

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ивановский государственный химико-технологический университет

А.Н.Фролов

**Элементы**  
**теории электромагнитного поля**

Учебное пособие

Иваново 2013

УДК 621.3.01

Фролов А.Н. Элементы теории электромагнитного поля: учеб. пособие / А. Н. Фролов; Иван.гос.хим.-технол.ун-т.- Иваново, 2013.-48 с.

Учебное пособие посвящено основным вопросам теории электромагнитного поля и соответствует учебной программе курса «Теоретические основы электротехники».

Структурно пособие состоит из трех частей. Первая часть посвящена уравнениям электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной форме. Вторая часть работы затрагивает вопросы анализа электростатических полей и магнитных полей постоянных токов. Третья часть касается вопросов теории переменного электромагнитного поля в диэлектриках и проводящих средах.

Рекомендуется для студентов, изучающих теоретические основы электротехники.

Ил. 3. Библ.: 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета

Рецензенты:

кафедра электроники и микропроцессорных систем Ивановского государственного энергетического университета;  
кандидат технических наук А.И. Терехов (Ивановский государственный энергетический университет)

© Фролов А.Н., 2013

© ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет», 2013

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 1. Уравнения электромагнитного поля в интегральной форме

Электрическое и магнитное поля являются двумя сторонами одного вида материи называемого *электромагнитным полем* (ЭМП). ЭМП отличается непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны) и обнаруживает дискретность структуры (фотоны). Оно характеризуется способностью распространяться в вакууме со скоростью близкой к скорости света и оказывает силовое воздействие на заряженные частицы.

Электрическое поле – одна из двух сторон ЭМП, обусловленная электрическими зарядами и изменением во времени магнитного поля. Оно оказывает силовое воздействие на заряженные частицы или тела и выявляется по силовому воздействию на неподвижные относительно него заряды.

Магнитное поле – другая сторона ЭМП, обусловленная электрическими зарядами движущихся частиц и тел и изменением во времени электрического поля. Выявляется по силовому воздействию на движущиеся относительно него заряды.

Электрическим током называются явления движения заряженных частиц и изменение электрического поля во времени. Первый вид тока – ток проводимости. Второй – ток смещения.

Относительность деления на электрическое и магнитное поля определяется тем, в каких условиях, с какой целью и какими средствами исследуется поле.

Электромагнитное поле характеризуется объемной плотностью энергии и обладает объемной плотностью массы.

Если  $B = 1$  Тл,  $E = 10^8$  В/м, то:

$W/V = 4,42 \cdot 10^5$  Дж/м<sup>3</sup> - объемная плотность энергии;

$m/V = 4,91 \cdot 10^{-12}$  кг/м<sup>3</sup> - объемная плотность массы.

Изменение электрического поля во времени приводит к возникновению в том же пространстве связанного с ним магнитного поля и наоборот.

Связь между электрическим током и напряженностью магнитного поля устанавливается *законом полного тока*

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = i.$$

Здесь в правой части содержатся все виды токов. В таком виде уравнение дано Максвеллом. Оно устанавливает одну из важнейших связей между электрической и магнитной сторонами явления, а именно – магнитное поле возникает при движении заряженных частиц и при изменении электрического поля.

Вторая связь определяет электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля. Она открыта Фарадеем и сформулирована в виде закона электромагнитной индукции. Максвелл обобщил на случай любой среды. Согласно Максвеллу эдс, возникающая в контуре равна минус скорости изменения магнитного потока, пронизывающего данный контур. Контур может быть мысленным.

Возникновении эдс в таком контуре есть результат появления индуктированного электрического поля.

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Здесь эдс в контуре равна линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого контура.

Связь электрических частиц с электрическим полем их окружающим определяется постулатом Максвелла

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = q.$$

Поток вектора электрического смещения (электрической индукции) сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному заряду, заключенному в объеме, ограниченном данной поверхностью.

Для магнитной индукции имеем

$$\oint_s \bar{B} d\bar{s} = 0.$$

Приведенные выше четыре уравнения являются основными уравнениями ЭМП в интегральной форме.

## 2. Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме

### 2.1. Закон полного тока в дифференциальной форме

Интеграл, стоящий в левой части закона полного тока, может рассматриваться как мера электрического тока, проходящего сквозь поверхность S, ограниченную интегралом

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = i.$$

Чтобы судить о распределении тока по поверхности S необходимо представить это уравнение в дифференциальной форме. Если взять малый контур, ограничивающий поверхность  $\Delta S$ , то можно записать

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \Delta i.$$

Здесь  $\Delta i$  зависит от размера поверхности. Чтобы получить определенные величины, разделим на  $\Delta S$  и возьмем предел

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \bar{H} d\bar{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S}.$$

Располагая элемент поверхности так, чтобы положительная нормаль к нему совпадала с направлением вектора плотности тока получаем

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \delta .$$

Кроме того:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} d\bar{l}}{\Delta S} = \text{rot } \bar{H} .$$

В правой части равенства вихрь или ротор вектора напряженности магнитного поля – это вектор.

Таким образом, имеем

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta} .$$

Это первое уравнение Максвелла. В декартовых координатах уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \delta_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \delta_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \delta_z. \end{aligned}$$

## 2.2. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме

Напишем в дифференциальной форме уравнение

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = - \frac{d\Phi}{dt} .$$

При этом, рассматривая поле в неподвижных средах, заменим полную производную по времени частной производной. Поступая аналогично предыдущему, получим

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} d\bar{l}}{\Delta S} = \text{rot } \bar{E} .$$

В правой части исходного выражения имеем

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \bar{B} .$$

В итоге получаем

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Это второе уравнение Максвелла. В декартовых координатах оно имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

### 2.3. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме

Теорема Гаусса в применении к электрическому полю гласит: поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению электрического заряда, заключенного в объеме пространства, ограниченного этой поверхностью, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon}.$$

Для того, чтобы судить о распределении электрического заряда внутри объема. Нужно применить теорему Гаусса в дифференциальной форме. Переходя к малому объему  $\Delta V$  и заключенному в нем малому заряду  $\Delta q$  и полагая  $\Delta V \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} d\bar{s}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\varepsilon \Delta V}.$$

Выражение слева называется расхождением или дивергенцией вектора  $E$  и обозначается  $\operatorname{div} \bar{E}$ . Справа получается объемная плотность заряда  $\rho$ , деленная на  $\varepsilon$ . В результате получается выражение теоремы Гаусса в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Поле в области, где  $\operatorname{div} \bar{E} = 0$  называют соленоидальным. В декартовых координатах для вектора  $A$  можно получить

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Расхождение вектора иногда обозначают в виде скалярного произведения двух векторов  $\bar{\nabla} \bar{A}$ . Здесь  $\bar{\nabla}$  - (набла) символический дифференциальный векторный оператор Гамильтона.

$$\bar{\nabla} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

$i, j, k$  – единичные векторы по осям  $x, y, z$ .

Заметим попутно, что выражение  $\text{rot } \bar{A}$  может быть записано в виде векторного произведения  $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = \text{rot } \bar{A}$ .

Таким образом, теорему Гаусса можно записать

$$\bar{\nabla} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В декартовой системе координат имеем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В случае неоднородной и анизотропной среды теорема Гаусса неприменима. При этом используют постулат Максвелла для вектора электрического смещения (индукции)

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q.$$

В дифференциальной форме выражение имеет вид

$$\text{div } \bar{D} = \rho \text{ или } \bar{\nabla} \bar{D} = \rho.$$

Для декартовых координат можно записать

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

#### **2.4. Дифференциальная форма принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока**

Линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца – они замкнуты. Т.е. магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0.$$

В природе нет магнитных масс, подобных электрическим зарядам. Магнитное поле порождается только токами. В дифференциальной форме имеем

$$\text{div } \bar{B} = 0.$$

Аналогично согласно принципу непрерывности электрического тока - линии тока замкнуты. Полный ток – проводимости, переноса и смещения - прохо-

дующий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен нулю

$$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = 0.$$

В дифференциальной форме имеем

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = 0.$$

## 2.5. Полная система уравнений электромагнитного поля

Электромагнитное поле в пустоте.

В общем случае для плотности тока можно записать

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_{см} + \bar{\delta}_{пер}; \quad \delta_{см} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \quad \delta_{пер} = \rho \bar{v}; \quad см - смещения, пер - переноса.$$

Тогда

$$\bar{\delta} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho \bar{v}.$$

Для векторов, определяющих электрическое и магнитное поля, известны соотношения

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}; \quad \bar{B} = \epsilon_0 \bar{H}.$$

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \epsilon_0 \bar{E} & \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta} & \operatorname{div} \bar{D} &= \rho \\ \bar{B} &= \epsilon_0 \bar{H} & \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \\ & & \bar{\delta} &= \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho \bar{v} & & \end{aligned}$$

Данную систему можно записать таким образом, что она будет содержать только векторы  $\bar{B}$  и  $\bar{E}$  – это основные векторы ЭМП

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{B} &= \mu_0 \bar{\delta} & \operatorname{div} \bar{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \\ \bar{\delta} &= \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \rho \bar{v} & & \end{aligned}$$

Переходя от пустоты к любому изотропному веществу, получаем

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \varepsilon \bar{E} & \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta} & \operatorname{div} \bar{D} &= \rho \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} & \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \\ \bar{\delta} &= \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \delta_{\text{пер}} \end{aligned}$$

Плотность тока для общности выражена в виде суммы трех составляющих. Надо иметь в виду, что первая и третья составляющие не могут существовать в одной точке пространства одновременно.

Две первые составляющие могут быть одновременно в полупроводниковой среде.

В проводящих средах – первая составляющая.

В диэлектрических – вторая составляющая.

### 3. Электростатическое поле

#### 3.1. Безвихревой характер электростатического поля.

##### Градиент электрического потенциала

Пусть отсутствует магнитное поле, т.е.  $\bar{\delta} = 0$ ;  $\bar{B} = 0$ ;  $\bar{H} = 0$ . Электрические заряды распределены только по поверхности заряженных тел ( $\rho=0$ ).

Уравнения поля имеют вид

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \quad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}; \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0.$$

Условие  $\operatorname{rot} \bar{E} = 0$  свидетельствует, что электростатическое поле имеет безвихревой характер. Согласно теореме Стокса, для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{E} d\bar{s}.$$

Таким образом, условие  $\operatorname{rot} \bar{E} = 0$  выражает в дифференциальной форме то, что в электростатическом поле линейный интеграл вектора  $\bar{E}$  вдоль любого замкнутого контура равен нулю. Соответственно линейный интеграл вектора  $\bar{E}$ , взятый от точки А до точки В, не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определен положением точек А и В.

Потенциал поля в т. А определяется как линейный интеграл вектора напряженности электрического поля взятый от точки до некоторой заданной точки Р. Потенциал точки Р равен нулю.

$$U_a = \int_A^P \bar{E} d\bar{l}.$$

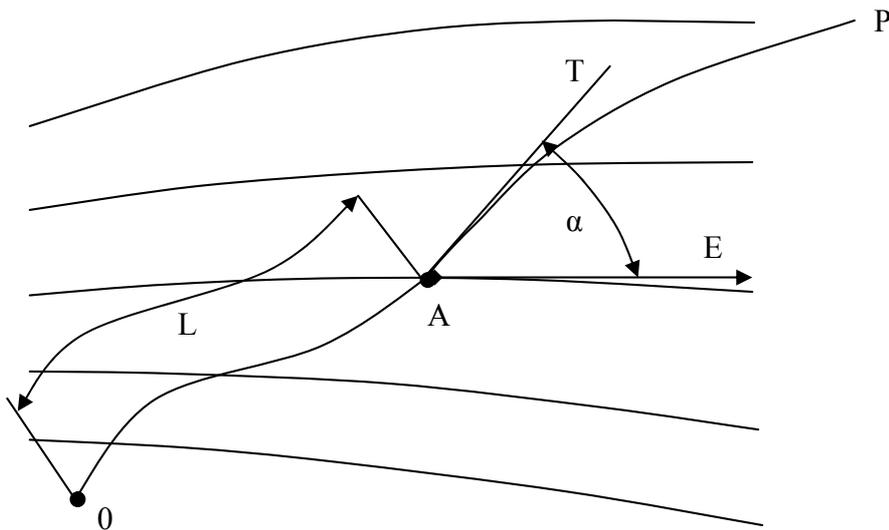


Рис.1. Потенциал электростатического поля

Разность потенциала двух точек определяют выражением

$$\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = U_A - U_B.$$

Допустим потенциал точки А определяется ее расстоянием  $l$  от начальной точки 0 вдоль некоторого пути, идущего в точку Р, где потенциал принят равным нулю. Выражение для потенциала при этом можно за-

писать в виде

$$U = \int_l^{lp} \vec{E} d\vec{l} = \int_l^{lp} E \cos \alpha dl,$$

где:  $lp$  – длина всего пути от т. 0 до т. р;

$\alpha$  – угол между вектором напряженности поля и касательной к пути.

Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E \cos \alpha.$$

Откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении.

В частности в декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -E_z.$$

Если  $\alpha = \pi/2$ , то  $\cos \alpha = 0$  и  $\frac{\partial U}{\partial l} = 0$ . Таким образом, перемещаясь нормально

к линиям напряженности поля, мы будем иметь  $U = \text{const}$  т.е. будем оставаться на поверхности равного потенциала.

Линии напряженности поля нормальны к поверхностям равного потенциала.

Совмещая направление перемещения с направлением вектора напряженности поля, будем иметь

$$\alpha = 0; \quad \cos \alpha = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial l} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Обозначим  $dl$  в этом направлении через  $dn$ , тогда

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -E.$$

Наибольшее значение производной потенциала по координате может быть изображено вектором, направленным против вектора напряженности поля и носящим название градиента электрического потенциала. Его обозначают  $gradU$ .

Градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение

$$|gradU| = \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|.$$

Векторы напряженности поля и градиент потенциала равны по величине и направлены в противоположные стороны

$$gradU = -\bar{E}.$$

В декартовой системе координат имеем

$$gradU = i \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Можно использовать оператор Гамильтона. При этом рассматривается произведение вектора оператора Гамильтона на скаляр потенциала

$$\bar{\nabla}U = gradU \quad \text{следовательно} \quad -\bar{\nabla}U = \bar{E}.$$

Знак минус в последнем равенстве показывает, что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля.

Все сказанное свидетельствует, что всякое безвихревое поле является потенциальным, т.е. может быть охарактеризовано потенциальной функцией  $U(x,y,z)$ .

### 3.2. Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел

Во многих случаях существенно знать, как изменяется потенциал при удалении на весьма большое расстояние от системы заряженных тел.

Для уединенного точечного заряда  $q$  имеем

$$E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^2}, \quad U = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r},$$

где:  $r$  – расстояние от заряда.

Любая система зарядов с суммарным зарядом отличным от нуля, расположенная в конечной области пространства, может рассматриваться на больших расстояниях как точечный заряд, для которого справедливы приведенные выше формулы. Следовательно при больших расстояниях для таких систем потенциал стремится к нулю в бесконечности, как  $1/r$  и напряженность поля, как  $1/r^2$ .

Если сумма зарядов системы равна нулю, то потенциал убывает еще быстрее. Такую систему можно подразделить на диполи. Потенциал диполя на больших расстояниях от него выражается формулой

$$U = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2},$$

где  $p=qd$  – электрический момент диполя.

Заметим, что потенциал равен нулю при  $\varphi=\pi/2$  т.е. во всех точках плоскости нормальной к оси диполя и проходящей через ее середину.

Составляющие напряженности поля диполя определяются формулами

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

После подстановок получаем

$$E_r = \frac{2p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^3},$$

$$E_\varphi = \frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon r^3},$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}.$$

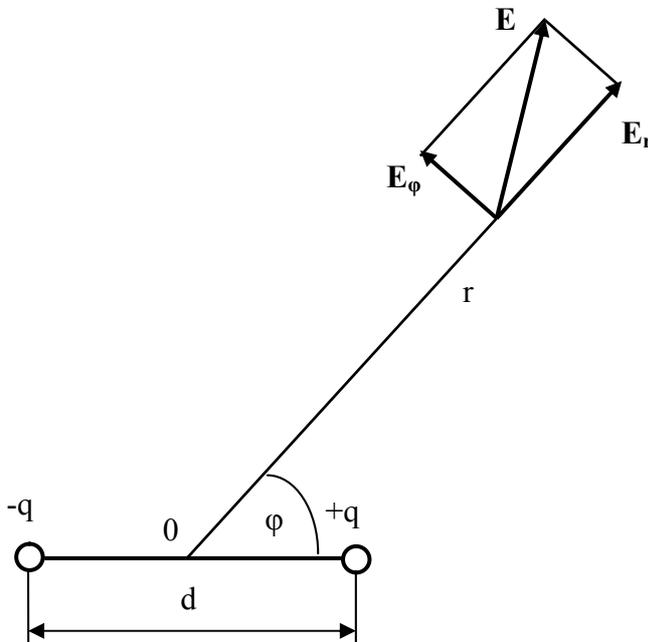


Рис.2. Электрическое поле диполя

Итак, потенциал диполя на больших расстояниях убывает, как  $1/r^2$ , а напряженность как  $1/r^3$ . Поэтому для любой конечной системы зарядов с суммарным зарядом равным нулю, потенциал убывает в бесконечности не медленнее  $1/r^2$ , а напряженность не медленнее  $1/r^3$ . При этом возможно и более быстрое убывание, если оси отдельных диполей ориентированы в противоположных направлениях.

Рассмотрим уединенный бесконечно длинный прямолинейный провод с линейной плотностью тока  $\tau$ . Напряженность поля такого провода

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}.$$

Положим т. Р, в которой  $U=0$ , удалена от оси провода на расстояние  $r_p$ , тогда получаем

$$U = \int_r^{r_p} \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\ln r_p - \ln r).$$

В частности можно принять  $U=0$  при  $r_p=1$ . Тогда будем иметь

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r.$$

Принять  $r_p = \infty$  нельзя, т.к. интеграл теряет смысл – при любом конечном  $r$  потенциал становится равным бесконечности.

Однако, если существует несколько параллельных проводов и суммарный заряд их равен нулю, то потенциал в бесконечности можно принять равным нулю.

Рассмотрим два провода с зарядами  $\tau_1 = \tau$  и  $\tau_2 = -\tau$ .

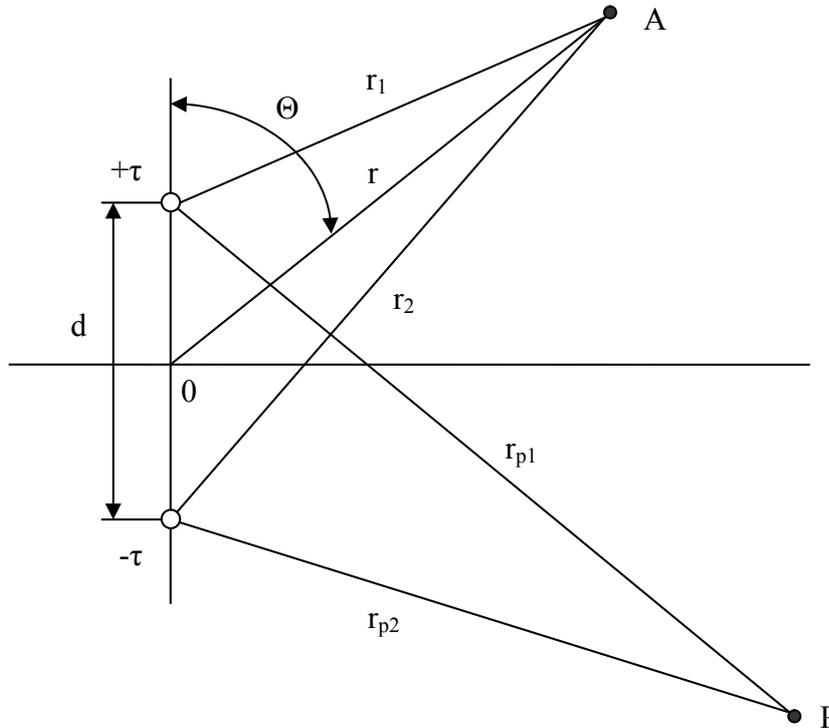


Рис.3. Поле двух заряженных проводников

Для потенциала в т.А имеем

$$U = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{p1}}{r_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{p2}}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{p1}}{r_{p2}} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Точка  $P$  имеет потенциал  $U=0$ . При удалении  $P$  в бесконечность  $r_{p1} \rightarrow r_{p2}$  получим

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Это выражение соответствует случаю, когда потенциал в бесконечности равен нулю.

Потенциал равен нулю на плоскости, проходящей через середину  $d$ .

При  $r \gg d$  имеем

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left( 1 - \frac{d \cos \Theta}{r} \right).$$

Раскладывая логарифм по степеням  $\frac{d \cos \Theta}{r}$ , и пренебрегая высшими степенями, получаем

$$U = \frac{\tau d \cos \Theta}{2\pi\epsilon r}.$$

Составляющие напряженности поля определяются формулами

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\tau d \cos \Theta}{2\pi\epsilon r^2}; \quad E_\Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Theta} = \frac{\tau d \sin \Theta}{2\pi\epsilon r^2}$$

и, следовательно

$$E = \frac{\tau d}{2\pi\epsilon r^2}.$$

Таким образом, для пары бесконечно длинных проводов, имеющих равные и противоположные по знаку заряды, потенциал в бесконечности стремится к нулю, как  $1/r$ , а напряженность поля, как  $1/r^2$ .

Следовательно, для системы бесконечно длинных параллельных проводников, имеющих суммарный заряд равный нулю, потенциал убывает не медленнее  $1/r$ , а напряженность поля не медленнее  $1/r^2$ .

### 3.3. Определение потенциала по заданному распределению зарядов

Выражение потенциала точечного заряда дает возможность указать общий метод расчета потенциала при заданном распределении электрических зарядов в заданной области пространства.

Распределенные в пространстве заряды разбивают на элементарные части  $dq$  и рассматривают эти элементы как точечные заряды. Потенциал в некоторой точке  $A$ , определяемый каждым таким элементом равен

$$dU = \frac{1}{\epsilon} \frac{dq}{4\pi r}.$$

Следовательно, потенциал, определяемый всей совокупностью зарядов равен

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r}.$$

Если электрический заряд распределен по объему  $V$ , тогда выражение приобретает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{d\nu\rho}{r},$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда.

Если заряд распределен лишь в весьма тонких слоях у поверхности заряженных тел, как это имеет место в случае тел из проводящего материала, то можно считать, что заряд распределен по поверхности тел. В этом случае выражение для потенциала принимает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{ds\sigma}{r},$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда.

Интегрирование производится по всем заряженным поверхностям. То, что среда неоднородная (внутри тел проводящая среда) несущественно, т.к. поле внутри тел отсутствует.

В случае, когда заряд распределен на проводах, диаметр сечения которых мал по сравнению с расстояниями от проводов до точек поля, в которых определяется потенциал, имеем

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{dl\tau}{r},$$

где  $\tau$  – линейная плотность заряда.

Интегрирование производится вдоль всех заряженных проводов.

Наконец, в случае конечного числа точечных зарядов имеем

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{q_k}{r_k}.$$

### 3.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

Подставляя в уравнение, выражающее теорему Гаусса в дифференциальной форме вместо напряженности потенциал, имеем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Подставим:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

В результате получим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Интеграл  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{dV\rho}{r}$  является решением уравнения Пуассона.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Это выражение называют уравнением Лапласа. Уравнения Пуассона и Лапласа могут быть записаны в следующей форме

$$\operatorname{divgrad}U = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \operatorname{divgrad}U = 0, \text{ или}$$

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2 U = 0.$$

Вводя понятие оператора Лапласа  $\Delta = \nabla^2$  (лапласиан) получаем

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \Delta U = 0.$$

### 3.5. Основная задача электростатики

Основной задачей является определение напряженности во всех точках поля по заданным зарядам или потенциалам тел.

В случае электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции координат.

Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению потенциала решается с помощью уравнения Лапласа и соответствующих граничных условий у поверхности заряженных проводящих тел.

Обычно приходится решать значительно более трудные задачи. Рассматривается система проводящих тел, окруженная диэлектриком, объемные заряды отсутствуют. Заданы либо потенциалы всех тел, либо их полные заряды. Распределение зарядов по поверхности неизвестно и подлежит определению. В этом основная трудность. Также неизвестным является распределение потенциала в пространстве. Особенно усложняется задача в случае неоднородной или неизотропной среды. Решение такой задачи аналитическим путем в конечном виде возможно только для отдельных частных случаев.

Условия, при которых поле определяется единственным образом:

1. Поле в диэлектрике должно удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \quad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}; \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0.$$

В случае неоднородной среды эти уравнения приводят к одному уравнению для потенциала

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

2. Поверхности проводящих тел должны быть эквипотенциальны.
3. Потенциалы на поверхности тел должны быть равны заданным значениям  $U_k$ , если по условию задачи известны эти потенциалы. Если заданы полные заряды тел, то для каждого тела  $q_k = \int_{S_k} \sigma ds$ .

Может быть показано, что выполнение этих требований не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача была решена единственным образом. Это важное положение часто называют теоремой единственности.

### 3.6. Электростатическое экранирование

Представим себе полость, окруженную со всех сторон проводником и не содержащую зарядов. Как бы ни был заряжен проводник или в каком бы внешнем электростатическом поле он ни находился, электростатическое в полости существовать не может. Действительно, поверхность проводника всегда эквипотенциальна. Линии вектора напряженности электрического поля не могут на-

чинаться и заканчиваться на такой поверхности, так как это соответствовало бы наличию ротора у электростатического поля, которое является безвихревым. Не может существовать и линий поля, выходящих с поверхности проводника и заканчивающихся где-то в полости, так как это соответствовало бы наличию дивергенции в точках, не имеющих зарядов, что противоречит теореме Гаусса.

На изложенном основан принцип электростатического экранирования чувствительных измерительных приборов в технике высоковольтных измерений и другой аппаратуре. Практически обычно оказывается достаточным окружить защищаемый объем металлической сеткой – экраном.

### **3.7. Расчет электрической емкости. Емкость между круговыми цилиндрами. Емкость двухпроводной линии передач**

Емкость между двумя уединенными проводящими телами равна отношению заряда  $q_1 = q$  одного из тел к разности их потенциалов  $U_1 - U_2$ , причем предполагается, что заряды тел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е.  $q_2 = -q_1 = -q$ . Вычисление емкости между двумя телами сводится к вычислению разности их потенциалов в этих условиях. В качестве важного примера найдем выражение для емкости между двумя параллельными круговыми проводящими цилиндрами. Цилиндры будем предполагать бесконечно длинными, емкость будем определять между их отрезками длиной  $l$ .

Потенциал в некоторой точке, удаленной на расстояния  $r_1$  и  $r_2$  от электрических осей цилиндров [1], определяется формулой:

$$U = \frac{\tau}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2 = \frac{\tau}{2\pi l} \ln k + C_2,$$

где  $\tau$  – линейная плотность заряда;

$C_2$  – мнимая часть комплексной величины  $C$ , зависящей от выбора начальной линии напряженности поля и от выбора линии равного потенциала [1].

Для определения потенциалов цилиндров выберем на их поверхностях точки, например, наиболее близкие к друг другу точки  $A_1$  и  $A_2$ . Пусть  $k_1$  – значение отношения  $r_2/r_1$  для точки  $A_1$  и соответственно  $k_2$  – значение этого отношения для точки  $A_2$ . Имеем:

$$U_1 - U_2 = \frac{\tau}{2\pi l} \ln \frac{k_1}{k_2}.$$

Так как  $q = \tau l$ , то

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi l \epsilon}{\ln \frac{k_1}{k_2}}.$$

Отношение  $r_2/r_1$  для любой точки поля может быть выражено через радиус  $R$  окружности равного потенциала, проходящей через эту точку, и через рас-

стояние  $h = |x_0|$  от центра этой окружности до плоскости постоянного потенциала. Воспользовавшись формулами

$$h = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b \quad \text{и} \quad R = \frac{2k}{|1-k^2|} b,$$

приведенными в [1], получаем:

$$\frac{h}{R} = \frac{1+k^2}{2k}, \quad \text{откуда} \quad k^2 - 2\frac{h}{R}k + 1 = 0 \quad \text{и}$$

$$k = \frac{h}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}.$$

Знак «плюс» следует брать при  $k > 1$ , что соответствует случаю  $r_2 > r_1$ , т.е. расположению окружности равного потенциала слева от плоскости  $U = \text{const}$ . Знак «минус» следует брать при обратных условиях, что соответствует расположению окружности равного потенциала справа от плоскости  $U = \text{const}$ .

Рассмотрим частные случаи.

### 1. *Емкость кругового цилиндра относительно плоскости.*

Для плоскости постоянного потенциала

$k_2 = \frac{r_2}{r_1} = 1$ , так как эта плоскость расположена посередине между электрическими осями. Следовательно

$$C = \frac{2\pi t l}{\ln \left[ \frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1} \right]}.$$

Здесь  $h$  расстояние от оси цилиндра до плоскости и  $R$  – радиус цилиндра. Полученной формулой можно пользоваться для вычисления емкости относительно земли провода, подвешенного на высоте  $h$  параллельно поверхности земли. Так как обычно  $h \gg R$ , то приближенно:

$$C \approx \frac{2\pi l \epsilon}{\ln \frac{2h}{R}}.$$

### 2. *Емкость между несоосными не охватывающими друг друга круговыми цилиндрами.*

Имеем  $k_1 > 1$  и  $k_2 < 1$ , и, следовательно, перед знаком квадратного корня в формуле для  $k_1$  надо взять знак «плюс», а для  $k_2$  – знак «минус». Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) \left( \frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

Учитывая, что для любого числа  $x$  существует тождество:

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

Можно переписать формулу для емкости между цилиндрами в виде

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) \left( \frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

Величины  $h_1$  и  $h_2$  определяются через расстояние между геометрическими осями цилиндров и через их радиусы  $R_1$  и  $R_2$  по формулам:

$$h_1 = \left| \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \right|.$$

Для двух цилиндров одинаковых радиусов  $R_1 = R_2 = R$  и  $h_1 = h_2 = D/2$ . Формула для емкости при этом приобретает вид

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{D}{2R} + \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1} \right)}.$$

*3. Емкость между тонкими проводами. Емкость двухпроводной линии передачи.*

Если  $R_1 \ll D$  и  $R_2 \ll D$  то согласно формулам для  $h_1$  и  $h_2$  имеем:

$$h_1 \approx D/2, \quad h_2 \approx D/2, \quad h_1/R_1 \approx D/2R_1 \gg 1 \quad \text{и} \quad h_2/R_2 \approx D/2R_2 \gg 1.$$

Поэтому формула для емкости может быть представлена в приближенном виде:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{D}{R_1} \cdot \frac{D}{R_2} \right)} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}}.$$

Если радиусы проводов одинаковы, то получаем:

$$C \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{D}{R}}.$$

*4. Емкость между несоосными, охватывающими друг друга круговыми цилиндрами.*

В этом случае имеем  $k_1 > 1$  и  $k_2 > 1$  и следовательно,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) / \left( \frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

При этом  $h_1$  и  $h_2$  определяются теми же формулами, что и в п. 2.

5. *Емкость между соосными круговыми цилиндрами.*

Последняя формула переходит в формулу для емкости между соосными цилиндрами в пределе при  $h_1/R_1 \rightarrow \infty$  и  $h_2/R_2 \rightarrow \infty$ .

Действительно для соосных цилиндров  $D = 0$ , и, согласно выражениям для  $h_1$  и  $h_2$ , имеем  $h_1 = \infty$  и  $h_2 = \infty$ , причем  $h_1/h_2 = 1$ .

Учитывая это, получаем из последней формулы:

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

## 4. Магнитное поле постоянных токов

### 4.1. Вихревой характер магнитного поля токов. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов

Уравнения магнитного поля постоянных токов имеют вид:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta}; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}; \quad \text{div } \bar{B} = 0.$$

Первое уравнение показывает, что магнитное поле токов является безвихревым. Следовательно, там где  $\delta \neq 0$ , нельзя указать такую скалярную функцию координат  $U_m(x,y,z)$ , градиент которой пропорционален вектору  $H$ , т.к. в силу тождества  $\text{rot grad } U_m = 0$  при этом оказалось бы всюду  $\text{rot } \bar{H} = 0$ . Иными словами, вихревое поле не является потенциальным.

Однако в той части пространства, где плотность тока равна нулю, имеем  $\text{rot } \bar{H} = 0$  и, следовательно, в этой части пространства можно представить вектор напряженности магнитного поля в виде

$$\bar{H} = -\text{grad } U_m;$$

где  $U_m$  – скалярный потенциал магнитного поля.

Составляющие напряженности поля по осям имеют вид

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z}.$$

В целом, составляющая вектора напряженности поля по любому направлению равна убыли магнитного потенциала, отнесенной к единице длины в этом направлении

$$H_l = -\frac{\partial U_m}{\partial l}.$$

Потенциал одинаков во всех точках поверхности, пересекаемой линиями напряженности поля под прямым углом. Такую поверхность называют поверхностью равного магнитного потенциала. Ее уравнение имеет вид

$$U_m(x,y,z) = \text{const.}$$

Если обозначить  $dn$  перемещение по касательной к линии напряженности, то

$$|\text{grad}U_m| = H = -\frac{\partial U_m}{\partial n}.$$

Следовательно, понятием скалярного магнитного потенциала можно пользоваться при  $\delta = 0$ . Однако и в этом случае функция  $U_m$  является многозначной.

Здесь возможны два варианта.

А. Линейный интеграл напряженности поля не охватывает контур с током. В этом случае интеграл не зависит от пути и определяется только положением точек начала и конца интегрирования. А интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

$$\int_A^B \bar{H} dl = U_{mA} - U_{mB}.$$

В. Если замкнутый путь интегрирования охватывает контур тока, то он не равен нулю и определяется тем, сколько раз охвачен контур с током

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = ki.$$

Если интегрирование производится между двумя точками, то

$$\int_A^B \bar{H} dl = U_{mA} - U_{mB} + ki,$$

где  $k$  – целое число, количество охватов контура с током.

Таким образом, скалярный магнитный потенциал величина многозначная.

## 4.2. Векторный потенциал магнитного поля токов

Вектор магнитной индукции можно представить в виде вихря некоторого вспомогательного вектора  $A$

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A},$$

причем этот вспомогательный вектор является функцией координат.

Вектор  $A$  называется векторным потенциалом магнитного поля. Определяя его так, чтобы уравнения магнитного поля

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta}; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}; \quad \text{div } \bar{B} = 0$$

были удовлетворены во всем пространстве – и там, где отсутствуют токи, и там, где  $\delta \neq 0$ , после ряда преобразований получаем:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \bar{\delta} \frac{dv}{r},$$

понимая здесь интегрирование как геометрическое суммирование. В последней формуле  $r$  - расстояние от центра элемента объема  $dv$ , в котором плотность тока  $\delta$  до точки в которой определяется потенциал  $A$ .

Последнее выражение может быть записано в разложении по осям

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \delta_x \frac{dv}{r}; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \delta_y \frac{dv}{r}; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \delta_z \frac{dv}{r}.$$

Данные выражения пригодны при условии, что токи существуют в ограниченном объеме пространства, а это физически всегда имеет место. При этом величина векторного потенциала убывает по мере удаления от области, занятой токами, не медленнее, чем  $1/r$ . А индукция и напряженность поля – не медленнее  $1/r^2$ .

Выражение для  $A$  может быть упрощено, если токи протекают по линейным проводам с малым сечением. В этом случае можно записать

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l i \frac{d\bar{l}}{r}.$$

При этом:

$$i = \int_S \delta ds \text{ - ток в проводниках,}$$

$S$  – поперечное сечение проводника.

Определим магнитный поток через некоторую поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S \bar{B} ds = \int_S \text{rot } \bar{A} d\bar{s}.$$

Согласно теореме Стокса,  $\int_S \text{rot } \bar{A} d\bar{s} = \oint_S \bar{A} d\bar{l}$ . Следовательно

$$\Phi = \oint_S \bar{A} d\bar{l}.$$

Магнитный поток сквозь поверхность  $S$  равен линейному интегралу векторного потенциала по замкнутому контуру, ограничивающему эту поверхность.

Оперирование векторным потенциалом облегчает рассмотрение ряда важных положений теории магнитного поля.

### 4.3. Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов

Общей задачей расчета является нахождение вектора магнитной индукции или вектора напряженности поля во всех точках пространства по заданному распределению тока в пространстве. Эта задача полностью решается нахожде-

нием векторного потенциала как функции координат. При этом магнитная индукция находится из соотношения  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . В конечном виде задачу удастся решить в ограниченном числе случаев.

Рассчитывая магнитное поле вне проводников с током, можно использовать понятие скалярного потенциала. Напряженность поля при этом определяется по выражению  $\vec{H} = -\text{grad}U_m$ . Этот метод аналогичен примененному при расчете электростатического поля, и в этом его большое достоинство. Он дает возможность решить ряд задач, относящихся к расчету магнитных полей, путем сопоставления их с соответственными решенными задачами электростатики.

#### 4.4. Намагничивание ферромагнитного материала

Причиной намагниченности считаются элементарные токи, существующие в молекулах и атомах ферромагнитного вещества. Каждый элементарный ток можно представить как магнитный листок (диполь) с северной полярностью на одной стороне и южной – на другой. Произведение  $i\Delta s$  называют магнитным моментом элементарного тока. Это векторная величина, совпадающая по направлению с напряженностью магнитного поля элементарного тока. Здесь  $\Delta s$  – элементарная площадка, обтекаемая током  $i$ .

Намагниченность вещества оценивается пределом отношения суммы магнитных моментов в некотором объеме к величине этого объема при его неограниченном уменьшении. Данную величину называют намагниченностью (или интенсивностью намагничивания)

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum i\Delta s}{\Delta V}.$$

Отдельные группы элементарных токов, соответствующие молекулам или группам молекул ферромагнитного вещества, всегда ориентированы так, что их магнитные моменты совпадают. Таким образом, в материале существуют маленькие области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания. В ненамагниченном веществе намагниченности этих областей взаимно компенсируются. Если вещество подвергнуть воздействию внешнего магнитного поля, то в силу взаимодействия этого поля с элементарными токами возникнут механические моменты, стремящиеся ориентировать области спонтанного намагничивания по направлению внешнего поля. Вещество начинает намагничиваться скачками, по мере ориентации отдельных областей намагничивания. Интенсивность намагничивания возрастает пропорционально напряженности магнитного поля в веществе  $H_{ст}$

$$\vec{J} = k_M \vec{H}_{\vec{N}0}.$$

Коэффициент  $k_M$  называется магнитной восприимчивостью материала.

Величина магнитной индукции в намагниченном веществе будет равна:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_{\vec{N}0} + \vec{J}) = \mu_0 \vec{H}_{\vec{N}0} (1 + k_M),$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость, равная  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Величина в скобках представляет собой относительную магнитную проницаемость материала.

После снятия внешнего поля ориентация многих из областей спонтанного намагничивания сохраняется вследствие внутреннего трения. Этим обуславливается наличие остаточной индукции  $B_r$ .

#### 4.5. Намагничивание ферромагнитных тел

Соотношения предыдущего параграфа справедливы для случая намагничивания очень длинного стержня или замкнутого сердечника тороидальной формы.

Если же ферромагнитное тело имеет такую форму, что линии магнитной индукции проходят часть пути по воздуху (короткие стержни, тороид с воздушным зазором и т.п.), намагниченность оказывается меньше величины, определенной выше. Поэтому в расчеты вводится величина  $N\bar{J}$ , где  $N$  - коэффициент, меньший единицы для всех случаев, когда при намагничивании ферромагнитного тела часть пути ферромагнитных линий проходит по воздуху. В более общей форме имеем:

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H}_{\bar{N}\bar{O}} + N\bar{J}).$$

В этом выражении действительная напряженность магнитного поля в ферромагнитном теле определяется формулой:

$$H_{\bar{N}\bar{O}} = \frac{B}{\mu_0} - NJ = H - H_p.$$

Величину  $H_p$  называют напряженностью размагничивающего поля, или просто размагничивающим полем. Коэффициент  $N$  называется размагничивающим фактором или коэффициентом размагничивания. Точный расчет  $N$  возможен лишь для некоторых геометрических форм тела. При которых получается однородное намагничивание во внешнем однородном поле, в частности для эллипсоида вращения. Частным случаем эллипсоида является шар; неограниченное увеличение одной из осей приводит к цилиндру, а неограниченное уменьшение одной из осей – тонкому диску. Для указанных форм величина  $N$  представляет собой числовой коэффициент, не зависящий ни от геометрических размеров, ни от материала тела. В работе [2] приводятся значения  $N$  для некоторых тел.

#### 4.6. Магнитное экранирование

Для защиты электроизмерительных приборов от влияния посторонних магнитных полей их системы помещают в массивные замкнутые или почти замкнутые оболочки из ферромагнитного материала. Такие оболочки называют *магнитными экранами*. Поле внутри экрана оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем.

В случае экрана в форме полого шара с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и с абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu$ , помещенного во внешнее однородное поле с ин-

дукцией  $B_0$ , магнитная индукция  $B$  в полости экрана может быть рассчитана по формуле

$$B = B_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu}{\mu_0} - 2\right)}.$$

Например, если  $R_1 = 0,9R_2$  и  $\mu = 500\mu_0$ , то  $B = 0,031B_0$ , т.е. напряженность поля внутри экрана составляет 3% от напряженности внешнего поля. В случае ферромагнитного вещества  $\mu \gg \mu_0$ , и экранирующее действие определяется тем, что линии магнитной индукции внешнего поля, стремясь пройти по пути с наименьшим магнитным сопротивлением, сгущаются внутри стенок экрана, почти не проникая в его полость.

Нередко применяют многоступенчатые экраны в виде нескольких полых ферромагнитных тел, расположенных один внутри другого.

#### 4.7. Принцип расчета постоянного магнита

Как известно, основные свойства ферромагнитных веществ определяются кривой намагничивания, представляющей собой зависимость  $B = B(H)$ .

При перемагничивании ферромагнитного материала различают предельный и частные циклы перемагничивания. В случае предельного цикла, напряженность внешнего магнитного поля увеличивается в прямом и обратном направлении столь значительно, что достигается насыщение. Частных циклов перемагничивания может существовать бесконечное множество.

Рабочим участком частного цикла возврата является «спинка»  $B_2B_3B_mB_1$  [2]. Введение воздушного зазора в магнитную цепь постоянного магнита вызывает уменьшение магнитной индукции от значения  $B_2$  до некоторого меньшего значения  $B_3$ . Это значение индукции в стали соответствует напряженности размагничивающего поля  $-H_p = NJ$ .

В результате для  $B_3$  получаем

$$B_3 = \mu_0(-H_p + J) = \mu_0(1 - N)J.$$

Параметры поля связаны с величиной размагничивающего фактора соотношением [2]

$$\frac{N}{1 - N} = \mu_0 \frac{H_p}{B_3}.$$

Энергия в малом воздушном зазоре может быть определена по формуле

$$W_B = \frac{B_B H_B}{2} l_B s_B,$$

где  $B_B$  и  $H_B$  – магнитная индукция и напряженность поля в воздушном зазоре;

$l_B$  и  $s$  – длина и поперечное сечение воздушного зазора.

Заменим  $B_B \approx B_{CT} = B_3$  и подставим значение  $H_B$  из уравнения второго закона Кирхгофа для цепи «тело магнита – воздушный зазор»

$$-H_p l_{CT} + H_B l_B = 0.$$

В результате получим:

$$W_B = \frac{1}{2} (B_3 H_p) (l_{\text{ст}} s) = \frac{1}{2} (B_3 H_p) V_{\text{ст}},$$

где  $V_{\text{ст}}$  – объем магнита.

Для лучшего использования материал следует поставить в такие условия, чтобы произведение  $(BH)$  было максимальным.

В приложении работы [2] даются практические рекомендации по использованию некоторых твердых магнитных материалов.

**Пример.** Требуется сделать постоянный магнит с магнитной цепью кольцеобразной формы и воздушным зазором длиной  $l_b = 0.25$  см; в воздушном зазоре нужно получить магнитный поток  $\Phi = 1,4 \cdot 10^{-4}$  Вб. Материал магнита – сплав альнико.

Из справочных данных [2] для материала альнико определяем:

$$\mu = 4; \quad W_{\text{МАКС}} = 5500 \text{ Дж/м}^3$$

при

$$B_m = 0,45 \text{ Тл}; \quad H_p = 12200 \text{ А/м.}$$

Сечение магнита

$$s = (1,4 \cdot 10^{-4}) / 0,45 = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,11 \text{ см}^2.$$

Размагничивающий фактор:

$$N/(1 - N) = 4\pi \cdot 10^{-7} (12200/0,45) = 0,0344; \quad N = 0,0332.$$

Длина и объем магнита:

$$l = 0,25 / 0,0332 = 7,52 \text{ см}; \quad l_{\text{ст}} = 7,52 - 0,25 = 7,27 \text{ см}; \\ V_{\text{ст}} = 3,11 \cdot 7,27 = 22,61 \text{ см}^3.$$

Магнитная энергия в воздушном зазоре

$$W_B = 0,5 \cdot 5500 \cdot 22,61 \cdot 10^{-6} = 0,062 \text{ Дж.}$$

Аналогичный расчет для магнита из вольфрамовой стали приводит к громоздкой конструкции объемом около  $150 \text{ см}^3$ .

#### 4.8. Расчет индуктивностей.

##### Общие выражения для взаимной и собственной индуктивности

Ниже будут рассматриваться статические индуктивности. Соответственно магнитные потоки, определяющие эти индуктивности, мы будем находить при постоянном токе. Статические индуктивности зависят от геометрических параметров, определяющих форму, размеры и взаимное расположение контуров, и от магнитной проницаемости среды, окружающей контуры, а также от магнитной проницаемости вещества самих проводящих контуров. Если  $\mu = \text{const}$ , то индуктивности контуров не зависят от токов в них.

Обратим внимание на то, что индуктивности определяются потокосцеплением, т.е. для вычисления индуктивности электрического контура необходимо определить полное число сцеплений единичных линий магнитной индукции с контуром.

Допустим имеются два контура произвольной заданной формы. Определим выражение для расчета их взаимной индуктивности.

Предположим, что контуры находятся в воздухе и материал проводников не ферромагнитный. Примем всюду  $\mu = \mu_0$ . Условимся снабжать обозначение

потокосцепления взаимной индукции двумя индексами: первый индекс будет указывать, с каким контуром рассматривается сцепление потока, второй - каким током обуславливается поток. Будем искать потокосцепление  $\Psi_{21}$  со вторым контуром, обусловленное током  $i_1$  в первом контуре.

Представим себе весь проводник второго контура подразделенным на элементарные трубки тока  $i_2$ . Поток, сцепляющийся с одной из таких трубок, равен линейному интегралу векторного потенциала вдоль оси этой трубки [1]:

$$\Phi_{21} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2 .$$

Этот поток сцепляется с током  $di_2$ , протекающим в рассматриваемой трубке тока и составляющим долю  $\frac{di_2}{i_2}$  всего тока  $i_2$  во втором контуре. Следовательно, он вносит в величину  $\Psi_{21}$  долю, равную:

$$d\Psi_{21} = \frac{di_2}{i_2} \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2 .$$

Так как  $di_2$  имеет постоянное значение вдоль всей трубки тока, то его можно внести под знак интеграла. Обозначая через  $ds_2$  сечение трубки тока и через  $\delta_2$  плотность тока в этом сечении, можем написать  $di_2 = \delta_2 ds_2$ . Тогда последнее равенство приобретает вид

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \oint_{l_2} (\delta_2 ds_2) (\bar{A}_2 d\bar{l}_2) .$$

Учитывая направления векторов, после некоторых преобразований [1] получаем

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \oint_{l_2} (\delta_2 \bar{A}_2) (d\bar{s}_2 d\bar{l}_2) .$$

Интегрируя по всему сечению  $s_2$  второго проводника, получим:

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int \oint_{s_2 l_2} (\delta_2 \bar{A}_2) (d\bar{s}_2 d\bar{l}_2) .$$

Произведение  $ds_2 dl_2$  есть элемент объема  $dV_2$  второго проводника. Потому потокосцепление  $\Psi_{21}$  может быть представлено в виде

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int_{V_2} \bar{\delta}_2 \bar{A}_2 dV_2 .$$

Так как мы желаем определить величину  $\Psi_{21}$  как потокосцепление взаимной индукции, обусловленное током  $i_1$ , то соответственно и векторный потенциал  $A_2$  необходимо выразить через ток  $i_1$ . Согласно изложенному в [1], имеем:

$$\bar{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \bar{\delta}_1 \frac{dV_1}{r} ,$$

где  $V_1$  – объем пространства, занимаемого первым контуром;  
 $r$  – расстояние от элемента объема  $dV_1$  до точки, в которой определяется векторный потенциал;  
 $\delta_1$  – вектор плотности тока в точках элемента объема  $dV_1$ .

Подставляя выражение для векторного потенциала в последнее выражение для потокосцепления, получаем:

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Отсюда находим общее выражение для взаимной индуктивности:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Интегрирование должно быть произведено один раз по всему объему первого проводника и другой раз по всему объему второго проводника, причем  $r$  есть расстояние между элементами объемов  $dV_1$  и  $dV_2$ . Полученная формула верна только в случае однородной в магнитном отношении среды, так как использованное при ее выводе выражение для векторного потенциала справедливо только в этом случае. В частности и магнитная проницаемость материала самих проводников должна быть такой же, как и проницаемость окружающей среды. Как было ранее отмечено, при  $\mu = \text{const}$  взаимная индуктивность не зависит от токов в контурах. Наличие токов  $i_1$  и  $i_2$  в последнем выражении не противоречит этому положению. Действительно, внося токи под знаки интегралов, мы получим в подинтегральном выражении отношения  $\delta_1/i_1$  и  $\delta_2/i_2$ , которые характеризуют распределение токов в проводниках. Но при постоянном токе распределение тока зависит только от формы проводника и не изменяется при изменении тока. Поэтому отношение плотности тока в каждой точке проводника ко всему току полностью определяется формой проводника.

Если бы мы стали определять потокосцепление взаимной индукции  $\Psi_{12}$  с первым контуром, обусловленное током во втором контуре, то, очевидно получили бы:

$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1} \int_{V_1} \int_{V_2} \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Следовательно, для взаимной индуктивности  $M_{12} = \Psi_{12}/i_2$  мы имели бы то же самое выражение, что и для  $M_{21}$ . Тем самым подтверждается важный вывод, полученный из условия независимости энергии магнитного поля токов от порядка установления токов, а именно, что при  $\mu = \text{const}$  имеет место равенство

$$M_{kp} = M_{pk}.$$

Получим общее выражение для собственной индуктивности  $L$  контура, пользуясь найденным общим выражением для взаимной индуктивности  $M_{21}$  двух контуров. Представим себе два совершенно одинаковых контура, сближающихся до полного слияния так, что один из них занимает объем другого. После такого слияния по существу уже остается только один контур. Из выражения для  $M_{21}$  нетрудно получить выражение для  $L$  такого контура, положив  $i_1 = i_2 = i$  и  $V_1 = V_2 = V$ . Имеем:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi i^2} \int_V \int_V \bar{\delta} \bar{\delta}' \frac{dV dV'}{r},$$

где  $\delta$  – плотность тока в элементе объема  $dV$ ;  
 $\delta'$  – плотность тока в элементе  $dV'$ ;

$r$  - расстояние между указанными элементами объема.

Интегрирование производится дважды по объему всего проводника.

Выражение для  $M_{21}$  весьма упрощается в случае контуров из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстоянием между ними. В таком случае нет необходимости делить проводники на трубки тока. Векторный потенциал в центре элемента  $d\bar{l}_2$  можно вычислить по формуле [1]:

$$\bar{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i_1 d\bar{l}_1}{r}.$$

Потокосцепление  $\Psi_{21}$  при этом может быть принято равным потоку  $\Phi_{21}$  сквозь поверхность, ограниченную осью проводника второго контура, т.е.

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{i_1 d\bar{l}_1 d\bar{l}_2}{r}.$$

Разделив  $\Psi_{21}$  на  $i_1$ , получаем:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\bar{l}_1 d\bar{l}_2}{r}.$$

Представляется возможным упростить и выражение для  $L$  контура, образованного из тонкого проводника. Однако упрощенную формулу нельзя при этом привести в точности к тому виду, к которому было приведено выражение для  $M_{21}$ , т.е. нельзя свести в формуле для  $L$  двукратное интегрирование по объему проводника к двукратному интегрированию по оси проводника, так как такой интеграл превращается в бесконечность.

Упрощение формулы для  $L$  контура из тонкого проводника кругового сечения можно выполнить следующим путем. Разделим потокосцепление  $\Psi$  на две части:  $\Psi = \Psi_{\text{внеш}} + \Psi_{\text{внутр}}$ , причем  $\Psi_{\text{внеш}}$  определяется линиями магнитной индукции, охватывающими весь проводник, следовательно, расположенными целиком во внешней по отношению к проводнику среде, и  $\Psi_{\text{внутр}}$  определяется линиями магнитной индукции, проходящими внутри тела проводника. В случае, если проводник образует один виток, то каждая линия сцепляется один раз с проводником и, следовательно,

$$\Psi_{\text{внеш}} = \Phi_{\text{внеш}} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2,$$

где  $\bar{A}_2$  – значения векторного потенциала на контуре  $l_2$ .

Величину  $\bar{A}_2$  мы можем приближенно вычислить по формуле:

$$\bar{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i_1 d\bar{l}_1}{r}.$$

Предположим, что весь ток  $i$  течет по оси проводника. При этом интегрирование производится по всей оси  $l_1$  проводника. Интеграл имеет конечное значение, так как все точки контура  $l_2$ , в которых определяется  $\bar{A}_2$ , лежат на конечном расстоянии  $r$  от точек контура  $l_1$ .

Таким образом,

$$\Psi_{\text{ВНЕШ}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}.$$

Величину  $\Psi_{\text{внутр}}$  приближенно можно принять равной внутреннему потоку сцеплению в отрезке длиной  $l_1$  бесконечно длинного прямолинейного провода кругового сечения, поскольку радиус кривизны контура проводника велик по сравнению с поперечными размерами сечения. Согласно [1], имеем:

$$\Psi_{\text{ВНУТР}} = \frac{\mu}{8\pi} i l_1,$$

где  $\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость материала провода.

Индуктивность  $L$  можно представить в виде

$$L = \Psi_{\text{внеш}}/i + \Psi_{\text{внутр}}/i = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}},$$

Причем  $L_{\text{внеш}}$  называют *внешней*, а  $L_{\text{внутр}}$  - *внутренней* индуктивностями. Итак, можно написать следующее упрощенное выражение для индуктивности контура из тонкого проводника кругового сечения:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} + \frac{\mu l_1}{8\pi}.$$

### *Частные случаи*

Выражение для взаимной индуктивности *двух круговых контуров*, расположенных в параллельных плоскостях, так, что их центры лежат на одной прямой, нормальной к этим плоскостям. После некоторых преобразований [1] получаем

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

В этом выражении  $R_1$  и  $R_2$  - радиусы контуров. Принято  $\mu = \mu_0$ , так как предполагается, что контуры находятся в воздухе. Функция  $f(k)$  может быть представлена через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, согласно выражениям ([1] стр. 295).

Индуктивность *круглого кольца из тонкого проводника кругового сечения*.

После некоторых преобразований [1], получаем

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right) + \frac{\mu}{4} R,$$

где  $R$  - радиус кольца;  $a$  - радиус сечения проводника.

Если провод из ферромагнитного материала, то  $\mu \approx \mu_0$ , и

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right).$$

Здесь выражение для внутренней индуктивности получено в предположении равномерного распределения тока по сечению проводника, что соблюдается при постоянном токе. При переменном токе высокой частоты при резком проявлении поверхностного эффекта внутренний поток при  $\mu \approx \mu_0$  будет мал, и точнее вычислять индуктивность по формуле

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right).$$

## 5. Переменное электромагнитное поле в диэлектрике

### 5.1. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны

Ограничимся рассмотрением переменного электромагнитного поля в неподвижных однородных и изотропных средах. В этом случае:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \qquad \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} \qquad \operatorname{div} \bar{D} = \rho$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \qquad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \delta_{nep}$$

В декартовой системе координат уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей запишутся в виде

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \delta_{nep.x};$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \delta_{nep.y};$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \delta_{nep.z};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Полагаем, что проводимость диэлектрика равна нулю ( $\gamma = 0$ ), и что свободные заряды в диэлектрике отсутствуют ( $\rho = 0$ ). В такой среде могут существовать только токи электрического смещения.

Рассмотрим случай плоской волны.

Электромагнитная волна называется плоской, когда все величины, характеризующие интенсивность электромагнитного процесса, зависят только от одной из декартовых координат, например от  $z$ .

Приблизительно такой характер имеет волна, излученная антенной, если эту волну рассматривать в небольшой области пространства на большом расстоянии от излучателя.

Учитывая условия, оговоренные выше, получаем

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (\text{a}) \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (\text{r})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (\text{б}) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (\text{д})$$

$$0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad (\text{в}) \quad 0 = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (\text{е})$$

Предположим, что поле вызвано источниками, не содержащими постоянных токов и постоянных зарядов, как это имеет место в случае излучения волн антенной. В таком случае векторы напряженности магнитного и электрического полей не могут иметь составляющих, не зависящих от времени, и уравнения (в) и (е) дадут:

$$E_z = \text{const} = 0; \quad H_z = \text{const} = 0.$$

Выберем направление оси ОХ так, чтобы вектор Е был направлен вдоль оси. Это всегда можно сделать, если вектор Е все время остается параллельным некоторому направлению, т.е. когда волна является поляризованной. Такие условия обеспечиваются при излучении волн неподвижной антенной.

Тогда  $E_y = 0$ . При этом уравнения (б) и (г) дают:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad \text{т.е.} \quad H_x = \text{const} = 0.$$

Следовательно, вектор Н направлен по оси ОУ.

В результате мы получаем существенный вывод: В электромагнитной волне, свободно распространяющейся в однородном и изотропном диэлектрике, векторы Е и Н взаимно перпендикулярны.

Тогда уравнения поля приобретают вид

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (\text{а}') \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (\text{д}')$$

Из этих уравнений получаем:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2},$$

где:  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ .

Решение данных уравнений получается в виде:

$$E_x = F_1(z - vt) + F_2(z + vt);$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [F_1(z - vt) - F_2(z + vt)].$$

Выясним смысл частных решений

$$E_{x1} = F_1(z - vt); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} F_1(z - vt).$$

В любой точке, движущейся в положительную сторону оси ОZ со скоростью  $v = \frac{dz}{dt}$ , значение  $E_{x1}$  и  $H_{y1}$  останутся постоянными. Поэтому можно утверждать, что эти частные решения определяют электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью  $v$  в положительном направлении оси ОZ

(Прямая волна). Эта волна несет с собой определенное количество электромагнитной энергии.

Аналогично частные решения

$$E_{x2} = F_1(z + vt) \quad \text{и} \quad H_{y2} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_2(z + vt)$$

определяют волну, движущуюся в отрицательном направлении оси OZ (Обратная волна).

Итак, скорость распространения волн  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ . В пустоте имеем  $v \approx 3 \cdot 10^8$  (м/с).

Можно записать для прямой или обратной волны

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E, \quad \text{тогда} \quad \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2}.$$

Т.е. если существует только прямая или только обратная волна, то энергии магнитного и электрического полей равны между собой.

Отношение  $\frac{E_{x1}}{H_{y1}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = z$  имеет размерность электрического сопротивления

и может рассматриваться как волновое сопротивление среды. В случае пустоты имеем  $z_0 = 377$  (Ом).

В случае перехода волны из одной среды в другую с другими параметрами, падающая волна частично проходит сквозь поверхность раздела, образуя во второй среде преломленную волну, и частично отражается от поверхности раздела, образуя отраженную волну.

## 5.2. Вектор Пойтинга

Определим мощность потока энергии, отнесенную к единице поверхности. Нормальной к направлению распространения волны. Будем предполагать, что существует только волна, движущаяся в одном направлении. В таком случае объемная плотность энергии электромагнитного поля равна:

$$\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\epsilon E}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H + \frac{\mu H}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E = \sqrt{\epsilon\mu} EH = \frac{1}{v} EH.$$

Следовательно, в объеме  $dV = dl ds$  заключена энергия:

$$\frac{1}{v} EH dl ds.$$

Отрезок пути  $dl$  волна проходит за промежуток времени  $dt$ , который связан с  $dl$  соотношением:  $dl = v dt$ .

Мощность потока энергии, отнесенная к единице поверхности, нормальной к вектору скорости, численно равна количеству энергии, которая проходит через единицу поверхности, нормальной к вектору скорости, в единицу времени. Она получается равной:

$$S = \frac{\frac{EH}{v} dl ds}{ds dt}.$$

Принимая во внимание, что  $\frac{dl}{dt} = v$ , находим:

$$S = EH.$$

Эта величина может рассматриваться как вектор, направленный в сторону движения волны, т.е. в направлении вектора скорости.

Представления о потоке энергии и о мощности потока энергии, отнесенной к единице поверхности, были развиты в 1874 г. в работе Н.А. Умова, в которой он применил эти представления к случаю передачи энергии в упругих средах. На одиннадцать лет позже Пойтинг применил эти представления к случаю передачи электромагнитной энергии и получил выражение вектора  $S$  через векторы  $E$  и  $H$ . Поэтому в настоящее время используют понятия «теорема Умова – Пойтинга» и «вектор Пойтинга».

Найдем связь между направлением вектора Пойтинга и направлениями векторов  $E$  и  $H$ . Для прямой волны в тот момент, когда вектор  $E$  направлен в сторону положительной оси  $OX$ , вектор  $H$  направлен в сторону положительной оси  $OY$ . Вектор же скорости в прямой волне направлен с сторону положительной оси  $OZ$ .

В обратной волне вектора  $E$  и  $H$  всегда имеют различные знаки и вектор скорости направлен в отрицательную сторону оси  $OZ$ .

Таким образом, *направление вектора Пойтинга совпадает с направлением поступательного движения оси правого винта, головка которого вращается в плоскости, содержащей векторы  $E$  и  $H$ , в направлении от  $E$  к  $H$  по кратчайшему расстоянию.*

Следовательно вектор  $S$  можно представить как векторное произведение векторов  $E$  и  $H$ :

$$\bar{S} = [\bar{E} \cdot \bar{H}].$$

Он определяет собой *мощность потока электромагнитной энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны.* Выражение для вектора Пойтинга было получено в предположении, что среда однородна и изотропна и что существует только прямая и только обратная волна.

Покажем справедливость этого утверждения для любой среды, которая в общем случае может быть и неоднородной и анизотропной, и для любого характера поля. Рассмотрим ограничим только одним допущением, что электрические ( $\epsilon$  и  $\gamma$ ) и магнитные ( $\mu$ ) свойства среды не зависят от напряженностей электрического и магнитного полей и не являются функциями времени.

Рассмотрим некоторый произвольно выбранный объем  $V$  пространства, ограниченный замкнутой поверхностью  $s$ .

Предположим, что энергия ( $W_E + W_M$ ) электрического и магнитного полей, заключенных в данном объеме, изменяется во времени. Скорость ее уменьшения равна:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\overline{\mathbf{E}\mathbf{D}}}{2} + \frac{\overline{\mathbf{H}\mathbf{B}}}{2} \right) dV.$$

После серии преобразований [2] в итоге получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}) = \int_V \gamma \overline{\mathbf{E}}^2 dV + \int_V \overline{\delta}_{\text{пер}} \overline{\mathbf{E}} dV + \oint_S [\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{H}}] d\overline{\mathbf{s}}.$$

Первый интеграл в правой части полученного уравнения представляет собой энергию, поглощаемую в объеме  $V$  в единицу времени вследствие конечной проводимости среды, т.е. энергию, переходящую в тепло в тех частях объема  $V$ , где среда обладает удельной проводимостью  $\gamma$  и где, следовательно, существуют токи проводимости.

Второй интеграл представляет собой работу, затрачиваемую в единицу времени на ускорение свободных заряженных частиц в объеме  $V$ , т.е. на увеличение кинетической энергии этих частиц в тех частях объема  $V$ , где существуют токи переноса свободных заряженных частиц. Если имеет место столкновение этих частиц с молекулами вещества, то часть сообщенной им кинетической энергии также переходит в тепло.

Наличие третьего интеграла показывает, что не вся убыль энергии электрического и магнитного полей в объеме  $V$  превращается внутри этого объема в тепло и в кинетическую энергию свободных заряженных частиц. Величина этого третьего интеграла представляет собой мощность, численно равную той энергии, которая передается в единицу времени из объема  $V$  сквозь поверхность  $s$ .

Таким образом, мощность потока электромагнитной энергии сквозь поверхность  $s$  выражается в виде

$$p = \oint_S [\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{H}}] d\overline{\mathbf{s}} = \oint_S \overline{\mathbf{S}} d\overline{\mathbf{s}}.$$

Отсюда следует, что удельная мощность потока электромагнитной энергии, численно равная количеству энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны, может быть представлена вектором

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Данные результаты получены в предположении, что в области  $V$  не совершается механическая работа по перемещению в пространстве заряженных проводящих тел и проводящих контуров с токами, а также по перемещению отдельных частей среды, не однородных в электрическом и магнитном отношении. Это предположение заключалось в том, что величины  $\gamma$ ,  $\mu$ , и  $\epsilon$  были приняты постоянными в каждой точке пространства. Следовательно, все части неоднородной среды и, в частности, проводники предполагались неподвижными. Кроме того, не было предположено существование в области  $V$  каких-либо источников электродвижущей силы. Полученный результат представляет собой выражение закона сохранения энергии к такому случаю.

В более общем случае внутри области  $V$  могут существовать источники электромагнитной энергии. Понятно, что совершаемая этими источниками работа идет на изменение запаса энергии в магнитном и электрическом полях в

объеме  $V$ , на выделение тепла в этом объеме, на увеличение кинетической энергии находящихся там свободных заряженных частиц и что, кроме того, часть этой работы соответствует энергии, передаваемой за пределы области сквозь поверхность  $s$ .

### **5.3. Излучение электромагнитных волн антенной.**

#### **Опыты Г.Герца. Работы П.Н. Лебедева.**

#### **Изобретение радио А.С. Поповым**

Всякая цепь переменного тока, строго говоря, излучает электромагнитные волны. Это принципиальное положение следует из решения уравнений электромагнитного поля, которое может быть получено для контуров той или иной формы. Мы остановимся лишь на некоторых общих соображениях, связанных с вопросом об излучении электромагнитных волн.

Предположим, что ток в некотором контуре увеличивается от нуля до конечного значения и затем вновь уменьшается до нуля. Если увеличивать ток в контуре бесконечно медленно, то потокосцепление самоиндукции  $\Psi$  при токе  $i$  принимает то значение, которое оно имеет при той же величине установившегося и весьма длительно существующего постоянного тока. Энергия, израсходованная внешним источником э.д.с. при увеличении тока и равная

$$A = \int i \frac{d\Psi}{dt} dt = \int i d\Psi,$$

Преобразуется при этом в энергию магнитного поля. При бесконечно медленном уменьшении тока в контуре вся энергия, запасенная в магнитном поле, возвращается обратно источнику э.д.с. Однако полный возврат энергии поля источнику э.д.с. имеет место только при бесконечно медленном изменении тока. При конечной же скорости установления и уменьшения тока часть энергии уносится излученной электромагнитной волной.

Самый факт излучения связан с тем, что скорость распространения электромагнитного поля имеет конечное значение. Пусть в момент времени  $t=0$  ток в контуре начинает увеличиваться. До момента  $t=0$  ток в контуре отсутствовал. К моменту времени  $t_1$ , когда ток в контуре достигает максимального значения, электромагнитное поле успевает распространиться только на конечное расстояние от контура равное  $vt_1$ . Если вслед за тем ток в контуре уменьшается, то энергия поля частично возвращается источнику. Однако граница электромагнитного поля продолжает распространяться в прежнем направлении с той же скоростью  $v$ , и к моменту времени  $t_2$ , когда ток в контуре станет вновь равен нулю, поле распространиться на расстояние от контура, равное  $vt_2$ . Поэтому энергия поля не возвращается полностью источнику э.д.с. Часть энергии оказывается связанной с электромагнитной волной, свободно распространяющейся в пространстве.

Из сказанного ясно, что количество энергии излученной волны за некоторый промежуток времени зависит от скорости изменения тока в контуре. При постоянном токе и постоянных зарядах излучение не имеет места. Всякий контур, в котором протекает переменный ток, принципиально говоря, излучает

электромагнитные волны. Однако при промышленной частоте  $f = 50$  Гц в системах, с которыми мы имеем дело в технических устройствах, количество энергии излученной волны практически ничтожно, и при расчетах мы эту энергию не принимаем во внимание. Излучение незначительно и в диапазоне звуковых частот. Поэтому в радиотехнике используются высокие частоты приблизительно от  $f = 10^5$  Гц и выше.

Способность контура к излучению сильно зависит от его геометрической конфигурации. Для увеличения этой способности необходимо создать такие условия, чтобы магнитное и электрическое поля, связанные с переменным током и переменным напряжением в контуре, были распределены в одной и той же области пространства, окружающего контур. Так, например, контур, содержащий катушку индуктивности с плотно навитыми витками обмотки и конденсатор с небольшим расстоянием между пластинами, обладает весьма слабой способностью к излучению, т.к. основное магнитное поле и основное электрическое поле сосредоточены в разных областях пространства. Рассмотрим контур, состоящий из кольцевого проводника, замкнутого на конденсатор. Излучение такого контура также будет незначительным. Магнитное поле распределено вдоль контура, но основное электрическое поле остается сосредоточенным в небольшом пространстве между обкладками конденсатора. Но если раздвинуть обкладки на возможно большее расстояние друг от друга, выпрямив соединяющий их провод, то электрическое и магнитное поля оказываются распределенными в одной и той же области пространства. Такая система обладает высокой способностью к излучению.

Первые опыты, экспериментально подтвердившие теорию Максвелла, были поставлены Герцем. Основной колебательный контур, так называемый вибратор, которым пользовался Герц, по существу был подобен контуру, рассмотренному выше. Обкладки конденсатора, выполненные либо в виде пластин, либо в виде шаров, могли передвигаться вдоль направляющих стержней, чем достигалось изменение емкости системы. Чтобы иметь возможность зарядить конденсатор, в проводе, соединяющем его обкладки, был образован между двумя маленькими шариками искровой промежуток. Обкладки конденсатора Герц присоединял ко вторичным зажимам индукционной катушки. Каждое прерывание тока в первичной обмотке катушки вызывало импульс э.д.с. во вторичной обмотке. Конденсатор заряжался до напряжения, при котором проскакивала искра между шариками. Заряженный конденсатор оказывался коротко замкнутым через искру, и в системе вибратора возникали колебания весьма высокой частоты. Частота колебаний зависела от емкости и индуктивности вибратора. Эти колебания весьма быстро затухали, т.к. их энергия расходовалась на излучение и на выделение тепла в контуре.

Для обнаружения электромагнитных волн, излученных вибратором, Герц применял так называемый резонатор, состоявший из колебательного контура, снабженного искровым промежутком. При настройке резонатора в резонанс с частотой электромагнитных колебаний в вибраторе, в контуре резонатора возникали достаточно сильные колебания, вызывавшие проскакивание искры в его искровом промежутке. По длине этой искры можно было судить об интенсив-

ности электромагнитного поля в месте расположения резонатора. Герцу удалось обнаружить электромагнитное излучение на расстоянии в двенадцать метров от вибратора, имеющего геометрические размеры порядка одного метра.

Опыты Герца показали, что электромагнитные волны распространяются в соответствии с законами, которые вытекают из теории Максвелла. Эти опыты подтвердили также гипотезу Максвелла об электромагнитной природе света. Направляя излучение вибратора на большую металлическую пластину нормально к ее поверхности, Герц наблюдал стоячие волны, образующиеся в результате наложения на прямую волну волны, отраженной от пластины. Обнаруживая резонатором узлы и пучности колебаний в стоячей волне, он получал возможность измерять длину волны и, зная частоту электромагнитных колебаний в вибраторе, мог вычислить скорость распространения электромагнитных волн. Эта скорость оказалась равной скорости света.

Герц обнаружил, что электромагнитные волны, излучаемые вибратором, отражаются от металлических зеркал по тем же законам, по которым происходит отражение от зеркала и светового луча, и наблюдал также преломление электромагнитной волны при прохождении ее сквозь большую призму, сделанную из асфальта.

Блестящие опыты по исследованию распространения и преломления в различных средах электромагнитных волн и по экспериментальному доказательству электромагнитной природы света были произведены выдающимся физиком-экспериментатором П. Н. Лебедевым. П. Н. Лебедев впервые осуществил в созданной им лаборатории вибратор весьма малых размеров, который излучал короткие волны, имеющие длину волны меньше одного сантиметра. Он осуществил также резонатор с термопреобразователем, позволяющим принимать столь короткие волны. Герц, оперировавший волнами, имеющими длину порядка метра, вынужден был создавать призмы и зеркала больших размеров. П. Н. Лебедев в своей установке получил возможность пользоваться преломляющими и отражающими волны устройствами весьма малых размеров. Это не только сделало всю экспериментальную установку не громоздкой, но и открыло новые возможности для исследования. Оказалось возможным исследовать прохождения электромагнитных волн через кристаллические тела. Результаты этого замечательного экспериментального исследования П. Н. Лебедев опубликовал в 1895 г. в работе под названием «о двойном преломлении лучей электрической силы».

Мировую славу принесли П. Н. Лебедеву его блестящие опыты, в которых он впервые экспериментально доказал давление света. В первых опытах, успешно завершённых в 1900 г., П. Н. Лебедев обнаружил и измерил давление света на твердые тела. В последующих еще более трудных опытах, завершившихся в 1910 г., П. Н. Лебедев экспериментально доказал существование светового давления на газы. Результаты экспериментальных работ П. Н. Лебедева оказались в согласии с выводами максвелловой теории электромагнитного поля.

Имеющее мировое значение изобретение первого радиотелеграфа было сделано выдающимся русским физиком и электротехником А. С. Поповым. А.

С. Попову принадлежит заслуга создания первого радиотелеграфа и применения радиосвязи для практических целей. А. С. Попов создал первый приемник радиотелеграфных сигналов. В этом приемнике он использовал для регистрации проходящих электромагнитных волн так называемый когерер, представляющий собой стеклянную трубку с металлическим порошком. Такая трубка имеет весьма большое электрическое сопротивление, но при нахождении в месте расположения электромагнитных волн ее сопротивление резко падает. включив такую трубку в цепь источника э.д.с. , можно по резкому увеличению тока судить о появлении электромагнитных волн. Однако после прекращения действия электромагнитных волн сопротивление трубки вновь не восстанавливается и для этого трубку требуется встряхнуть. А. С. Попов ввел в свой приемник устройство для автоматического встряхивания трубки, действующее под влиянием тока, возникающего в цепи трубки в результате прохождения электромагнитной волны. Таким образом, трубка автоматически приводилась в состояние готовности зарегистрировать новый сигнал. Это изобретение сразу же дало возможность регистрировать сигналы азбуки Морзе.

Для увеличения чувствительности приема А. С. Попов первый предложил использовать антенну – вертикальный провод, одним концом присоединенный к приемному устройству. Первоначально А. С. Попов применял свое приемное устройство для регистрации приближающихся грозových разрядов, в связи с чем и назвал изобретенное им устройство грозоотметчиком. Затем он применил это устройство для осуществления радиосвязи в военно-морском деле.

Официальной датой изобретения радио принято считать 7 мая 1895 г., когда А. С. Попов выступил с публичным докладом на заседании физического отделения Русского Физико-химического общества на тему «Об отношении металлических порошков к электромагнитным колебаниям». На этом докладе А. С. Попов продемонстрировал действие своего приемного устройства.

Современные антенны передающих и приемных радиостанций осуществляются по тому же принципу, который был положен в основу конструкции первой антенны А. С. Попова. При конструировании антенны ставится задача создания развернутого колебательно контура. Антенны, расположенные над поверхностью земли, обычно состоят из вертикальных проводов, соединенных с более или менее развитой горизонтальной сетью проводов. В случае передающей радиостанции нижний конец антенны присоединяют к одному из зажимов катушки генератора электромагнитных колебаний высокой частоты. Другой зажим катушки соединяют с землей через специальную систему заземлителя. Э.д.с. высокой частоты, возбужденная в катушке генератора, создает мощные колебания тока в антенне, контур которой обычно настраивают в резонанс с частотой колебания в генераторе.

Мощность излучения антенны может быть вычислена следующим путем. Если антенна расположена над поверхностью хорошо проводящей земли, то можно представить себе землю замененной зеркальным изображением антенны [1]. Окружив антенну и ее зеркальное изображение замкнутой поверхностью  $s$ , применим к объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью положения, развитые в предыдущем параграфе. Подразумевая под величиной  $p_e$  только мощность,

равную скорости перехода энергии из антенны в окружающее ее поле, т.е. исключая из рассмотрения потери энергии окружающего антенну пространства  $\gamma = 0$  и  $\rho = 0$ ,  $\delta_{\text{пер}} = 0$ , получаем:

$$p_e - \frac{\partial}{\partial t}(W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}) = \oint_S [\bar{E} \cdot \bar{H}] d\bar{s} = \oint_S \bar{S} d\bar{s} = \oint_S S_n ds,$$

где  $S_n$  – нормальная к поверхности  $s$  составляющая вектора Пойтинга.

Изменение запаса энергии полей  $W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}$  в объеме  $V$  за целый период колебаний тока в антенне равно нулю. Поэтому средняя мощность волны, излученной антенной и ее зеркальным изображением, равна:

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^T p_e dt = \int_S \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_n dt \right) ds = \int S_{\text{ср}} ds,$$

Причем  $S_{\text{ср}}$  есть среднее арифметическое за период колебаний значение нормальной составляющей вектора Пойтинга. Таким образом, для вычисления мощности излучения необходимо определить в каждой точке поверхности  $s$  для каждого момента времени вектор Пойтинга и, следовательно, найти величины  $E$  и  $H$  путем решения системы уравнений электромагнитного поля.

#### 5.4. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

Передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся в диэлектрике вдоль проводов линии. Провода линии служат направляющими электромагнитного поля.

Представим простейшую электрическую цепь, содержащую резистор  $r$  (приемник) и соединительные провода (линия). Окружим часть линии вместе с приемником замкнутой поверхностью  $s$ . На основании изложенного выше (п.5.2), можем написать:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}) = \int_V \gamma \bar{E}^2 dV + \oint_S [\bar{E} \cdot \bar{H}] d\bar{s},$$

если в пространстве, окружающем провода линии нет свободных зарядов ( $\rho = 0$ ,  $\delta_{\text{пер}} = 0$ ).

Если  $V$  – объем области, заключенной внутри поверхности  $s$ , то вектор  $d\bar{s}$  должен быть направлен по нормали  $N$ , внешней к этой области. Если мы желаем считать положительной энергию, передаваемую внутрь области  $V$  сквозь поверхность  $s$ , то необходимо изменить направление положительной нормали на обратное, т.е. принять положительной внутреннюю нормаль  $N_1$ . В результате получаем:

$$\oint_S [\bar{E} \cdot \bar{H}] d\bar{s}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(W_{\text{Э}} + W_{\text{М}}) + \int_V \gamma \bar{E}^2 dV.$$

Последнее выражение показывает, что приращение энергии электрического и магнитного полей в объеме  $V$  и поглощение энергии в приемнике и в проводах линии, расположенных в этом объеме, происходит за счет передачи электромагнитной энергии в область  $V$  сквозь ограничивающую ее поверхность  $s$ .

В частном случае, когда ток в цепи постоянный, энергия полей не изменяется во времени. Следовательно, последнее уравнение приобретает вид

$$\oint_s [\vec{E} \cdot \vec{H}] d\vec{s}_1 = \int_v \gamma \vec{E}^2 dV.$$

Т.е. энергия, поглощаемая в цепи в форме тепла, равна энергии, передаваемой в область  $V$  через поверхность  $s$ .

Таким образом, энергия, выделяемая в проводнике в форме тепла, передается в проводник сквозь его поверхность из диэлектрика, окружающего проводник.

В простейшем случае отрезка  $l$  прямолинейного провода кругового сечения радиуса  $R$  это положение подтверждается непосредственным вычислением напряженностей полей на поверхности провода. Вычислим поток электромагнитной энергии сквозь поверхность  $s$  отрезка провода. Имеем:  $H = i/(2\pi R)$  и  $E_t = ir/l$ , причем  $E_t$  – составляющая напряженности электрического поля по касательной к поверхности провода и  $r$  – сопротивление отрезка провода. Следовательно, нормальная составляющая вектора Пойтинга равна:

$$S_n = E_t H = \frac{i^2 r}{2\pi R l}.$$

Величина  $2\pi R l = s$  есть цилиндрическая поверхность отрезка провода. Мощность, передаваемая в провод сквозь его поверхность из окружающей среды, оказывается равной:

$$S_n s = i^2 r.$$

При исследовании однородных линий было показано [3], что скорость движения волн электрического тока и напряжения вдоль линии равна  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , где  $L$  и  $C$  индуктивность и емкость линии на единицу ее длины. Так как энергия передается электромагнитным полем в диэлектрике, окружающем провода линии, то скорость  $v$  должна равняться скорости движения электромагнитной волны в диэлектрике. Следовательно, должно иметь место равенство:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика. В этом выражении  $l$  есть внешняя индуктивность, определяемая магнитным потоком в диэлектрике. Например, для кабеля имеем [4]:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Следовательно,

$$LC = \mu\epsilon.$$

## 5.5. Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб

В предыдущем разделе мы видели, что провода линии передачи служат направляющими электромагнитного поля, движущегося в диэлектрике, окружающем эти провода. Однако такую направляющую роль провода линии могут выполнять только при условии, что длина электромагнитной волны в диэлектрике во много раз превосходит расстояние между проводами, т.е. при условии, что частота напряжения и тока не слишком велика. В противном случае провода линии будут весьма эффективно излучать электромагнитное поле в окружающее пространство, т.е. будут действовать подобно антенне.

Таким образом, при весьма высоких частотах, соответствующих так называемым ультракоротким волнам с длиной волны порядка нескольких сантиметров и менее, которыми пользуется современная радиотехника, уже становится затруднительным передавать энергию по линиям обычного вида. Затруднения при этом возникают еще потому, что при столь больших частотах в изоляции проводов возникают значительные потери энергии. При креплении проводов на отдельных изоляторах мы имеем в местах расположения изоляторов среду с повышенной диэлектрической проницаемостью, что превращает линию в своего рода фильтр, срезающий высокие частоты.

В связи со всем сказанным относительно свойств линии передачи при весьма высоких частотах представляет большой интерес возможность передачи электромагнитным полем энергии внутри металлических труб.

Стенки трубы, если они выполнены из материала с весьма высокой удельной проводимостью, не пропускают сквозь себя электромагнитные волны. В предельном случае трубы со стенками из сверхпроводящего материала электрические токи, возникающие в стенках трубы, не создают падения напряжения, и, следовательно, касательная составляющая напряженности электрического поля на внутренней поверхности стенок всюду должна быть равна нулю. Следовательно, вектор Пойтинга не имеет составляющей, нормальной к поверхности стенок. Электромагнитное поле не проникает внутрь стенок и может, при надлежащих условиях, передавать энергию только в направлении оси трубы.

При детальном анализе условий распространения электромагнитных волн вдоль трубы [1] выясняется одна интересная и важная особенность, а именно: вдоль трубы возможно распространение только коротких волн, для которых длина волны в свободном пространстве одного порядка или меньше поперечных размеров полости трубы. В связи с этим такие трубы получили применение в радиотехнических устройствах ультракоротких волн для передачи электромагнитной энергии от генератора электромагнитных колебаний к излучающему устройству и получили название **волноводов**. Длина волноводов обычно не велика, и, следовательно, потери энергии в их стенках, вызванные конечной удельной проводимостью материала стенок, незначительны. Поэтому при исследовании вопроса о распространении электромагнитных волн в волноводах обычно предполагают, что удельная проводимость материала стенок бесконечно велика, не допуская при этом существенных отклонений от реальных условий.

## 6. Переменное электромагнитное поле в проводящей среде

### 6.1. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, подходит нормально к плоской поверхности, ограничивающей с одной стороны проводящую среду. Будем предполагать, что проводящая среда простирается во всех остальных направлениях до бесконечности. Падающая волна частью отражается от поверхности проводящей среды, частью проникает в эту среду и поглощается в ней. Рассмотрим волну, прошедшую сквозь поверхность раздела и распространяющуюся в проводящей среде. Направим ось  $OZ$  вглубь проводящей среды нормально к ее поверхности. Плоскость  $XOY$  совместим с этой поверхностью.

В проводящей среде практически всегда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. В таком случае уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \bar{\delta} = \gamma \bar{\mathbf{E}}; \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t}.$$

Предположим, что величины напряженностей полей не имеют составляющих, постоянных во времени.

Направив ось  $Ox$  по вектору  $\mathbf{E}$  и учитывая, что в плоской волне  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от  $x$  и  $y$ , получаем:

$$0 = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \text{т.е. } H_x = \text{const} = 0.$$

Предположим, что напряженности электрического и магнитного полей изменяются во времени по гармоническому закону. Тогда после некоторых преобразований для комплексной амплитуды напряженности магнитного поля получаем:

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_m.$$

Решение этого линейного уравнения с постоянным коэффициентом имеет вид

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-az} + A_2 e^{+az}, \quad \text{где } a = \sqrt{j\omega\mu\gamma}.$$

Так как  $\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$ , что легко проверяется возведением этого равенства в квадрат, то, вводя новое обозначение

$$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = k,$$

получаем:

$$a = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1 + j)k.$$

Второй член в выражении для  $\dot{H}_m$  при  $A_2 \neq 0$  увеличивается до бесконечности при возрастании  $z$ , так как вещественная часть  $a$  положительна. напряженность поля не может расти до бесконечности, и, следовательно, мы должны принять  $A_2 = 0$ . Таким образом,

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-az}.$$

Постоянная  $A_1$  получается из условия, что при  $z = 0$  величина  $\dot{H}_m$  имеет заданное значение  $\dot{H}_{me} = H_{me} e^{j\psi_{He}}$  на поверхности среды. Все величины, относящиеся к поверхности среды, будем отмечать индексом  $e$ . В результате для напряженности магнитного поля имеем

$$H_y = H_{me} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz).$$

Выражение для напряженности электрического поля после некоторых преобразований приобретает вид

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_{me} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}).$$

Плотность тока изменяется по такому же закону, как напряженность электрического поля, т.к.  $\delta = \gamma E$ .

Волновое сопротивление в случае проводящей среды оказывается комплексным и равным:

$$Z = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1+j)k}{\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Располагая этим выражением, можно найти соотношения между напряженностями волн: падающей из диэлектрика на поверхность проводящей среды, отраженной от поверхности среды и преломленной, т.е. прошедшей в проводящую среду. Для этой цели могут быть использованы формулы, известные из анализа распространения периодических волн в однородной линии, замкнутой в конце на сопротивление  $Z$  [1].

При этом для волнового сопротивления падающей и отраженной волн в диэлектрике получаем:

$$z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}, \text{ где } \mu_1 \text{ и } \epsilon_1 \text{ – абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемости диэлектрика.}$$

цаемости диэлектрика.

В предельном случае, когда удельная проводимость проводящей среды бесконечна, получаем  $Z = 0$ ,

$$\dot{E}_{\psi 1} = -\dot{E}_{\phi 1} \text{ и } \dot{H}_{\psi 1} = -\dot{H}_{\phi 1},$$

И, следовательно, на поверхности раздела

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\phi 1} + \dot{E}_{\psi 1} = 0 \text{ и } \dot{H}_1 = 2\dot{H}_{\phi 1},$$

т.е. волна полностью отражается от поверхности сверхпроводящей среды. В диэлектрике при этом в результате интерференции падающей и отраженной волны устанавливаются стоячие волны. Этот случай аналогичен режиму короткого замыкания однородной линии передач.

## 6.2. Длина волны и затухание волны

Полученные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, прежде всего свидетельствуют о том, что амплитуды напряженностей по мере проникновения волны в глубь проводящей среды в случае плоской волны убывают по показательному закону. Кроме того, начальная фаза колебаний изменяется пропорционально  $z$ , причем по мере проникновения волны в глубь среды колебания все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности среды. Во всех точках среды, в том числе и на ее поверхности, напряженность электрического поля опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол  $\pi/4$ .

**Длина волны**  $\lambda$ , т.е. расстояние, на котором фаза изменяется на  $2\pi$ , определяется из условия:

$$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}\lambda = 2\pi, \text{ откуда находим: } \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = 2\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{f\mu\gamma}}, \text{ так как } \omega = 2\pi f,$$

где  $f$  – частота колебаний. Отношение амплитуд напряженностей полей на расстоянии  $z = \lambda$  от поверхности среды к их значениям на поверхности равно 0,00185, т.е. на этом расстоянии волна практически полностью затухает.

Известно [1]. Что при промышленной частоте  $f = 50$  Гц электромагнитная волна проникает в медь на несколько сантиметров, а в ферромагнитное вещество всего лишь на несколько миллиметров. При радиочастотах глубина проникновения измеряется в меди десятыми долями миллиметра, а в ферромагнитном веществе – сотыми долями миллиметра. При высоких частотах глубина проникновения волны в морской воде и даже в сухой почве незначительна.

Среднее значение  $S_{cp}$  вектора Пойтинга за период колебаний равно:

$$S_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2} e^{-2\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}z} \cos \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, на расстояние от поверхности, равное  $z = \lambda/2$ , проникает только 0,185% энергии, поглощаемой в проводящей среде.

## 6.3. Явление поверхностного эффекта

Переменный электрический ток распределяется неравномерно по сечению проводов, причем плотность тока имеет наибольшее значение на поверхности провода и убывает по мере удаления от поверхности в глубь провода. Это явление называется **поверхностным эффектом**.

Переменный магнитный поток в телах, обладающих конечной проводимостью, вызывает **вихревые токи**, которые ослабляют магнитный поток внутри проводящего тела. Этот эффект иногда называют размагничивающим действием вихревых токов. По существу и в этом случае мы имеем дело с поверхностным эффектом.

Явление поверхностного эффекта можно объяснить. Рассматривая проникновение электромагнитного поля в глубь провода из пространства, окружающе-

го провод. Ранее было показано, что потери энергии на нагревание провода током следует рассматривать как поглощение внутри провода электромагнитной энергии, передаваемой в тело провода через его поверхность из окружающего пространства. Из предыдущего параграфа видно, что переменная электромагнитная волна затухает по мере проникновения вглубь проводящей среды. Поэтому вполне естественно, что амплитуды плотности тока и напряженностей электрического и магнитного полей при переменном токе и при переменном потоке имеют наибольшее значение у поверхности тел из проводящего материала.

Рассмотрим прямолинейный провод кругового сечения и предположим, что обратный провод удален от него на столь большое расстояние, что его влиянием на распределение тока в рассматриваемом проводе можно пренебречь. Пусть длина волны  $\lambda$  в веществе провода значительно меньше радиуса  $R$  сечения провода. В таком случае, поскольку на длине  $\lambda$  волна в проводе практически полностью затухает, можно пренебречь кривизной поверхности провода, считать волну, проникшую в тело провода, плоской и воспользоваться зависимостями, полученными выше.

В этом случае, при резком проявлении поверхностного эффекта, отношение активного сопротивления провода при переменном токе к его сопротивлению при постоянном токе может быть определено по формуле:

$$\frac{r}{r_0} = \frac{s}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}},$$

где  $r$  – активное сопротивление провода при переменном токе;  
 $r_0$  – сопротивление провода при постоянном токе;  
 $s$  – площадь сечения провода;  
 $u = 2\pi R$ ,  $R$  – радиус сечения провода.

Поверхностный эффект необходимо учитывать при анализе определенных электротехнических задач, связанных с переменными токами. Вместе с тем, данное явление может быть полезно и весьма остроумно использовано при решении серьезных проблем. Например, увеличение пускового момента асинхронных двигателей, оснащенных ротором с глубокими пазами или ротором с двойной «беличьей клеткой».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретические основы электротехники: в 3 т.: учебник для вузов. Т.3.- 4-е изд./ К.С. Демирчян [ и др.].-СПб.:Питер, 2003.-377 с.:ил.
2. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля/ В.А. Говорков.- 3-е изд.; перераб. и доп.- М.: Энергия, 1968.
3. Теоретические основы электротехники: в 3 т.: учебник для вузов. Т.2.- 4-е изд./ К.С. Демирчян [ и др.]. –СПб.: Питер, 2003.
4. Теоретические основы электротехники: в 3 т.: учебник для вузов. Т.1.-4-е изд./ К.С. Демирчян [ и др.].Р-СПб.:Питер, 2003.-463 с.:ил.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Уравнения электромагнитного поля в интегральной форме	3
2.	Уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме	4
2.1.	Закон полного тока в дифференциальной форме	4
2.2.	Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме	5
2.3.	Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме	6
2.4.	Дифференциальная форма принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока	7
2.5.	Полная система уравнений электромагнитного поля	8
3.	Электростатическое поле	9
3.1.	Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала	9
3.2.	Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел	11
3.3.	Определение потенциала по заданному распределению зарядов	14
3.4.	Уравнения Пуассона и Лапласа	15
3.5.	Основная задача электростатики	16
3.6.	Электростатическое экранирование	16
3.7.	Расчет электрической емкости. Емкость между круговыми цилиндрами. Емкость двухпроводной линии передач	17
4.	Магнитное поле постоянных токов	20
4.1.	Вихревой характер магнитного поля. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов	20
4.2.	Векторный потенциал магнитного поля токов	21
4.3.	Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов	22
4.4.	Намагничивание ферромагнитного материала	23
4.5.	Намагничивание ферромагнитных тел	24

4.6.	Магнитное экранирование	24
4.7.	Принцип расчета постоянного магнита	25
4.8.	Расчет индуктивностей. Общие выражения для взаимной и собственной индуктивностей	26
5.	Переменное электромагнитное поле в диэлектрике	31
5.1.	Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны	31
5.2.	Вектор Пойтинга	33
5.3.	Излучение электромагнитной волны антенной. Опыты Г.Герца. Работы П.Н. Лебедева. Изобретение радио А.С. Поповым	36
5.4.	Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии	40
5.5.	Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб	42
6.	Переменное электромагнитное поле в проводящей среде	43
6.1.	Плоская электромагнитная волна в проводящей среде	43
6.2.	Длина волны и затухание волны	45
6.3.	Явление поверхностного эффекта	45
	Список литературы	47

Редактор В.Л. Родичева

Подписано в печать 14.10.2013. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая.  
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд.л.3,10. Тираж 75 экз. Заказ

ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный  
химико-технологический университет»

Отпечатано на полиграфическом оборудовании  
кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВПО «ИГХТУ»  
153000, г. Иваново, Шереметевский пр., 7