Г.А. Зуева

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Дифференциальные уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. Специальные функции

Учебное пособие

Иваново

2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Г.А. Зуева

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Дифференциальные уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. Специальные функции

Учебное пособие

Иваново 2012

УДК 613.19

Зуева, Г. А. Методы математической физики. Дифференциальные уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. Специальные функции: учеб. пособие / Г. А. Зуева; Иван. гос. хим.-технол. ун-т.- Иваново, 2012.– 117 с.
ISBN 978-5-9616-0441-2

Учебное пособие содержит изложенный в краткой форме теоретический материал, относящийся к математической физике (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, специальные функции). Приведены контрольные задачи и упражнения с ответами, представлен разбор решения ряда задач, указаны конкретные физические примеры.

Предназначено студентам, изучающим методы математической физики, а также аспирантам высших технических учебных заведений.

Рецензенты:

кафедра прикладной математики Ивановского государственного энергетического университета; доктор физико-математических наук, профессор Э.М. Карташов (Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова)

ISBN 978-5-9616-0441-2

ВВЕДЕНИЕ

Математическая физика — теория математических моделей физических явлений. Она относится к математическим наукам; критерий истины в ней — математическое доказательство. Однако, в отличие от чисто математических наук, в математической физике исследуются физические задачи на математическом уровне, а результаты представляются в виде теорем, графиков, таблиц и т. д. и получают физическую интерпретацию.

Первоначально математическая физика сводилась к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Это направление составляет предмет классической математической физики, которая сохраняет важное значение и в настоящее время.

Классическая математическая физика развивалась со времён Ньютона параллельно с развитием физики и математики. В конце XVII века было открыто дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц) и сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII веке методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн, стержней, маятников, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой; закладываются основы аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Лаплас). В XIX веке методы математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, теории упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами и т. д.; создаются теория потенциала, теория устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Дж. К. Максвелл, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, Г. Р. Кирхгоф, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт, Ж. Адамар, А. Н. Тихонов — некоторые из указанных здесь ученых творили и в XX веке или на рубеже XX и XIX веков). В XX веке возникают новые задачи газовой динамики, теории переноса частиц и физики плазмы.

В XX в. появляются новые разделы физики: квантовая механика, квантовая теория поля, квантовая статистическая физика, теория относительности, гравитация (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, П. Дирак, А. Эйнштейн, Н. Н. Боголюбов, В. А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг). Для изучения этих явлений множество используемых математических средств значительно расширяется: наряду с традиционными областями математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщённых функций, теория функций многих комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, теория чисел, асимптотические и вычислительные методы. С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты, например, моделировать взрыв атомной бомбы или работу атомного реактора в реальном масштабе времени. В этом интенсивном взаимодействии современной теоретической физики и современной математики оформилась новая область — современная математическая физика. Её модели не всегда сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений, они могут включать, например, интегральные, интегро-дифференциальные и другие типы уравнений.

Основными математическими средствами исследования задач классической математической физики служат: теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций и функциональный анализ, вариационное исчисление, теория вероятностей, приближённые методы и вычислительная математика. Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач, т.е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Математическая модель должна быть непротиворечива (решение должно существовать), однозначно описывать физический процесс (решение единственно), быть малочувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение должно непрерывно зависить от данных задачи).

Данное учебное пособие содержит изложенный в краткой форме теоретический материал, относящийся к тем разделам математической физики, которые имеют наиболее важное прикладное значение: дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, специальные функции.

Для понимания излагаемого материала потребуется знание многих вопросов из разных разделов математики. Поэтому каждая из трех частей начинается с перечня контрольных вопросов и заданий, позволяющих выяснить уровень подготовки студента к изучению темы.

Издание содержит большое количество практических заданий и задач с ответами по всем разделам. Приводятся решения типовых задач, иллюстрирующие применение методов математической физики, например, таких как методы: Фурье, интегральных уравнений, конечных разностей. Изложено решение ряда конкретных физических и технических задач, которые сводятся к дифференциальным или интегральным уравнениям.

Рассчитано на студентов технических вузов. Для студентов и аспирантов математических специальностей имеется много разнообразных учебников (и монографий) по всем вопросам, относимым традиционно к методам математической физики, однако эта литература, как правило, не является в полной мере доступной студентам технических вузов.

Назначение учебного пособия - помочь овладеть современными научными знаниями в области методов математической физики, развить практические навыки по составлению математических моделей простейших физических систем, приобрести опыт аналитического и численного решения уравнений математической физики.

I. Дифференциальные уравнения в частных производных

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Как может быть записано общее решение **линейного однородного** дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:
   $y''+py'+q=0$?
2. Найдите общее решение для дифференциального уравнения:

   1) $y''+3y'+2y=0$;
   2) $y''-4y'+4y=0$;
   3) $y''+2y'+5y=0$.

3. Как может быть записано общее решение обыкновенного **линейного неоднородного** дифференциального уравнения 2-го порядка?
4. Найдите общее решение для дифференциального уравнения:

   1) $y''-6y'+9y=e^{3x}$;
   2) $y''+3y'+2y=\cos 2x+2\sin 2x$.

5. Сформулируйте теорему единственности решения **задачи Коши** для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
6. Найдите интегралы вида:

   1) $\int x^n dx$; 2) $\int x\cos(nx)dx$; 3) $\int x\sin(nx)dx$;

   4) $\int \cos^2(nx)dx$; 5) $\int \sin^2(nx)dx$ 6) $\int \cos(nx)\sin(mx)dx$;

   те же интегралы найдите в пределах:

   7) от 0 до π; 8) от -π до π; 9) от 0 до l;

   10) найдите $\int_0^l \cos(\pi n/l)dx$, $n=1,2,\dots$.
7. Что такое **скалярное произведение** векторов? Какими свойствами оно обладает? Какие векторы называются ортогональными?
8. Что такое сходящийся **числовой ряд**?
9. Что значит, **функциональный ряд** сходится **абсолютно, условно**?
10. Что такое **радиус сходимости степенного ряда**?
11. Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

1. Понятие об уравнении в частных производных

Многочисленные задачи, связанные с описанием физических явлений и процессов, приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных. Среди таких уравнений наиболее простыми и в то же время наиболее важными являются так называемые линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядков в частных производных.

Дифференциальным уравнением в частных производных называется соотношение

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ... \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_1^{i_n}}) = 0, \qquad (1)$$

где $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ – искомая функция n независимых переменных; $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ...$ – частные производные функции u по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, F – заданная функция своих аргументов $i_1+i_2+…+i_n=k$. Наивысший порядок производной в левой части уравнения (1) называется *порядком* уравнения.

О п ре д е ле н и е. Уравнение

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + a_n\frac{\partial u}{\partial x_n} + bu = 0 \qquad (2)$$

относительно неизвестной функции u переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, где $a_1, a_2, ..., a_n, b$ – заданные функции этих переменных, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных*. Предполагается, что, по крайней мере, одна из функций $a_1, a_2, ..., a_n$ тождественно не равна нулю ($a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \neq 0$).

Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0 \qquad (3)$$

относительно неизвестной функции u переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, где a_{ij} ($i, j = 1, 2, …, n$), $a_{ij} = a_{ji}$; b_k ($k = 1, 2, …, n$); c – заданные функции этих переменных, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных*. Предполагается, что, по крайней мере, одна из функций $a_1, a_2, ..., a_n$ тождественно не равна нулю ($a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \neq 0$).

Уравнения

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + a_n\frac{\partial u}{\partial x_n} + bu = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k}+cu = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

называются *линейными неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных* (из-за дополнительного слагаемого $f(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Как правило, в реальных задачах изменение независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ ограничено некоторой областью D пространства R^n ($D \subset R^n$).

Решением уравнения с частными производными (1) называют всякую функцию $u = u(x_1, x_2, ...x_n)$, определенную и непрерывную в области *D*, имеющую непрерывные частные производные, входящие в уравнение, которая обращает данное уравнение в тождество. Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений различают общее и частные решения.

2. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим некоторые примеры уравнений в частных производных.

1. Найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$.

Решение. Интегрируя уравнение по x, получим $u = x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная непрерывная функция. Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения порядка *k* содержит *к* произвольных постоянных, а общее решение уравнения в частных производных порядка *k* может содержать, вообще говоря, *k* произвольных (гладких) функций.

2. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$, где $u = u(x, y)$.

Решение. Дважды интегрируя по *y*, получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x)$,

$u = y^3 + y \cdot \varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

3. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Решение. Интегрируя уравнение по x, имеем $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$. Проинтегрировав полученный результат по y, находим $z = \varphi(x) + \psi(y)$, где $\psi(y) = \int f(y)dy$.

Найти общее решение уравнений:

4. $\frac{\partial u}{\partial y} = 2$.

5. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x$.

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$.

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2x$.

8. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных

I. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (4)$$

Здесь
$u(x,y)$ - неизвестная функция двух переменных x, y;
$a(x,y)$, $b(x,y)$ - заданные непрерывные функции от x, y.
Т е о р е м а. Если обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{a(x,y)} = \frac{\mathrm{d}\,y}{b(x,y)} \qquad (5)$$

имеет общий интеграл

$$\Phi(x,y) = C, \qquad (6)$$

то всякое решение уравнения (8) может быть записано в виде:

$$u = f(\Phi(x,y)),$$

где f – произвольная дифференцируемая функция одной переменной.
Уравнение (5) называется *соответствующим* уравнению (4).

9. Найти общее решение уравнения

$$(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Р е ш е н и е. Запишем *соответствующее* уравнение

$$\frac{dx}{(x^2+y^2)}=\frac{dy}{2xy} \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Решим данное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Введем функцию $u=\frac{y}{x}$, подставим ее в уравнение. При этом учтем, что $y=ux$, $y'=u'x+u$. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{(1+u^2)du}{u(1-u^2)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем его. Тогда функция u неявно будет задана выражением $\frac{u}{1-u^2}=xc$. Делая обратную замену, приходим к выражению $\frac{y/x}{1-y^2/x^2}=xc$. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{y}{x^2-y^2}=c.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид: $u=f\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right)$, где f –- произвольная дифференцируемая функция.

10. Найти общее решение уравнения: $\frac{\partial u}{\partial x}\sin x+\frac{\partial u}{\partial y}\sin y=0$.

Ответ: $u=\psi\left(\frac{tg(x/2)}{tg(y/2)}\right)$**.**

11. Найти общее решение уравнения: $-y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

Ответ: $u=\psi(x^2+y^2)$**.**

II. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=c(x,y,z), \qquad (7)$$

где a, b, c - непрерывные функции от x, y, z.
Предварительно решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}.$$

Пусть решение этой системы определяется равенствами:

$$w_1(x,y,z)=C_1,$$
$$w_2(x,y,z)=C_2.$$

Тогда общий интеграл уравнения (11) имеет вид:

$$\Phi(w_1(x,y,z),w_2(x,y,z))=0,$$

где $\Phi(w_1,w_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

12. Найти общий интеграл уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим систему уравнений $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Решая уравнение $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, получим $\frac{y}{x}=C_1$; решение уравнения $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ есть $\frac{x}{z}=C_2$.
Теперь можно найти общий интеграл заданного уравнения:

$$\Phi(y/x,z/x)=0 \text{ или } z/x=\psi(y/x),$$

т.е. $z=x\psi(y/x)$, где ψ – произвольная дифференцируемая функция.

12.1. Найти общий интеграл уравнения $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

Ответ: $\Phi(x^2-y^2,x^2-z^2)=0$ или $z^2=x^2+\Psi(x^2-y^2)$.

12.2. Найти общий интеграл уравнения $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$.

Ответ: $x^2+\frac{z^2}{2}=\Psi(x^2-y^2)$.

12.3. Найти общий интеграл уравнения $\frac{\partial z}{\partial x}\sin x+\frac{\partial z}{\partial y}\sin y=\sin z$.

Ответ: $tg(z/2)=tg(x/2)\psi(\frac{tg(y/2)}{tg(x/2)})$.

4. Основные типы уравнений математической физики

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например,

1) при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений приходят к *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), \qquad (8)$$

где c – скорость распространения волны в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}); \qquad (9)$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к *уравнению Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z). \qquad (10)$$

При отсутствии источников теплоты внутри тела уравнение (6) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (11)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также могут быть описаны уравнением Лапласа.

Уравнения (8)-(11) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Каждое из уравнений (8)-(11) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Для дифференциальных уравнений в частных производных различают три типа *краевых задач*:

а) задача Коши: задают начальные условия, область задания D совпадает со всем пространством, граничные условия отсутствуют;

б) краевая задача: задаются граничные условия на границе S области D, начальные условия отсутствуют. Например, для уравнения теплопроводности (9) выделяют как основные граничные условия первого, второго и третьего рода.

Граничные условия первого рода (условия Дирихле) соответствуют заданию температурного поля на границе S области D:

$$u|_S = u_0(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in S. \tag{12}$$

Граничные условия второго рода (условия Неймана) соответствуют заданию на границе теплового потока:

$$k\frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in S. \tag{13}$$

Здесь $u_0(x,y,z,t)$, $u_1(x,y,z,t)$ - заданные функции.

Граничные условия третьего рода моделируют конвективный теплообмен между поверхностью твердого тела с окружающей изотропной средой, которая имеет температуру u_c:

$$k\frac{\partial u}{\partial n}|_S + \alpha(u|_S - u_c) = 0, \quad (x,y,z) \in S, \tag{14}$$

где α - коэффициент теплообмена ;

в) смешанная задача: задают и начальные, и граничные условия, область D не совпадает со всем пространством.

Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым начальным или граничным условиям.*

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требования: 1) *решение должно существовать*, 2) *решение должно быть единственным*, 3) *решение должно быть устойчивым*. Это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать малые изменения решения. Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

5. Уравнение колебания струны

5.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15}$$

- одномерное *волновое уравнение*, уравнение поперечных колебаний струны. Здесь $u(x,t)$- искомая функция (отклонение струны в плоскости (u,x), см. рис.1). Как правило, t считается временной координатой , x – пространственной; a^2 – положительная постоянная, отражающая физические свойства материала, из которого изготовлена струна (плотность, модуль упругости).

<u>Начальные условия:</u>

$u(x,0) = f(x)$ - начальная форма струны; (16)

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$ - скорость в каждой точке струны в начальный момент; (17)

$f(x)$, $\varphi(x)$ - заданные функции.

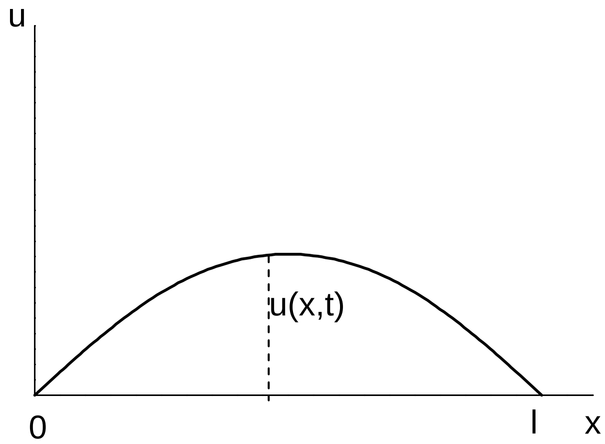


Рис. 1. Форма струны в момент времени *t*

Граничные условия:

если концы неподвижны (закреплены), то

$u(0,t) = 0,$ (18)

$u(l,t) = 0;$ (19)

если концы движутся, то

$u(0,t) = \mu_1(t),$ (20)

$u(l,t) = \mu_2(t),$ (21)

$\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ - заданные функции.

Уравнение (15), начальные условия (16, 17) , а также граничные условия (18, 19) или (20, 21) однозначно определяют решение задачи $u(x,t)$.

5.2. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье

13. Задача (колебания ограниченного стержня).

Струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент форму параболы $u = (4h/l^2)\cdot x(l-x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (см. рис.2).

Р е ш е н и е. Найти ненулевое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l, \tag{22}$$

удовлетворяющее <u>начальным условиям</u>:
(начальная форма струны - парабола)

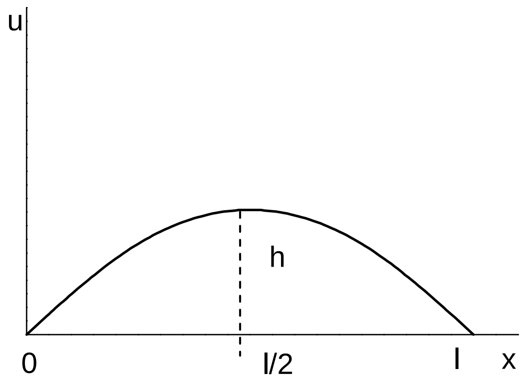


Рис. 2, Форма струны в началный момент времени t=0

$$u(x,0) = f_1(x) = (4h/l^2)\cdot x(l-x), \tag{23}$$

(скорость в каждой точке струны в начальный момент времени)

$$u_t'(x,0) = f_2(x) = 0; \tag{24}$$

удовлетворяющее <u>граничным условиям</u> (концы закреплены):

$$u(0,t) = \varphi_1(x) = 0\,; \tag{25}$$

$$u(l,t) = \varphi_2(x) = 0\,. \tag{26}$$

Найти $u(x,t)$ для $0 < x < l,\ \ t > 0$.
Будем решать данную краевую задачу *методом Фурье (разделения переменных).*
Согласно методу Фурье будем искать нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение уравнения (22) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{27}$$

Подстановка $u(x,t)$ в уравнение дает

$$\frac{1}{a^2}XT'' = X''T,$$

что можно записать в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (28)$$

В левой части этого равенства стоит функция, которая не зависит от *x*, справа – функция, не зависящая от *t*. Равенство (28) возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от *x*, ни от *t*, т.е. равны постоянному числу. Обозначим его через $-\lambda$, где $\lambda>0$ (позднее будет рассмотрен случай $\lambda \le 0$).

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Из этого равенства получаем два уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (29)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \qquad (30)$$

Общие решения этих уравнений соответственно будут:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \qquad (31)$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}t, \qquad (32)$$

где A, B, C, D - произвольные постоянные.

Подставляя $X(t)$ и $T(t)$ в (24), получим

$$u(x,t) = (A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x)(C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}t).$$

Подберем постоянные *A* и *B* так, чтобы удовлетворялись условия (25, 26). Т.к. $T(t) \neq 0$,(в противном случае $u(x,t) \equiv 0$), то функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \qquad (33)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получаем *задачу о собственных значениях (задачу Штурма – Лиувилля)*:

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (34)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \qquad (35)$$

Подставляя значения *x*=0 и *x*=*l* в равенство (31), на основании (25), (26) получаем:

$$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0, \qquad 0 = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

Из первого уравнения находим *A*=0. Из второго следует:

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

$B \neq 0$, так как в противном случае было бы $X(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$, что противоречит условию. Следовательно, должно быть

$\sin\sqrt{\lambda}l = 0$,
откуда

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{36}$$

(мы не берем значение n=0, в этом случае было бы $X(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$).
Каждое значение λ зависит от n, т.е.

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\ n = 1,2,\ldots, \tag{37}$$

(заметим, что $\lambda_n > 0$ для всех $n = 1,2,\ldots$). Найденные значения λ называются *собственными значениями* для данной краевой задачи.
Соответствующие им решения уравнения (31)

$$X_n(x) = B\sin(\frac{\pi n}{l}x),\ n = 1,2,\ldots. \tag{38}$$

называются *собственными функциями*.

Замечание. Если бы мы взяли вместо $-\lambda$ выражение $+\lambda = k^2$, то уравнение (34) приняло бы вид

$$X'' - \lambda X = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Отличное от нуля решение в такой форме не может удовлетворять граничным условиям (25), (26).
Для нахождения коэффициента B в (38) можно воспользоваться свойством ортогональности собственных функций $X_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля:

$$\int_0^l X_n{}^2 dx = 1, \qquad \int_0^l X_n X_m dx = 0,\ n \neq m. \tag{39}$$

Из условия $\int_0^l X_n{}^2 dx = 1$ получим

$$\int_0^l B^2 \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = 1, \quad \text{откуда } B = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Таким образом,

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ n = 1,2,\ldots \tag{40}$$

Знaя $\sqrt{\lambda}$ и пользуясь равенством (32), получаем

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{an\pi}{l}t + D_n \sin\frac{an\pi}{l}t,\ n = 1,2,... \ .$$

Для каждого значения *n*, следовательно, для каждого λ, получаем решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям (25, 26):

$$u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x(C_n \cos\frac{an\pi}{l}t + D_n \sin\frac{an\pi}{l}t),\ n = 1,2,...$$

(для каждого *n* свои C_n и D_n).

Т.к. уравнение (25) линейное, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по *x* и по *t*.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos\frac{an\pi}{l}t + D_n \sin\frac{an\pi}{l}t)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{41}$$

Коэффициенты C_n, D_n найдем, используя начальные условия (23, 24):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x). \tag{42}$$

Чтобы найти C_n, умножим обе части выражения (41) на собственную функцию $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$ и проинтегрируем полученное равенство по *x* в пределах от 0 до *l*. С учетом условия ортогональности (39) собственных функций, получим формулу для C_n:

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\ n = 1,2,... \ . \tag{43}$$

Найдем коэффициент $\tilde{N}_n$ для заданной функции $f_1(x)$, дважды интегрируя по частям:

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{4h}{l^2}\int_0^l (lx - x^2)\sin\frac{n\pi}{l}xdx =$$

$$=-\sqrt{\frac{l}{2}}\frac{16h}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)=\sqrt{\frac{l}{2}}\frac{16h}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n),\quad n=1,,2,... \tag{44}$$

Далее, используя (24), найдем D_n. Продифференцируем равенство (41) по *t*. Подставим *t*=0:

$$u_t'(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Умножим обе части данного равенства на собственную функцию

$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$ и проинтегрируем по *x* в пределах от 0 до *l*. В силу ортогональности собственных функций получим формулу для D_n:

$$D_n=\frac{l}{an\pi}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_2(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\ n=1,2,... \tag{45}$$

Для данной функции $f_2(x)$(ур. 21) коэффициенты $D_n=0,\ n=1,2,...$.
Ряд (41), в котором C_n и D_n определены по формулам (43), (45), если он сходится и допускает почленное дифференцирование дважды по *x* и по *t*, представляет функцию $u(x,t)$, которая есть решение уравнения (22), удовлетворяющее граничным и начальным условиям (23)-(26).
Таким образом, подставляя выражения для C_n и D_n в равенство (41), получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16h}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\cos\frac{an\pi}{l}t\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Но если $k=2n$, то $1-(-1)^n=0$, а если $k=2n+1$, то $1-(-1)^n=2;$ поэтому окончательно имеем

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

Данный ряд допускает почленное дифференцирование дважды по *x* и по *t* и представляет функцию *u(x, t)*, которая есть решение уравнения (22), удовлетворяющее граничным и начальным условиям (23)-(26).

14. Дана струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, изображенной на рис. 3. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

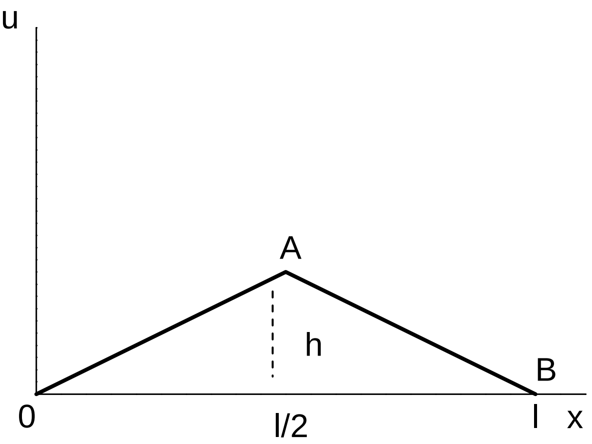


Рис. 3. Начальная форма струны в задаче 14

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{8h}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{k\pi}{2}\sin\dfrac{k\pi x}{2}\cos\dfrac{k\pi at}{l}.$

15. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=3$. В начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, где O(0; 0), A(2; -0,1), B(3; 0) (рис. 4). Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

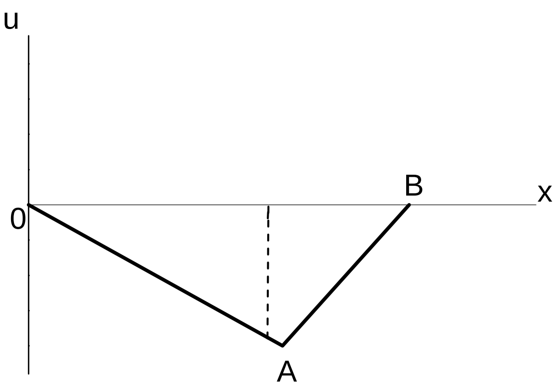


Рис. 4. Начальная форма струны в задаче 15

Ответ: $u(x,t)=-\dfrac{0{,}9}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{2k\pi}{3}\sin\dfrac{k\pi x}{3}\cos\dfrac{k\pi at}{3}.$

16. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=1$, в начальный момент имеет форму $u = h(x^4 - 2x^3 + x)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{96h}{\pi^5}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^5}\cos(2k+1)\pi at\cdot\sin(2k+1)\pi x.$

17. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0(const), \ \textit{если} \ |x - l/2| < h/2; \\ 0, \qquad\qquad \textit{если} \ |x - l/2| > h/2. \end{cases}$$

Определить форму струны для любого момента времени t.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{k\pi}{2}\sin\dfrac{k\pi h}{2l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}.$

З а м е ч а н и е. Здесь $f_1(x) = 0$, а $f_2(x) = v_0$ в интервале $((l-h)/2, (l+h)/2)$ и $f_2(x) = 0$ вне этого интервала.

18. Струна закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. Начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi(x - l/2)}{h}, \ \textit{если} \ |x - l/2| < h/2; \\ 0, \qquad\qquad \textit{если} \ |x - l/2| > h/2. \end{cases}$$

Определить форму струны для любого момента времени t.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(l^2 - k^2h^2)}\cos\dfrac{k\pi h}{2l}\sin\dfrac{\pi k}{2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}.$

6. Задача Штурма-Лиувилля

Метод разделения переменных, как мы видели на примере решения уравнения колебаний струны (15), приводит к краевой задаче на собственные значения (см. (29), (33)): найти собственные значения λ дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < l, \qquad (46)$$

для которых существует отличное от тривиального решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = y(l) = 0. \qquad (47)$$

Такое решение называется собственной функцией, соответствующей собственному значению λ. Эта задача о собственных значениях имеет специальное название – задача Штурма-Лиувилля. (Название дано в честь первых исследователей этой задачи.

То же самое название относят и к аналогичной задаче, сформулированной для общего случая. Рассмотрим краевую задачу

$$-[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad a < x < b, \tag{48}$$

$$\alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = 0, \tag{49}$$

$$\alpha_2 y'(b) - \beta_2 y(b) = 0, \tag{50}$$

где функции $p(x) \in C^1[a,b]$, $q(x) \in C[a,b]$, $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$ заданы на конечном отрезке $[a,b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - неотрицательные числа, причем $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, $\alpha_2 + \beta_2 > 0$.

Задача (48)-(50) в теории уравнений математической физики называется *задачей Штурма-Лиувилля.* Требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют отличные от тождественного нуля (нетривиальные) решения дифференциального уравнения (48), удовлетворяющие краевым условиям (49)-(50).

Те значения λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (48)-(50), называются *собственными значениями* этой краевой задачи, а соответствующие им нетривиальные решения - собственными функциями.

Собственные значения определяют собственные частоты колебаний ограниченных областей (объемов, мембран, струн, стержней и т.д.), а соответствующие собственные функции – амплитуды гармонических колебаний [1].

Свойства собственных значений и собственных функций

1^0. Существует счетное множество собственных значений

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$,

которым соответствуют собственные функции

$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$

2^0. Собственные функции на отрезке $[a,b]$, соотвествующие разным значениям параметра λ, ортогональны с весом $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m.$$

Отметим, что постановка (48)-(50) задачи Штурма-Лиувилля является общей и в частных случаях приводит к задачам с однородными граничными условиями I рода (при $\alpha_1, \alpha_2 = 0$), II рода (при $\beta_1, \beta_2 = 0$) или III рода ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \neq 0$).

Заметим, что в задаче (46)-(47) $a = 0$, $b = l$, $q = 0$, $p = 1$.

7. Уравнение теплопроводности

7.1. Уравнение теплопроводности для нестационарного случая

1. Случай неограниченного стержня.

Пусть в начальный момент времени задана температура в различных сечениях неограниченного стержня, боковая поверхность которого теплоизолирована. Требуется определить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени. Если стержень совпадает с осью *Ox*, то математическая постановка задачи имеет вид:

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ -\infty<x<+\infty, \tag{51}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=f(x),\ -\infty<x<+\infty\ . \tag{52}$$

Здесь a – коэффициент температуропроводности, $f(x)$ – ограниченная непрерывная функция. Уравнение (51) параболического типа.

Применив метод Фурье, можно получить решение уравнения в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi. \tag{53}$$

Формула (53) называется *интегралом Пуассона.*

2. Случай стержня, ограниченного с одной стороны

Решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<+\infty, \tag{54}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=f(x),\ 0<x<+\infty \tag{55}$$

и граничному условию

$$u(0,t)=\varphi(t), \tag{56}$$

выражается формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{0}^{+\infty} f(\xi)\cdot\left[\,e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4a^2t)}\,\right]d\xi+$$

$$\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^t \varphi(\eta)\cdot e^{x^2/(4a^2(t-\eta))}(t-\eta)^{-3/2}d\eta. \qquad (57)$$

3. Случай стержня, ограниченного с обоих концов $x=0$ и $x=l$.

19. Получить поле температур стержня, концы которого поддерживаются при нулевой температуре.

Задача состоит в отыскании решения $u(x,t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<l, \qquad (58)$$

при начальном условии

$$u(x,0)=f(x) \qquad (59)$$

и при граничных условиях

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0. \qquad (60)$$

Р е ш е н и е. Согласно методу Фурье будем искать нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение уравнения (58) в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \qquad (61)$$

Подстановка $u(x,t)$ в уравнение (58) дает

$$\frac{1}{a^2}XT'=X''T,$$

что можно записать в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{T(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (62)$$

В левой части этого равенства стоит функция, которая не зависит от x, справа – функция, не зависящая от t. Равенство (62) возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от x, ни от t, т.е. равны постоянному числу. Обозначим его через $-\lambda$.

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \ .$$

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (63)$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0. \qquad (64)$$

Общие решения этих уравнений соответственно будут

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \qquad (65)$$

$$T(t) = a\, e^{-\lambda a^2 t}, \qquad (66)$$

где A, B, a - произвольные константы.

Подставляя $X(t)$ и $T(t)$ в (42), получим

$$u(x,t) = (A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x)\cdot D\cdot e^{-\lambda a^2 t}.$$

Подберем константы A и B так, чтобы удовлетворялись условия (61). Т.к. $T(x,t) \neq 0$,(в противном случае $u(x,t) = 0$), то $X(x)$должна удовлетворять условиям:

$$X(0) = 0, \ \ X(l) = 0. \qquad (67)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$мы получили *задачу о собственных значениях (задачу Штурма – Лиувилля):*

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(l) = 0\,, \qquad (68)$$

исследованную в задаче о колебании ограниченной струны (см. гл. 5). Там было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\ n = 1, 2, \ldots, \qquad (69)$$

существуют нетривиальные решения задачи (68)

$$X_n(x) = B\sin(\frac{\pi n}{l}x).$$

Для нахождения коэффициента *B* можно воспользоваться свойством ортогональности собственных функций $X_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля:

$$\int_0^l X_n{}^2 dx = 1, \qquad \int_0^l X_n X_m dx = 0, n \neq m. \qquad (70)$$

Из условия $\int_0^l X_n{}^2 dx = 1$ получим

$\int_0^l B^2 \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = 1,$ откуда $B = \sqrt{\frac{2}{l}}.$

Таким образом,

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \; n = 1,2,... \qquad (71)$$

Зная $\sqrt{\lambda}$ и пользуясь равенством (66), получаем

$$T_n(t) = a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}, n = 1,2,...$$

Для каждого *n* получаем решение уравнения (58), удовлетворяющее условиям (60):

$$u_n(x,t) = X_n(t) T_n(t) = a_n \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \; n = 1,2,...$$

(для каждого *n* свое a_n).
Т.к. уравнение (58) линейное, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по *x* и один раз по *t*.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{l}} e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad (72)$$

Коэффициенты a_n найдем, используя начальное условие (40):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x). \qquad (73)$$

Чтобы найти a_n, умножим обе части уравнения (73) на собственную функцию

$X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ и проинтегрируем почленно равенство по x в пределах

от 0 до l. С учетом условия ортогональности (70) собственных функций, получим формулу для a_n:

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n=1,2,\ldots. \tag{74}$$

Ряд (72), в котором a_n определены по формулам (74), если он допускает почленное дифференцирование дважды по x и один раз по t, представляет функцию $u(x,t)$, которая есть решение уравнения (58), удовлетворяющее начальным и граничным условиям (59-60).

20. Решить уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при следующем начальном распределении температуры стержня:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}u_0,\ \text{если}\ x_1<x<x_0;\\ 0,\ \ \text{если}\ x<x_1\ \text{или}\ x>x_2.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Стержень является бесконечным, поэтому решение запишется в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

Т.к. $f(x)$ в интервале $(x_1,\ x_2)$ равна постоянной температуре u_0, а вне интервала температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

Действительно, полагая $(x-\xi)/(2a\sqrt{t})=\mu,\ d\xi=-2a\sqrt{t}\cdot d\mu,$ получим

$$u(x,t)=-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})}^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu=$$

$$=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_0^{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_0^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu..$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\cdot\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Графиком функции $\Phi(z)$ является кривая, изображенная на рис. 5.

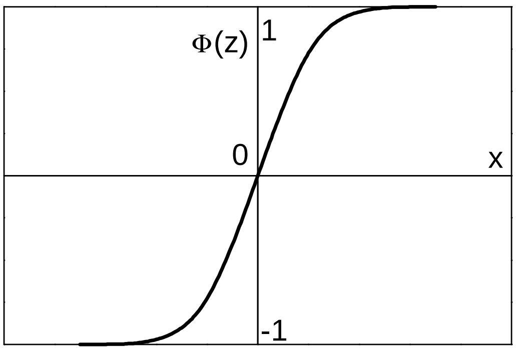


Рис. 5. График функции $\Phi(z)$

21. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию

$u|_{t=0}=f(x)=u_0$ и краевому условию $u|_{x=0}=0$.

Р е ш е н и е. Здесь мы имеем дифференциальное уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня. Решение, удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{+\infty} u_0\cdot\left(e^{-(\xi-x)^2/(4t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4t)}\right)d\xi,$$

или

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}(e^{-(\xi-x)^2\ /(4t)}-e^{-(\xi+x)^2\ /(4t)})d\xi..$$

Полагая $(x-\xi)/(2\sqrt{t})=\mu,\ d\xi=-2\sqrt{t}\cdot d\mu,$ преобразуем первый интеграл, пользуясь интегралом вероятностей, т.е.

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\xi-x)^2\ /(4t)}d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})}e^{-\mu^2}d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1+\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})\right].$$

Полагая $(x+\xi)/(2\sqrt{t})=\mu,\ d\xi=2\sqrt{t}\cdot d\mu,$ получим

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\xi+x)^2\ /(4t)}d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty}e^{-\mu^2}d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1-\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})\right].$$

Таким образом, решение принимает вид

$$u(x,t)=u_0\cdot\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}}).$$

22. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (0<x<l,t>0),$ удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}x,\ если\ 0<x: l/2;\\ l-x,\ если\ l/2\le x<l\end{cases}$$

и краевым условиям: $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}\equiv\ 0.$

Р е ш е н и е. Здесь имеем дифференциальное уравнение теплопроводности для ограниченного стержня. Решение задачи Коши, удовлетворяющее указанным условиям

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}e^{-(\frac{n\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

где

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\sqrt{\frac{2}{l}}\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Проинтегрируем по частям, полагая $u=x,\ dv=\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\ du=dx$ и

$v=-\frac{l}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x;$ получим

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\left(-\frac{lx}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^{l/2}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\left(-\frac{l^2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{l/2}^{l}=\frac{(2l)^{2/3}}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{(2l)^{2/3}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}e^{-(\frac{n\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

или

$$u(x,t)=\frac{(2l)^{2/3}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}e^{-(\frac{(2n+1)\pi}{l})^2t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

23. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при следующем начальном распределении температуры стержня:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}2,\ \textit{если}\ -3<x<1;\\ 0,\ \ \textit{если}\ x<-3\ \textit{или}\ x>1.\end{cases}$$

24. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 1 - x/l, \text{ если } 0 \le x \le l; \\ 1 + x/l, \text{ если} -l \le x \le 0; \\ 0, \text{ если } x \ge l \text{ и } x \le -l. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[(1+\frac{x}{l})\Phi(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}) - 2\cdot\frac{x}{l}\cdot\Phi(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) - (1-\frac{x}{l})\cdot\Phi(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}})\right] +$
$+\frac{1}{l}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left[e^{-(x+l)^2/(4t)} - 2e^{-x^2/(4t)} + e^{-(x-l)^2/(4t)}\right].$

Указание: решение выразится формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-l}^{0}(1+\frac{\xi}{l})\cdot e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{l}(1-\frac{\xi}{l})\cdot e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi.$$

Заменой $x - \xi/(2\sqrt{t}) = \mu$ упростить ответ.

25. Найти решение уравнения теплопроводности, если на левом конце $x = 0$ полубесконечного стержня температура поддерживается равной нулю, а начальное распределение температуры

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{если } x < 0; \\ u_0, \text{ если } 0 < x < l; \\ 0, \quad \text{если } l < x. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{u_0}{2}\cdot\left[\Phi(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}})\right].$

26. Дан тонкий однородный стержень длиной *l*, начальная температура которого $A\frac{x}{l}$. На концах $x = 0$, $x = l$ температура поддерживается равной нулю. Найти распределение температур стержня.

27. Дан тонкий однородный стержень длины *l*, изолированный от внешнего пространства и имеющий начальную температуру $f(x) = cx(l-x)/l^2$.

Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

$$\textbf{Ответ: } u(x,t)=\frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

7.2. Уравнение теплопроводности для стационарного случая

Уравнение теплопроводности (9) для стационарного случая обращается в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \qquad (75)$$

т.к. $\dfrac{\partial u}{\partial t}\equiv 0.$ С помощью оператора Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

уравнение Лапласа можно записать в виде $\Delta u = 0.$ Здесь u есть функция только точки и не зависит от времени.

Для задач, относящихся к плоским фигурам, уравнение Лапласа записывают в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (76)$$

Такой же вид имеет уравнение Лапласа и для пространства, если u не зависит от координаты z, т.е. $u(M)$ сохраняет постоянное значение при перемещении точки M по прямой, параллельной оси Oz. Заменой

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$$

уравнение (76) можно преобразовать к полярным координатам:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi -$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} r \sin\varphi.$$

Отсюда

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = r^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}),$$

или

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0. \tag{77}$$

Разделив уравнение на r^2, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0. \tag{78}$$

С уравнением Лапласа связано понятие гармонической функции. Функцию называют *гармонической* в области *D*, если в этой области она непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа. Так, функция $u = \frac{1}{r}$, где

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$,

является гармонической в любой области, исключая точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Для любой плоской области такой функцией служит $u = ln(\frac{1}{r})$ (или $u = ln\, r$), т.е. эта функция удовлетворяет уравнению (77).

Задача отыскания функции u, гармонической в области *D*, непрерывной в *D*, включая и поверхность *S*, ограничивающую эту область, и удовлетворяющей краевому условию $u|_S = F(M)$, где $f(M) = f(x,y,z)$- заданная непрерывная на *S* функция, называется *задачей Дирихле*.

28. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня

$$u\big|_{x=0} = u_0,\ u\big|_{x=l} = u_l.$$

Р е ш е н и е: Задача Дирихле для одномерного случая состоит в нахождении из уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ функции u, удовлетворяющей краевым условиям $u\big|_{x=0} = u_0$, $u\big|_{x=l} = u_l$. Общее решение указанного уравнения есть $u = Ax + B$, а учитывая краевые условия, получим $u = \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0$, т.е. стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью линейно.

29. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня
$u\big|_{x=0} = 25,\ u\big|_{x=l} = 10.$

8. Задача Дирихле для кольца

Найдем решение уравнения Лапласа в области D (кольце), ограниченной окружностями:

$$K_1:\ x^2 + y^2 = R_1^2;$$
$$K_2:\ x^2 + y^2 = R_2^2,$$

принимающее следующие граничные значения:

$$u\big|_{K_1} = u_1;$$
$$u\big|_{K_2} = u_2,$$

где $u_1, u_2 = const$.

Решение ищем в полярных координатах. В данном случае целесообразно искать решение, не зависящее от φ. Уравнение (78) в этом случае:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Решая это уравнение как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $u(r)$ (следует положить $\frac{du}{dr} = v(r)$), получим решение данной задачи Дирихле в виде

$$u(r) = \frac{u_2 \ln(r / R_1) - u_1 \ln(r / R_2)}{\ln(R_2 / R_1)}. \qquad (79)$$

З а м е ч а н и е: Фактически получено решение следующей задачи: найти функцию u_1, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области, ограниченной поверхностями (в цилиндрических координатах): $r = R_1$, $r = R_2$, $z = 0$, $z = H$, и удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$u\big|_{r=R_1} = u_1, \qquad u\big|_{r=R_2} = u_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = 0$$

(задача Дирихле-Неймана). Очевидно, что искомое решение не зависит ни от z, ни от φ и дается формулой (79).

30. Найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области *D*, ограниченной окружностями:

$$K_1:\ x^2 + y^2 = 1;$$
$$K_2:\ x^2 + y^2 = 4,$$

принимающую следующие граничные значения:

$$u\big|_{K_1} = 3;$$
$$u\big|_{K_2} = 5.$$

31. Найти решение задачи Дирихле для кольца, ограниченного окружностями:

$$K_1:\ x^2 + y^2 = 4;$$
$$K_2:\ x^2 + y^2 = 16,$$

принимающую следующие граничные значения:

$u\big|_{K_1} = 1;$

$u\big|_{K_2} = 3.$

32. Найти стационарное распределение тепла в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью $0z$ при условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура.
У к а з а н и е: перейти к цилиндрическим координатам, считая, что u не зависит от θ и z.

Ответ: $u = u_a + (u_b - u_a)\cdot\left[ln(r/a)/ln(b/a)\right].$

33. Найти стационарное распределение тепла в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью $0z$

$K_1:\ x^2 + y^2 = 9;$
$K_2:\ x^2 + y^2 = 25$

при условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура соответственно 10 К и 20 К.

34. Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части кольца $1 \le r \le 2$, удовлетворяющее краевым условиям $u\big|_{r=2} = y$.

У к а з а н и е: ввести полярные координаты.

Ответ: $u(r,\varphi) = (8/3)sh(\ln r)\cdot\sin\theta$

9. Задача Дирихле для круга

Пусть в плоскости Oxy имеется круг радиуса R с центром в начале координат. Требуется найти функцию $u(x,y)$, непрерывную в круге, включая границу, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (80)$$

и на окружности принимающую заданные значения

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi). \qquad (81)$$

Данную задачу решают в полярных координатах. Уравнение (80) в этих координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0. \tag{82}$$

Применив метод Фурье (метод разделения переменных) и положив

$$u(r,\varphi) = \Phi(\varphi)\cdot R(r),$$

можно получить решение задачи Дирихле для круга [1]:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}dt. \tag{83}$$

Формула (83) называется *интегралом Пуассона*. Путем анализа этой формулы доказывается, что если функция $f(\varphi)$ непрерывная, то функция $u(r,\varphi)$, определенная интегралом (83), удовлетворяет уравнению (82) и при $r - R$ будет $u(r,\varphi) - f(\varphi)$, т.е. $u(r,\varphi)$ является решением поставленной задачи Дирихле для круга.

35. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластине радиуса ***a***, если задано следующее граничное условие:

1) $u\big|_{r=a} = A;$

2) $u\big|_{r=a} = A\cos\varphi.$

У к а з а н и е. В случае простейших задач для уравнений Лапласа и Пуассона решения могут быть найдены непосредственно, простым подбором, без применения общих методов. Если *(x,y)* – прямоугольные, а (r,φ) - полярные координаты, то при построении решения следует учесть, что $x, y, xy, x^2 - y^2$ и их линейная комбинация являются гармоническими функциями. В правильности решения следует убеждаться непосредственной подстановкой найденного выражения для u в уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0$$

и в граничные условия. Например, в задаче **35.1):** переходя от переменных (r,φ) к переменным (x,y), перепишем граничное условие в виде $u=\frac{A}{a}x$. Отсюда видно, что искомым решением является гармоническая функция
$u(x,y)=\frac{A}{a}x$ или $u(r,\varphi)=\frac{A}{a}r\cos\varphi$.

Ответ: 1) $u = A$; 2) $u=\frac{A}{a}x$, или $u=\frac{A}{a}r\cos\varphi$.

10. Решение краевых задач методом конечных разностей

Рассматривается задача нахождения приближенного решения уравнений с частными производными разностным методом. Основная идея метода заключается в том, что решается не исходное дифференциальное уравнение в частных производных, а соответствующее ему уравнение в конечных разностях. При этом осуществляется переход от поиска решения в виде непрерывной функции $u(x,y)$ к поиску значений сеточной функции $u(x_i,y_j)$ в дискретно расположенных точках (x_i,y_j), образующих прямоугольную сетку. Посмотрим, как находится приближенное решение одномерной задачи нестационарной теплопроводности методом конечных разностей.

При нахождении *приближенного решения* уравнений с частными производными методом конечных разностей производные заменяются соответствующими разностями

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\approx\frac{u(x,h,t)-u(x,t)}{h}, \tag{84}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}-\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}\right]$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}; \tag{85}$$

аналогично

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\approx\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}. \tag{86}$$

Требуется найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{87}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L, \tag{88}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{89}$$

т.е. требуется найти решение $u(x,t)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $t = 0, x = 0, x = L, t = T$, если заданы значения искомой функции на трех сторонах: $t = 0, x = 0, x = L$ (рис. 6). Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ - заданные непрерывные функции. Покроем область сеткой, образованной прямыми

$$x = ih, \quad i = 1,2,...$$

$$t = kl, \quad k = 1,2...$$

и будем определять приближенные значения решения в узлах сетки

$$u(ih,kl) = u_{i,k}.$$

Напишем вместо уравнения (87) соответствующее ему уравнение в конечных разностях для точки (ih,kl). Значения искомой функции будем рассматривать только в узлах сетки. В соответствии с формулами (86) и (85) получим:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}. \tag{90}$$

Определим $u_{i,k+1}$:

$$u_{i,k+1} = (1 - \frac{2a^2 l}{h^2}) u_{i,k} + a^2 \frac{l}{h^2} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}). \tag{91}$$

Из формулы (91) следует, что если известны три значения в k-ом ряду: $u_{i,k}$, $u_{i+1,k}$, $u_{i-1,k}$, то определяется значение в $(k+1)$- ом ряду. Нам известны все значения на прямых $t = 0, x = 0, x = l$. Ряд за рядом мы определим значения искомого решения во всех узлах сетки (рис. 6). В данном случае реализована так называемая явная двухслойная схема [2,3]. Доказано, что при решении параболического уравнения вычислительный процесс *устойчив* и *сходится* при $l \le \frac{h^2}{2a^2}$. Формула (91) особенно упрощается, если шаг l по оси

t выбрать так, чтобы было $1-\frac{2a^2 l}{h^2}=0$ или $l=\frac{h^2}{2a^2}$. В этом случае уравнение (81) принимает вид:

$$u_{i,k+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1,k}+u_{i-1,k}). \tag{92}$$

Эта формула особенно удобна для вычислений (см. рис. 7). Определенные из системы (91) значения $u_{i,k}$ и есть приближенные значения решения сформулированной выше задачи. Доказано, что при $h - 0$ и $l \le \frac{h^2}{2a^2} \to 0$ (т.е. при измельчении сетки) решение разностного уравнения (91) (системы линейных алгебраических уравнений) сходится к решению исходного дифференциального уравнения (87) в частных производных. Можно доказать, что $\left|u(x,t)-u_{i,k}\right| < Mh^2$, где $u(x,t)$ - точное решение задачи, M – постоянная, не зависящая от h.

Способность разностной схемы не допускать неограниченного увеличения уклонения в процессе измельчения сетки (т.е. когда $h - 0$) означает ее

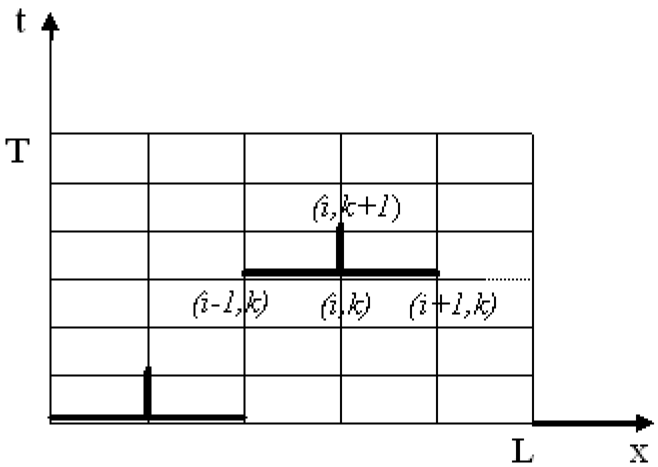


Рис. 6. Прямоугольная сетка

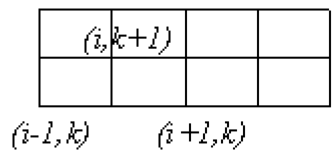


Рис. 7. Узлы сетки в случае расчета по формуле (92)

36. Найти (по формуле (92), полагая h = 0,2) приближенное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0)=x(\frac{3}{2}-x), \tag{93}$$

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=\frac{1}{2},\ 0\le t\le 4l. \tag{94}$$

Р е ш е н и е. Решим задачу с шагом по переменной x, равным $h=0{,}2$. Тогда шаг по переменной t выберем равным $l=\dfrac{h^2}{2a^2}=\dfrac{0{,}04}{4}=0{,}01.$

Начальное условие (93) дает сеточное начальное условие:

$u_{0,0}=0;$ $u_{1,0}=0{,}2(1{,}5-0{,}2)=0{,}26;$ $u_{2,0}=0{,}44;$

$u_{3,0}=0{,}54;$ $u_{4,0}=0{,}56;$ $u_{5,0}=0{,}5.$

Граничные условия (94) дают сеточные граничные условия:

$$u_{0,0}=u_{0,1}=u_{0,2}=u_{0,3}=\ldots=0,$$

$$u_{5,0}=u_{5,1}=u_{5,2}=u_{5,3}=\ldots=0{,}5.$$

Значения приближенного решения $u_{i,k}$ будут вычисляться в точках сетки, изображенной на рис. 8.
/Жирными линиями заданы те участки границы области переменных (x,t), где задаются начальные и граничные условия/.

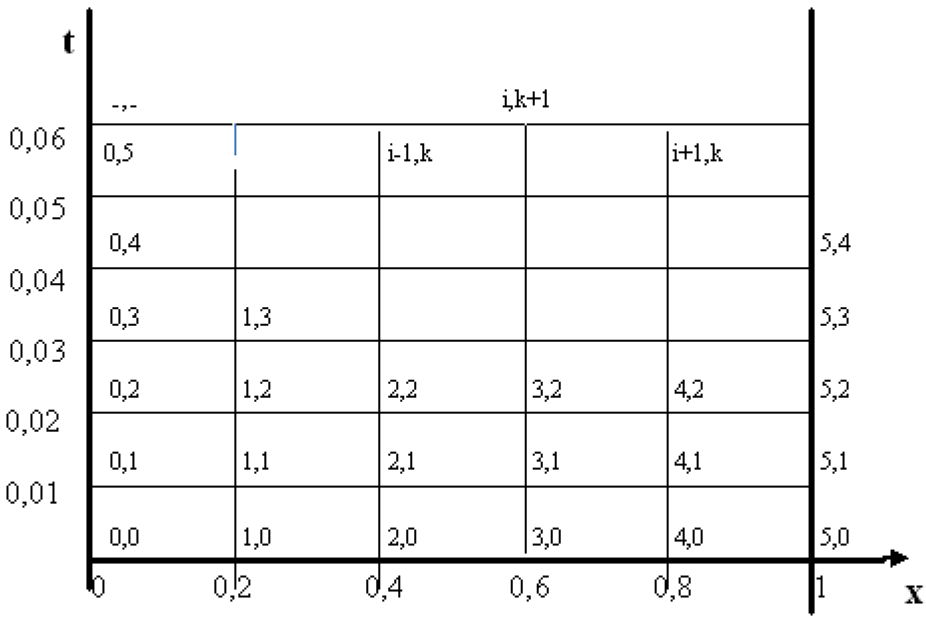


Рис. 8. Узлы сетки в задаче 36

Если известны значения приближенного решения в точках сетки, находящихся в k-м ряду/т.е. известны значения $u_{0,k}$; $u_{1,k}$; $u_{2,k}$; $u_{3,k}$; $u_{4,k}$; $u_{5,k}$/, то значения приближенного решения в $(k+1)$-м ряду сетки вычисляются по формуле (92).

Используя заданные значения в нулевом ряду /т.е. при $k=0$/ находим значения в первом ряду:

$$u_{1,1} = \frac{1}{2}(u_{2,0} + u_{0,0}) = \frac{1}{2}(0{,}44 + 0) = 0{,}22;$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{2}(u_{3,0} + u_{1,0}) = \frac{1}{2}(0{,}54 + 0{,}26) = 0{,}4$$

и т.д.

При этом последовательно заполняем таблицу:

$k \backslash i$		0	1	2	3	4	5
	$t_k \backslash x_i$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0	0	0,26	0,44	0,54	0,56	0,5
1	0,01	0	0.22	0,4	0,5	0,52	0,5
2	0,02	0	0,2	0,36	0,46	0,5	0,5
3	0,03	0	0.18	0,33	043	0,48	0,5
4	0,04	0	0,165	0,305	0,405	0,465	0,5
5	0,05	0	0,152	0,285	0,385	0,453	0,5
..	..	..	..	..	..	..	..

В таблице в i-м столбце в k-й строке располагается значение $u_{i,k}$. Вычисления следует прекратить, когда значение параметра $t_k = l \cdot k$ превысит величину интересующего нас момента времени t.

37. Найти (по формуле (92), полагая h = 0,5) приближенное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = x(4 - x),$$

$$u(0,t) = 0,\ u(3,t) = 3,\ 0 \le t \le 4l.$$

11. Типы уравнений второго порядка в частных производных. Приведение к каноническому виду

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(\,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\,)=0, \tag{95}$$

где a,b,c - функции x и y. Обозначим $D=b^2$ - ac.

Говорят, что указанное уравнение в области G принадлежит *гиперболическому типу*, если в этой области $D=b^2$ - ac>0. Если же $D=b^2$ - ac=0, то уравнение принадлежит *параболическому типу*, а если $D=b^2$ - ac<0, - *эллиптический тип*.

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$$

называется *каноническим уравнением гиперболического типа*; уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$$

- *каноническое уравнение параболического типа*, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$$

- *каноническое уравнение эллиптического типа*.

Дифференциальное уравнение

$$a(\,dy\,)^2-2b\,dx\,dy+c(\,dx\,)^2=0$$

называется *уравнением характеристик* уравнения (95).

Для уравнения **гиперболического типа** уравнение характеристик имеет два интеграла: $\varphi(x,y)=C_1,\ \psi(x,y)=C_2$, т.е. существуют два семейства действительных характеристик. С помощью замены переменных

$$\xi=\varphi(x,y),\ \Upsilon=\psi(x,y)$$

дифференциальное уравнение (75) приводится к каноническому виду.

Для уравнения **параболического типа** оба семейства характеристик совпадают, т.е. уравнение характеристик дает интеграл $\varphi(x,y)=C.$ В этом случае нужно произвести замену переменных

$$\xi=\varphi(x,y),\Upsilon=\psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ - какая-нибудь функция, для которой $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Upsilon}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Upsilon}{\partial x}\neq 0$. После такой замены уравнение приводится к каноническому виду.

Для уравнения **эллиптического типа** интегралы уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = C_{1,2}$, где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ - действительные функции. С помощью подстановки

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y)$$

уравнение (95) приводится к каноническому виду.
Ниже в таблице приведена классификация дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.

Таблица1

Классификация уравнений второго порядка в частных производных

D - дискриминант	Тип уравнения	вид канонического уравнения
$b^2 - ac > 0$	Гиперболический	$u_{xx} - u_{yy} = F$ или $u_{xy} = F$
$b^2 - ac < 0$	Эллиптический	$u_{xx} + u_{yy} = F$
$b^2 - ac = 0$	Параболический	$u_{xx} = F$ или $u_{yy} = F$

38. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Р е ш е н и е. Здесь $a = 1, b = -1, c = 2, b^2 - ac = -1 < 0,$ т.е. уравнение эллиптического типа.

Уравнение характеристик имеет вид

$$(dy)^2 + 2dx\,dy + 2(dx)^2 = 0,\quad \text{или}\quad y'^2 + 2y' + 2 = 0.$$

Отсюда $y' = -1 \pm i$; получаем два семейства мнимых характеристик: $y + x - ix = C_1$ и $y + x + ix = C_2$. Производя замену переменных $\xi = y + x$, $\eta = x$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x})+(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x})=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Подставив найденные выражения в дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=0,\ \text{т.е.}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

Привести к каноническому виду уравнение

39. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,\ \xi=xy,\ \eta=y/x.$

40. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2 x-2y\sin x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi},\ \xi=y\cdot tg\frac{x}{2},\ \Upsilon=y$ (произвольная функция)

41. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,\ \xi=y/x,\ \eta=y.$

42. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,\ \xi=x+y,\ \eta=3x+y.$

43. $\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta})=0, \quad \xi=y^2, \eta=x^2.$

II. Интегральные уравнения

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Приведите примеры **первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла, несобственного интеграла.**

2. Что такое **неопределенный интеграл**?

3. Напишите **формулу интегрирования по частям.**

4. Напишите **формулу Ньютона-Лейбница**.

5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

6. Чему равна производная **определенного интеграла** по переменному **верхнему пределу**?

7. Что такое **несобственный интеграл**?

8. Как определяются пространства R^2, R^3, R^n?

9. Найдите интеграл $\int_0^1\int_0^1 x^2y^2dxdy$.

1. Интегральные уравнения. Основные понятия и определения. Классификация уравнений

Определение. *Интегральными уравнениями* называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла.

Многие задачи математической физики сводятся к линейным интегральным уравнениям.

Определение. Интегральное уравнение называется *линейным*, если в него неизвестная функция входит линейно.

Пример линейного уравнения

$$\varphi(x)-\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)dy = x-\frac{e^x}{x},\ 0\le x\le 1.$$

Пример нелинейного уравнения

$$\varphi(x)-\int_0^1 \frac{xy\varphi(y)}{1+\varphi^2(y)}dy = f(x),\ 0\le x\le 1.$$

Решить интегральное уравнение – значит найти такую функцию, которая обращает данное уравнение в верное равенство.

Интегральные уравнения подразделяются на *уравнения первого рода* и *уравнения второго рода*. В уравнения первого рода неизвестная функция входит только под знаком интеграла. В уравнения второго рода неизвестная функция входит как под знаком интеграла, так и вне интеграла.

Уравнения первого и второго рода с постоянными пределами интегрирования называются *уравнениями Фредгольма,* а уравнения с переменным верхним пределом называются *уравнениями Вольтерра.*

Таким образом, линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода имеет вид:

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x\le b.$$

Линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x\le b.$$

Линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода имеет вид

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x.$$

Линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет вид

$$\varphi(x)-\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x.$$

Здесь
$\varphi(x)$ – неизвестная искомая функция;
f(x) – заданная непрерывная функция, называемая *свободным членом* интегрального уравнения;
K(x,y) – заданная непрерывная функция, называемая *ядром* интегрального уравнения.

Уравнения второго рода иногда записывают с параметром λ так:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x\le b \tag{96}$$

или

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x. \tag{97}$$

Тогда уравнения (96) или (97) представляют собой не одно уравнение, а семейство уравнений, зависящее от числового параметра λ.

Если *f(x)* = 0, то интегральное уравнение называется *однородным*, в противном случае оно называется *неоднородным*.

Уравнения Вольтерра более просты, чем уравнения Фредгольма; уравнения второго рода более просты, чем уравнения первого рода.

2. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений

2.1. Построение решения уравнения Фредгольма второго рода при малых значениях параметра методом последовательных приближений

Будем рассматривать интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x),\ a\le x\le b, \tag{98}$$

где ядро *K(x,y)* и правая часть *f(x)* – заданные непрерывные функции переменных *x*, *y*, $\varphi(x)$ - искомая функция, λ - параметр.

В случае, когда параметр λ мал, т.е. удовлетворяет условию

$$|\lambda|<\frac{1}{M},$$

где M – положительное число, такое, например, что

$$\left(\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \le M \qquad a \le x \le b,$$

решение $\varphi(x)$ уравнения (98) существует и его можно построить *методом последовательных приближений.*

Функция $\varphi(x)$ ищется в виде предела последовательности

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,\ n = 1,2,... \qquad (99)$$

т.е.

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

и других решений уравнение (98) не имеет.

Методом последовательных приближений найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода, предварительно убедившись, что выполнено условие

$$|\lambda| < \frac{1}{M} = \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\right)^{-\frac{1}{2}}: \qquad (100)$$

44. $\varphi(x) - \int_0^1 xy\varphi(y)dy = 2x.$

<u>Решение.</u> Здесь $f(x) = 2x$, $K(x,y) = xy$, $\lambda = 1$. Имеем

$$\left(\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\right) = M^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2y^2dxdy = 1/9.$$

Значит $M = 1/3$, $|\lambda| = 1 < \frac{1}{1/3} = 3$. Следовательно, условие (100) выполнено.

Построим последовательность приближений (99)

$\varphi_0(x) = 2x,$

$$\varphi_n(x) = 2x + 1 \cdot \int_0^1 xy\varphi_{n-1}(y)dy, \ n = 1,2,...$$

т.е.

$$\varphi_1(x) = 2x + 1 \cdot \int_0^1 xy2ydy = 2x + 2x\frac{1}{3};$$

$$\varphi_2(x) = 2x + 1 \cdot \int_0^1 xy(2y + y\frac{2}{3})dy = 2x + 2x(\frac{1}{3} + \frac{1}{9});$$

$$\varphi_3(x) = 2x + 1 \cdot \int_0^1 xy(2y + y(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}))dy = 2x + 2x(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27});$$

…

$$\varphi_n(x) = 2x + 2x(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^{n-1}});$$

… .

$$\varphi(x) = \lim_{n - \propto} \varphi_n(x).$$

Т.к. сумма убывающей геометрической прогрессии

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$, то

$$\varphi(x) = 2x + 2x \cdot \frac{1}{2} = 3x.$$

45. $\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 y\varphi(y)dy = 1.$

Ответ: $\varphi(x) = \frac{2}{3}$**.**

46. $y(x)-\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\, y(t)t dt=2\sin x.$

Ответ: $y(x)=4\sin x$**.**

47. $y(x)-\pi\int\limits_0^1 (1-x)\sin 2\pi t\; y(t)dt=\dfrac{1}{2}(1-x).$

Ответ: $y(x)=1-x.$

48. $\varphi(x)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi(y)dy=\sin\pi x.$

Ответ: $\varphi(x)=\sin\pi x+\dfrac{2}{\pi}.$

2.2. Построение решения уравнения Вольтерра второго рода методом последовательных приближений

Будем рассматривать интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),\ a\le x. \qquad (101)$$

Методом последовательных приближений функция $\varphi(x)$ ищется в виде предела последовательности

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,\ n=1,2,\dots, \qquad (102)$$

т.е.

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x). \qquad (103)$$

Интегральное уравнение Вольтерра (101) при требовании непрерывности его ядра $K(x,y)$ и правой части $f(x)$ имеет единственное решение (103) для каждого конечного значения параметра λ.

Этим существенно отличается интегральное уравнение Вольтерра второго рода от интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, которое, как будет показано ниже, не для каждого λ может иметь решение, а при некоторых λ оно может иметь даже несколько решений.

Обычно полагают $\varphi_0(x) = f(x)$, однако это вовсе не обязательно: удачный выбор нулевого приближения часто позволяет ускорить сходимость последовательности $\varphi_n(x)$ к точному решению.

Методом последовательных приближений найти решение уравнения Вольтерра 2-го рода:

49. $\varphi(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$

<u>Р е ш е н и е.</u> Положим

$\varphi_0(x) = 1.$

Тогда

$$\varphi_1(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-y)dy = 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!},$$

$$\varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-y)(1-\frac{y^2}{2!})dy = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\varphi_3(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-y)(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!})dy = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

… .

Для n-го приближения

$$\varphi_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Тогда решение уравнения

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

Можно проверить, что данная функция действительно является решением данного интегрального уравнения.

П р о в е р к а. Подставим $\varphi(x) = \cos x$ в исходное уравнение

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

Получим

$$\cos x = 1 - \int_0^x x\cos y dy + \int_0^x y\cos y dy. \qquad (104)$$

Находим первый интеграл

$$\int_0^x x\cos y dy = x\sin y\Big|_0^x = x\sin x\,. \qquad (105)$$

Находим второй интеграл

$$\int_0^x y\cos y dy = \begin{vmatrix} u = y \\ dv = \cos y dy \\ v = \sin y \\ du = dy \end{vmatrix} = y\sin y\Big|_0^x - \int_0^x \sin y dy = x\sin x + \cos x - 1. \qquad (106)$$

Подставим (105), (106) в (104)

$$\cos x = 1 - x\sin x + x\sin x + \cos x - 1,$$

$\cos x = \cos x$ - верно.

Ответ: $\varphi(x) = \cos x.$

50. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(y)dy.$

Ответ: $\varphi(x) = \exp x.$

51. $y(x) = 1 - x^2 + \int_0^x xy(t)dt.$

а) $y_0(x) = 1 - x^2;$ **б)** $y_0(x) = 1.$

Ответ: $y(x) = 1.$

52. $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \int_0^x y(t)dt.$

а) $y_0(x) = 1;$ **б)** $y_0(x) = \dfrac{x^2}{2} + x.$

Ответ: $y(x) = x.$

53. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x y\varphi(y)dy, \quad \varphi_0(x) = 1.$

Ответ: $\varphi(x) = \exp(x^2/2).$

54. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)dy, \quad \varphi_0(x) = 0.$

Ответ: $\varphi(x) = \sin x.$

55. $\varphi(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)dy, \quad \varphi_0(x) = 0.$

Ответ: $\varphi(x) = ch\, x.$

56. $\varphi(x) = 2^x + \int\limits_0^x 2^{x-y}\varphi(y)dy, \quad \varphi_0(x) = 0.$

Ответ: $\varphi(x) = (2e)^x.$

Если в исходном интегральном уравнении Вольтера 2-го рода (101) ядро $K(x,y)$ и свободный член *f(x)* имеют непрерывные производные, то уравнение может быть продифференцировано (один или несколько раз), что позволяет в ряде случаев свести его к задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения.

Решить интегральные уравнения, сведя их предварительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

57. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi(y)dy. \qquad (107)$

Р е ш е н и е.

Это интегральное уравнение было дано в задании **50**. Покажем, как его можно решить сведением к задаче Коши.

Дифференцируя уравнение (107), получаем для неизвестной функции обыкновенное дифференциальное уравнение

$\varphi'(x) = \varphi(x).$

Из (107) находим начальное условие

$\varphi(0) = 1.$

Следовательно,

$\varphi(x) = \exp(x).$

Полученное решение задачи Коши является одновременно решением исходного интегрального уравнения (107).

58. $y(x)=e^x+\int\limits_0^x y(t)dt.$

3. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

3.1. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

Ядро *K(x,y)* называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)q_i(y). \tag{108}$$

Соответствующее интегральное уравнение (106)

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}p_i(x)q_i(y)\right)\varphi(y)dy=f(x) \tag{109}$$

решается путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений следующим образом.
Перепишем уравнение (109) в виде :

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ip_i(x)=f(x), \tag{110}$$

где неизвестные c_i определяются через искомое решение $\varphi(x)$ равенствами

$$c_i=\int\limits_a^b q_i(y)\varphi(y)dy,\ \ i=1,2,...,n. \tag{111}$$

Умножая тождество (110) последовательно на $q_i(x),\ i=1,2...,n,$ и далее интегрируя обе части на отрезке $[a,b]$, с учетом (101), получим для неизвестных чисел c_i следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_a^b q_i(x)p_j(x)dx\right)c_j=\int\limits_a^b q_i(x)f(x)dx,\ i=1,2,...,n. \tag{112}$$

Введем обозначения

$$\alpha_{ij}=\int_a^b q_i(x)p_j(x)dx, \tag{113}$$

$$\gamma_i=\int_a^b q_i(x)f(x)dx. \tag{114}$$

Тогда система (112) запишется в виде

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}c_j=\gamma_i,\ \ i=1,2,...,n. \tag{115}$$

Если $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ – какое-нибудь решение системы (115), то в соответствии с (104) функция

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^n c_i p_i(x) \tag{116}$$

будет решением исходного интегрального уравнения (109). Если же система (115) несовместна, то и интегральное уравнение не имеет решения.

Этот метод применим, конечно, и в том частном случае, когда уравнение (109) однородное, т.е. $f(x)=0$.

Найти все решения или установить неразрешимость заданных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром:

59. $\varphi(x)-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin x\sin y+y\right)\varphi(y)dy=\sin 2x.$

Р е ш е н и е.

Ядро $K(x,y)=\frac{1}{\pi}\sin x\sin y+y$ вырожденное, $\lambda=1.$ Полагая

$$p_1(x)=\frac{1}{\pi}\sin x,\qquad\qquad p_2(x)=1,$$

$$q_1(y)=\sin y,\qquad\qquad q_2(y)=y,$$

по формулам (113), (114) вычисляем

$$\alpha_{11}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin^2 x\,dx=1,\qquad\qquad \alpha_{12}=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0,$$

$$\alpha_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} x \sin x \, dx = 2, \qquad \alpha_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0,$$

$$\gamma_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \sin 2x \, dx = 0, \qquad \gamma_2 = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin 2x \, dx = -\pi.$$

Система (115) принимает вид:

$$c_1 \cdot 0 \quad + c_2 \cdot 0 = 0,$$

$$c_1 \cdot (-2) + c_2 \cdot 1 = -\pi.$$

Ее общее решение: $c_1 = C,\ c_2 = -\pi + 2C$, где C – произвольная постоянная. Следовательно, любая функция вида

$$\varphi(x) = \sin 2x + \frac{C}{\pi}\sin x - \pi + 2C = \sin 2x + C(\frac{1}{\pi}\sin x + 2) - \pi$$

есть решение заданного уравнения и других решений это уравнение не имеет.

60. Решить уравнение

$$y(x) - 2\int_0^1 \sqrt{xt}\, y(t)dt = x.$$

Р е ш е н и е.

Ядро $K(x,t) = \sqrt{x}\sqrt{t}$ вырожденное, $\lambda = 2.$ Полагая

$$p_1(x) = p(x) = \sqrt{x}, \quad q_1(t) = q(x) = \sqrt{t},$$

решение ищем в виде

$$y(x) = f(x) + c\,p \text{ или } y(x) = x + c\sqrt{x}.$$

Система редуцируется к уравнению

$$c - 2\alpha c = \gamma,$$

где

$$\alpha = \int_a^b q(x)\,p(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x}dx = \frac{1}{2},$$

$$\gamma = \int_a^b q(x)\,f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}xdx = \frac{2}{5}.$$

Тогда получаем уравнение

$$c - c = \frac{2}{5}.$$

Последнее уравнение не имеет решения относительно c, следовательно, исходное интегральное уравнение также не имеет решения.

61. $\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin y \varphi(y)dy = \sin x$.

Ответ: $\varphi(x) = \cos x + \sin x.$

62. $\varphi(x) - \frac{24}{7}\int_0^1 (1 - x^2)(1 - \frac{3}{2}y)\varphi(y)dy = x.$

Ответ: $\varphi(x) = x + C(1 - x^2).$

63. $\varphi(x) - \int_0^1 (1 + x)cos2\pi y\varphi(y)dy = x.$

Ответ: $\varphi(x) = x.$

64. $\varphi(x) - \int_0^1 (2x - y)\varphi(y)dy = \cos 2\pi x.$

Ответ: $\varphi(x) = \cos 2\pi x.$

65. $y(x) - \int_0^1 (1 + 2xt)y(t)dt = -\frac{1}{6}(x + 3).$

Ответ: $y(x) = x + \frac{1}{2}.$

66. $y(x) - \int_{-1}^{1} (\frac{3}{2}xt + x^2(t - 1))y(t)dt = 0.$

Ответ: $y(x) = \frac{5}{2}x + x^2.$

67. $y(x)-\dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2(x-t)y(t)dt=\sin 2x.$

Ответ: Решения нет.

68. $y(x)-\int\limits_0^1(x-\sqrt{t})y(t)dt=\dfrac{5}{3}x+\sqrt{x}-\dfrac{1}{6}.$

Ответ: $y(x)=1+\sqrt{x}.$

69. $y(x)-\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(x-t)y(t)dt=0.$

Ответ: $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$

70. $y(x)-3\int\limits_0^1(x^2t^2-4xt+1)y(t)dt=2\pi^2\cos 2\pi x.$

Ответ: $y(x)=2\pi^2\cos 2\pi x+\dfrac{5}{3}(2x^2-1).$

71. $y(x)-\int\limits_{-1}^1(xt+x^2)y(t)dt=0.$

Ответ: $y(x)=0.$

3.2. Решение уравнений Вольтерра 2-го рода с вырожденным ядром

Пусть исходное интегральное уравнение (97) при $\lambda=1$ имеет вид:

$$\varphi(x)-\int\limits_a^x\left(\sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(y)\right)\varphi(y)dy=f(x) \qquad (117)$$

(*уравнение с вырожденным ядром*)

Запишем его следующим образом:

$$\varphi(x)=f(x)-\int\limits_a^x\left(\sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(y)\right)\varphi(y)dy. \qquad (118)$$

Вводя функции

$$u_1=\int\limits_0^x q_1(t)\varphi(t)dt,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{119}$$

$$u_n = \int_0^x q_n(t)\varphi(t)dt,$$

и подставляя их в (118), заключаем, что решение интегрального уравнения (117) имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)u_i(x). \tag{120}$$

Далее, дифференцируя соотношения (119) и подставляя вместо $\varphi(x)$ выражение (120), получаем для неизвестных функций $u_i(x)$ систему дифференциальных уравнений

$$u'_i = q_1(x)f(x) + \sum_{i=1}^{n} q_1(x)p_i(x)u_i(x),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$u'_n = q_n(x)f(x) + \sum_{i=1}^{n} q_n(x)p_i(x)u_i(x).$$

Из (119) при $x = 0$ находим начальные условия: $u_i(0) = ... = u_n(0)$. Определив функции $u_i(x)$ и подставив их в (120), получим решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (117).

72. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch} x}\varphi(y)dy.$$

Р е ш е н и е.

Полагая $u(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(y)\varphi(y)dy,$ получим

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}u(x).$$

Далее, дифференциальное уравнение для $u(x)$ имеет вид

$$u'(x) = \operatorname{ch}(x)\varphi(x) = \operatorname{ch}(x)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}u(x)\right)$$

или

$$u' - u = \operatorname{ch} x.$$

Решая это уравнение с учетом начального условия $u(0) = 0$, находим

$u(x) = \frac{1}{2}(xe^x + \operatorname{sh} x)$, откуда

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{xe^x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(x)}.$$

73. $\varphi(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi(y)dy.$

Ответ: $\varphi(x) = e^x(x+1).$

74. $\varphi(x) = x - 1 + \int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$

Ответ: $\varphi(x) = -e^{-x}.$

75. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt.$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + x\operatorname{arct} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

76. $y(x) = 1 + \int\limits_0^x t\,y(t)\,dt.$

Ответ: $y(x) = e^{x^2/2}.$

4. Понятие итерированного ядра и резольвенты. Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с помощью резольвенты

Часто вместо одного уравнения рассматривают семейство уравнений

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{121}$$

соответствующих различным конечным значениям числового параметра λ. Будем решать уравнение (121) методом последовательных приближений при условии выполнения неравенства (100) $|\lambda| < \dfrac{1}{M}$. Взяв в качестве нулевого приближения $\varphi_0(x) = f(x)$, получим

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y) f(y)dy = f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,y) f(y)dy, \tag{122}$$

где $K_1(x,y) = K(x,y)$;

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)(f(y) + \lambda\int_a^b K_1(x,t) f(t)dt)dy =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,y) f(y)dy + \lambda^2\int_a^b K(x,y)(\int_a^b K_1(x,t) f(t)dt)dy =$$

/поменяем порядок интегрирования/

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,y) f(y)dy + \lambda^2\int_a^b(\int_a^b K(x,y)K_1(x,t)dy) f(t)dt =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,y) f(y)dy + \lambda^2\int_a^b K_2(x,t) f(t)dt =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K_1(x,y) f(y)dy + \lambda^2\int_a^b K_2(x,y) f(y)dy, \tag{123}$$

где $K_2(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_1(t,y)dt$;

Вообще $\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \int_a^b K_j(x,y) f(y) dy =$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} K_j(x,y) \right) f(y) dy, \tag{124}$$

где

$$K_j(x,y) = \int_a^b K(x,t) K_{j-1}(t,y) dt; \;\; j = 2,3,... \tag{125}$$

Ядра $K_j(x,y)$ называются *итерированными (повторными) ядрами*. Пользуясь понятием итерированных ядер, последовательным приближениям (124) можно придать вид:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} K_j(x,y) \right) f(y) dy. \tag{126}$$

При $|\lambda| < \dfrac{1}{M}$ (127)

ряд

$$R(x,y,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x,y) \tag{128}$$

сходится равномерно при $a \le x \le b, a \le y \le b$ к функции $R(x,t,\lambda)$, называемой *резольвентой* ядра $K(x,t)$. Следовательно, (126) в пределе при $n \to \infty$ переходит в формулу

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,y,\lambda) f(y) dy, \tag{129}$$

выражающую решение интегрального уравнения через резольвенту.

77. С помощью итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{1+y^2}\varphi(y)dy = 1 + x^2.$$

Р е ш е н и е. В данном случае $K(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2}$ и для итерированных ядер на основании (125) получаем

$$K_1(x,y) = K(x,y) = \frac{x}{1+y^2},$$

$$K_2(x,y) = \int_0^1 K(x,t)K_1(t,y)dt = \int_0^1 \frac{x}{1+t^2}\frac{t}{1+y^2}dt = \frac{\ln 2}{2}\frac{x}{1+y^2},$$

$$K_3(x,y) = \int_0^1 K(x,t)K_2(t,y)dt = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+t^2}\frac{t}{1+y^2}dt = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \frac{x}{1+y^2},$$

. . . .

$$K_j(x,y) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{j-1} \frac{x}{1+y^2}.$$

Поэтому резольвента ядра равна

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\lambda\right)^{j-1} \frac{x}{1+y^2} = \frac{1}{1-\frac{\ln 2}{2}\lambda}\frac{x}{1+y^2},$$

причем этот ряд сходится в области

$$|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}. \tag{130}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$M^2 = \int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{(1+y^2)^2}dxdy = \frac{\pi+2}{24},$$

т.е. условие (127) приводит к неравенству

$$|\lambda| < 2\sqrt{\frac{6}{\pi+2}}. \tag{131}$$

Так как $\sqrt{\dfrac{6}{\pi+2}} < \dfrac{2}{\ln 2}$, то из сравнения (130) и (131) видно, что в рассматриваемом случае область сходимости ряда Неймана для резольвенты шире, чем это гарантируется условием

$$|\lambda| < \frac{1}{M} = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Далее, для заданного уравнения $\lambda = \dfrac{1}{\ln 2}$ и, следовательно,

$$R(x,y,\frac{1}{\ln 2}) = 2\frac{x}{1+y^2}.$$

Решение уравнения на основании (129) равно

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2\frac{x}{1+y^2}(1+y^2)dy = 1 + \frac{2}{\ln 2}x + x^2.$$

Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение заданных интегральных уравнений:

78. $\varphi(x) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(y)dy = \sin x.$

Ответ: $R(x,\ y,\ \lambda) = \dfrac{1}{1\text{-}\ \pi\lambda}$,

$\varphi(x) = \sin x + \dfrac{2}{\pi}.$

79. $\varphi(x) - \dfrac{\ln 2}{2}\displaystyle\int_0^1 2^{x+y}\varphi(y)dy = x.$

Ответ: $R(x,\ y,\ \lambda) = 2^{x+y}\dfrac{1}{1-\dfrac{3\lambda}{2\ln 2}}$,

$$\varphi(x)=\frac{2\ln 2-1}{\ln 2}2^{x+1}+x.$$

80. $y(x)-\pi\int\limits_0^1 x\sin 2\pi t\, y(t)dt=\cos 2\pi x.$

Ответ: $R(x,\ t,\ \lambda)=x\sin 2\pi t,$

$y(x)=\cos 2\pi x.$

81. $y(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^{t}\, y(t)dt=e^{-x}.$

Ответ: $R(x,t,\lambda)=\frac{xe^{t}}{1-\lambda},$

$y(x)=e^{-x}+x.$

82. $y(x)-\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos t\, y(t)dt=1.$

Ответ: $R(x,t,\lambda)=\frac{2}{2-\lambda}\sin x\cos t,$

$y(x)=1+2\sin x.$

5. Характеристические числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма

Напомним некоторые сведения из курса высшей математики.

5.1. Собственное число (значение) и собственный вектор матрицы (на примере матрицы второго порядка)

Ненулевой вектор

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - *собственный вектор матрицы* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

если

$AX=\lambda X$,

т.е. если после преобразования вектора X (при условии, что $x_1^2+x_2^2\neq 0$) с помощью матрицы A получаем вектор $Y=AX$, параллельный вектору A. λ - называется *собственным числом матрицы* A.

$AX-\lambda X=0$ или $(A-\lambda E)X=0.$

Получаем однородную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (132)$$

Для того чтобы однородная система (132) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\det(A - \lambda E) = 0. \qquad (133)$$

Это *характеристическое уравнение матрицы* A. Из этого характеристического уравнения находятся собственные значения λ матрицы A. Каждому собственному значению λ соответствует собственный вектор, координаты которого определяются из системы (132) при соответствующем λ.

Понятия собственного вектора и собственного числа распространяются для квадратных матриц произвольного порядка.

5.2. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

Значения параметра λ, при которых однородное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = 0 \qquad (134)$$

имеют ненулевые (нетривиальные) решения $\varphi(x) \neq 0$, называются *характеристическими числами* этого уравнения или ядра $K(x,y)$, а каждое ненулевое решение – *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ.
Заметим, что число $\lambda = 0$ не является характеристическим, т.к. при $\lambda = 0$ уравнение (134) имеет лишь нулевое решение. Если λ - характеристическое число, то

число $\mu = 1/\lambda$ называется *собственным числом* интегрального уравнения. При этом $\mu \neq 0$.

Из результатов п. 3. данного параграфа следует, что в случае уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(y) \right) \varphi(y)dy = 0 \tag{135}$$

всякое решение имеет вид

$$\varphi(x) = \lambda\sum_{i=1}^n c_i p_i(x), \tag{136}$$

где $C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ - решение однородной системы

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j = 0, \quad i = 1,2,...,n$$

или в матричной форме

$$(E - \lambda A)C = 0 \tag{137}$$

с матрицей $A = \{\alpha_{ij}\}$. По формуле (113)

$$\alpha_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \; i, j = 1,2,...,n. \tag{138}$$

Заметим, что если заменить λ на $1/\mu$, то система (117) принимает вид

$$(A - \mu E)C = 0, \; \mu \neq 0. \tag{139}$$

Отсюда следует, что собственные числа интегрального уравнения (135) совпадают с собственными числами матрицы A, а собственные функции определяются соотношением (136), где $C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ - соответствующие собственные векторы этой матрицы.

83. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (xy - 2x^2)\varphi(y)dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Ядро $K(x,y)=xy-2x^2$ - вырожденное. Полагая

$$p_1(x)=x, \qquad p_2(x)=-2x^2,$$

$$q_1(y)=y, \qquad q_2(y)=1,$$

найдем элементы матрицы A, используя формулу (138):

$$\alpha_{11}=\int_0^1 q_1(x)p_1(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}, \qquad \alpha_{12}=\int_0^1 q_1(x)p_2(x)dx=-2\int_0^1 x^3dx=-\frac{1}{2},$$

$$\alpha_{21}=\int_0^1 q_2(x)p_1(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}, \qquad \alpha_{22}=\int_0^1 q_2(x)p_2(x)dx=-2\int_0^1 x^2dx=-\frac{2}{3}.$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел матрицы A имеет вид:

$$\det(A-\mu E)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\mu & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3}-\mu\end{vmatrix}=\mu^2+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{36}=(\mu+\frac{1}{6})^2=0,$$

откуда $\mu=-1/6$ - единственное собственное число матрицы A. Соответствующие собственные векторы находим из системы уравнений

$$(A+\frac{1}{6}E)C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

общее решение которой $c_1=C, \quad c_2=C,$ где C – произвольная постоянная. Следовательно, окончательно получаем, что заданное интегральное уравнение имеет единственное характеристическое число $\lambda=\frac{1}{\mu}=-6,$ а соответствующие собственные функции имеют вид:

$$\varphi(x)=-6(c_1x-2c_2x^2)=C(x-2x^2),$$

где C – произвольная постоянная.

Интегральное уравнение может вообще не иметь характеристических чисел (например, в том случае, когда ядро $K(x,t)$ - вырожденное, матрица A в (137) нулевая) либо не иметь действительных характеристических чисел.

84. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos y \, \varphi(y) dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$p_1(x) = x,$$

$$q_1(y) = \cos y,$$

$$\varphi(x) - \lambda x c = 0, \qquad c = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \varphi(y) dy,$$

откуда

$$c - \lambda c \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx = 0.$$

Но $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx = 0,$ поэтому при любом λ последнее уравнение имеет только одно решение: $c = 0$. Следовательно, при любом λ интегральное уравнение имеет только тривиальное решение, т.е. не имеет характеристических чисел.

Найти характеристические числа и собственные функции заданных интегральных уравнений с вырожденными ядрами (ограничиться случаем действительных характеристических чисел):

85. $\varphi(x) - \lambda \int_{0}^{1} (1 + 2x) y \, \varphi(y) dy = 0.$

Ответ: $\lambda = \dfrac{6}{7}$, $\varphi(x) = C(1 + 2x).$

86. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} (x + t) y(t) dt = 0.$

Ответ: $\mu_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y_{1,2}(x) = C(\sqrt{3}x \pm 1).$

87. $y(x)-\lambda\int\limits_0^1(1+2x)t\,y(t)dt=0.$

Ответ: $\lambda=\dfrac{6}{7},\ y(x)=C(1+2x).$

88. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}|x|\,\varphi(y)dy=0.$

Ответ: $\lambda=1,\ \varphi(x)=C|x|.$

5.3. Теоремы Фредгольма

Для уравнения Фредгольма 2-го рода вида

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x), \qquad (140)$$

где a и b - конечные числа, а ядро $K(x,y)$ и свободный член $f(x)$ интегрируемы с квадратом в области $a\le x,\ y\le b$ и на отрезке $[a,b]$ (в частности, непрерывны), справедливы следующие **теоремы Фредгольма** (при формулировке которых мы ограничимся случаем действительного ядра $K(x,y)$.

1. *Однородное уравнение*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=0 \qquad (141)$$

имеет либо конечное, либо счетное множество характеристических чисел; если этих чисел счетное множество, то они стремятся к бесконечности.

2. *Если* λ *- характеристическое число, то уравнение* (141) *и сопряженное ему однородное уравнение*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K^*(x,y)\varphi(y)dy=0, \qquad (142)$$

где $K^*(x,y)=K(y,x)$, *имеют одно и то же, и притом конечное, число независимых решений.*

3. ***Альтернатива Фредгольма:*** *либо неоднородное уравнение* (140) *имеет одно и только одно решение для любой функции* $f(x)\in L_2[a,b]$, *либо соответствующее однородное уравнение* (141) *имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение.* (Другими словами, если число λ не является характеристическим, то уравнение (140) имеет, и притом единственное, решение для любой функции $f(x)\in L_2[a,b]$).

4. *Если* λ *- характеристическое число, то для того чтобы уравнение* (140) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы свободный член* $f(x)$ *был ортогонален любому решению* $\varphi^*(x)$ *однородного сопряженного уравнения* (142), *т.е.*

$$\int_a^b f(x)\varphi^*(y)dy = 0.$$

Здесь $L_2[a,b]$ - пространство функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$ с квадратом, т.е. функций, заданных на отрезке $[a,b]$, для которых конечен интеграл

$$\int_a^b f^2(x)dx.$$

Проиллюстрируем теоремы Фредгольма на примере интегрального уравнения с вырожденным ядром.

89. Исследовать решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos y + x\sin y)\varphi(y)dy = \cos x$$

в зависимости от значений параметра λ.

Р е ш е н и е. Решение интегрального уравнения сводится к решению неоднородной системы

$$(E - \lambda A)C = F, \tag{143}$$

где $F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$, $\quad f_i = \int_a^b q_i(x)\, f(x)dx.$ В рассматриваемом случае имеем

$$p_1(x) = x^2, \qquad p_2(x) = x,$$

$$q_1(y) = \cos y, \qquad q_2(y) = \sin y.$$

$$\alpha_{11} = \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot x^2 dx = -4\pi, \qquad \alpha_{12} = \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot x\, dx = 0,$$

$$\alpha_{21} = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot x^2 dx = 0, \qquad \alpha_{22} = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot x\, dx = 2\pi,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \pi, \qquad f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x\, dx = 0.$$

Система (143) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1+4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{144}$$

Характеристическое уравнение

$$\det(E - \lambda A) = (1 - 2\pi\lambda)(1 + 4\pi\lambda) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -\dfrac{1}{4\pi}$ и $\lambda_2 = +\dfrac{1}{2\pi}$, являющиеся характеристическими числами соответствующего однородного уравнения.

При любом $\lambda \neq -\dfrac{1}{4\pi}, +\dfrac{1}{2\pi}$ система (144) имеет единственное решение

$$c_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \qquad c_2 = 0;$$

соответствующее решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1 - 4\pi\lambda} x^2, \qquad \lambda \neq -\frac{1}{4\pi}, +\frac{1}{2\pi}.$$

При $\lambda = \lambda_1 = -\dfrac{1}{4\pi}$ из (124) получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система, а вместе с ней и исходное интегральное уравнение решения не имеют.

При $\lambda = \lambda_2 = +\dfrac{1}{2\pi}$ система (133) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

и имеет решения $c_1 = \frac{\pi}{3}$, $c_2 = C$. Соответствующие решения интегрального уравнения таковы:

$$\varphi(x) = \cos x + \lambda_2 (c_1 x^2 + c_2 x) = \cos x + \frac{x^2}{6} + Cx,$$

где C – произвольная постоянная.

Исследовать решения заданных уравнений с вырожденным ядром при различных значениях параметра λ:

90. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 x(1+y)\varphi(y)\,dy = x^2.$

Ответ: при $\lambda \neq \frac{6}{5}$, $\varphi(x) = x^2 + \frac{1}{2}\frac{7\lambda}{6-5\lambda}x,$

при $\lambda = \frac{6}{5}$ решения нет.

91. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 x\varphi(y)\,dy = \sin 2\pi x.$

Ответ: при $\lambda \neq 2$, $\varphi(x) = \sin 2\pi x,$

при $\lambda = 2$ $\varphi(x) = \sin 2\pi x + Cx.$

92. $y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x+t)y(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x.$

Ответ: при $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x +$

$+\frac{\lambda}{1-\frac{4}{3}\lambda^2}((1+2\lambda)x + 1 + \frac{2}{3}\lambda),$

при $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ решений нет.

93. $y(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)y(t)\,dt = 1.$

Ответ: при $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ $y(x) = 1 + \frac{2\lambda}{1+\frac{\lambda\pi}{2}}\sin x$,

при $\lambda = \frac{2}{\pi}$ $y(x) = 1 - \sin x + C\cos x,$

при $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$ решений нет.

6. Физические примеры

Многие задачи математической физики приводят к линейным интегральным уравнениям. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Если внешнее воздействие на какую-либо линейную [4] систему описывается функцией $f(x)$ $(a \le x \le b)$, то результат этого воздействия описывается функцией

$$\hat{f}(x) = \int_a^b G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi, \tag{145}$$

где $G(x;\xi)$ - функция влияния, определяемая рассматриваемой системой. Например, $f(x)$ может означать плотность нагрузки, распределяемой вдоль балки, а $\hat{f}(x)$ - соответствующий прогиб и т.п.

Допустим, что вид воздействия нам неизвестен, но известен отклик системы на это воздействие и требуется по этому отклику восстановить воздействие. Тогда в соотношении (145) функция $\hat{f}(x)$ (как и $G(x;\xi)$) будет заданной, а $f(x)$ - искомой, т.е. мы приходим к интегральному уравнению - линейному интегральному уравнению Фредгольма первого рода.

2. Бывают случаи, когда известной оказывается некоторая линейная комбинация $\varphi(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, \hat{f}(x)$ функций, описывающих внешнее воздействие и соответствующий отклик [3]. Тогда для восстановления внешнего воздействия потребуется решить интегральное уравнение

$$\alpha\, f(x) + \beta \int_a^b G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi = \varphi(x). \tag{146}$$

Это линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с искомой функцией $f(x)$.

3. Приведем еще одну задачу, сводящуюся к уравнению вида (146). Рассмотрим уравнение вынужденных поперечных колебаний струны, закрепленной при $x = 0$ и $x = l$ [3]:

$$\rho u''_{tt} = P u''_{xx} + f(x,t). \tag{147}$$

Если внешнее воздействие является гармоническим,

$$f(x.t) = \varphi(x)\cos\omega t,$$

и нас интересует вынужденное колебание, происходящее с той же частотой a , т.е. $u(x,t) = v(x)\cos\alpha\, t$,
то после подстановки в (147) мы приходим к краевой задаче

$$Pv'' = -\rho\omega^2 v - \varphi(x) \quad (0 \le x \le l), \;\; \nu(0) = 0, \;\; v(l) = 0.$$

При $\alpha = 0$ получилась бы задача на стационарное отклонение струны под действием внешней нагрузки. Эта задача рассмотрена, например, в [3]. Решение получено в виде

$$v(x) = \int_0^l G(x;\xi)\left[-\frac{1}{P}\varphi(\xi)\right]d\xi, \tag{148}$$

где функция влияния в данной задаче равна

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -(l-\xi)xl^{-1} & (0 \le \xi \le x \le l), \\ -\xi(l-x)l^{-1} & (0 \le x \le \xi \le l). \end{cases}$$

Однако при $a \ne 0$ к внешней нагрузке $\varphi(x)$ добавляется инерционный член $\rho\omega^2 v(x)$, зависящий от искомого решения. Если на минуту считать его известным и воспользоваться решением (148), то придем к соотношению

$$v(x) = -\frac{\rho\omega^2}{P}\int_0^l G(x;\xi)v(\xi)\,d\xi - \frac{1}{P}\int_0^l G(x;\xi)v(\xi)\,d\xi.$$

Но так как $v(x)$ на самом деле неизвестна, то это соотношение представляет собой интегральное уравнение, причем того же типа, что и (146).

4. Уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \; a \le x$$

типичны при описании физических процессов, связанных с явлениями последействия. В этих уравнениях переменная x обычно обозначает время [3]. Тогда состояние системы, характеризуемое функцией $\varphi(x)$, определяется внешним воздействием $f(x)$ и зависит от состояния системы в предшествующие моменты времени. Ядро $K(x,y)$ описывает влияние состояния системы в предшествующие моменты времени y ($a<y<x$) на состояние системы в момент x.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 9. Пусть в катушке индуктивности не проявляется явление гистерезиса. Тогда поток индукции в катушке Ф связан с током I_L соотношением $\Phi = L \cdot I_L$. Согласно известным формулам электродинамики имеем

$$R \cdot I_R = u, \quad \frac{1}{C} \cdot I_C = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d\Phi}{dt} = u.$$

Используя закон Кирхгофа $I_R + I_C + I_L = 0,$ приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно u:

$$\frac{u}{L} + \ddot{u}C + \frac{\dot{u}}{R} = 0.$$

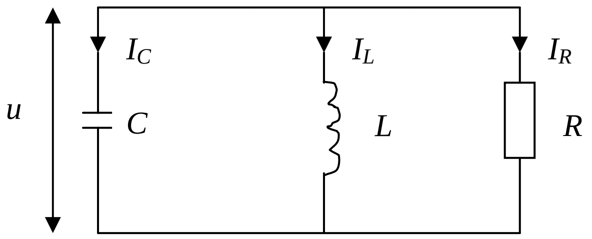


Рис. 9. Электрическая цепь

Пусть теперь катушка снабжена магнитным сердечником, в котором проявляется гистерезис. Тогда вместо соотношения $\Phi = L \cdot I_L$ нужно использовать более сложное, учитывающее зависимость Ф не только от значения I_L в момент t, но и в предшествующие моменты времени (эффект последействия). Это видоизмененное соотношение таково:

$$\Phi(t) = L \cdot I_L + \int_{t_0}^{t} M(t-\tau) I_L(\tau) d\tau.$$

Здесь $M(t-\tau)$ - функция, учитывающая влияние значения I_L в момент τ на величину Ф в момент t и определяемая обычно эмпирическим способом.

Имеем

$$I_L = -I_R - I_C = -\frac{u}{R} - C\dot{u}.$$

Отсюда

$$u(t) = u(t_0) e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \frac{I_L(\tau)}{C} d\tau$$

и, следовательно,

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} u(\xi) d\xi = u(t_0) \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{\xi - t_0}{RC}} d\xi - \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{t_0}^{\xi} e^{-\frac{\xi - \tau}{RC}} \frac{I_L(\tau)}{C} d\tau =$$

$$= f(u(t_0),t) + \int_{t_0}^{t} \tilde{K}(t-\tau) I_L(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\tilde{K}(t-\tau) = -\int_{\tau}^{t} e^{-\frac{\xi-\tau}{RC}} \frac{1}{C} d\xi.$$

Подставляя полученное выражение для Ф в уравнение, связывающее Ф и I_L, получим

$$f(u(t_0),t) + \int_{t_0}^{t} \tilde{K}(t-\tau) I_L(\tau)\, d\tau = L I_L(t) + \int_{t_0}^{t} M(t-\tau) I_L(\tau) d\tau$$

или окончательно для $I_L(t)$ имеем

$$I_L(t) = \int_{t_0}^{t} K(t-\tau) I_L(\tau)\, d\tau + f(u(t_0),t)\frac{1}{L},$$

где $K(\xi) = \left[\tilde{K}(\xi) - M(\xi)\right]\frac{1}{L}$. Таким образом, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Ряд других конкретных физических задач, приводящих к интегральным уравнениям, содержится, например, в [3, 4].

Появление интегральных уравнений при исследовании краевых задач является естественным, т.к. такие уравнения связывают между собой значения известных и неизвестных функций на конечном интервале, а не на бесконечно малом, как дифференциальные уравнения.

7. Связь интегральных уравнений с дифференциальными

Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода используются обычно при описании динамики различных процессов в системах.

В частности, всякая задача Коши для линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_n(x)y=f(x),$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1,\ \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

может быть сведена к решению неоднородного линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

94. Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши

$$u''+2u'+u=x^2,\quad u(0)=1,\quad u'(0)=0.$$

Р е ш е н и е. Положим

$$u''(x)=y(x). \tag{149}$$

Интегрируя (149) с учетом начальных условий, последовательно находим:

$$u'(x)=u'(0)+\int_0^x y(t)dt=\int_0^x y(t)dt, \tag{150}$$

$$u(x)=u(0)+\int_0^x ds\int_0^s y(t)dt=1+\int_0^x (x-t)y(t)dt. \tag{151}$$

Подставляя (129) – (131) в исходное дифференциальное уравнение, получаем

$$y(x)+2\int_0^x y(t)dt+\left(1+\int_0^x (x-t)y(t)dt\right)=x^2,$$

или

$$y(x)=x^2-1-\int_0^x (2+x-t)y(t)dt. \tag{152}$$

Таким образом, показано, что если $u(x)$ – решение исходной задачи Коши, то функция $y(x)=u''(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (152). Обратно, если $y(x)$ - решение этого уравнения, то функция $u(x)$, определяемая соотношением (151), удовлетворяет как исходному дифференциальному уравнению, так и начальным условиям. Следовательно, рассматриваемая задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (152).

Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений:

95. $y(x)=e^{2x}, \quad y(x)=e^{x}+\int\limits_0^x e^{x-t}y(t)dt.$

96. $y(x)=xe^{x^3/3}, \quad y(x)=x+\int\limits_0^x xt\,y(t)dt.$

97. $y(x)=e^{-x}(\frac{x^2}{2}+1), \quad y(x)=e^{-x}+\int\limits_0^x e^{-(x-t)}\sin(x-t)y(t)dt.$

Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим задачам Коши:

98. $u'+2xu=e^{x}, \quad u(0)=1.$

Ответ: $y(x)=e^{x}-2x-\int\limits_0^x 2xy(t)dt.$

99. $u''-2u'+u=0, \quad u(2)=1, \quad u'(2)=-2.$

Ответ: $y(x)=2x-9+\int\limits_2^x (2-x+t)y(t)dt.$

100. $u''-\sin x\cdot u'+e^{x}u=x, \quad u(0)=1, \quad u'(0)=-1.$

Ответ: $y(x)=e^{x}(x-1)-\sin x+x+\int\limits_0^x (\sin x-e^{x}(x-t))y(t)dt.$

III. Специальные функции

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Что называют **обыкновенным дифференциальным уравнением**?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Как решить уравнение с разделяющимися переменными?
4. Что называют дифференциальным уравнением с частными производными?
5. Какое уравнение с частными производными называют линейным?

6. Приведите примеры уравнения с частными производными **эллиптического, параболического и гиперболического типов.**

7. Напишите **уравнения Лапласа, Пуассона, теплопроводности и волновое уравнение.**

8. Что такое **начальные и граничные условия**?

9. В чем различие между **задачей Коши** и **краевой задачей**?

10. Напишите выражения для **оператора Гамильтона** в **прямоугольной системе координат**

11. Напишите выражения для **оператора Лапласа** в **прямоугольной системе координат**.

12. Как при помощи оператора Гамильтона записать операции **дивергенции**, **градиента** и **ротора**?

1. Специальные функции и задачи, приводящие к специальным функциям

В ряде случаев, например, при пользовании методом Фурье разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах, мы приходим к так называемым *специальным* функциям: цилиндрическим, сферическим и др. Специальными (или высшими трансцендентными) функциями называются все не элементарные функции. Характерная особенность этих функций состоит в том, что многие из них являются решениями уравнений с особыми точками вида

$$\left[p(x)y'(x)\right]' - q(x)y(x) = 0, \qquad (153)$$

где коэффициент $p(x)$ обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной x.

Метод разделения переменных, как мы убедились при решении простейших задач в гл. I, приводит к краевой задаче на собственные значения для однородного уравнения

$$\left[p(x)y'(x)\right]' - q(x)y(x) = 0 \ (a < x < b,\ \ p(x) > 0). \qquad (154)$$

При $a = 0,\ b = l,\ q = 0,\ q = 1$ приходим к уравнению

$$y'' - \lambda y = 0,\ y(0) = y(l) = 0. \qquad (155)$$

Эта задача Штурма-Лиувилля о собственных значениях, возникающая при решении простейших задач уравнений математической физики (см., например, в задаче о колебании струны ур. (34)-(35) или в задаче о теплопроводности ограниченного стержня ур. (68)). Собственные функции в этом случае выражаются через тригонометрические функции (см. (40), (71)). Заметим, что собственные функции выражаются через тригонометрические функции в случае, если областью является отрезок, прямоугольник или параллелепипед, т.е. когда задача математической физики решается в прямоугольной системе координат.

Если область – круг, цилиндр или шар, то при пользовании методом Фурье разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах приходят к *специальным функциям* – цилиндрическим, сферическим и др.

I. Цилиндрическими функциями называются решения *уравнения Бесселя*:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0. \qquad (156)$$

Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе как функции Бесселя, и иногда это название присваивается всему классу цилиндрических функций:

$u(x) = J_\nu(x)$ – *функция Бесселя* или *цилиндрическая функция 1-го рода порядка* ν.

Уравнение Бесселя (156) можно записать и в виде:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx}) + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0. \qquad (157)$$

101. Проверить, что уравнение (156) можно представить в виде (157).

II. Сферическими функциями называются решения уравнения

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \nu(\nu + 1)u = 0, \qquad (158)$$

$u(x) = P_\nu(x)$ – *сферическая функция Лежандра первого рода порядка* ν.

Укажем характерные задачи, приводящие к специальным функциям.

Метод разделения переменных для дифференциальных уравнений с частными производными приводит к задаче Штурма-Лиувилля. Для уравнений с постоянными коэффициентами и граничными условиями первого рода получаем задачу на собственные значения или задачу Штурма-Лиувилля:

Найти значения λ (*собственные значения*), *при которых однородное уравнение*

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad (\lambda > 0) \qquad (159)$$

в области T *с однородным условием*

$$v\Big|_S = 0 \qquad (160)$$

на границе S имеет нетривиальное решение (v(P)≠ 0) (собственные функции).

Здесь Δ - оператор Лапласа, например, в прямоугольной системе координат

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Если T – отрезок ($0 \le x \le l$), прямоугольник ($0 \le x \le l, 0 \le y \le l$) или параллелепипед ($0 \le x \le l, 0 \le y \le l,\ 0 \le z \le l$) , то собственные функции $v_n(P)$ выражаются через тригонометрические функции. Если T – круг, цилиндр или шар, то собственные функции выражаются через *пециальные функции* – <u>цилиндрические, сферические</u> и др. Вспомним, какой вид оператор Лапласа имеет в цилиндрической и сферической системах координат.

2. Оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат

В декартовой системе координат оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Укажем вид оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат.

2.1. Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

В случае *цилиндрических координат* положение точки P в пространстве определяется тремя числами φ, r, z , где φ и r – полярные координаты проекции точки P на плоскость $0xy$ и z –аппликата точки P, т.е. $P(\varphi, r, z)$ (рис. 10).

Заметим, что

$$x = r\cos\varphi\ ;$$

$$y = r\sin\varphi;$$

$$z=z,$$

где

$$0 \le \varphi \le 2\pi;$$

$0 \le \rho < \infty$;

$-\infty < z < \infty$.

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

или

$$\Delta v = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right].$$

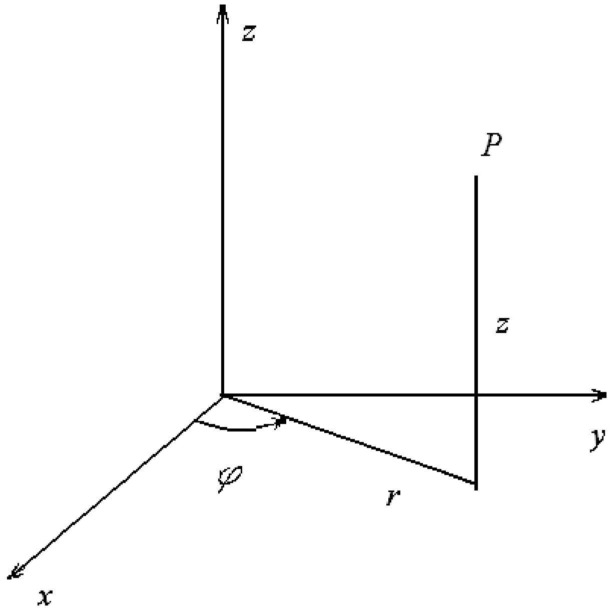


Рис. 10. Цилиндрическая система координат

102. Получить выражение оператора Лапласа в цилиндрической системе координат. Воспользоваться, например, [3].

2.2. Оператор Лапласа в сферической системе координат

В *сферических координатах* положение точки P в пространстве определяется тремя числами φ, r, θ, где r – расстояние точки от начала координат, так называемый радиус-вектор точки, θ – угол между радиус-вектором и осью Oz, φ – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость $0xy$ и осью и Ox, отсчитываемой от этой оси в положительном направлении (против часовой стрелки), т.е. $P(\varphi, r, \theta)$ (рис. 11). Для любой точки пространства имеем:

$0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Заметим, что

$x = r\sin\theta\cos\varphi,$

$y = r\sin\theta\sin\varphi,$

$z = r\cos\theta.$

Оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right].$$

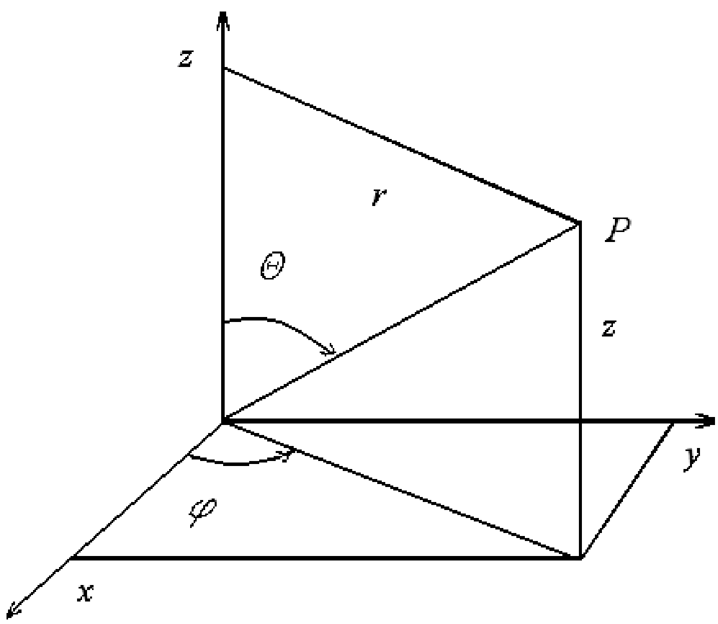


Рис. 11. Сферическая система координат

3. Задача Штурма-Лиувилля для различных областей

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля, сформулированную для различных областей.

3.1. Задача Штурма-Лиувилля, связанная с цилиндрическими функциями

Если T - круг, $0 \le r \le r_0$, то в полярных координатах (z=0) задача Штурма-Лиувилля (1-2) о собственных значениях принимает вид:

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \qquad (161)$$

$$v\big|_{r=r_0} = 0,\ |v(0)| < \infty\ . \qquad (162)$$

Требуется найти функцию $v(r,\varphi)$, отличную от тождественного нуля (нетривиальную функцию).
Функцию v ищем в виде $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставим $v = R \cdot \Phi$ в уравнение (161) и разделим переменные:

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \qquad (163)$$

где μ - константа.

103. Провести самостоятельно разделение переменных в уравнении (161) и получить уравнение (163).

Из (163) получаем два уравнения

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0; \qquad (164)$$

$$r(rR')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0,\ R(r_0) = 0\ ,\ |R(0)| < \infty\ . \qquad (165)$$

В силу однозначности решения $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической функцией, т.е.

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Кроме того, необходимо выполнение второго условия

$$\Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi).$$

Выполнение этих условий обеспечивает (вместе с уравнением (164)) равенство

$\mu = \nu^2 > 0$, где ν - целое число.

Полагая

$$x = \sqrt{\lambda}r, \qquad (166)$$

приходим к уравнению цилиндрических функций или уравнению Бесселя ν-го порядка :

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(x\frac{du}{dx}\Big)+\Big(1-\frac{\nu^2}{x^2}\Big)u=0 \text{ или } \Big(u''+\frac{1}{x}u'+\Big(1-\frac{\nu^2}{x^2}\Big)u=0\Big) \qquad (167)$$

Приведем доказательство в обратную сторону. Если в (167) сделать замену $x=\sqrt{\lambda}r$, и учесть, что $R(r)=u(\sqrt{\lambda}r)=u(x)$,
то получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}r}\frac{d}{d(\sqrt{\lambda}r)}\Big(\sqrt{\lambda}r\frac{dR(r)}{d(\sqrt{\lambda}r)}\Big)+\Big(1-\frac{\nu^2}{(\sqrt{\lambda}r)^2}\Big)R(r)=0$$

или

$$\frac{1}{\lambda r}(rR')'+\Big(1-\frac{\nu^2}{\lambda r^2}\Big)R=0.$$

Умножив это уравнение на λ и учитывая, что $\mu=\nu^2$, получим уравнение

$\frac{1}{r}(rR')'+\Big(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\Big)R=0$, которое совпадает с (165).

Если в уравнении (158) положить $\nu=0$, то получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(x\frac{du}{dx}\Big)+u=0 \quad \Big(\text{или } u''+\frac{1}{x}u'+u=0\Big),$$

которое соответствует случаю решений задачи (159-160), обладающих осевой симметрией.

Решения уравнения (167) называют *цилиндрическими функциями*. К уравнению (167) приводят также задачи для уравнения Лапласа и волнового уравнения в случае, когда область T есть круговой цилиндр (см., например, [1,5,6]) .

Решение задачи (161), (162) в силу его громоздкости не приводим. Решение можно найти, например, в [6].

3.2. Задача Штурма-Лиувилля для области, заданной в сферической системе координат

Пусть T - шар, $0 \le r \le r_0$. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\Delta v+\lambda v=0,\ \ 0<r<r_0; \qquad (168)$$

$$v\Big|_{r=r_0} = 0\,. \qquad (169)$$

В сферических координатах

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v\,, \qquad (170)$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \qquad (171)$$

Следовательно, уравнение (168) принимает вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v + \lambda v = 0. \qquad (172)$$

Положим $v = R(r)\cdot w(\theta,\varphi)$ и проведем разделение переменных

$$\frac{(r^2R')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}w}{w} = \mu\,,$$

откуда

$$\Delta_{\theta,\varphi}w + \mu w = 0; \qquad (173)$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2R')' + (\lambda - \frac{\mu}{r^2})R = 0,\ R(r_0) = 0\,,\ \ |R(0)| < \infty\,. \qquad (174)$$

104. Провести самостоятельно разделение переменных в уравнении (172).

Подстановка $x = \sqrt{\lambda}r$, $R = u/\sqrt{x}$ приводит (174) к уравнению Бесселя (проверить самостоятельно):

$$u'' + \frac{1}{x}u' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0, \quad \nu^2 = \mu.$$

Для функции $w(\theta,\varphi)$, определенной на сфере, мы получили уравнение (173), которое при $\mu = \nu(\nu+1)$ имеет ограниченное решение (сферические функции) [6].

Таким образом, при разделении переменных для оператора Лапласа в сферической системе координат мы приходим к сферическим функциям. В частном случае, когда $w = w(\theta)$ не зависит от φ, уравнение (173) принимает вид

$$\frac{d}{ds}((1-s^2)\frac{dw}{ds}) + \mu w = 0, \qquad (175)$$

где $s = \cos\theta,\ -1 \le s \le 1.$

Это уравнение Лежандра, имеющее при $\mu = \nu(\nu+1)$ ограниченное решение (полиномы Лежандра). Сферические функции выражаются через полиномы Лежандра и тригонометрические функции [6].

4. Гамма-функция

Эйлеров интеграл второго рода. Это название было присвоено интегралу

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad (176)$$

который сходится при любом $x > 0$ и определяет функцию Г - *гамма-функцию*. Переменному x можно также придавать комплексное значение: $x = x_0 + ix_1$, $x_0 > 0$.

Основные свойства гамма-функции.

1. Функция $\Gamma(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\Gamma'(x)$ для $x>0$.
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. (177)

105. Доказать самостоятельно формулу (177) (из (176), интегрированием по частям).

3. $\Gamma(n+1) = n!$ (если n – целое положительное число); (178)

$$\Gamma(1) = 1! \qquad (179)$$

106. Проверить непосредственным вычислением формулу (178).

Пример 1. Вычислить $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$.

Р е ш е н и е.

$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1! = 1$

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2!$

4. Имеет место соотношение

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1). \qquad (180)$$

5. $\Gamma(x)$ не имеет корней.

Пример 2. Вычислить $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Если в формуле (180) положить $z = \frac{1}{2}$, то $(\Gamma(1/2))^2 = \pi / \sin(\pi / 2) = \pi$, т.е.

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

6. Функциональное соотношение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ позволяет определить гамма-функцию для отрицательных значений *x*. Отметим, что

$$\Gamma(0) = \left.\frac{\Gamma(x+1)}{x}\right|_{x \to +0} = \infty$$

и

$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \ldots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = \infty$ для целых *n*. В точках $x = 0$, -1, -2, -3, … функция не определена.

График функции $\Gamma(x)$ изображен на рис. 12 .

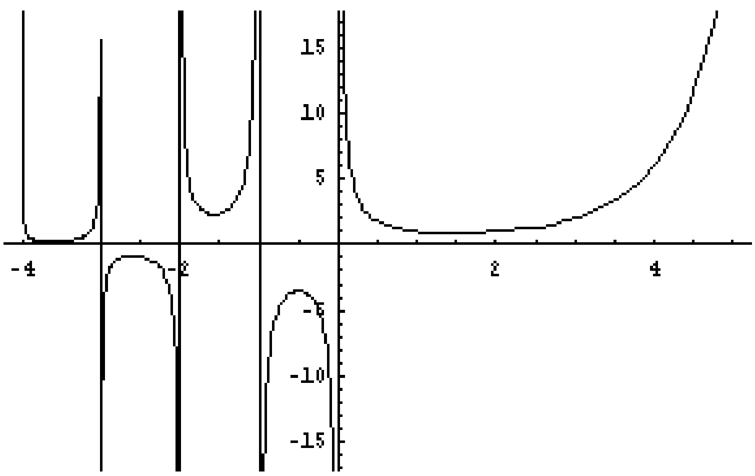


Рис. 12. График гамма-функции вещественной переменной

Гамма-функция - одна из важнейших трансцендентных функций, знание ее свойств необходимо для изучения многих других специальных функций, например, цилиндрических.

5. Цилиндрические функции

Многие задачи приводят к необходимости решать уравнения вида

$$u'' + \frac{1}{x}u' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0 \qquad (181)$$

или

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0. \qquad (182)$$

К такому уравнению мы придем, например, при решении задач методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами (задача о колебании круглой мембраны, об остывании круглого цилиндра и др.)

Решения уравнения (181) (или (182)), не равные тождественно нулю, называются, как указано выше, цилиндрическими функциями. Формальное решение уравнения (181) получают в виде обобщенного степенного ряда

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}. \qquad (183)$$

Этот ряд в его области сходимости является фактическим (частным) решением уравнения (181). Эту функцию называют *функцией Бесселя первого рода порядка* ν.

Если ν - есть целое число $(\nu = n)$, то существует соотношение:

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x).$$

Функция Бесселя порядка ν в этом случае равна сумме следующего ряда:

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\nu!} - \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2}}{1!(\nu+1)!} + \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+4}}{2!(\nu+2)!} - \ldots + (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2k}}{k!(\nu+k)!} + \ldots \qquad (184)$$

107. Проверить формулу (184).

Выпишем в качестве примера ряды для функций Бесселя 1-го рода нулевого (n=0) и первого (n=1) порядков:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots; \qquad (185)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots.$$

Далее

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x),$$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x).$$

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ наиболее часто встречаются в приложениях. На рис. 13 приведены их графики.

Функция $J_0(x)$ равна единице при $x = 0$. Это единственная функция Бесселя, имеющая при $x = 0$ конечное значение, не равное нулю. Для $\nu > 0$ все функции $J_\nu(x)$ равны нулю при $x = 0$. Функция Бесселя $J_0(x)$ имеет бесчисленное множество корней $x = \mu_n$, а именно:

$\mu_1 = 2{,}4048$, $\mu_2 = 5{,}5201$, $\mu_3 = 8{,}6537$ и т.д.

Следует отметить, что при достаточно большом n разность μ_{n+1} - μ_n близка к π.

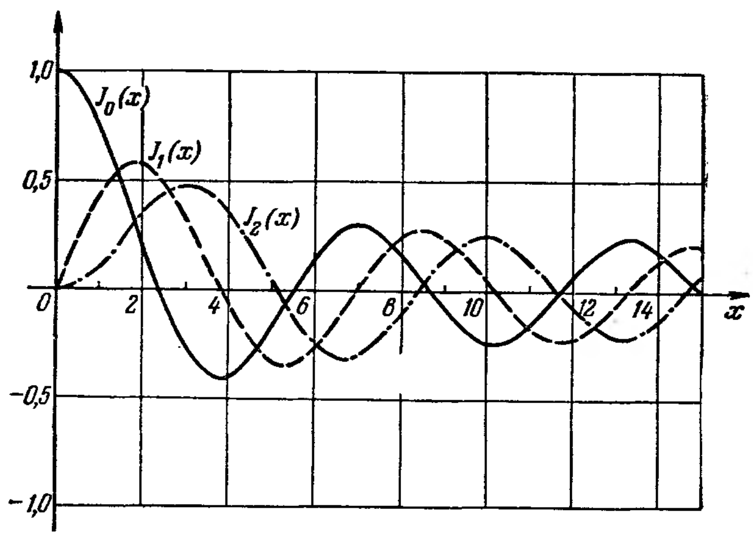


Рис. 13. Графики функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$

В задаче Штурма-Лиувилля о собственных функциях и собственных значениях уравнения

$$u'' + \frac{1}{x}u' + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0 \qquad (186)$$

при краевых условиях

$$u(0) = 0; \qquad u(l) = 0 \qquad (187)$$

собственные числа равны

$$\lambda_k = \frac{\mu_k^2}{l^2}, 1, 2, \ldots, \qquad (188)$$

а все собственные функции

$$u_1(x) = J_\nu(\frac{\mu_1 x}{l});$$

$$u_2(x) = J_\nu(\frac{\mu_2 x}{l});$$

…

$$u_k(x) = J_\nu(\frac{\mu_k x}{l}); \ \ldots$$

ортогональны друг другу с весом $\rho(x) = x$ на интервале $(0;l)$, т.е.

$$\int_0^l J_\nu(\frac{\mu_k x}{l}) J_\nu(\frac{\mu_i x}{l}) x dx = 0 \text{ при } k \neq i \qquad (189)$$

и

$$\int_0^l \left[J_\nu(\frac{\mu_k x}{l}) \right]^2 x dx = \frac{l^2}{2} [J'_\nu(\mu_k)]^2 \text{ при } k = i, \qquad (190)$$

где k – любое целое положительное число, μ_k – k-й положительный корень функции $J_\nu(x)$. (Вспомним, что положили $r = \sqrt{\lambda} x = \frac{\mu_k}{l} x$).

Если в (186) $\nu = 0$, получаем уравнение Бесселя нулевого порядка:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \lambda u = 0\,, \tag{191}$$

и решениями его будут функции Бесселя нулевого порядка $J_0(x)$:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2 6^2} + \ldots \tag{192}$$

108. Проверить формулу (192).

Пример 4. Решить задачу об остывании однородного кругового стержня радиуса *R*, на поверхности которого все время поддерживается нулевая температура. Начальная температура внутренних точек стержня задана и равна $\varphi(r)$.

109. Попробуйте выполнить самостоятельно математическую постановку задачи в примере 4.

Математическая постановка задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad t > 0, \quad 0 < r < R; \tag{193}$$

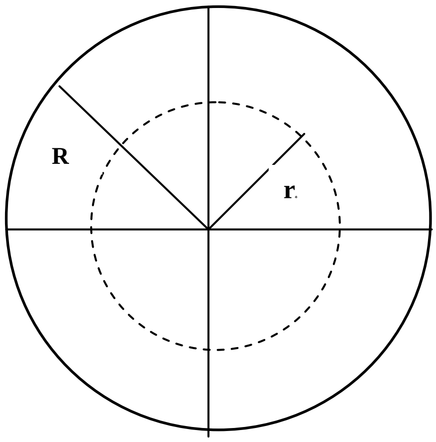
$$u(r, 0) = \varphi(r); \tag{194}$$

$$u(R,\ t) = 0; \tag{195}$$

$$|u(0,t)| < \infty\,. \tag{196}$$

Найти $u(r,t)$ $t > 0,\ 0 \le r \le R.$

Таким образом, требуется найти решение $u(r,t)$ уравнения (193), удовлетворяющее начальному условию (194) и граничным условиям (195-196).



Р е ш е н и е.
Применим метод Фурье при решении этой задачи. Частное решение будем искать в виде :

$$u(r,t)=\Phi(r)\cdot\Psi(t), \tag{197}$$

Тогда получим

$$\Phi(r)\cdot\Psi'(t)=a^2\Psi(t)\left[\Phi''(r)+\frac{1}{r}\Phi'(r)\right].$$

Разделяя переменные:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)}=\frac{\Phi''(r)+\frac{1}{r}\Phi'(r)}{\Phi(r)},$$

приравнивая каждую часть полученного равенства постоянной - λ ($\lambda>0$, пояснить почему?), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Psi'(t)+\lambda a^2\Psi(t)=0 \tag{198}$$

и

$$\Phi''+\frac{1}{r}\Phi'+\lambda\Phi=0. \tag{199}$$

Уравнение (198) имеет общее решение:

$$\Psi(t)=\tilde{N}e^{-\lambda a^2 t},\ \text{где}\ \lambda>0. \tag{200}$$

Для решения $\Phi(t)$ уравнения (199) из граничных условий (195-196) получаем:

$$\Phi(R)=0; \tag{201}$$

$$\left|\Phi(0)\right|<\propto. \tag{202}$$

Уравнение (199) сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка.

Действительно, в уравнении (199)

$$\Phi''(r)+\frac{1}{r}\Phi'(r)+\lambda\Phi(r)=0$$

сделаем замену $r=\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$. Для этого выразим производные, входящие в уравнение:

$$\frac{d^2\Phi(r)}{dr^2}=\frac{d^2\Phi(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})}{d^2(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})}=\frac{\lambda d^2u(x)}{dx^2}=\lambda u''(x);$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr}=\frac{d\Phi(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})}{d(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})}=\frac{\sqrt{\lambda}du(x)}{dx}=\sqrt{\lambda}u'(x).$$

Подставим найденные выражения для производных в уравнение:

$$\lambda u''(x)+\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\sqrt{\lambda}u'\{x)+\lambda u(x)=0.$$

Разделим на λ

$$u''(x)+\frac{1}{x}u'(x)+u(x)=0.$$

Получили уравнение Бесселя нулевого порядка (см. ур. (167), $\nu=0$)

Тогда общий интеграл (общее решение) уравнения (199) можно записать в виде:

$$\Phi(r)=AJ_0(\sqrt{\lambda}r)+BY_0(\sqrt{\lambda}r). \qquad (103)$$

Здесь $Y_0(\sqrt{\lambda}r)$ - линейно независимое с $J_0(\sqrt{\lambda}r)$ частное решение уравнения для определения $\Phi(r)$.

Заметим, что

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}u_2(x)+\frac{2}{\pi}J_0(x)\cdot(C-ln2),$$

где $C\approx 0{,}5772$ - постоянная Эйлера, $Y_0(x)$ - *функция Бесселя второго рода нулевого порядка* (см. рис.14);

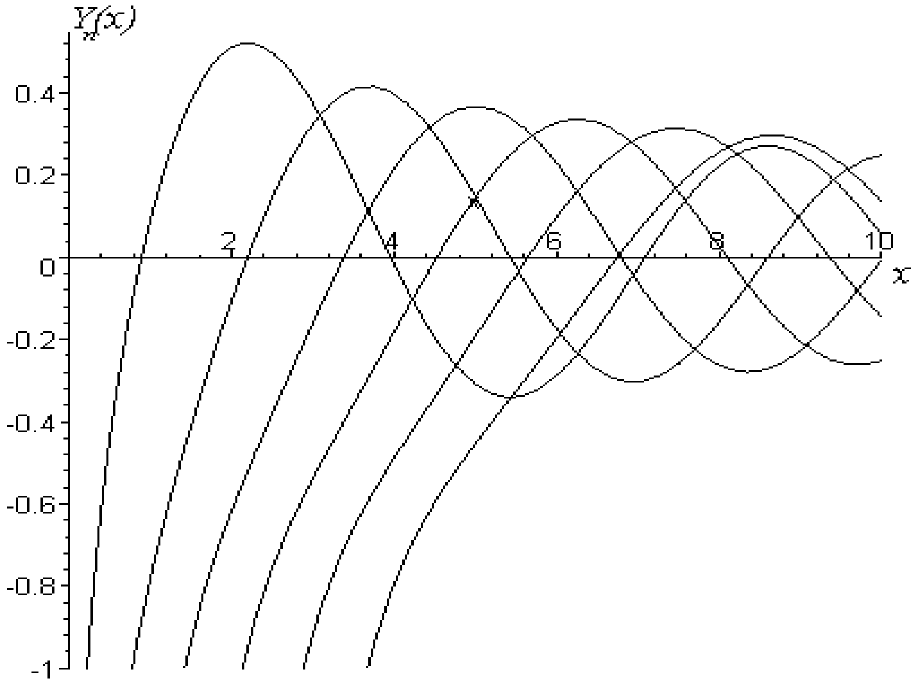


Рис. 14. Функция Бесселя второго рода

$u_2(x)$ определяется по формуле

$$u_2(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots \quad .$$

Частные решения $u_1(x) = J_0(x)$ и $u_2(x)$ или $Y_0(x)$ линейно независимы, т.к. $\dfrac{Y_0(x)}{J_0(x)} \neq const$. Общий интеграл уравнения Бесселя (167) при $\nu = 0$ равен

$$u(x) = AJ_0(x) + BY_0(x),$$

где A и B - произвольные постоянные. (Сравните с решением (203), $x = \sqrt{\lambda} r$).
Т. к. температура на оси цилиндра ($r = 0$) должна быть конечной (см. (196)) , то решение (203) не может содержать функцию Бесселя второго рода, которая при $r - 0$ стремится к минус бесконечности.

Следовательно, постоянная B должна быть равной нулю (B=0). Значит

$$\Phi(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Из краевого условия (195) для $r = R$ находим уравнение для определения собственных значений:

$$\Phi(r) = 0.$$

Значит

$$AJ_0(\sqrt{\lambda}R) = 0.$$

$A \neq 0$ т.к. $\Phi(r) \neq 0$ для всех r. Тогда

$$J_0(\sqrt{\lambda}R) = 0. \qquad (204)$$

Уравнение (204) называется *характеристическим уравнением*; из него определяются *собственные числа* λ_n. Функция $J_0(\sqrt{\lambda}R)$ имеет бесконечное множество корней (простых, вещественных)

$$\sqrt{\lambda_n}R = \mu_n,$$

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots .$$

Таким образом, определяем собственные значения

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R^2} \qquad (205)$$

и собственные функции задачи $J_0(\frac{\mu_n}{R}r)$.

Следовательно, будем иметь бесчисленное множество частных решений и любое из них:

$$u_n = C_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r)e^{-a^2\lambda_n t}$$

или

$$u_n = C_n J_0(\frac{\mu_n}{R}r)e^{-a^2\frac{\mu_n^2}{R^2}t} \qquad (206)$$

будет не только удовлетворять уравнению (193), но граничному условию (195). Решение исходной задачи ищем в форме ряда

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\frac{\mu_n^2}{R^2}t} J_0(\frac{\mu_n}{R}r). \qquad (207)$$

Коэффициенты ряда C_n находим, используя начальные условия (194) и свойство ортогональности функций Бесселя (189-190).

$$u(r,0) = \varphi(r) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\frac{\mu_n}{R} r). \tag{208}$$

Умножаем тождество (208) на $rJ_0(\frac{\mu_k}{R} r)$, где $\frac{\mu_k}{R} r$ - корни функции $J_0(x)$, и интегрируем по r в пределах от 0 до R:

$$\int_0^R r\varphi(r) J_0(\frac{\mu_k}{R} r)dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} C_n r J_0(\frac{\mu_n}{R} r) J_0(\frac{\mu_k}{R} r)dr =$$

$$= C_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^R r J_0(\frac{\mu_n}{R} r) J_0(\frac{\mu_k}{R} r)dr. \tag{209}$$

Все интегралы в правой части равенства равны нулю за исключением одного, когда $n = k$ (в силу ортогональности собственных функций). Для случая $n \neq k$

$$\int_0^R r J_0(\frac{\mu_k}{R} r) J_0(\frac{\mu_n}{R} r) r dr = 0. \tag{210}$$

Для случая $n = k$

$$\int_0^R \left[r J_0(\frac{\mu_k}{R} r) \right]^2 dr = \frac{R^2}{2} [J_0'(\mu_k)]^2. \tag{211}$$

Таким образом,

$$\int_0^R r\varphi(r) J_0(\frac{\mu_k}{R} r)dr = C_k \frac{R^2}{2} [J_0'(\mu_k)]^2.$$

Следовательно,

$$C_k = \frac{2}{R^2 [J_0'(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r\varphi(r) J_0(\frac{\mu_k}{R} r)dr. \tag{212}$$

Тогда решение задачи (193-196) :

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n\frac{r}{R})}{[J_0'(\mu_n)]^2}\frac{2}{R^2}\int_0^R r\varphi(r)J_0(\frac{\mu_n}{R}r)dr\cdot exp(\frac{-a^2\mu_n^2}{R^2}t). \qquad (213)$$

<u>Замечание.</u> Для приближенного решения задачи достаточно ограничиться несколькими первыми членами ряда, например,

$$u(r,t)\approx C_1\, exp(\frac{-a^2\mu_1^2}{R^2}t)\; J_0(\mu_1\frac{r}{R})+C_2\, exp(\frac{-a^2\mu_2^2}{R^2}t)\; J_0(\mu_2\frac{r}{R}),$$

μ_1 и μ_2 находим в таблице нулей функции $J_0(x)$ [6]: $\mu_1=2{,}4048$ $\mu_2=5{,}5201$.

110. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиуса *l*, если в начальный момент температура всех его внутренних точек равна A^0, а на его поверхности поддерживается постоянная температура 0^0. Найти первый член в разложении решения в ряд.

Ответ: $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n\frac{r}{l})}{[J_0'(\mu_n)]^2}\frac{2A}{l^2}\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_n}{l}r)dr\cdot exp(\frac{-a^2\mu_n^2}{l^2}t),$

где μ_n- положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$;
первый член ряда

$$u(r,t)=\frac{J_0(\mu_1\frac{r}{l})}{\left[J_0'(\mu_1)^2\right]}\frac{2A}{l^2}\int_0^l rJ_0(\frac{\mu_1}{l}r)dr\cdot exp(\frac{-a^2\mu_1^2}{l^2}t).$$

6. Сферические функции

6.1. Где встречаются сферические функции

Сферические функции возникают при решении уравнения Лапласа

$$\Delta u(x)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3{}^2}=0, \quad x=(x_1,x_2,x_3)$$

в сферической системе координат.
В сферической системе координат (r,θ,φ) уравнение Лапласа для функции

$\tilde{u}(r,\theta,\varphi)=u(x_1,x_2,x_3)$ принимает вид:

$$\Delta\tilde{u}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (214)$$

Если решение $\tilde{u}$ искать в виде [1]:

$$\tilde{u}=r^nY(\theta,\varphi), \qquad (215)$$

то функция $Y(\theta,\varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y=0.$$

Действительно, подставим (215) в (214). Сначала выразим производные

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}=nr^{n-1}Y(\theta,\varphi);$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}=r^n\frac{\partial Y}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}=r^n\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}.$$

Подставим выражения для производных в (214)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2nr^{n-1}Y)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{sin\theta}r^n\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2}\frac{1}{sin^2\theta}r^n\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}=0.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial r}(nr^{n+1}Y)=n(n+1)r^nY.$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2}n(n+1)r^nY+\frac{1}{r^2}\frac{1}{sin\theta}r^n\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2}\frac{1}{sin^2\theta}r^n\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}=0.$$

Вынесем $\frac{r^n}{r^2}$ за скобку:

$$\frac{r^n}{r^2}\left(n(n+1)Y+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right)=0.$$

Заметим, что $\frac{r^n}{r^2}\neq 0$. Следовательно, второй множитель в левой части этого равенства равен нулю. Таким образом, функция $Y(\theta,\varphi)$ действительно должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y=0. \qquad (216)$$

Ниже мы увидим, что решения уравнения (216), бесконечно дифференцируемые функции, существуют при целых значениях $n=0,1,...$. Такие решения $Y_n(\theta,\varphi)$ являются *сферическими функциями*. Действительно, делая замену $Y(\theta,\varphi)=y(\cos\theta)\cdot\Phi(\varphi)$ и $x=\cos\theta$, приходим к уравнению для сферических функций (19) относительно функции $y(x)$.

6.2. Полиномы Лежандра

Уравнением Лежандра называется уравнение вида

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0, \qquad (217)$$

где λ - некоторый параметр.

111. Проверьте, что, проведя дифференцирование в первом слагаемом уравнения (217), получим уравнение (161) относительно функции $y(x)$.

При $\lambda=n(n+1)$ и $-1<x<1$ ограниченными решениями уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0$$

являются полиномы

$$y=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ (n=0,1,2,...), \qquad (218)$$

называемые *полиномами Лежандра*. Формула (218) называется *формулой Родрига*.

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$ следующей задачи [6]:
найти такие значения λ, для которых на отрезке $-1 \le x \le 1$ *существуют нетривиальные решения уравнения Лежандра*

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0, \quad -1< x<1, \tag{219}$$

ограниченные при $x = \pm 1$ *и удовлетворяющие условию нормировки* $y(1)=1$.

Более полная теория устанавливает, других собственных функций и собственных значений нет [5].

Вычисляя по формуле (218), получим:

$$P_0(x) = 1; \qquad P_1(x) = x; \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \quad \text{и т.д.}$$

Графики полиномов Лежандра первых шести порядков изображены на рис. 15.

6.3. Свойства полиномов Лежандра

1. Полиномы Лежандра различных порядков ортогональны в интервале (-1;1):

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \qquad (m \ne n).$$

2. Квадрат нормы полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

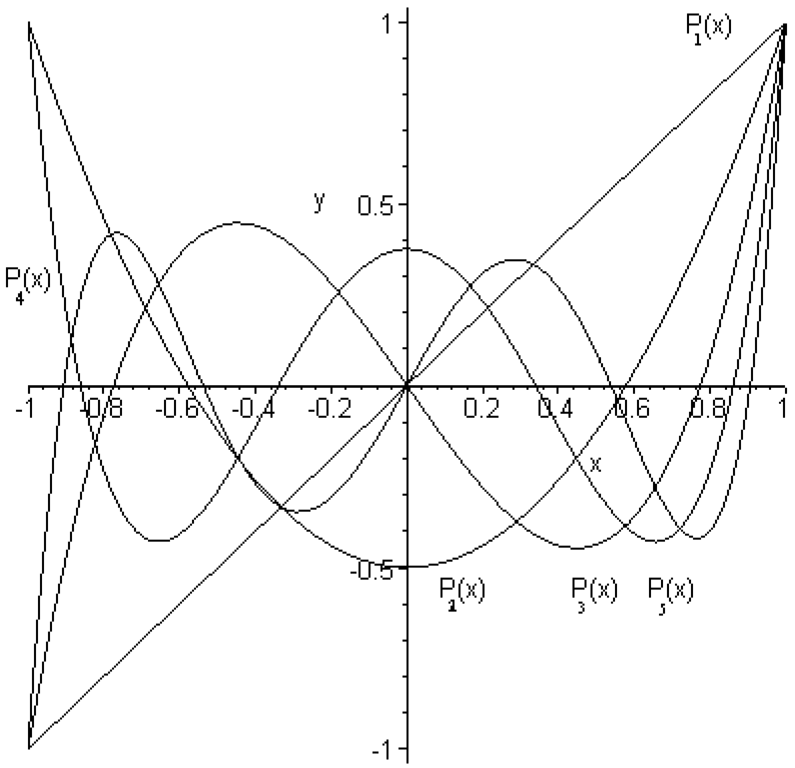


Рис. 15. Полиномы Лежандра

Таким образом, справедлива формула

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases} \qquad (220)$$

3. Система ортогональных полиномов Лежандра (218) в интервале (-1;1) является замкнутой системой.

Действительно, в систему (218) входят многочлены всех степеней. Поэтому любой многочлен $Q_n(x)$ степени n можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра порядков от 0 до n:

$$Q_n(x)=C_k P_k(x).$$

С другой стороны, любую непрерывную функцию на отрезке [-1; 1] можно равномерно приблизить многочленом $Q_n(x)$ со сколь угодно большой точностью. Следовательно, эту функцию можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра порядков от 0 до n с любой степенью точности

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} C_k P_k .$$

Пусть произвольная функция $f(x)$ представима в виде ряда по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \tag{221}$$

Коэффициенты a_n этого разложения могут быть формально определены на основании свойства ортогональности полиномов Лежандра. Действительно, умножая ряд (221) на $P_m(x)$ и интегрируя по отрезку [-1; 1], получим, в силу (220), что

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx . \tag{222}$$

4. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ - полином Лежандра есть функция той же четности, что и n.

5. $P_{2n-1}(0) = 0$; $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$.

6. $P_n(1) = 1$; $P_n(-1) = (-1)^n$.

7. Все корни полинома Лежандра $P_n(x)$ вещественны, различны и лежат в интервале (-1; 1) [7].

6.4. Производящая функция

О п р е д е л е н и е. Функция $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ является *производящей функцией* для полиномов Лежандра, т.е. эти полиномы являются коэффициентами ее разложения в ряд по положительным степеням z:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \tag{223}$$

для любых значений x и для значений z достаточно малых: $|z| < \left| x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right|$.

6.5. Функция Лежандра второго рода

Для построения общего решения уравнения (221) необходимо найти еще одно его решение, линейно независимое от полиномов Лежандра $P_n(x)$. Оно имеет следующий вид:

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x), \qquad (224)$$

где $N=\frac{1}{2}n$ при n четном и $N=\frac{1}{2}(n+1)$ при n нечетном. В частности, при $n=0,1,2,3$ имеем

$$Q_0=\frac{1}{2}ln\frac{x+1}{x-1},$$

$$Q_1=\frac{x}{2}ln\frac{x+1}{x-1}-1,$$

$$Q_2=\frac{1}{4}(3x^2-1)ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x,$$

$$Q_3=\frac{1}{4}(5x^3-3x)ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}.$$

Т.к. функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ линейно независимые, то общее решение уравнения (218) может быть записано в виде

$$y=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x), \qquad (225)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

6.6. Присоединенные полиномы Лежандра

Вернемся к уравнению (219). Положив $\lambda=n(n+1)$, имеем

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y=0. \qquad (226)$$

Вспомним, что ограниченные в области $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ решения уравнения (216), такие что $Y_n(\theta,\varphi+2\pi)\equiv Y_n(\theta,\varphi)$, называются *сферическими функциями.* Следовательно, сферические функции $Y_n(\theta,\varphi)$ являются решениями уравнения

(226), имеющими непрерывные производные до второго порядка включительно. Само уравнение (226) называют *уравнением сферических функций*.

Решение уравнения (226) также можно искать по методу разделения переменных(см., например, [7]). Подстановкой

$$Y_n(\theta,\varphi)=P(\theta)\cdot Q(\varphi) \tag{227}$$

уравнение (226) приводится к системе уравнений

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2}+m^2Q=0\,; \tag{228}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dP}{d\theta})+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P=0\,, \tag{229}$$

где m – произвольное число.

112. Решите уравнение (228). Проверьте, что при целых m получаются непрерывные на окружности решения уравнения (228) .

Решение. Решим уравнение (228)

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2}+m^2Q=0\,.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2+m^2=0\,;$$

т.е.

$$\lambda=\pm mi\,.$$

Тогда

$$Q_1=\cos m\varphi\,;\quad Q_2=\sin m\varphi\,,\ (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{230}$$

Для каждого целого m имеем два линейно независимых решения:
$Q_{m1}=\cos m\varphi$; $Q_{m2}=\sin m\varphi$, (m=0, 1, 2, …).

113. Проверьте, что подстановка (227) в уравнение (226) позволяет получить уравнения (228), (229).

Далее рассмотрим уравнение (229). Введя переменную

$$\xi = \cos\theta \tag{231}$$

и обозначая $P_n^m(\xi)\Big|_{\xi=\cos\theta} = P_n^m(\cos\theta) = P(\theta)$,

получим для $P_n^m(\xi)$ уравнение *присоединенных функций*

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dP_n^m}{d\xi}) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]P_n^m = 0, \quad -1 < \xi < 1. \tag{232}$$

114. Выполните самостоятельно подстановку (231) в уравнении (229).

В частности, при $m = 0$ получим уравнение

$$\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2)\frac{dP_n}{d\xi} + n(n+1)P_n = 0, \tag{233}$$

являющееся уравнением полиномов Лежандра $P_n(\xi)$.

Произведем в уравнении (232) подстановку

$$P_n^m(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} y(\xi).$$

Функция $y(\xi)$ будет удовлетворять уравнению (без доказательства в силу его громоздкости):

$$(1-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2(m+1)\xi\frac{dy}{d\xi} + (n-m)(n+m+1)y = 0. \tag{234}$$

Чтобы найти его частные решения, продифференцируем уравнение полиномов Лежандра (233) m раз по переменной ξ. Применив формулу Лейбница, получим

$$(1-\xi^2)\frac{d^{m+2}P_n}{d\xi^{m+2}} - 2(m+1)\xi\frac{d^{m+1}P_n}{d\xi^{m+1}} + (n-m)(n+m+1)\frac{d^mP_n}{d\xi^m} = 0. \tag{235}$$

Сравнивая это уравнение с (234), видим, что функции

$$y = \frac{d^mP_n(\xi)}{d\xi^m}$$

являются частными решениями уравнения (234). Отсюда ясно, что функции

$$P_n^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\xi)}{d\xi^m} \tag{236}$$

будут частными решениями уравнения (232). Возвращаясь к переменной θ, получим искомые частные решения уравнения (229):

$$P_n^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_n(\cos\theta). \tag{237}$$

Т.к. полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$ представляют собой полиномы степени n от $\cos\theta$, функции $P_n^m(\cos\theta)$ также представляют полиномы, причем $P_n^m(\cos\theta)=0$ при целом положительном $m > n$. При четных m это полином от $\cos\theta$, при нечетных m - тригонометрический полином.

Функции $P_n^m(\cos\theta)$ получили название <u>*присоединенных полиномов Лежандра*</u>. Как и всякие полиномы, они непрерывны и дифференцируемы неограниченное число раз.
Заметим, что

$$P_n(\cos\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + a_2(\cos\theta)^2 + a_3(\cos\theta)^3 + ... + a_n(\cos\theta)^n;$$

при $n=2$, $m=1$

$$P_n^m(\cos\theta) = P_2^1(\cos\theta) = \sin\theta \frac{d}{d\cos\theta}(a_0 + a_1\cos\theta + a_2(\cos\theta)^2) =$$

$$= \sin\theta(a_1 + 2a_2\cos\theta).$$

Таким образом, для каждого n мы получили $(n+1)$ частных решений уравнения (229):

$$P_n(\cos\theta),\ P_n^1(\cos\theta),\ \ldots,\ P_n^n(\cos\theta),$$

соответствующих значениям m=0, 1, 2 ,…,n. Комбинируя эти решения с решениями (230) уравнения (228), получим (2n+1) ссферических функций:

$$P_n(\cos\theta),\ P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\ (m=1,2,3,.,n;\ n=0,1,2,\ \ldots\ ), \tag{238}$$

которые являются частными решениями уравнения (229). Эти (2n+1) сферических функций линейно независимы, т.к. линейно независимы множители $\cos m\varphi$,

$\sin m\varphi$ (m=1,2…,n). Функции $P_n(\cos\theta)$ получили название зональных, а функции $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ - тессеральных сферических функций.

Всего может быть (2n+1) линейно независимых сферических функций порядка n. Поэтому любую сферическую функцию можно представить в виде линейной комбинации найденных линейно независимых решений (238):

$$Y_n(\theta,\varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) P_{nk}(\cos\theta),$$

где a_0, a_k, b_k ($k = \overline{1,n}$) - постоянные.

6.7. Ортогональные сферические функции

Заметим, что функции

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ \ldots,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi$$

образуют в промежутке (0, 2π) ортогональную систему. Поэтому интеграл в пределах от 0 до 2π от произведения любой пары из них равен нулю.

Построенные в предыдущем параграфе сферические функции ортогональны на поверхности S любого шара с центром в начале координат, т.е. интеграл от произведения двух различных функций (238) на поверхности S равен нулю.

Пусть $Y_k(\theta,\varphi)$ и $Y_m(\theta,\varphi)$ ($k \neq m$) – две сферические функции разных порядков. Тогда справедливо

$$\iint_S Y_m(\theta,\varphi) Y_k(\theta,\varphi) dS = 0,\ (m \neq k) \qquad (239)$$

(интеграл по поверхности S).

Укажем без вывода [7]:

$$\begin{cases} \iint_S [P_n(\cos\theta)]^2 dS = \dfrac{4\pi R^2}{2n+1}; \\ \iint_S [P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi]^2 dS = \iint_S [P_n(\cos\theta)\sin n\varphi]^2 dS = \dfrac{2\pi R^2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, \end{cases} \qquad (240)$$

где R – радиус шаровой поверхности S.

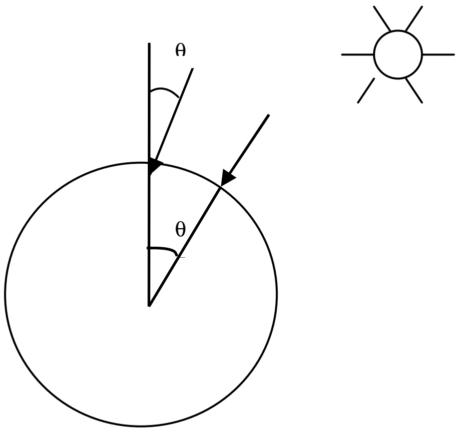
Укажем интегральные формы, содержащие произвольную сферическую функцию и полином Лежандра

$$\begin{cases} \iint\limits_S Y_n(\theta,\varphi)\,P_k(\cos\gamma)dS = 0,\ (n \neq k); \\ \iint\limits_S Y_n(\theta,\varphi)\,P_n(\cos\gamma)dS = \dfrac{4\pi R^2}{2n+1} Y_n(\theta_0,\varphi_0). \end{cases} \tag{241}$$

(S – шаровая поверхность с центром в начале координат, $x(R_0,\theta_0,\varphi_0)$ - точка внутри S, $\xi(R,\theta,\varphi)$ - точка на S, γ – переменный угол между радиусами-векторами точек x и ξ) .

6.8. Задача о стационарном распределении температуры в шаре

Предположим, что дан металлический шар с закопченной поверхностью, подвергающейся действию солнечных лучей в воздухе, температуру которого примем для простоты равной нулю. Требуется определить установившуюся температуру внутренних точек шара [7].



Известно, что искомая температура должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,\ (\frac{\partial u}{\partial t} = 0)$$

или

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Граничное условие на поверхности шара будет следующим

$$\frac{\partial u}{\partial R} = p[u - f(\theta)]\Big|_{R=R_0}\ , \tag{242}$$

где R_0 – радиус шара, $p = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ - отношение коэффициентов теплоотдачи и внутренней теплопроводности, $f(\theta)$ - температура поверхности шара, которая наблюдалась бы в том случае, если бы отсутствовало лучеиспускание с поверхности в окружающий воздух.

Если принять, что степень нагревания пропорциональна синусу угла падения лучей на поверхность, то очевидно, что функция

$$f(\theta)=\begin{cases} A\cos\theta \ \text{ïðè} \quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \qquad \text{ïðè} \quad \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi, \end{cases} \tag{243}$$

где A - постоянная величина, зависящая от интенсивности солнечной энергии. Будем разыскивать решение поставленной задачи в форме бесконечного ряда

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{R}{R_0}\right)^k P_k(\cos\theta), \quad (R_0\ge R) \tag{244}$$

с неопределенными пока коэффициентами a_k.

Внося выражение (244) в соотношение (242) и разлагая функцию $f(\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(\cos\theta), \tag{245}$$

где, согласно формуле (222),

$$b_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{246}$$

получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{k}{R_0}+p\right)-pb_k\right]P_k(\cos\theta)=0, \tag{247}$$

которое удовлетворяется тождественно, если коэффициенты

$$a_k=\frac{pR_0}{k+pR_0}b_k.$$

115. Доказать равенство (247) самостоятельно.

Теперь остается вычислить числа b_k, что легко сделать, если воспользоваться формулами (243), (246). Действительно, из этих формул вытекает, что

$$b_k = \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi/2} A\cos\theta P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2k+1}{2} A\int_0^1 P_k(x)xdx$$

(сделана замена $x = cos\,\theta$), откуда непосредственным вычислением получим:

$$b_0 = \frac{A}{2}\int_0^1 1\cdot xdx = \frac{A}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{A}{4};$$

$$b_1 = \frac{3A}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{3A}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{A}{2}.$$

(Вспомним, что $P_0 = 1;\ P_1(x) = x$)

С другой стороны, для полиномов Лежандра справедливо [7]:

$$\int_0^1 xP_k(x)dx = \begin{cases} 0 & при\ k = 2n+1\ (n > 0); \\ \dfrac{(-1)^n(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!} & при\ k = 2n\ (n > 0). \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$b_{2k+1} = 0, \quad (k > 0);$$

$$b_{2k} = (-1)^k A\frac{(2k-2)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k-1)!(k+1)!},\ (k > 0).$$

116. Проверить данное равенство самостоятельно.

Следовательно,

$$a_0 = \frac{A}{4};$$

$$a_1 = \frac{A}{2}\frac{pR_0}{pR_0+1};$$

$$a_{2k+1} = 0,\ (k > 0);$$

$$a_{2k} = (-1)^k A\frac{pR_0}{pR_0+2k}\frac{(2k-2)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k-1)!(k+1)!},\ \ (k > 0).$$

Внося найденные значения коэффициентов a_k в разложение (244), получим искомую температуру шара в виде следующего бесконечного ряда

$$u = pAR_0\left(\frac{1}{4pR_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{pR_0+1}\frac{R}{R_0}P_1(\cos\theta) + \frac{5}{16}\frac{1}{pR_0+2}(\frac{R}{R_0})^2 P_2(\cos\theta) + \dots\right),$$

где $R_0 \geq R$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов/ В.С. Владимиров, В.В. Жарков. М.: Физматлит, 2003. – 400 с.
2. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский. П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральной исчисление: учеб. пособие для втузов. В 2 т. Т.2. / Н.С. Пискунов.– Стереотип. изд. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 544с.
4. Васильев, А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильев, Н.А. Тихонов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 156 с.
5. Голосков, Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов. / Д.П. Голосков.– СПб.: Питер, 2004. – 538 с.
6. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н., Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 679 с.
7. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с.
8. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров [и др.]. – М.: Физматлит, 2004. – 288 с.
9. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.
10. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В.Бицадзе. – М: Наука, 1982. – 336 с.
11. Бицадзе, А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В.Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
12. Смирнов, М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М.М.Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 125 с.

13. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: учеб. пособие / Э.А. Вуколов [и др.] – М.: Наука, 1980. – 303 с.
14. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
15. Арсенин, В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1965. – 367 с.
16. Трикоми, Ф. Интегральные уравнения / Ф.Трикоми. – М.: ИЛ, 1960. – 300 с.
17. Мышкис, А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
18. Головина, Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л.И. Головина. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
19. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
20. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнения и задачах. Ч. II: учеб. пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1980. – 365 с.
21. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике: учебн. пособие / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1980. – 688 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Зуева Галина Альбертовна

Методы математической физики
Дифференциальные уравнения в частных проиводных.
Интегральные уравнения. Специальные функции

Учебное пособие

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 23.03.2012. Формат $60\times84\,{}^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Усл.печ.л. 6,74. Уч.-изд.л. 7,48. Тираж 150 экз. Заказ

Ивановский государственный
химико-технологический университет

Отпечатано на полиграфическом оборудовании
кафедры экономики и финансов ИГХТУ
153000, г. Иваново, пр. Ф. Энгельса. 7