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 48 & -14 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 & 12 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На третьем этапе мы переставили четвертую строку на место третьей, третью – на место четвертой. На четвертом этапе мы разделили элементы четвертого и пятого столбцов соответственно на 4 и 2 и поменяли местами третий и четвертый столбцы. Из вида матрицы, получившейся после четвертого этапа преобразования, следует rang A=3.

1.6. Системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Перепишем ее в *матричной форме*: $A \cdot X = B$, где

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы, называемая основной матрицей;

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец из неизвестных x_j;

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец из свободных членов b_i.

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Решением системы называется *n* значений неизвестных $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, ..., $x_n=c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, если система совместна, найти ее общее решение.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю.

Теорема Кронекера-Капелли.

Для того чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы rang *A* равнялся рангу расширенной матрицы rang $\overline{A}$:

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} \overline{A}.$$

Однородная система всегда совместна, так как она всегда имеет нулевое решение, которое называется *тривиальным*: $x_1= x_2=\ldots= x_n=0$.

Если ранг r совместной системы равен числу неизвестных n, $r=n$, то система будет определенной.

Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, $r<n$, то система неопределенная. В этом случае для решения системы (1) выделяем любой базисный минор, его элементы в столбцах являются коэффициентами при r неизвестных, которые называются базисными неизвестными системы (1). Остальные $n-r$ неизвестных называются свободными неизвестными. Выделив из заданной системы (1) подсистему уравнений с r базисными неизвестными и перенеся в правую часть каждого уравнения выделенной подсистемы слагаемые со свободными неизвестными, решаем последнюю, придавая произвольные значения свободным неизвестным.

Однородная система, для которой число уравнений меньше числа неизвестных ($m<n$), всегда имеет нетривиальное решение.

Однородная система, для которой число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m=n$), имеет нетривиальное решение при $\det A=0$ ($r<n$).

Рассмотрим несколько методов решения систем линейных уравнений.

1. *Матричный метод.*

Применяется в случае, если число уравнений равно числу неизвестных. Пусть в системе (1) $m=n$.

Запишем все коэффициенты и переменные системы в виде матриц:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Перепишем систему в виде: $AX=B$. Для того что бы найти X, умножим слева обе части на матрицу, обратную к A: $A^{-1} \cdot A \cdot X= A^{-1} B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A=E$, то $X= A^{-1} B$.

Пример 1.

Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$$

Решение:

Запишем все коэффициенты и переменные системы в виде матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы можно записать в виде: $X=A^{-1}\cdot B$.

Найдем обратную матрицу:

$\det A=-1+1-8+2+2-2=-6\neq 0$, следовательно, матрица невырожденная и имеет обратную.

Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\-2&1\end{vmatrix}=1;\qquad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1;\ A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\-2&1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1;\qquad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=3;\qquad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=3;\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3.$$

Составим матрицу из полученных алгебраических дополнений: $\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-5&-1&3\\3&3&-3\end{pmatrix}$,

транспонируем ее: $\begin{pmatrix}1&-5&3\\-1&-1&3\\-3&3&-3\end{pmatrix}$.

Найдем решения системы: $X=A^{-1}\cdot B=\dfrac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}1&-5&3\\-1&1&3\\-3&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Следовательно, $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=0$.

2. *Метод Крамера.*

Применяется так же только в случае, если число уравнений системы (1) равно числу неизвестных т.е. m=n.

Вычисляется определитель Δ основной матрицы (2).

Возможны 3 варианта: 1) если $\Delta\neq 0$, система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ $(i=1,...,n)$, где Δ_i определитель, полученный из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов;

2) $\Delta=0$ и каждый $\Delta_i=0$ $(i=1,...,n)$ – система имеет бесконечное множество решений;

3) $\Delta=0$, но хотя бы один из $\Delta_i\neq 0$ – система не имеет решений.

Пример 2.

Решить методом Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

Решение:

Найдем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 5 + 2 + 6 + 10 = 25 \neq 0$

=> система имеет единственное решение.

Заменим первый столбец определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 3 - 4 + 6 + 6 = 25.$$

Заменим второй столбец определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 6 - 10 - 3 - 12 + 15 = -25.$$

Заменим третий столбец определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 15 + 6 - 9 + 20 = 50.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2$.

Ответ: $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$.

3. *Метод Гаусса.*

Метод Гаусса - один из самых универсальных способов решения систем линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

При реализации метода происходит последовательное исключение неизвестных. Из системы уравнений составляется матрица, расширенная столбцом из свободных членов. Такая матрица путем элементарных преобразований строк (уравнений) приводится к диагональному виду, или к виду, в котором элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю. При этом элементарными преобразованиями строк считаются следующие: перестановка строк (уравнений) местами; прибавление к обеим частям одной строки (уравнения) соответствующих частей другой строки (уравнения), умноженной на одно и то же, отличное от нуля число.

Пример 3.

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x+3y=1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x-z=1, \\ 2x+4y-z=1, \\ -x+8y+3z=2. \end{cases}$

<u>Решение</u>**:**

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim_{[-2\cdot(1)+(2)]} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$

Выписываем коэффициенты при соответствующих неизвестных, получим *x*=-2, y=1. Ответ: x=-2, y=1.

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 3 & 2 \end{array}\right)$ ~ (поменяем местами первую и последнюю строки и умножим получившуюся первую строку на (-1), получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ **~ (** добиваемся того, чтобы в первой строке под единицей стояли только нули; вычтем вторую из третьей строки**:** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ~ (умножим первую строку на (-2) и сложим со второй) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ~ (снова поменяем местами вторую и третью строки и разделим вторую на -4, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \end{array}\right)$ ~ (умножим вторую на (-20) и сложим с третьей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$ ~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: x=1, y=0, z=1.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $3 \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить $\frac{1}{2} \cdot B$, где $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 14 & 8 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ и $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Найти сумму матриц $F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить $3 \cdot A + 2 \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу $C = 2 \cdot A + 3 \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 3 & 26 \end{pmatrix}$.

7. Найти $A \cdot B$

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 19 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Умножить матрицу $M=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить матрицу $2\cdot A - B\cdot A$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \\ -5 & -30 \end{pmatrix}$.

10. Вычислить $A\cdot B - B\cdot A$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $A^T\cdot B^T$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -8 \\ 4 & 8 & 14 \\ -5 & 1 & -12 \end{pmatrix}$.

12. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$;

Ответ: -26.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

Ответ: -1.

в) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$.

Ответ: 29.

13. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

Ответ: -25.

б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

Ответ: 66.

в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

Ответ: 0.

14. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

15. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$;

Ответ: $x = -5$, $y = -8$.

б) $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-y=3 \end{cases}$.

Ответ: $x=2$, $y=3$.

16. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1; \\ x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-2$ $x_3=1$.

б) $\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ 5x-y-z=10 \\ x-y+5z=-12 \end{cases}$

Ответ: $x=1$, $y=-2$ $z=-3$.

17. Проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее: по формулам Крамера, методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 3x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$

Ответ: $x_1=3$, $x_2=-2$ $x_3=1$.

б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3 \\ x_1+x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-3$ $x_3=-1$.

2. Элементы векторной алгебры

2.1. Основные понятия и определения

Понятие вектора, длины вектора, координат вектора. Линейные операции над векторами в координатах. Скалярное произведение векторов. Критерий ортогональности двух векторов. Нахождение угла между векторами. Векторное произведение двух векторов. Свойства векторного произведения. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей. Смешанное произведение трех векторов. Критерий компланарности трех векторов.

Векторная алгебра описывает способы выполнения различных операций над векторами.

В геометрическом смысле **вектор – это направленный отрезок**, определяемый точками своего начала и конца. В физическом смысле под векторами обычно понимаются величины, имеющие направление, например, в трёхмерном пространстве. Как правило, они характеризуются абсолютной величиной, направлением и точкой приложения.

Вектор обозначается либо указанием его начала и конца со стрелкой или чертой наверху $\overline{AB}$, либо одной буквой со стрелкой или чертой наверху – $\bar{a}$. **Длиной (модулем) вектора** называют расстояние между началом и концом вектора.

Среди всевозможных взаимных ориентаций векторов выделяют коллинеарные и ортогональные.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной и той же или параллельных прямых.

Векторы называются **ортогональными**, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Векторы называются **равными**, если они равны по модулю, коллинеарны и одинаково направлены.

Координаты вектора: в декартовой трехмерной системе координат положение каждой точки однозначно определяется тремя координатами – проекциями этой точки на каждую ось координат соответственно. Пусть даны точки $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z)$. Тогда вектор $\overline{AB} =\{b_x-a_x;\ b_y -a_y,\ b_z - a_z\}$.

Модуль (длина) вектора определяется как расстояние между точками его начала и конца т.е. $|AB| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$.

Любой вектор $\bar{a}$ может быть единственным образом представлен в виде $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ (или $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$). Это представление называется разложением вектора $\bar{a}$ по осям координат или разложение по ортам. Здесь *x,y,z* – проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие оси координат (называются *координатами* вектора $\bar{a}$), $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты этих осей (единичные векторы, направления которых совпадают с положительными направлениями соответствующих осей). Длина (модуль) вектора $\bar{a}$ через координаты задается выражением $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направление вектора $\bar{a}$ определяется по направляющим косинусам углов α, β, γ, образованных вектором $\bar{a}$ с осями координат

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}.$$

2.2. Линейные операции над векторами

Пусть даны два вектора $\bar{c}$ (c_x, c_y, c_z) и $\bar{d}$ (d_x, d_y, d_z).

1. Суммой векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ является вектор $\bar{c} + \bar{d} = \{c_x + d_x, c_y + d_y, c_z + d_z\}$.

Свойства сложения:

1. $\bar{c} + \bar{d} = \bar{d} + \bar{c}$;
2. $(\bar{c} + \bar{d}) + \bar{f} = \bar{c} + (\bar{d} + \bar{f})$;

3. $\bar{c}+0=\bar{c}$; Рис.1

4. $\bar{c}+(-\bar{c})=0$.

Геометрическая интерпретация суммы векторов: согласно «правилу треугольника» суммой векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ является вектор, который строится следующим образом: конец первого вектора совмещается параллельным переносом с началом второго вектора, тогда вектор, соединяющий начало первого вектора и конец второго и будет суммой векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ (рис. 1).

Разность векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ определяется как сумма векторов $\bar{c}$ и $-\bar{d}$.

2. Произведением вектора $\bar{c}$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{c}$, коллинеарный вектору $\bar{c}$, имеющий модуль $|\lambda|\cdot|\bar{c}|$ и направленный одинаково с $\bar{c}$, если $\lambda>0$, и противоположно, если $\lambda<0$.

Произведение вектора на число коммутативно т.е. $\lambda\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\lambda$.

При умножении вектора $\bar{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$ на число λ каждая его координата умножатся на это число: $\lambda\bar{c}=\{\lambda c_x, \lambda c_y, \lambda c_z\}$.

Результат умножения вектора на число всегда коллинеарен с исходным вектором, за исключением случая, когда множитель или исходный вектор являются нулевыми – тогда результатом будет нулевой вектор.

2.3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла φ между ними: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi=\angle(\bar{a},\bar{b})$.

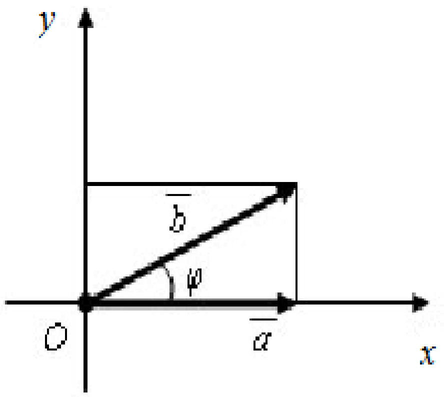


Рис. 2

Вычисление скалярного произведения через координаты векторов: если $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

Скалярное произведение векторов имеет еще одно обозначение $(\bar{a},\bar{b})$.

Свойства скалярного произведения:

1. $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$;
2. $(\bar{a},(\bar{b}+\bar{c}))=(\bar{a},\bar{b})+(\bar{a},\bar{c})$;

3. $(\lambda\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b})$;

4. $(\bar{a},\bar{b}) = 0$, если $\bar{a} = 0$, либо $\bar{b} = 0$, либо $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Скалярные произведения ортов:

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad (\bar{i},\bar{j}) = (\bar{j},\bar{k}) = (\bar{i},\bar{k}) = 0.$$

Из определения скалярного произведения выразим угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

Условие коллинеарности двух векторов:

Векторы $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$ или $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = \lambda$ $(x_2, y_2, z_2 \neq 0)$.

Условие ортогональности двух векторов:

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $(\bar{a},\bar{b}) = 0$.

2.4. Векторное произведение векторов

Определение. Тройка некомпланарных векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется правой (левой), если выполнено одно из следующих трёх условий:

1) если, будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки;

2) правило правой руки: если после приведения к общему началу вектор $\bar{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами и $\bar{a}$ и $\bar{b}$, откуда кратчайший поворот от $\bar{a}$ и $\bar{b}$ представляется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке);

3) если, находясь внутри телесного угла, образованного приведёнными к общему началу векторами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, мы видим поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$, и от него к $\bar{c}$ совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

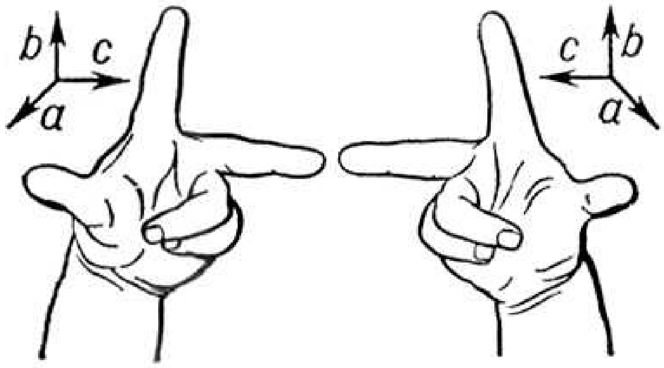


Рис.3

Векторным произведением вектора на вектор в пространстве называется вектор, удовлетворяющий следующим требованиям:
1) длина вектора равна произведению длин векторов и на синус угла между ними: $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b})$;

2) вектор $\bar{c}$ ортогонален каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
3) вектор с направлен так, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.
Обозначение векторного произведения $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.
Векторное произведение векторов, заданных своими координатами:

пусть $\bar{b}$ (b_x, b_y, b_z), $\bar{c}$ (c_x, c_y, c_z), тогда $[\bar{b} \times \bar{c}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Свойства векторного произведения:
1. $[\bar{a} \times \bar{b}] = -[\bar{b} \times \bar{a}]$;
2. $[\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})] = [\bar{a} \times \bar{b}] + [\bar{a} \times \bar{c}]$;
3. $k \cdot [\bar{a} \times \bar{b}] = [k \cdot \bar{a}] \times \bar{b} = [\bar{a} \times (k \cdot \bar{b})]$, где k - скаляр.

2.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, равное векторному произведению $[\bar{a} \times \bar{b}]$, умноженному скалярно на вектор $\bar{c}$, то есть $[\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c}$.

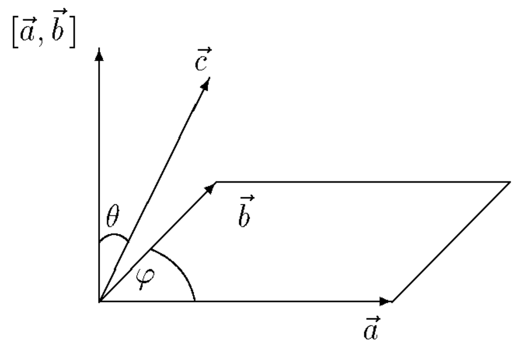


Рис.4

Смешанное произведение: $[\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c} = a \cdot [\bar{b} \times \bar{c}]$.

Принятые обозначения смешанного произведения $[\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c}$ или $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Геометрический смысл: смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, взятого со знаком плюс, если тройка правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны т.е.лежат в одной плоскости (и только в этом случае), смешанное произведение равно нулю; иначе говоря, равенство $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$, есть необходимое и достаточное условие компланарности векторов

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ заданы своими координатами: $\overline{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ и $\overline{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$, $\overline{c}\left(c_x, c_y, c_z\right)$, то смешанное произведение определяется формулой

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Модуль смешанного произведения трех векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Пример 1.

Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

Решение:

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = (2-1;3-1;4-1) = (1;2;3)$; $\overrightarrow{AC} = (4-1;3-1;2-1) = (3;2;1)$;

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-6) - \vec{j}(1-9) + \vec{k}(2-6) =$$

$$= -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} = (-4;8;-4);$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6};$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Ответ: площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{6}$ квадратных единиц.

Пример 2.

Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.

Решение:

Найдем ребра пирамиды: $\overrightarrow{AB}(2;1;1)$; $\overrightarrow{AC}(2;3;2)$; $\overrightarrow{AD}(3;3;4)$;

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 6 + 6 - 9 - 8 - 12 = 7.$$

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{6} \cdot 7 = \frac{7}{6}$ (ед^3).

Ответ: объем пирамиды ABCD равен 7/6 кубических единиц.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти длину вектора $\overline{a} = (-4;3)$

Ответ: 5.

2. Известно, что скалярное произведение двух векторов $(\bar{a};\bar{b})=2$, а их длины $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=2$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Ответ: 60^0.

3. Найти угол между векторами $\bar{a}=(1;\sqrt{3})$ и $\bar{b}=(1;0)$.

Ответ: 60^0.

4. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их длины соответственно равны 2 и 3, а угол между ними 60^0.

Ответ: 3.

5. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(3;-1)$ и $\bar{b}=(-2;7)$.

Ответ: -13.

6. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}=(6;7;10)$ и $\bar{b}=(8;5;9)$.

Ответ: $(13;26;-26)$.

7. Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=(2;3;5)$, $\bar{b}=(1;4;4)$, $\bar{c}=(3;5;7)$.

Ответ: $\frac{2}{3}$ (куб. ед.).

8. Найти величину угла при вершине *A* треугольника с вершинами *A*(-1;-2;4), *B*(-4;-2;0), *C*(1;0;9).

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

9. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}=(2;-1;-2)$.

10. Найти скалярное произведение векторов $\bar{c}=\bar{a}-4b$, $\bar{d}=-2\bar{a}-b$, если $\bar{a}(5;7)$, $\bar{b}(1;1)$.

Ответ: -56.

3.Аналитическая геометрия на плоскости

3.1. Прямоугольная система координат на плоскости

Прямоугольная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат X и Y. Оси координат пересекаются в точке О, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление. В правосторонней системе координат положительное направление осей выбирают так, чтобы при направлении оси OY вверх, ось OX смотрела направо.

Расстояние d от т. $M(x,y,z))$ до начала координат т. $O(0,0,0)$:

$$d=|MO|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Координаты точки, делящей отрезок с концами, имеющими координаты (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2)в заданном отношении *l:*

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l};\ y=\frac{y_1+ly_2}{1+l};\ z=\frac{z_1+lz_2}{1+l}.$$

3.2. Полярная система координат

В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, является точка O - полюс и ось OP, которая называется полярной осью.

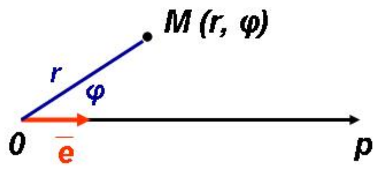


Рис. 5

Если M - произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом O, то ее положение на плоскости вполне определено заданием двух чисел: r - ее расстояния от полюса, выраженного в единицах масштаба, и φ - угла, на который следует повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом OM. Числа r и φ называются полярными координатами точки M (рис. 5). Из них первой координатой считается r, а второй φ. Координата r называется полярным радиусом точки M (иногда радиус-вектором точки M), а координата φ - ее полярным углом (полярный угол измеряется в радианах). Полярные координаты записываются в скобках справа от ее обозначения, причем на первом месте в скобках записывается координата r, а на втором - координата φ, например, $M(r,\ \varphi)$. Полярный угол φ считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси по часовой стрелке.

В определенной таким образом полярной системе координат полярный радиус r - всегда величина положительная или равная нулю ($r\geq 0$), так как под r понимается расстояние от полюса O до точки M, а расстояние, как и всякая длина, не может быть отрицательным.

Однако на практике удобнее пользоваться такой системой полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать и отрицательные значения. Система полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю), называется обобщенной системой полярных координат. Этой системой мы и будем пользоваться.

Если точка $M(+r,\ \varphi)$, то она имеет также и координаты $M(-r;\ \varphi+\pi)$, так как угол $\varphi+\pi$ характеризует направление полярного радиуса, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ.

Отметим, что какой бы из двух систем полярных координат мы не использовали, всегда паре чисел r и φ соответствует на плоскости единственная точка.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, ось же Oy перпендикулярна оси Ox и направлена так, что ей соответствует полярный угол $\varphi = \pi/2$, то по известным полярным координатам точки ее прямоугольные координаты вычисляются из формул

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Если же известны прямоугольные координаты x и y точки, ее полярные координаты определяются по формулам

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}};\ \cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}; \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Как видно из (3), у корня в формуле для определения r стоят два знака - плюс и минус, что соответствует обобщенной системе полярных координат, а потому и в формулах для определения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ перед корнем стоят два знака. Два знака в формуле для определения r появились потому, что r находится из выражения $r^2 = x^2 + y^2$. Если за r оставляется право быть только величиной положительной или нулем, то $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Если же r, как это имеет место в обобщенной системе полярных координат, может быть и отрицательной величиной, то из выражения $r^2 = x^2 + y^2$ следует, что $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 1.

Даны прямоугольные координаты точки $A(2, 3)$. Найти ее полярные координаты.

Решение.

По формулам (3) получаем $r = \pm\sqrt{13}$. Выбираем по нашему усмотрению знак перед корнем, например, плюс. Тогда $r = +\sqrt{13}$, $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Так как $\sin\varphi > 0$ и $\cos\varphi > 0$, то угол φ находится в первой четверти. На основании формулы (3): $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}$; по таблицам находим, что $\varphi = 0{,}98$. Полярные координаты точки A найдены: $r = +\sqrt{13}$, $\varphi = 0{,}98$ или $A(\sqrt{13}; 0{,}98)$.

Если бы перед корнем был выбран знак минус, то тогда $r = -\sqrt{13}$, $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, и так как $\sin\varphi < 0$ и $\cos\varphi < 0$, то угол φ находится в третьей четверти. Зная, что $tg = \frac{3}{2}$, получаем $\varphi = 4{,}12$, а точка A имеет полярные координаты $r = -\sqrt{13}$, $\varphi = 4{,}12$ т.е. $A(-\sqrt{13}; 4{,}12)$. Построив точку по этим координатам, можно убедиться, что она совпадает с ранее найденной.

3.3. Уравнения линий на плоскости

Линия на плоскости рассматривается как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Введение системы координат позволяет определять положение точки с помощью чисел – её координат, а линию задавать с помощью уравнения.

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение с двумя переменными $F(x;y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на ней. Чтобы установить, лежит ли точка на данной линии, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки этому уравнению.

Например: т. $K(2;1)$ принадлежит линии $2x+y+3=0$, т.к. $2\times(-2)+1+3=0$.

Переменные x и y в уравнении называются текущими координатами. Таким образом, уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Следовательно, задача о нахождении точек пересечения двух линий сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям, т.е. к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0; \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Если система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

Уравнение линии в полярных координатах вводится аналогично: $F(r,\varphi)=0$.

Линию на плоскости можно задать и при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), \end{cases}$$

где x и y – координаты произвольной точки M, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая параметром (она определяет положение точки (x,y) на плоскости). Например, если

$$\begin{cases} x=t; \\ x=t^2, \end{cases}$$

то при t=2получаем точку $(2;4)$. Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая линию – такой способ задания линии называется параметрическим (параметрическое уравнение).

Простейшей линией на плоскости является прямая.

3.4. Различные виды уравнения прямой

а) общее уравнение;

б) с направляющим вектором (каноническое);

в) параметрическое уравнение;

г) через две данные точки;
д) в отрезках на осях;
е) с нормальным вектором;
ж) с угловым коэффициентом**.**

а) Общее уравнение.

Справедливо утверждение:
всякая прямая на плоскости задаётся уравнением 1-й степени с двумя переменными x и y:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется общим уравнением прямой, в нем *A, B, C* – некоторые числа.

Положение прямой на плоскости можно задать различными способами, каждому из них будет соответствовать свой тип уравнения. Во всех случаях обязательно должна быть известна хотя бы одна точка, через которую проходит прямая. Кроме того, должно быть задано какое-либо дополнительное условие (они могут быть различными, от них и зависит вид уравнения).

б) Уравнение прямой с направляющим вектором (каноническое).

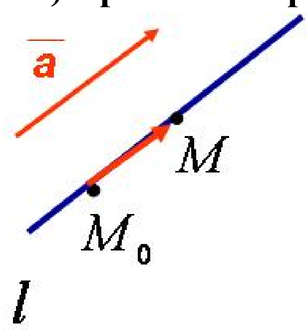


Рис. 6

Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$ на прямой *l*, пусть вектор $\overline{a}(m, n)$ параллелен этой прямой *l*. Найдем ее уравнение. Любой вектор, параллельный прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Чтобы составить уравнение линии, нужно выяснить, каким свойством обладает любая точка линии (и не обладают точки, не принадлежащие линии) и записать его с помощью уравнения.

Произвольная точка *M* с текущими координатами (x, y)$\in R$ обладает свойством: $\overline{M_0M} \parallel \overline{a}$. Запишем это свойство в координатах.

Найдем координаты вектора: $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$.

Т.к. $\overline{M_0M}$ и $\overline{a}$ коллинеарны, следовательно, их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (6)$$

(6) – уравнение прямой с направляющим вектором (каноническое).

Пример 1.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$ с направляющим вектором $\overline{b}(-5;3)$.

Решение:

Воспользуемся уравнением (6):

$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+2}{3}$, тогда $3(x-3) = -5(y+2)$.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим $3x+5y+1=0$.

в) Параметрическое уравнение прямой.

Обозначив через *t* каждое из равных отношений уравнения (6), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t; \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt \end{cases}$$ – параметрическое уравнение прямой.

Пример 2.

Построить прямую $\begin{cases} x=3-2t; \\ y=-2+5t. \end{cases}$

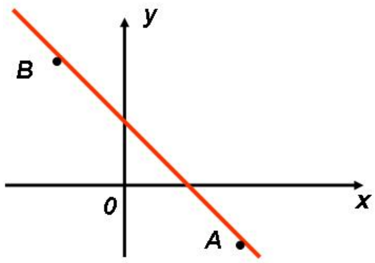


Рис.7

Решение:

Достаточно найти две точки: если *t*=0, получим точку A(3; -2); если *t*=1, получим точку B(1;3).

Построение представлено на рисунке 7.

г) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть на прямой *l* заданы 2 точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$.

Найдем уравнение этой прямой.

Произвольная точка $M(x,y)$, принадлежащая прямой *l*, обладает свойством $\overline{M_0M} \,//\, \overline{M_0M_1}$, следовательно, их координаты пропорциональны.

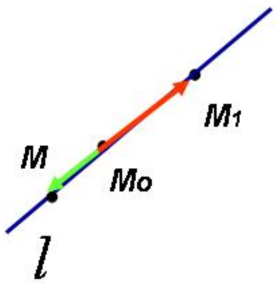


Рис.8

Найдем координаты векторов: $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$, $\overline{M_0M_1}(x_1-x_0;y_1-y_0)$.

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \qquad (7)$$

(7) – уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пример 3.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-1;4)$.

Решение:

Воспользуемся уравнением (4) и подставим в него координаты точек:

$\dfrac{x-2}{-1-2}=\dfrac{y+3}{4+3}$, тогда $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{7}$, в линейном виде $7x-14=2y+6$,

окончательно получим уравнение искомой прямой: $7x-2y-20=0$.

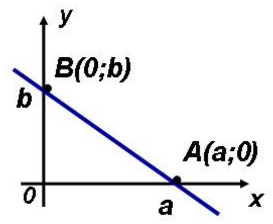
д) Уравнение прямой в отрезках.

Пусть даны отрезки, отсекаемые прямой l на осях координат: a на оси Ox, b – на оси Oy, т.е. прямая проходит через точки на осях *A(a;0)* и *B(0;b)*.

По уравнению (7):

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$$



или

перепишем в виде:

Рис.9

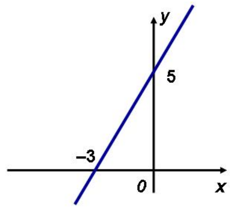
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ , \qquad (8)$$

(8)– уравнение прямой в отрезках на осях.

Его удобно использовать для построения прямой.

Пример 4.

Построить прямую $5x-3y+15=0$.



Решение:

Преобразуем уравнение к виду (8):

$5x-3y=-15$,

разделим на 15: $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$,

Рис.10

т.е. *a=-3; b=5.*

е) Уравнение прямой с нормальным вектором.

Пусть дана точка $M_0(x_0,y_0)$на прямой l и вектор $\overline{n}(A;B)\perp l$.

Найдем уравнение прямой l.

Определение: Любой вектор, перпендикулярный к прямой, называется его *нормальным вектором* (или нормалью).

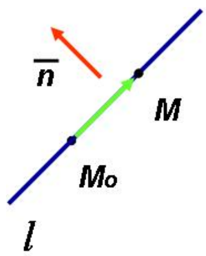


Рис. 11

Произвольная точка $M(x,y)$обладает свойством: $\overline{M_0M}\perp\overline{n}$, тогда скалярное произведение $\overline{M_0M}\cdot\overline{n}=0$. Запишем его в координатах: $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (9)$$

(9) – уравнение прямой с нормальным вектором.

Если в (9) раскрыть скобки

$$Ax-Ax_0+By-By_0=0$$

и перенести все члены в левую часть уравнения, получим **общее уравнение прямой**

$$Ax + By \underbrace{- Ax_0 - By_0}_{C} = 0.$$

В общем уравнении прямой l: $Ax + By + C = 0$, координаты нормального вектора $\bar{n}(A, B) \perp l$.

Например, для прямой $2x - 3y + 5 = 0$ координаты нормального вектора $\bar{n}(2;-3)$.

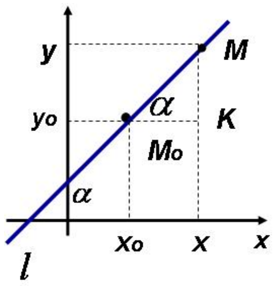


Рис. 12

ж) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0)$на прямой l и известен угол наклона прямой l к положительному направлению оси Ox: $\alpha = \angle(l; Ox_+)$.

Запишем уравнение прямой l.

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox и обозначается $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Для произвольной точки $M(x; y) \in l$ из ΔM_0KM (рис.12):

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MK}{M_0K}$ или $k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, $y - y_0 = k(x - x_0)$, тогда

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{10}$$

(10)– уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Преобразуем уравнение (10): $y = y_0 + kx - kx_0$; $y = kx + \underbrace{y_0 - kx_0}_{b}$:

$$y = kx + b, \tag{11}$$

где b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (т.е. при $x = 0$, $y = b$).

Если прямая проходит через начало координат, то

$$y = kx. \tag{12}$$

Пример 5.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$ под углом $60°$ к положительному направлению оси Ox.

<u>Решение</u>:

Найдем угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$;

$y = -2 + \sqrt{3}(x - 3)$, отсюда $y = -2 + \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$, тогда $\sqrt{3}x - y \underbrace{- 2 - 3\sqrt{3}}_{b} = 0$.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду (11), $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$, то $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Пример 6.

Найти угловой коэффициент прямой $3x + 2y - 6 = 0$.

Решение:
Приведем уравнение к стандартному виду
$2y=-3x+6$, тогда $y=-\frac{3}{2}x+3$, отсюда $k=-\frac{3}{2}$.

4. Аналитическая геометрия в пространстве

4.1. Уравнение плоскости в пространстве

Уравнение плоскости в координатах с нормальным вектором $N(A,B,C)\neq 0$, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$.

Расстояние d от точки т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4.2. Уравнения прямой в пространстве

***Способы задания прямой в пространстве*:**

1. Через пересечение двух плоскостей:

Пусть даны две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, тогда прямую можно получить как линию пересечения этих двух плоскостей, т.е. через систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

2. Уравнение прямой через 2 точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. Канонические уравнения (через точку , параллельно вектору):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, принадлежащая прямой; $\vec{a}(l;m;n)$ – направляющий вектор, *t*- параметр.

4. Параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=lt+x_0; \\ y=mt+y_0; \\ z=nt+z_0. \end{cases}$$

4.3. Вспомогательные уравнения

Если прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями с направляющими векторами $\vec{a}_1(\mathrm{f}_1; m_1; n_1)$ и $\vec{a}_2(f_2; m_2; n_2)$, то угол между прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{|f_1 f_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{f_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{f_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$f_1 f_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{f} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ *и плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{f^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Af + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{f} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Пример1.

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(10,6,6)$; $A_2(-2,8,2)$; $A_3(6,8,9)$; $A_4(7,10,3)$.

Найти:

1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;

2) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) уравнения прямой A_1A_2;

5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

8) объем пирамиды (*двумя способами*).

Решение:

1) Найдем координаты векторов и их длины:

$\overline{A_1A_2} = (-12, 2, -4)$; $\overline{A_1A_3} = (-4, 2, 3)$; $\overline{A_1A_4} = (-3, 4, -3)$,

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{144 + 4 + 16} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$,

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29},$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}.$$

2) $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = -12\cdot(-3) + 2\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) = 36+8+12 = 56$.

Угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 равен углу между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$. Откуда

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right)}{\left|A_1A_2\right|\cdot\left|A_1A_4\right|} = \frac{56}{2\sqrt{41}\cdot\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1394}} \approx 0{,}7499.$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и

$\overline{A_1A_3}$: $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]\right|$.

Найдем векторное произведение $\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]$:

$$\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6+8)\bar{i} - (-36-16)\bar{j} + (-24+8)\bar{k} = 14\bar{i} + 52\bar{j} - 16\bar{k} = (14; 52; -16).$$

Модуль векторного произведения:

$$\left|\left[\overline{A_1A_2}\times A_1A_3\right]\right| = \sqrt{14^2 + 52^2 + (-16)^2} = \sqrt{196+2704+256} =$$

$$= \sqrt{3156} = 2\sqrt{789}.$$

Откуда искомая площадь: $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{789} = \sqrt{789} \approx 28{,}089\left(\text{ед.}^2\right)$.

4) Уравнение прямой A_1A_2 определяется как уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\frac{x-10}{-2-10} = \frac{y-6}{8-6} = \frac{z-6}{2-6},$$

$$\frac{x-10}{-12} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-6}{-4}$$

или

$$\frac{x-10}{-6} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{-2}.$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем как уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-10 & y-6 & z-6 \\ -2-10 & 8-6 & 2-6 \\ 6-10 & 8-6 & 9-6 \end{vmatrix}=0; \begin{vmatrix} x-10 & y-6 & z-6 \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-10)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-(y-6)\cdot\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}+(z-6)\cdot\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-10)(6+8)-(y-6)(-36-16)+(z-6)(-24+8)=0;$$

$$14(x-10)+52(y-6)-16(z-6)=0;$$

$$14x+52y-16z-356=0.$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$7x+26y-8z-178=0.$$

6) Уравнения высоты из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$ определятся как уравнения прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

За направляющий вектор $\overline{a}=(l,m,n)$ примем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\overline{n}=(7;26;-8).$$

Тогда уравнения высоты запишутся в виде:

$$\frac{x-7}{7}=\frac{y-10}{26}=\frac{z-3}{-8}.$$

7) Угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ – это угол между прямой и плоскостью, составляющий в сумме с углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости прямой угол.

Следовательно,

$$\sin\beta=\frac{(\overline{a},\overline{n})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|}.$$

$$\overline{a}=\overline{A_1A_4}=(-3;4;-3),\ |\overline{a}|=\sqrt{34},$$

$$\overline{n}=(7;26;-8), |\overline{n}|=\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}=\sqrt{49+676+64}=\sqrt{789};$$

$$(\overline{a},\overline{n})=-3\cdot 7+4\cdot 26+(-3)\cdot(-8)=-21+104+24=107.$$

Откуда

$$\sin\beta=\frac{107}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{789}}=\frac{107}{\sqrt{26826}}\approx 0{,}6533\ \ (\beta\approx\arcsin 0{,}6533\approx 39°20').$$

8) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен, с одной стороны, одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$, с другой стороны – одной третьей произведения площади S основания $A_1A_2A_3$ на высоту H, опущенную на основание из вершины A_4.

Так что:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-12\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-12\cdot(-18) - 2\cdot 21 - 4\cdot(-10)\right) = \frac{107}{3} = 35\frac{2}{3}\ \left(\text{ед.}^3\right)$$

Или $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H$.

Высоту H найдем как расстояние от точки $A_4(7, 10, 3)$ до плоскости $A_1A_2A_3$:

$$H = d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| =$$

$$= \frac{7\cdot 7 + 26\cdot 10 - 8\cdot 3 - 178}{\sqrt{7^2 + 26^2 + (-8)^2}} = \frac{49 + 260 - 24 - 178}{\sqrt{789}} = \frac{107}{789},$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\sqrt{789}\cdot\frac{107}{789} = \frac{107}{3} = 35\frac{2}{3}\ \left(\text{ед.}^3\right).$$

5. Кривые второго порядка

5.1. Окружность

Определение.

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(a,b)$ имеет уравнение:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

где a и b - координаты центра окружности (рис. 13).

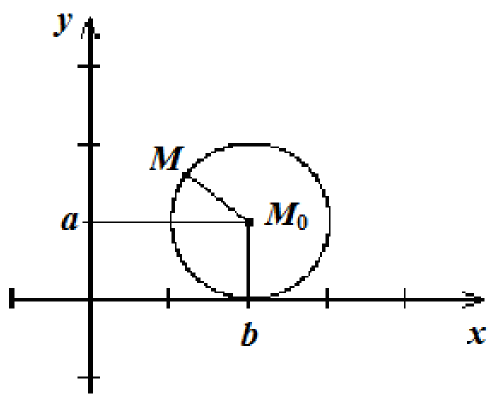


Рис. 13

5.2. Эллипс

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) есть для всех точек эллипса одна и та же постоянная величина (эта постоянная величина должна быть больше, чем расстояние между фокусами).

Простейшее уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a - большая полуось эллипса, b - малая полуось эллипса.

Если $2c$ - расстояние между фокусами, то между a, b и c (если $a > b$) существует соотношение

$$a^2-b^2=c^2.$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси $e=\frac{c}{a}$.

У эллипса эксцентриситет $e < 1$ (так как $c < a$), а его фокусы лежат на большой оси.

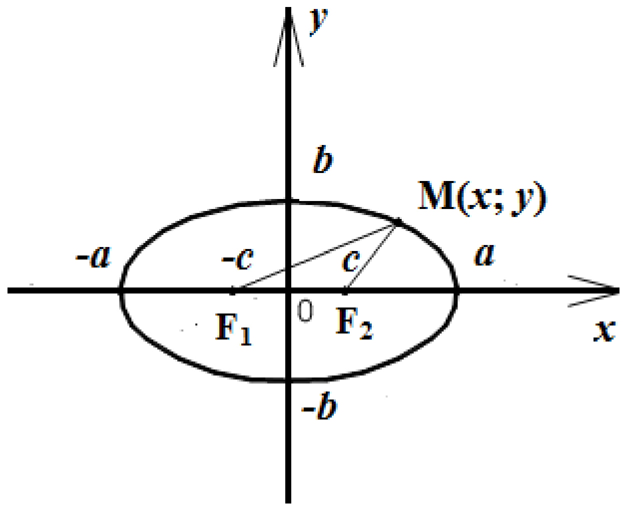


Рис.14

5.3. Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина. Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами.

Уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a - действительная полуось гиперболы, b - мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ - расстояние между фокусами гиперболы, то между a, b и c существует соотношение

$$a^2+b^2=c^2.$$

При $b = a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=a^2.$$

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси.

$$e=\frac{c}{a}.$$

Асимптоты гиперболы - две прямые, определяемые уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{b}{a}x;\\ y&=-\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\}.$$

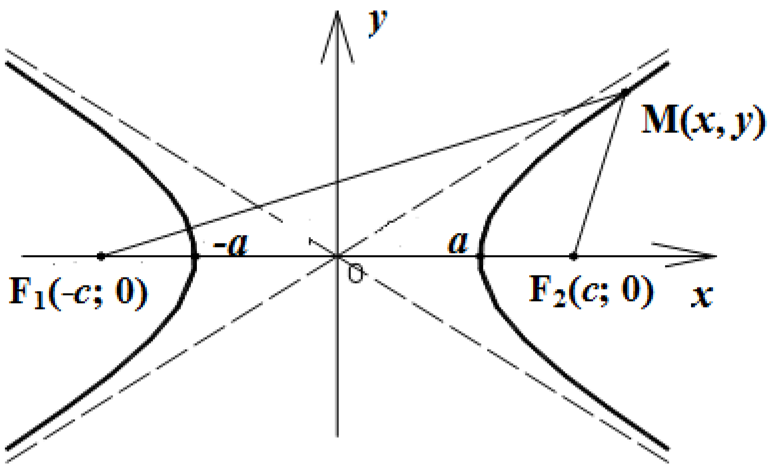


Рис.15

5.4. Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от заданной фиксированной точки и от заданной фиксированной прямой. Точка, о которой идет речь в определении, называется фокусом параболы, а прямая - ее директрисой.

Простейшее уравнение параболы

$$y^2 = 2px,$$

где p – параметр параболы. Параметр параболы равен расстоянию от директрисы параболы до ее фокуса.

Координаты фокуса F параболы $F\left(\frac{p}{2},0\right)$(фокус параболы лежит на ее оси симметрии).

Уравнение директрисы параболы: $x = -\frac{p}{2}$.

Эксцентриситет параболы $e = 1$.

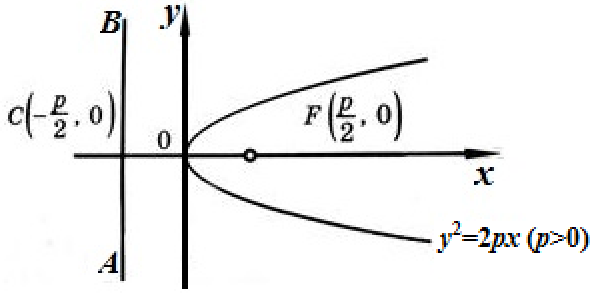


Рис.16

Пример 1.
Написать уравнение окружности с центром в точке C(2, -3) и радиусом 6.

Решение:
По уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, полагая в нем a = 2, b = -3, R = 6, сразу имеем $(x-2)^2+(y+3)^2=36$ или $x^2+y^2-4x+6y-23=0$.
Пример 2.
Показать, что $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.
Решение:
Заданное уравнение преобразуем к виду

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \quad (13)$$

Выпишем члены, содержащие только x и члены, содержащие только y. Легко проверить, что

$$x^2+4x=(x+2)^2-4,$$
$$y^2-6y=(y-3)^2-9.$$

Следовательно, левую часть уравнения можно записать так:

$$\underbrace{(x+2)^2-4}_{x^2+4x}+\underbrace{(y-3)^2-9}_{y^2-6y}-3=0,$$

отсюда

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16. \qquad (14)$$

Сравнивая (14) с (13), заключаем, что уравнение (14) определяет окружность, центр которой имеет координаты $C(-2, 3)$, $R^2 = 16$, а $R = 4$.

Пример 3.

Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет $e = 0{,}5$.

Решение:

$a = 12$; $e = 0{,}5$; известно, что $e=c/a$; в этой формуле неизвестным является c. Для его определения получаем уравнение $0{,}5=c/12$, отсюда $c = 6$.

Теперь, зная, что $a = 12$, $c = 6$, пользуясь соотношением $a^2 - c^2 = b^2$, найдем, что $b^2 = 144 - 36 = 108$; $a^2 = 144$.

Уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$.

Пример 4.

Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет $e = 1{,}4$. Найти уравнение гиперболы.

Решение:

У нас $a = 5$, $a^2 = 25$; $e = c/a = 1{,}4$; $c = 1{,}4\cdot a = 1{,}4 \cdot 5 = 7$, $c^2 = 49$;

$b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$, $b^2 = 24$; искомым уравнением будет $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

Пример 5.

Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку $A(2, 4)$. Определить ее параметр p.

Решение:

Подставляем в уравнение параболы вместо текущих координат координаты точки A (2, 4). Получаем $4^2 = 2p2$; $16 = 4p$; $p = 4$.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки (-1;2) и (2;1).

Ответ: $x+3y-5=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1;2)$ и $B(2;5)$.

Ответ: $\frac{(x-1)}{1}=\frac{(y-2)}{4}$.

3. Стороны треугольника заданы уравнениями $(AB)\,2x+4y+1=0$, $(AC)\,x-y+2=0$, $(BC)\,3x+4y-12=0$. Найти координаты вершин треугольника.

Ответ: $A\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$**;** $B\left(13;-\frac{27}{4}\right)$**;** $C\left(\frac{4}{7};\frac{18}{7}\right)$**.**

4. Найти расстояние от точки $P(3;8)$ до прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$.

Ответ: 2.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$ параллельно прямой $3x-4y+15=0$.

Ответ: $3x-4y+14=0$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;1)$перпендикулярно к прямой $3x-7y+14=0$.

Ответ: $7x+3y-32=0$**.**

7. Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом $y=3x-4$;
а) написать уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через точку $P_0(1;2)$;

Ответ: $y=3x-1$.

б) написать уравнение прямой, перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку $P_0(1;2)$.

Ответ: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

8. Определить угол между двумя прямыми $y=2x+3$ и $y=-3x-8$.

Ответ: 45^0.

9. Найти угол между двумя прямыми $y=2x+4$ и $y=3x-1$.

Ответ: $tg\varphi=\frac{1}{7}$.

10.Найти угол между двумя прямыми $3x+4y-7=0$ и $4x-3y+8=0$.

Ответ: 90^0**.**

11.Составить уравнение окружности с центром в точке $P_0(1;-2)$и радиусом $R=3$.

Ответ: $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

12. Написать уравнение окружности с центром в точке $C(2;3)$ и радиусом, равным 6.

Ответ: $(x-2)^2+(y+3)^2=36$.

13. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-x+2y-1=0$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

14. Найти точки пересечения окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ и прямой $y=2x$.

Ответ: $A\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5};\frac{10+4\sqrt{5}}{5}\right)$ и $B\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5};\frac{10-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

15. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки: $(0;1)$; $(2;0)$; $(3;-1)$.

Ответ: $x^2+y^2+3x+9y-10=0$.

16. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и пересекающей ось Oy в точке $A(0;10)$.

Ответ: $x^2+y^2-10y=0$.

17. Найти эксцентриситет, координаты фокусов и вершин эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Ответ: $\varepsilon=0{,}8$, $A_{1,2}(\pm5;0)$, $B_{1,2}(0;\mp3)$, $F_{1,2}(\mp4;0)$.

18. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2+9y^2=144$.

Ответ: $2a=12$, $2b=8$, $F_{1,2}(\mp2\sqrt{5};0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

19. Составить уравнение эллипса, у которого малая полуось $a=2$, а расстояние между фокусами равно 2.

Ответ: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

20. Составить уравнение эллипса, если известны координаты его фокусов $F_1(-3;0)$ и $F_2(3;0)$, а также эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

21. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:
а) его полуоси $a=6$, $b=4$;

Ответ: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$.

б) расстояние между фокусами $2c=10$, а большая ось $2a=16$;

Ответ: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$.

в) большая полуось $a=12$, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$;

Ответ: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$.

г) малая полуось $b=8$, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}6$.

Ответ: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

22. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между ее вершинами равно 20, а расстояние между фокусами равно 30.

Ответ: $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{125}=1$.

23. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $12y\pm 5x=0$, а расстояние между фокусами равно 338. Составить каноническое уравнение гиперболы.

Ответ: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

24. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2-3y^2=6$.

Ответ: $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$.

25. Уравнения асимптот гиперболы $y=\frac{x}{2}$ и $y=-\frac{x}{2}$, а расстояние между фокусами $2c=10$. Найти уравнение гиперболы.

Ответ: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

26. Парабола $y^2=2px$ проходит через точку $A(4;6)$. Определить ее параметр p.

Ответ: $p=4$.

27. Парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4;-1)$, а вершина ее лежит в начале координат. Составить ее уравнение.

Ответ: $y^2=\frac{1}{4}x$.

28. Составить уравнение параболы, имеющей директрису $x = -2$ и фокус $F(2;4)$.

Ответ: $(y-4)^2 = 8x$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. В 3 т. Т. 1. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - М.: Дрофа, 2004.-288с.
2. Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин . - СПб.: Лань, 2006.-416с.
3. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. - М.: Физматлит, 2009.-312с.
4. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, М.: Физматлит, 2004.-224с.
5. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч.1/под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. - М.: Физматлит, 2001.-288с.
6. Канатников, А.Н. Аналитическая геометрия / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011.-392с.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. - М.: Высш. шк., 2005.-479с.
8. Шипачев,В.С. Задачник по высшей математике/ В.С. Шипачев. - М.: Высш. шк., 2003.- 304с.
9. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. - М.: Наука, 2004. - 360с.
10. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко. - М.: ОНИКС, 2007.- 304с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Составители:

Кокурина Галина Николаевна

Митрофанова Алёна Александровна

Зуева Галина Альбертовна

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Методические указания

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 23.06.2014. Формат $60 \times 84\, {}^{1}\!/_{16}$. Бумага писчая.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд.л. 3,35. Тираж 150 экз. Заказ.

Ивановский государственный химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании кафедры экономики
и финансов ИГХТУ
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7