В. В. Шергин

Теория вероятностей
и
математическая статистика

Учебное пособие

Иваново
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ивановский государственный химико-технологический университет

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Иваново 2018

Шергин, В. В.

Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.В. Шергин; Иван. гос. хим-технол. ун-т. – Иваново, 2017. – 76 с.

Учебное пособие содержит основные понятия и факты теории вероятностей и математической статистики. Рассматриваются вопросы: действия над случайными событиями и вычисление их вероятностей; вероятностные распределения; основы статистической обработки результатов наблюдений; оценка параметров, проверка статистических гипотез. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов дневной формы обучения по направлениям 38.03.05 «Бизнес-информатика», 38.03.01 «Экономика»; может быть использовано также при освоении курса «Математика», направление 38.03.02 «Менеджмент».

Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного химико-технологического университета

Рецензенты:

кафедра высшей математики ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет»;
кандидат экономических наук, доцент кафедры экономического анализа и бухгалтерского учета С. В. Урбене (ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»)

Часть1. Случайные события и их вероятности

Раздел 1.1. Предмет и методы теории вероятностей. Понятие вероятности. Аксиомы теории вероятностей. Действия над случайными событиями (алгебра событий). Классическое определение вероятности случайного события. Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики

1. Предмет и методы теории вероятностей. Понятие вероятности.

Многим интуитивно понятно, что случайным событиям можно приписать некую числовую меру, которая выражает нашу веру в исполнение предсказания об их появлении или непоявлении. Именно поэтому в обиходной речи можно услышать такие высказывания относительно различных событий, происходящих в нашей жизни: «пятьдесят на пятьдесят», т.е. появление данного случайного события или его непоявление *равновероятны*, или «спортсмен X имеет больше шансов на победу, чем спортсмен Y», т.е. победа *X более вероятна*, чем победа Y.

Однако, использование в разговорной речи слов «вероятно», «маловероятно», «равновероятно» и т.д. применительно к различным событиям часто совершенно бессмысленно. Например, говорят: «Завтра будет дождь с вероятностью 30%». Но если завтра действительно будет дождь, то это событие произошло и, следовательно, его вероятность равна 100%, а если завтра не будет дождя, то это событие не произошло, и тогда его вероятность равна 0%. Итак, наша фраза о предсказании погоды на завтра не несет никакой положительной информации, т.е. бессмысленна.

Почему же нельзя формулировать предсказание погоды в таком виде? Дело даже не в том, что вероятность дождя указана конкретным числом. Фраза вида «Вероятно (или маловероятно), что завтра будет дождь» также не несет никакой положительной информации о погоде на завтра по той же причине. Здесь существенно то, что день, погоду которого мы предсказываем, уникален, единственен. У нас нет возможности на эксперимент, позволяющий в неизменных условиях воспроизводить этот день и фиксировать исходы этого эксперимента.

Именно поэтому мы будем приписывать *вероятность* случайным событиям, связанным с исходами *только такого* эксперимента, который можно проводить в неизменных условиях неограниченное число раз.

Длительное изучение человечеством такого типа ситуаций позволило выявить так называемые статистические закономерности, то есть закономерности, проявляющиеся при анализе массовых случайных явлений. Простейшим и одновременно одним из наиболее важных примеров *является факт устойчивости относительных частот*. Пусть некоторый опыт проведен (при одинаковых условиях) N раз и при этом событие A произошло K раз. Относительной частотой события A называется W(A) – относительная доля числа тех случаев, когда A произошло: $W(A) = \frac{K}{N}$. Установлено, что при увеличении числа опытов N относительная частота становится примерно постоянной: $W(A) \approx const$.

В сущности, мы бы как раз и хотели определить этот предел ***до опыта***, то есть найти способ сопоставить случайному событию A число P(A) – вероятность этого события, сопоставить так, чтобы в каком-нибудь смысле можно было утверждать, что непременно будет $W(A) \approx P(A)$. Выясняется, что способ расчета вероятности прямо связан с конкретным содержанием проводимого опыта, но вместе с тем некоторые общие свойства вероятности должны присутствовать всегда. В математической теории вероятностей они получили название аксиом.

Аксиомы теории вероятностей

Далее случайные события будут обозначаться большими латинскими буквами из начала алфавита A, B, C (с индексами или без).

Случайное событие называется *достоверным* обозначается символом E, если при данных условиях оно происходит всегда.

Случайное событие, которое при данных условиях никогда не происходит, называется *невозможным* и обозначается символом Ø.

Два случайных события A и B назовем *несовместными*, если они не могут произойти одновременно (в данном эксперименте).

Суммой событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B (возможно, оба вместе). Сумма событий обозначается $A + B$, а также $A \cup B$ и называется еще объединением событий.

Если есть словесные формулировки для случайных событий A и B, то их *сумму* можно выразить с помощью словесной формулировки, которая возникает, если соединить словесные формулировки для A и B союзом *или*. Например, если бросаем игральную кость, А: «выпало четное число очков» и В: «выпало число очков, кратное трем», то тогда А+В - «выпало четное число очков *или* число очков, кратное трем».

Определение суммы нескольких случайных событий. Случайное событие C называется *суммой* случайных событий A_1, A_2, ..., A_k (обозначение:), $C = A_1 + A_2 +...+ A_k$, если C происходит тогда и только тогда, когда происходит *хотя бы одно* из этих случайных событий.

Пусть $P(A)$ – вероятность случайного события A.

Аксиома 1. Для любого случайного события A: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(E) = 1$.

Аксиома 3. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Аксиома 4. Вероятность суммы несовместных событий А и В равна сумме их вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

2. Действия над случайными событиями (алгебра событий). Далее определим операции над случайными событиями, которые позволяют из данных случайных событий получать новые, имеющие более сложную структуру.

Противоположное событие. Вероятность противоположного события. Случайное событие B называется *противоположным к* случайному событию A (обозначение: $B = \overline{A}$), если B происходит тогда и только тогда, когда *не происходит* случайное событие A. Если мы имеем словесную формулировку для случайного события A, то противоположное к нему случайное событие $\overline{A}$ можно выразить с помощью словесной формулировки, которая возникает, если присоединить к словесной формулировке для A отрицательную частицу *не* или словосочетание *неверно, что …* .

Отметим, что:

- противоположные события по определению несовместны;

- их сумма равна достоверному событию: $A + \overline{A} = E$ (если A *не происходит*, то происходит $\overline{A}$, и наоборот, то есть одно из этих двух событий происходит всегда).

Например, если бросаем игральную кость и A : «выпало четное число очков», то $\overline{A} =$ «*неверно, что* выпало четное число очков». Заметим, что множество исходов, благоприятных для $\overline{A}$, равно $\{1,3,5\}$; значит, $\overline{A}$ равно случайному событию B : «выпало нечетное число очков».

Теорема о вероятности противоположного случайного события. Для любого случайного события A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство. События A и $\overline{A}$ несовместны и $A + \overline{A} = E$; по аксиомам 2 и 4 получаем $1 = P(E) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, значит, верно требуемое равенство.

Произведение событий. Произведением случайных событий A и B называется событие, состоящее в том, что происходят оба события A и B одновременно. Обозначения: AB, $A{\cdot}B$, $A \cap B$, другое название – *пересечение событий*. Таким образом, C происходит тогда и только тогда, когда происходят оба случайных события A и B. Если мы имеем словесные формулировки для случайных событий A и B, то их произведение можно выразить с помощью словесной формулировки, если соединить словесные формулировки для A и B союзом «*и*». Например, пусть брошена игральная кость, событие A: «выпало четное число очков», событие B: «выпало число очков, кратное трем», тогда произведение AB = «выпало четное число очков *и* число очков, кратное трем», что соответствует единственному исходу $\{6\}$ и, следовательно, AB = «выпало шесть очков».

Отметим теперь некоторые свойства введенных нами действий.

$$\overline{E} = \emptyset \qquad A + E = E \qquad AE = A \qquad (A+B)C = AC + BC$$

$$\overline{\emptyset} = E \qquad A + \emptyset = A \qquad A \cdot \emptyset = \emptyset \qquad AB = BA$$

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{(A+B)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad \overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B} \qquad A+BC = (A + B)(A+C)$$

Отметим особо формулу $\overline{(A+B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, которую в словесной формулировке можно прочитать как «*противоположное к сумме равно произведению противоположных*» или: «*противоположное к хотя бы один из...*» это «*ни одного*».

3. Классическое определение вероятности случайного события

Пусть проводится (или может быть проведен) некоторый эксперимент (в данном контексте синонимами являются термины *опыт* или *испытание*), и A - случайное событие, которое связано с этим экспериментом. Проведем анализ возможностей, имеющих место (практически или теоретически) после проведения нашего эксперимента. Множество всех таких возможностей будем называть *множеством возможных исходов данного эксперимента*. При этом потребуем, чтобы каждый из этих исходов объективно имел столько же шансов осуществиться, сколько и любой другой. Будем говорить, что некоторый исход *реализует* случайное событие A, если оно происходит вместе с осуществлением этого исхода – и назовем данный исход *благоприятным* для A.

Например, пусть брошена игральная кость (в этом и состоит наш эксперимент, причем его можно провести чисто умозрительно). Множество U исходов этого эксперимента образуют следующие возможности: выпадение грани, на которой нанесена одна «точка» или для краткости, выпадение 1; выпадение 2; выпадение 3; выпадение 4; выпадение 5 и выпадение 6. Предпочесть какую-либо возможность другой нельзя, нет никаких объективных причин считать, что какая-либо грань имеет больше шансов выпасть, чем остальные. Совсем кратко обозначим $U = \{1,2,3,4,5,6\}$. Обозначим через n общее число исходов (в данном примере $n = 6$) и через m (или m_A) число исходов, реализующих случайное событие A, или, по-другому, благоприятных для A. Тогда *вероятностью случайного события A* называется число

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 1.1. Рассмотрим случайное событие A: «выпало число очков, кратное 3». Определяем число «благоприятных» исходов для случайного события A. Это событие происходит тогда, когда выпадает 3 или 6, значит, это множество $\{3, 6\}$, и поэтому $m_A = 2$. Получаем: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Рассмотрим теперь случайное событие B: «выпало четное число очков». Этому событию соответствует множество исходов $\{2,4,6\}$, поэтому $m_B = 3$. Значит, $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пусть теперь событие C – это: «выпало более, чем одно очко». Этому событию соответствуют исходы$\{2,3,4,5,6\}$, поэтому $m_C = 5$ и, следовательно, $P(C) = \frac{5}{6}$.

Можно показать, что введенное таким способом правило вычисления вероятности дает результаты, удовлетворяющие аксиомам 1 – 4. Действительно, поскольку для любого события $A : 0 \leq m_A \leq n$, то дробь $\frac{m_A}{n}$ не может быть отрицательной или превосходить единицу (аксиома 1); достоверному событию соответствуют все исходы, невозможному – ни одного, то есть $m_E = n, m_\emptyset = 0$, откуда следует выполнение аксиом 2 и 3; несколько более длинными рассуждениями доказывается, что для несовместных событий A и B $m_{A+B} = m_A + m_B$, что доказывает выполнение аксиомы 4.

4. Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики. Для подсчета общего числа исходов и числа исходов, благоприятных для данного случайного события, используются формулы и правила комбинаторики. В этом разделе определим те комбинации, которые будут использоваться для вычисления классической вероятности, и приведем формулы для подсчета их числа.

Перестановки. Комбинации, состоящие из одних и тех же n предметов и отличающихся друг от друга только порядком расположения этих предметов, называются *перестановками*.

Формула для вычисления числа перестановок из n предметов. Число различных перестановок из n предметов обозначается через P_n и может быть найдено по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Размещения. Комбинации, составленные путем выбора из данных n предметов каких-либо m предметов и расположением выбранных предметов в определенном порядке, называются *размещениями*. Таким образом, размещения отличаются друг от друга либо входящими в них предметами, либо порядком их расположения.

Формула для вычисления числа размещений m предметов из n. Число различных размещение m предметов из n обозначается через A_n^m.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\Lambda\ (n-m+1)$$

Заметим, что если $m = n$, то по определению мы получаем $A_n^n = P_n = n!$. В этом случае необходимо определить 0! = 1.

*Сочетания***.** Комбинации, составленные путем выбора из данных n предметов каких-либо m предметов без учета порядка следования их друг за другом, называются *сочетаниями*. Таким образом, сочетания отличаются друг от друга только входящими в них предметами (хотя бы одним).

Формула для вычисления числа сочетаний m предметов из n. Число различных сочетаний m предметов из n обозначается через C_n^m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!}$$

Примеры расчета числа различных комбинаций

Пример 1.2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 5, 6 и 9, используя каждую цифру только один раз?

Решение. Числа могут отличаться как образующими его цифрами, так и порядком следования этих цифр. Поэтому мы имеем дело с размещениями трех элементов из пяти элементов: $m = 3,\ n = 5,\ A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Пример 1.3. Сколькими способами можно взять 3 карандаша из коробки, содержащей 5 цветных карандашей?

Решение. Заметим, что комбинации, которые рассматриваются в данной задачи, отличаются друг от друга только входящими в них предметами. Поэтому мы имеем дела с сочетаниями. Например, комбинации *красный, желтый, зеленый* и *красный, зеленый, желтый* одинаковые как сочетания, но различные как размещения. Теперь найдем число способов:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

При вычислении *биномиальных коэффициентов* C_n^m полезно использовать следующие простейшие их свойства:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \qquad C_n^0 = C_n^n = 1; \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n; \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Принцип умножения. Если некоторое действие A можно совершить n способами (вариантами) и при этом для каждого способа осуществления действия A имеется ровно m способов (вариантов) выполнить другое действие B, то всего существует $m \cdot n$ способов осуществить совместно оба действия A и B.

Пример 1.4. Бросаем две игральные кости. Сколькими способами могут выпасть две грани на этих костях?

Решение. Действие A состоит в выпадении грани при бросании первой игральной кости, при этом возможен один из 6 вариантов (игральная кость имеет шесть граней, размеченных числами от 1 до 6, изображенных соответственным числом точек), т.е. $n = 6$. Действие B состоит в выпадении какой-либо грани при бросании второй игральной кости, при этом возможен также один из 6 вариантов, т.е. $m = 6$. Таким образом, в силу принципа умножения существует $m \cdot n = 6 \cdot 6 = 36$ способов, чтобы выполнить оба действия A и B, т.е две грани на двух игральных могут выпасть 36-ю способами.

Примеры вычисления вероятностей случайных событий
с помощью подсчета исходов

Пример 1.5. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих случайных событий:

B_1**:** «Выпало два очка»; B_2**:** «Выпало пять очков»;
B_3**:** «Выпало нечетное число очков»; B_4**:** «Выпало более восьми очков».

Решение. Для всех случайных событий общее число исходов равно $n = 36$ (см. выше пример на «принцип умножения»). При бросании двух игральных костей два очка могут выпасть только в одном случае, когда на первой и на второй костях выпадает по единице. Итак, $m_{B_1} = 1$ и $P(B_1) = \frac{m_{B_1}}{n} = \frac{1}{36}$. Пять очков могут выпасть, когда выпадает на первой кости 1 и на второй 4, на первой 2 и на второй 3, на первой 3 и на второй 2, на первой 4 и на второй 1, т.е. пять очков выпадает в четырех случаях, поэтому $m_{B_2} = 4$ и $P(B_2) = \frac{m_{B_2}}{n} = = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Нечетное число очков выпадает в том случае, когда на первой кости – четное число очков (2 или 4 или 6), а на второй – нечетное (1 или 3 или 5), или наоборот. Таким образом, $m_{B_3} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ и $P(B_3) = \frac{m_{B_3}}{n} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Наконец, более восьми очков выпадает в том случае, когда в сумме имеем числа 9, 10, 11 или 12. Девять очков - когда выпадают числа 3 и 6, 4 и 5, 5 и

4, 6 и 3, т.е. в четырех случаях; десять очков - когда выпадает 4 и 6, 5 и 5, 6 и 4, т.е. в трех случаях; одиннадцать очков - когда выпадает 5 и 6, 6 и 5, т.е в двух случаях; и двенадцать очков выпадает только в одном случае (шесть и шесть). Итак, $m_{B_4} = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$ и $P(B_4) = \frac{m_{B_4}}{n} == \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Пример 1.6. Урна содержит 12 шаров, из которых 5 белых и 7 черных. Случайным образом из урны взяли 4 шара. Найти вероятности того, что среди вынутых шаров окажется:

C_1: «2 белых шара»; C_2: «не менее двух белых шаров»;

C_3: «только черные шары»; C_4: «хотя бы один белый шар».

Решение. Очевидно, что комбинации из взятых наугад шаров могут отличаться друг от друга только составом, т.е. образуют сочетания. Таким образом, общее число исходов данного эксперимента равно числу сочетаний из 12 шаров по четыре:

$$n = C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

Если комбинация из четырех шаров содержит ровно два белых шара, то она содержит и ровно два черных шара. Два белых шара можно взять из 5 белых шаров числом $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ способов, и два черных – из 7 черных числом $C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ способом. По комбинаторному принципу умножения в этом случае $m_{C_1} = 10 \cdot 21 = 210$. Тогда $P(C_1) = \frac{210}{495}$.

Комбинация из четырех шаров содержит не менее двух белых шаров, когда в ней 2 белых шара или 3 белых шара или 4 белых шара. Выше мы нашли число комбинаций, содержащих два белых шара, их 210. Аналогично, найдем число комбинаций, содержащих 3 белых шара: $C_5^3 \cdot C_7^1 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 7 = 70$, и числу комбинаций, содержащих 4 белых шара (черных шаров в них нет): $C_5^4 \cdot C_7^0 = 5 \cdot 1 = 5$. Тогда число исходов, реализующих случайное событие C_2 равно $m_{C_2} = 210 + 70 + 5 = 285$. Значит, вероятность события C_2 равна $P(C_2) = \frac{285}{495} = \frac{19}{33}$.

Число комбинаций, содержащих 4 черных шара (белых шаров в них нет), равно $C_5^0 \cdot C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$. Тогда $m_{C_2} = 35$ и $\boldsymbol{P}(C_3) = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}$.
События C_4 – «хотя бы один белый шар» и C_3 – «только черные шары» являются противоположными. Поэтому $P(C_4) = 1 - P(C_3) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99}$.

Раздел 1.2. Теоремы сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Условная вероятность. Независимые события. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. Теоремы сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема о вероятности суммы несовместных случайных событий. В нашем списке аксиом теории вероятностей под номером 4 приведено равенство

$$P(A + B) = P(A) + P(B),$$

которое принимается как безусловно верное для любых несовместных событий. Это равенство получило название: *теорема*[1] *сложения вероятностей для несовместных событий*

Пример 1.7. Из полного комплекта костей домино (28 костей) извлекается случайно одна кость. Чему равна вероятность того, что сумма очков на обеих ее половинах равна 6?

[1] Если мы вычисляем вероятности по «классической формуле» $\frac{m}{n}$, то требуется проверка того, что это определение вероятности соответствует аксиомам; в частности, требует проверки (доказательства) и записанное равенство. Поскольку «классическая» вероятность широко известна и часто применяется, эта формула и получила название теоремы.

Решение. Пусть C: «извлечена кость с суммой 6», A: «извлечена кость-дубль с суммой 6», B: «извлечена кость-недубль с суммой 6», тогда $C = A + B$, причем A и B – несовместные случайные события. Тогда по приведенной теореме о вероятности суммы мы имеем

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Сумму 6 имеет одна кость-дубль 3:3, поэтому $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{28}$, сумму 6 имеют следующие кости-недубли 0:6, 1:5 и 2:4, всего 3 кости, поэтому $\boldsymbol{P}(B) = \frac{3}{28}$. Теперь можно найти вероятность: $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{28} + \frac{3}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Теорема сложения вероятностей для произвольных событий. Для любых двух случайных событий A и B

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB).$$

Доказательство. Сумму $A + B$ можно представить в виде следующей суммы трех несовместных случайных событий: $A + B = A \cdot \overline{B} + AB + B \cdot \overline{A}$ (проверим: если произошло А или В, значит, или произошло только А, или оба вместе, или только В). Событие А также можно представить в виде $A = A \cdot \overline{B} + AB$, а событие B – в виде $B = AB + B \cdot \overline{A}$. Поскольку слагаемые в последних двух формулах также несовместны, получаем:

$$P(A + B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(AB) + P(B \cdot \overline{A}),$$

$$P(A) = P(A \cdot \overline{B}) + P(AB),$$

$$P(B) = P(AB) + P(B \cdot \overline{A}).$$

Складывая последние два равенства и сравнивая полученную сумму с первым, получаем требуемое утверждение.

Если случайные события A и B несовместные, то $P(AB) = 0$, поэтому теорема о вероятности суммы несовместных случайных событий является следствием доказанной только что теоремы.

Утверждение. Если $P(A) + P(B) > 1$, то случайные события A и B совместные.

Доказательство. Так как $0 \leq P(A+B) \leq 1$ для любых A и B, то из данного условия $P(A)+P(B)>1$ и равенства $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$ следует, что $\mathrm{P}(AB)>0$. Это означает, что случайные события A и B совместные.

Для трех и более событий можно привести равенства, дающие вероятность суммы этих событий; однако они имеют существенно более сложный вид, чем в случае двух событий[1]. Поэтому приобретает важное значение следующая формула.

Теорема о вероятности появления хотя бы одного случайного события. Для любых случайных событий A_1, A_2, Λ, A_n

$$\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \Lambda + A_n) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \mathrm{K} \cdot \overline{A_n}).$$

2. Условная вероятность. Независимые события. Теоремы умножения вероятностей. *Условной вероятностью случайного события А по отношению к случайному событию В* (любому, но *не* невозможному: $B \neq \emptyset$, $P(B) \neq 0$) называется вероятность появления случайного события *А*, определенная в предположении, что случайное событие *В* произошло. Обозначение: $P_B(A)$. В «строгой» теории вероятностей эта же величина определяется равенством:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Если вероятности событий рассчитываются по «классическому» определению, то эта последняя формула может быть логически обоснована.
Можно также проверить, что – при одном и том же условии – условные вероятности удовлетворяют тем же аксиомам, что и «обычные».

Умножая на *P(B)*, получаем *теорему умножения вероятностей для произвольных событий*:

$$P(AB) = P_B(A)P(B).$$

[1] Теорема сложения для трех событий: P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(AC) – P(BC) + P(ABC)

Пример 1.8. Предположим, что в урне находятся один черный шар и два белых. Последовательно из урны извлекаются по одному шару без возвращения. Пусть B: «извлечен первым белый шар», A: «извлечен вторым черный шар». Если случайное событие B произошло, т.е. вначале был извлечен белый шар, то в урне остался один черный шар и один белый шар. В этом случае вероятность появления случайного события A равна $1/2$. Если случайное событие B не произошло (значит, произошло $\overline{\mathrm{B}}$), т.е. вначале был извлечен черный шар, то в урне осталось две белых шара. В этом случае вероятность появления случайного события B равна 0. Таким образом, $P_B(A) = \frac{1}{2}, P_{\overline{\mathrm{B}}}(A) = 0.$

Теорема об умножении вероятностей допускает обобщение на любое конечное число случайных событий:

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) \dots P_{A_1A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

При исследовании основных свойств операции умножения случайных событий особую роль играет следующий важный частный случай.

Определение независимых случайных событий. Случайные события A и B называются *независимыми*, если появление или непоявление одного из них не изменяет вероятности другого случайного события. Это определение можно понимать и так: условная вероятность одного из событий совпадает с обычной (это и будет означать, что другое событие на эту вероятность не влияет). Тогда мы получаем: $P_B(A) = P(A)$ или $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$, то есть

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Это равенство получило название: «*теорема умножения вероятностей для независимых событий*».

Доказать, что два данных случайных события являются независимыми, с помощью только этого определения бывает нелегко. Когда в самом описании эксперимента заложена независимость случайных событий или явно сказано, что данные случайные события независимы, тогда вопрос о независимости не обсуждается. В остальных случаях для проверки независимости можно пользоваться приведенной только что теоремой.

Пример 1.9. Производится два выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при втором равна 0,7. Найти вероятности следующих случайных событий:

C_1: «мишень поражена два раза»

C_2: «мишень поражена при первом выстреле
и не поражена при втором»

C_3: «мишень поражена только один раз»

C_4: «мишень поражена хотя бы один раз».

Решение. Пусть A: «мишень поражена при первом выстреле», B: «мишень поражена при втором выстреле». Из условия задачи следует, что $\boldsymbol{P}(A) = 0{,}6$ и $\boldsymbol{P}(B) = 0{,}7$. Заметим также, что случайные события A и B являются независимыми[1]. Выразим случайные события C_1 - C_4 через A и B и найдем их вероятности.

$C_1 = AB$, т.к. событие C_1 происходит, когда происходят оба случайных события A и B одновременно. Тогда

$$\mathrm{P}(C_1) = \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42\,.$$

$C_2 = A\overline{B}$, т.к. событие C_2 происходит, когда происходит случайное событие A и не происходит B . Тогда

$$\mathrm{P}(C_2) = \mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}18\,.$$

$C_3 = A\overline{B} + \overline{A}B$, т.к. событие C_2 происходит, когда происходит случайное событие A и не происходит B или когда не происходит случайное событие A и происходит B. Заметим, что случайные события $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ являются несовместными, тогда

[1] в действительности это надо предполагать заранее.

$$P(C_3) = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}6 \cdot (1-0{,}7) + (1-0{,}6) \cdot 0{,}7 = 0{,}44.$$

$\overline{C_4} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, т.к. событие C_4 не происходит, когда не происходит случайное событие A и не происходит B. Тогда

$$P(C_4) = 1 - P(\overline{C_4}) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - (1-0{,}6) \cdot (1-0{,}7) = 0{,}88.$$

Пример 1.10. Из колоды, содержащей 36 карт, взяли одну карту. Пусть A: «Вынута карта масти пик», B: «Вынута карта дама». Будут ли случайные события A и B независимыми?

Решение. Найдем вероятности этих случайных событий: $P(A) = 9/36 = 1/4$ и $P(B) = 4/36 = 1/9$. Очевидно, что AB: «Вынута карта масти пик и дама», т.е. AB: «Вынута карта дама пик». Тогда имеем $P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = P(A)P(B)$, откуда следует, что A и B – независимые случайные события.

Пример 1.11. Пусть вероятность успешно пройти некоторое испытание оценивается как 0,7 и предполагается, что она постоянна, а результаты попыток не зависят друг от друга, то есть опыт не накапливается[1] и «настроение испытуемого не портится». Испытание прекращается после первой успешной попытки, общее число попыток – не более трех. Какова вероятность успешно пройти испытание? Какова вероятность того, что будут использованы все три попытки (возможно, неудачно)?

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что испытание завершилось успешно, A_1 – событие, состоящее в том, что первая попытка оказалась успешной, A_2 – в том, успешной была вторая попытка и A_3 – третья. Тогда $A = A_1 + \overline{A_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$ (успех или достигнут при первой попытке или первая попытка неудачна и при и этом вторая удачна или неудачны и первая, и вторая попытки и при этом удачна третья). Слагаемые в этой формуле будут несовместными событиями (почему?), сомножители независимы по условию, и мы получаем

[1] это и следующее условия не всегда выполняются, но могут быть приняты при небольшом числе попыток, значительном числе вариантов заданий и не слишком большой цены неудачи

$P(A) = 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,973.$

Далее, три попытки будут сделаны тогда и только тогда, когда обе предыдущие были неудачными, то есть

P(«будет сделано три попытки») = $P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.

Заметим (это будет использовано в последующем), что вероятность того, что будет сделана одна попытка, $P(A_1) = 0,7$; вероятность того, что будут сделаны две попытки $P(\overline{A}_1 A_2) = 0,21$. По условию задачи более трех попыток быть не может, и мы отмечаем, что сумма вероятностей того, что будут сделаны одна, две или три попытки равна единице: 0,7 + 0,21 +0,09 = 1.

3. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Будем говорить, что случайные события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют *полную группу событий*, если $H_1 + H_2 + ... + H_n = E$, т.е. если всегда происходит хотя бы одно из этих случайных событий. Если эти события попарно несовместны, то всегда происходит ровно одно из них. Далее мы рассматриваем только несовместные события $H_1, H_2, ..., H_n$. Произвольно взятое случайное событие A можно представить в виде

$$A = A \cdot E = A(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n,$$

причем события $AH_1, AH_2, ...$ здесь также несовместны. Используя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения, получим так называемую *формулу полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \Lambda + P(H_n)P_{H_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$$

Пример 1.12. Имеется три урны. В первой урне 2 белых и 3 черных шаров, во второй – 3 белых и 2 черных шара и в третьей – 1 белый и 4 черных шара. Выбирается наугад урна и из нее извлекается шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар – белый.

Решение. Пусть H_i: «Выбрана i-ая урна». Из условия задачи следует, что $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$. Обозначим через A случайное событие «Извлечен белый шар», вероятность которого нужно найти. Так как A произойдет вместе с одной из гипотез H_1, H_2 или H_3, то $P(A)$ мы найдем с помощью формулы полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A).$$

Из условия задачи следует, что $P_{H_1}(A)$ - это вероятность извлечь белые шар при условии, что выбрана первая урна, т.е. вероятность извлечь белый шар из первой урны. Непосредственно находим $P_{H_1}(A) = \frac{2}{5}$. Аналогично, $P_{H_2}(A) = \frac{3}{5}$ и $P_{H_3}(A) = \frac{1}{5}$. Теперь по формуле полной вероятности находим

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Предположим, что случайное событие A произошло, тогда условная вероятность любой из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ определяется по *формуле Байеса*:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)},$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Вероятности $P_A(H_i)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называются *апостериорными вероятностями гипотез* – от латинского a posteriori: после, затем, то есть вероятностями гипотез, вычисленными после опыта, при наличии новой информации (A произошло!) – в отличие от вероятностей $P(H_i)$, называемых априорными (a priori – до, раньше, с самого начала).

Пример 1.13. Предположим, что в условиях предыдущего примера произошло случайное событие *A*, т.е. был извлечен белый шар. Найдем вероятность того, что он был извлечен из первой, второй или третьей урны, т.е. найдем условные вероятности $P_A(H_1)$, $P_A(H_2)$, $P_A(H_3)$. Это вычисление выполним по формуле Байеса, причем полную вероятность $P(A)=2/5$ мы уже нашли в предыдущем примере:

$$P_A(H_1)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{2/5}=\frac{1}{3}\ ;\qquad P_A(H_2)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{2/5}=\frac{1}{2};\quad P_A(H_3)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{2/5}=\frac{1}{6}.$$

Раздел 1.3. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появления события в независимых испытаниях

1. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами. Формула Бернулли. Пусть проводится друг за другом один и тот же эксперимент в неизменных условиях, причем результат каждого следующего не зависит от любого предыдущего и не влияет на все последующие. Пусть число исходов каждого эксперимента равно двум. В этом случае принято один исход называть *успехом*, а другой – *неудачей*. Обозначим вероятность успеха через *p*, а вероятность неудачи (т.е. второго исхода) – через $q=1-p$. Процесс независимых испытаний с двумя случайными исходами, вероятности которых не меняются от испытания к испытанию, называется *схемой Бернулли*[1]. Например, при бросании монеты возможны два исхода – выпадение «орла» или «решки». Один из них, чаще всего выпадение «орла» называют успехом, а второй – неудачей. Пусть *p* обозначает вероятность успеха (в каком-нибудь эксперименте) и q = 1− p - вероятность неудачи.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность появления в точности *k* успехов при *n* экспериментах. Для вычисления $P_n(k)$ в теории вероятностей используется так называемая *формула Бернулли*:

---

[1] Схему Бернулли и формулу Бернулли предложил Якоб Бернулли (1654 –1705) в труде «Искусство предположений», 1713 г.

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Пример 1.14. Предположим, что у пяти человек, выбранных наугад, спросили, пользуются ли они систематически кредитными карточками при расчете в продуктовых магазинах. Социологические опросы показывают, что в среднем доля таких лиц составляет 30% покупателей. Чему равна вероятность того, что большинство из пяти выбранных человек пользуются систематически кредитными карточками.

Решение. По условию задачи вероятность того, что отдельный человек пользуется систематически кредиткой, равна $p = 0{,}3$, отсюда $q = 0{,}7$. Опрос пяти человек представляет собой схему Бернулли с $n = 5$. Вероятность того, что большинство из пяти человек пользуется систематически кредиткой, выражается формулой $\mathrm{P} = \mathrm{P}_5(3) + \mathrm{P}_5(4) + \mathrm{P}_5(5)$. Осталось сделать нетрудные вычисления:

$$P = \frac{5!}{3!\cdot 2!} 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 + \frac{5!}{4!\cdot 1!} 0{,}3^4 \cdot 0{,}7 + \frac{5!}{5!\cdot 0!} 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}1323 + 0{,}02835 + 0{,}00243 = 0{,}16308.$$

Пример 1.15. Один из Ваших знакомых с вероятностью 0,6 может позвонить в течение каждого часа (независимо от ранее состоявшихся звонков). Какова вероятность того, что в течение пяти часов он позвонит хотя бы один раз?

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что звонок в течение некоторого часа произойдет. По условию задачи ясно, что речь идет о пяти независимых испытаниях (найдите это слово в тексте задачи), проводимых при одинаковых условиях (дана одна вероятность для звонков в любое время). Итак, $n = 5$, $p = 0{,}6$ и требуется найти вероятность того, что $k > 0$, где k – ожидаемое число звонков.

По формуле для вычисления вероятности противоположного события $P(k > 0) = 1 - P(k = 0)$ и по формуле Бернулли при $m = 0$ и $q = 1 - p = 0{,}4$:

$$P(k = m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_5^0 \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^5 = 0{,}01024.$$

Окончательно: P(k > 0) = 1 – 0,01024 = 0,98976.

В этой задаче для схемы Бернулли найдена вероятность того, что событие произойдет хотя бы один раз. Можно запомнить и применять окончательное выражение для этой вероятности в общем виде:

Вероятность того, что событие произойдет хотя бы один раз в n *независимых опытах:*

$$P(k>0)=1-q^n .$$

Пример 1.16. Симметричная игральная кость подбрасывается 3 раза. Какова вероятность того, что «шестерка» выпадет хотя бы один раз.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в выпадении «шестерки». Тогда P(A) $=p=\frac{1}{6}$; $q=1-p=\frac{5}{6}$. Проводится n = 3 испытания и если k – число появлений шести очков, то

$$P(k>0)=1-q^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}\approx 0{,}421.$$

Пример 1.17. Сколько следует установить работающих независимо друг от друга датчиков, сигнализирующих о неисправности в работе некоторого прибора, если вероятность срабатывания отдельного датчика 0,85 и требуется обеспечить своевременное поступление сигнала о неисправности хотя бы от одного из датчиков с вероятностью не менее, чем 0,999?

Решение. В этой задаче в формуле $\boldsymbol{P(k>0)=1-q^n}$ известно значение q = 1 –0,85 = 0,15 и требуемое значение P(k > 0) ≥ 0,999. Тогда q^n < 1 – 0,999 = 0,001 и нам требуется найти подходящее значение n, такое, что $(0{,}15)^n$ < 0,001. Иногда это несложно сделать подбором: ясно, что n = 3 еще «не хватает», потому что $0{,}001 = (0{,}1)^3$ и $(0{,}15)^3 > (0{,}1)^3$. При n = 4 получаем $(0{,}15)^4$ = 0,00050625 < 0,001, то есть четырех датчиков уже достаточно. В общем случае для решения следует прологарифмировать выражение $(0{,}15)^n$ < 0,001 (здесь лучше брать десятичный логарифм, но это не обязательно);

получаем $n \cdot lg(0{,}15) < -3$; $n \cdot (-0{,}824) < -3$; $n > \frac{-3}{-0{,}824} = 3{,}64078$ и, таким образом, при $n = 4$ требуемая вероятность будет обеспечена.

2. Наивероятнейшее число появления события в независимых испытаниях. Рассмотрим, как и выше, схему Бернулли, состоящую из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления данного события равна p $(0 < p < 1)$. Число k_0 называется *наивероятнейшим*, если вероятность $P_n(k_0)$ того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз не меньше вероятности остальных возможных исходов, то есть если

$$P_n(k_0) \geq P_n(k) \text{ - для всех } k = 0, 1, ..., n.$$

Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства:

$$np - q \leq k_0 < np + p,$$

причем:

а) если число $np - q$ не является целым, то существует единственное наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np - q$ - целое, то существует два наивероятнейших числа k_0 и $k_0 + 1$;

в) если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример 1.18. Произведено 50 независимых испытаний с вероятностью появления события A в каждом испытании равной 0,4.

(i) Найти наивероятнейшее число появлений события A.

(ii) Сколько требуется произвести таких независимых испытаний чтобы наивероятнейшее число появлений события A было равно 25?

Решение. (i) По условию $n = 50;\ p = 0{,}4;\ q = 0{,}6$. Найдем наивероятнейшее число k_0 появлений события A из двойного неравенства

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Подставляя данные задачи, получим

$$50 \cdot 0{,}4 - 0{,}6 \leq k_0 < 50 \cdot 0{,}4 + 0{,}4,$$

откуда $19{,}4 \le k_0 < 20{,}4$. Следовательно, наивероятнейшее число $k_0 = 20$. Этот результат можно было бы получить без составления двойного неравенства по пункту в) – так как $np = 50 \cdot 0{,}4 = 20$ – целое число.

(ii) Если дано наивероятнейшее число $k_0 = 25$, то для нахождения n составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}4n - 0{,}6 \le 25 \\ 0{,}4n + 0{,}4 > 25 \end{cases}$$

Из первого неравенства найдем $n \le \dfrac{25{,}6}{0{,}4} = 64$. Из второго – имеем $n > \dfrac{24{,}6}{0{,}4} = 61{,}5$. Итак, искомое число испытаний должно удовлетворять двойному неравенству $62 \le n \le 64$.

Часть 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Раздел 2.1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Ряд распределения дискретной случайной величины. Функция распределения случайной величины. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Совместный закон распределения нескольких случайных величин. Независимые случайные величины

1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Ряд распределения дискретной случайной величины

Случайной называется числовая величина, которая в результате испытания (в процессе наблюдения, опыта) может принять одно из возможных для нее значений, но какое именно - заранее неизвестно.

Дискретной называется случайная величина, принимающая отделённые друг от друга, изолированные значения.

Примеры дискретных случайных величин: число очков, выпавшее при бросании игральной кости; число попыток, сделанных при прохождении некоторого теста; число предметов выделенного типа среди нескольких, наудачу отобранных.

Непрерывной назовем случайную величину, возможные значения которой полностью заполняют некоторый интервал, возможно – всю числовую ось.

Примеры непрерывных случайных величин: числовой результат измерения длины, веса, силы или напряжения тока, скорости и т.п.

Законом распределения случайной величины называют выраженную в той или иной форме исчерпывающую информацию, позволяющую точно рассчитать вероятность того, что будущее значение случайной величины будет принадлежать заданному числовому множеству, например, будет равно заданному числу. В разделе теории вероятностей, посвященном случайным величинам, фактически изучаются именно свойства законов распределений.

Закон распределения дискретной случайной величины. Наиболее удобной формой представления закона распределения дискретной случайной величины является перечисление всех возможных значений этой величины с указанием вероятностей того, что рассматриваемая случайная величина примет то или иное значение. При небольшом числе значений случайной величины X эта информация представляется в виде таблицы:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Здесь x_1, ..., x_n – перечень всех возможных значений величины X, p_1, ..., p_n – вероятности этих значений, то есть p_k = P($X = x_k$), k =1, 2, ..., n; n – общее число значений величины X. Читается: «p_k – это вероятность того, что случайная величина X примет значение x_k». <u>*Важно*</u>: числа p_k положительны[1] и их сумма равна единице: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Само слово «распределение», далее постоянно встречающееся, можно понимать как «распределение суммарной вероятности, равной единице, между отдельными значениями случайной величины».

Пример 2.1. Симметричную монету подбрасывают три раза. Пусть X – число случаев выпадения герба. Составить ряд распределения X.

Решение. Очевидно, речь идет о схеме Бернулли, опыт – подбрасывание монеты, число повторений опыта $n = 3$, $p = 0{,}5$ (вероятность появления герба при одном бросании), q = 0,5.

$$P(X=0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}125 = 0{,}125;$$
$$P(X=1) = P_3(1) = C_3^0 \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^2 = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375;$$
$$P(X=2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^1 = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}375;$$
$$P(X=3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^0 = 1 \cdot 0{,}125 \cdot 1 = 0{,}125.$$

Ряд распределения:

[1] не будет ошибкой, но не имеет смысла включать в таблицу те x_k, для которых $p_k = 0$.

X	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

Пример 2.2. (продолжение примера 1.11 из Части 1). Вероятность успешно пройти некоторое испытание оценивается как 0,7. Испытание прекращается после первой успешной попытки, общее число попыток – не более трех. Пусть X – общее число совершенных попыток. Составить ряд распределения *X*.

Решение. Общее число попыток может быть: одна, две или три. В примере 2.5 получены вероятности: P(X =1) = 0,7; P(X =2) = 0,21; P(X =3) = 0,09. Таким образом, ряд распределения имеет вид:

X	1	2	3
p	0,7	0,21	0,09

2. Функция распределения и плотность распределения случайной величины. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Для непрерывной случайной величины, очевидно, невозможно задать закон распределения в виде таблицы. В этом случае основной практический интерес представляет изучение вероятностей того, что случайная величина примет значение, принадлежащее заданному числовому интервалу (a, b), то есть вероятностей вида $P(a < X < b)$. Поэтому закон распределения задают аналитическим (формульным) выражением, позволяющим однозначно вычислять указанные вероятности. Здесь a и b могут быть равны $+\infty$ или $-\infty$. Самым распространенным вариантом является применение так называемых функции распределения и плотности распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение меньшее, чем число x: $F(x) = P(X < x)$, то есть вероятность попадания X в интервал $(-\infty; x)$.

Эта функция может быть сопоставлена любой случайной величине. Иногда ее называют *интегральной функцией распределения*. Она обладает следующими двумя свойствами:

1) при всех x: $0 \leq F(X) \leq 1$;

2) $F(x)$ - неубывающая функция.

Первое свойство вытекает из определения F как вероятности некоторого события. Для доказательства второго рассмотрим два числа a и b, $a < b$. Событие « $X < b$ »представляется в виде суммы несовместных событий « $X < a$» и « $a \leq X < b$». Поэтому

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b); \tag{2.1}$$

так как последнее слагаемое неотрицательно, то $P(X < b) \geq P(X < a)$, то есть $F(a) < F(b)$.

В теоретической части курса также используются соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{2.2}$$

Непрерывные случайной величины могут быть заданы также плотностью распределения. *Плотность распределения* случайной величины X – это производная от функции распределения: $f(x) = F'(x)$. В нашем курсе рассматриваются только такие непрерывные случайные величины, для которых плотность существует при всех x, за исключением, быть может, отдельных точек. При этом функция $F(x)$ будет обладать свойством непрерывности: $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$; в частности, график $F(x)$ в этом случае – непрерывная линия. Неравенство (2.1) можно записать в виде:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

Эту формулу также называют: «*вероятность попадания случайной величины в интервал*». Если перейти здесь к пределу при $b \to a$, то двойное неравенство $a \leq X < b$ превратиться в равенство $X = a$, а правая часть станет равной нулю. Поэтому для непрерывной случайной величины вероятность принять любое отдельное значение равна нулю, и во всех неравенствах, связанных с непрерывными величинами, знаки « $\leq$ » и « $<$ », а также « $\geq$ » и « $>$ » – взаимозаменяемы.

Отметим два свойства плотности:

1) $f(x) \geq 0$ (для тех x, при которых $f(x)$ определена);

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (так называемое свойство нормированности).

Первое свойство $f(x)$ доказывается тем, что $f(x)$ – производная от неубывающей функции $F(x)$, второе – тем, что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, и поэтому для любых конечных a и b, $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.4)$$

Переходя здесь к пределу при $b \to \infty$, $a \to \infty$, получаем, учитывая формулы (2.2), требуемое свойство. Эта формула носит название: «*вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал*».

3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическое ожидание, или средне ожидаемое значение дискретной случайной величины дается формулой:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \, ,$$

где x_i , p_i – возможные значения случайной величины X и их вероятности, элементы ее ряда распределения (см. выше).

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X с известной плотностью $f(x)$ находят по формуле:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \, .$$

Этот несобственный интеграл может и не существовать. Часто случайная величина X принимает значения из конечного интервала $[a; b]$; при этом в приведенном интеграле пределы интегрирования заменяются на числа a и b.

Смысл математического ожидания состоит в следующем. Если провести некоторое количество опытов (наблюдений, экспериментов) и зарегистрировать появившиеся при этом значения случайной величины X, то при большом числе опытов среднее арифметическое всех появившихся значений будут приблизительно равно математическому ожиданию.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной величины (то есть случайной величины, принимающей только одно значение) равно ей самой; более точно, если P(X = C = *const*), то MX = C (иногда так и записывают: MC = C).

2. Постоянный множитель можно выносить из-под знака математического ожидания: $M(aX) = a \cdot MX$.

3. Математическое ожидание суммы некоторого конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = MX_1 + MX_2 + \cdots + MX_n.$$

4. Если «$a \le X \le b$» – достоверное событие, то $a \le MX \le b$. В частности, если $X \ge 0$, то и $MX \ge 0$.

<u>*Замечание*</u>: О математическом ожидании произведения случайных величин – см. далее пункт «независимые случайные величины».

Дисперсия случайной величины X определяется формулой:

$$DX = M((X - MX)^2).$$

Дисперсия характеризует степень разбросанности (с учетом вероятностей появления) возможных значений величины X относительно ее средне ожидаемого значения, то есть MX. Вычисление дисперсии непосредственно по этой формуле приводит к выражениям:

для дискретной случайной величины:

$$DX = (x_1 - MX)^2 p_1 + (x_2 - MX)^2 p_2 + \cdots + (x_n - MX)^2 p_n$$

для непрерывной случайной величины:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x) dx .$$

Для вычисления *дисперсии* DX часто удобнее пользоваться формулой:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2.$$

Первое слагаемое в этом выражении находим по формулам:

- для дискретной случайной величины: $M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n$;

- для непрерывной случайной величины: $M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$.

Выведем расчетную формулу для дисперсии. Сначала заметим, что $(X - MX)^2 = X^2 - 2 \cdot X \cdot MX + (MX)^2$. Найдем математическое ожидание от этой суммы, замечая, что во втором слагаемом MX – это постоянный множитель (выносится), а последнее слагаемое – число, константа, и ее математическое ожидание равно ей самой:

$M(X^2 - 2 \cdot X \cdot MX + (MX)^2) = M(X^2) - 2 \cdot MX \cdot MX + (MX)^2 = M(X^2) - (MX)^2$,

то есть $DX = M(X^2) - (MX)^2$.

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $DC = 0$.

2. Постоянный множитель выносим из-под знака дисперсии, *возводя его в квадрат*: $D(aX) = a^2 \cdot DX$.

Еще есть одно частное свойство дисперсии, относящееся к независимым случайным величинам (см. далее).

<u>Примеры вычисления математического ожидания и дисперсии.</u>

(Продолжение примера 2.1). Симметричную монету подбрасывают три раза. Пусть X – число случаев выпадения герба. Найти MX и DX.

Решение. По найденному ранее ряду распределения вычисляем:

$MX = 0 \cdot 0{,}125 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}375 + 3 \cdot 0{,}125 = 1{,}5$

$MX^2 = 0^2 \cdot 0{,}125 + 1^2 \cdot 0{,}375 + 2^2 \cdot 0{,}375 + 3^2 \cdot 0{,}125 = 3{,}0$

$DX = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$.

(Продолжение примера 2.2). Вероятность успешно пройти некоторое испытание оценивается как 0,7, общее число попыток – не более трех. Пусть X – общее число совершенных попыток. Найти MX. Сколько примерно попыток сделают 50 студентов?

Решение. По составленному ряду распределения находим:

MX = 1·0,7 + 2·0,21 + 3·0,09 = 1,39. Среднее арифметическое общего числа попыток, сделанных всеми студентами, примерно равно этому числу; но это среднее получено делением общего числа попыток на 50, то есть общее число попыток равно: 50·1,39 = 69,5 ≈ 70. Итак, 50 студентов сделают примерно 70 попыток пройти тест.

Пример 2.3. Плотность *f*(*x*) задана формулами:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 0; \\ Ax^3, \text{если } 0 < x < 2; \\ 0, \quad \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Определить постоянную *A*, найти *MX*, *DX* и P(0,5 < X < 1,5).

Решение.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 Ax^3\,dx = A\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = A\left(\frac{2^4}{4} - 0\right) = 4A\,.$$

По свойству плотности, этот интеграл должен быть равен 1, то есть 4A = 1, то есть $A = \frac{1}{4}$. Далее,

$$MX = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}\,,$$

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^5 dx = \frac{1}{4}\frac{x^6}{6}\bigg|_0^2 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3},$$

$$DX = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{200-192}{75} \approx 0{,}107.$$

$$P(0{,}5 < X < 1{,}5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{0,5}^{1,5} = \frac{1{,}5^4 - 0{,}5^4}{16} = 0{,}3125.$$

3. Совместный закон распределения нескольких случайных величин. Независимые случайные величины

«Поведение» отдельных случайных величин описывается заданием вероятностей событий вида $X = x_k$» для дискретных или «$X < x$» для непрерывных случайных величин. Однако уже простейшие примеры показывают, что знание этих вероятностей для, например, двух случайных величин недостаточно, чтобы описать их поведение как единого целого.

Совместной функцией распределения двух случайных величин X, Y называется функция:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)\ .$$

Эта функция дает вероятность одновременного наступления событий «$X < x$» и «$Y < y$», то есть вероятность *произведения* этих событий. $F(x, y)$ является одним из вариантов задания *совместного закона распределения* данных случайных величин – исчерпывающей информации о способе отыскания вероятностей тех или иных событий, связанных с величинами X и Y .Функция $F(x, y)$ обладает свойствами, похожими на свойства ранее рассмотренной функции распределения отдельных случайных величин.

Если $F_X(x) = P(X < x)$ и $F_Y(y) = P(Y < y)$ - функции распределения случайных величин X и Y (здесь эти функции называются также частными), то *в общем случае* выражение для функции $F(x, y)$ *нельзя* получить, зная только функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$.

Определение. Случайные величины X, Y называются *независимыми*, если случайные события «$X < x$» и «$Y < y$» являются независимыми при всех x и y. Менее строгая формулировка: X, Y *независимы*, если вероятность того, что одна из этих величин примет определенное значение, *не зависит* от того, какое значение приняла другая. Для дискретных случайных величин можно рассматривать события «$X = x_k$» и «$Y = y_m$».

В соответствии с данным ранее определением независимости событий, получаем в этом случае $P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(\ Y < y)$; следовательно,

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Это равенство означает, что совместная функция распределения двух *независимых* случайных величин *однозначно* определяется их частными функциями распределения, а именно: равна их произведению.

Приведенные выше определения и свойства можно достаточно просто перенести на несколько случайных величин $X_1, \ldots, X_k$.

Для независимых случайных величин установлен ряд весьма содержательных результатов, доказаны свойства, которые для произвольных случайных величин могут быть просто неверны. В частности, справедливы следующие утверждения.

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$X,\ Y - \textit{независимы} \ \Rightarrow M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)\ .$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$X,\ Y - \textit{независимы} \ \Rightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Раздел 2.2. Специальные распределения – биномиальное, нормальное, Пуассона, показательное

Биномиальное распределение. Это распределение дискретной случайной величины X, принимающей значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Таким образом, ряд распределения для этой случайной величины имеет вид:

X	0	1	…	k	…	n
p	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Выражение для $P(X = k)$ ранее встречалось в формуле Бернулли – как вероятность того, что некоторое событие появится ровно k раз в n независимых одинаковых опытах. Поэтому биномиальное распределение и рассматривается часто как распределение числа появлений события А при повторяющихся наблюдениях или испытаниях; при этом параметр p равен вероятности появления А в отдельном опыте: p = P(A).

Математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины равны:

$$MX = np, \quad DX = npq.$$

Пример 2.4. Игральную кость подбрасывают три раза. Пусть случайная величина X – число выпадения цифры «6». Составить закон распределения X, найти MX и DX.

Решение. Число испытаний n = 3. Событие А: «выпадет цифра 6»; вероятность появления цифры «6» при одном бросании $p = \frac{1}{6}$; тогда q = 1 – $p = \frac{5}{6}$.

Находим: $P(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{216}$;

$P(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{216}$; $P(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$;

$P(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{216} 1 \cdot = \frac{1}{216}$. Составим ряд распределения:

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

MX = $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $DX = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

(Продолжение примера 2.1). Симметричную монету подбрасывают три раза. Пусть X – число случаев выпадения герба. Найти MX и DX.

Решение. X – биномиальная случайная величина, n = 3, p = 0,5; получаем:

MX = 3·0,5 = 1,5; DX = 3·0,5 ·0,5 = 0,75.

Распределение Пуассона. Говорят, что дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ – все неотрицательные целые числа, а вероятности, с которыми она их принимает, вычисляются по формуле Пуассона:

$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda > 0$ – параметр распределения Пуассона. Математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины равны λ:

$MX = \lambda$, $DX = \lambda$.

Пример 2.5. Пусть случайная величина X имеет закон распределения Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Выпишем несколько первых членов ее ряда распределения.

$P(X = 0) = \dfrac{e^{-1}}{0!} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$, $P(X = 1) = \dfrac{e^{-1}}{1!} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$,

$P(X = 2) = \dfrac{e^{-1}}{2!} = \dfrac{1}{2e} \approx 0{,}185$, $P(X = 3) = \dfrac{e^{-1}}{3!} = \dfrac{1}{6e} \approx 0{,}06$,

$P(X = 4) = \dfrac{e^{-1}}{4!} = \dfrac{1}{24e} \approx 0{,}015$ и т.д. Таким образом, начало ряда распределения выглядит так:

X	0	1	2	3	4	…
P	0,37	0,37	0,185	0,06	0,015	...

Аппроксимация биномиального распределения распределением Пуассона. Биномиальное распределение часто встречается в практических приложениях, однако при больших значениях n прямые вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. При определенном сочетании между параметрами n, p и k вероятности $P(X = k)$ могут быть приближенно вычислены по формуле закона Пуассона, а именно: если число n велико, а число p – мало, причем настолько, что величина np составляет только несколько единиц (практически рекомендуется $np \leq 9$), то

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$; при этом k также должно составлять также несколько единиц.

Пример 2.6. Аппаратура состоит из 10000 элеметов, каждый из которых независимо от других может в течение некоторого периода времени выйти из строя с вероятностью 0,0002. Какова вероятность того, что всего за этот период выйдет из строя ровно три элемента? хотя бы один элемент?

Решение. Пусть X – число отказавших за рассматриваемый период элементов. Тогда X – *биномиальная* случайная величина с параметрами $n = 10000$ и $p = 0{,}0002$. Имеем $np = 2$; в первой части спрашивается о вероятности появления значения $k = 3$ – все эти данные подходят для применения закона Пуассона. Полагаем $\lambda = np = 3$ и находим:

$P(X = 3) = \frac{e^{-2}}{3!} = \frac{1}{6e^2} \approx 0{,}023.$[1] Далее, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ по формуле для вероятности противоположного события, и мы получаем:

$$P(X \geq 1) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865.$$

Нормальное распределение. Плотность распределения нормального закона имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Это выражение зависит от двух параметров: «a» и «σ». При этом для случайной величины X с такой плотностью будет $MX = a$, $DX = \sigma^2$. Тот факт,что величина X имеет указанную плотность, часто символически записывают так: $X \sim N(a; \sigma)$. Нормальный закон с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называют стандартным; соответствующая плотность распределения довольно час-

[1] Вычисления по формуле Бернулли приводят к выражению: $P(X=3)=C_{10000}^3 0{,}0002^3 0{,}9998^{9997}$

то обозначается $\varphi(x)$ и имеет вид: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Плотность величины $X\sim N(a;\sigma)$ – кривая, симметричная относительно точки $x=a$.

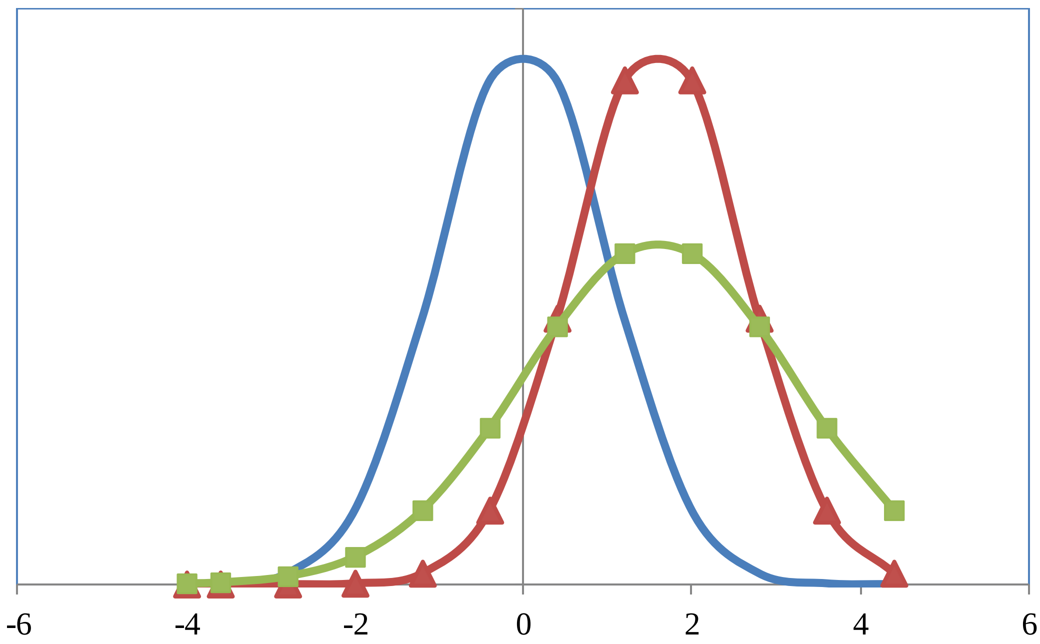


Рис. 1 Графики плотности нормального распределения:

- сплошная линия: N(0;1), т.е. $a=0$, $\sigma=1$;

- ---▲---- - N(1,6;1), т.е. $a=1{,}6$, $\sigma=1$;

- ----■----- - N(1,6;1,4), т.е. $a=1{,}6$, $\sigma=1{,}4$.

Функция распределения нормального закона *не может быть* выражена в виде простого формульного выражения (но может быть представлена в виде, например, степенного ряда). Для вычисления функции распределения и плотности распределения нормального закона в пакете Excel могут быть использованы функции НОРМРАСП – для произвольных а и σ и НОРМСТРАСП – для стандартного нормального закона. Кроме того, во многих справочных изданиях приводятся значения так называемой *функции Лапласа* $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Свойства функции Лапласа:

1) $\Phi(x)$ - нечетная функция, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2) $\Phi(0) = 0$;

3) $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0{,}5$.

Функция Лапласа $\Phi(x)$ и функция распределения *стандартного* нормального закона $F(x)$ связаны простым равенством: $F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}$.

Применение общих формул (2.3) и (2.4) непосредственно затруднительно из-за отмеченных выше особенностей функции распределения нормального закона. Поэтому значительный интерес представляет переход от произвольного нормального закона к стандартному по следующей формуле: если X – нормальная случайная величина с параметрами a и σ (то есть $X \sim N(a;\sigma)$), то вероятность ее попадания в интервал (α, β) равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (2.5)$$

Отметим два частных случая этой формулы:

$$P(X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad P(X > \alpha) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (2.6)$$

Особый интерес представляет вычисление вероятностей попадания в интервалы, симметричные относительно значения $a = MX$, то есть вероятностей вида $P(|X-a| < \delta)$; из формулы (2.5) получаем, полагая $\alpha = a - \delta$ и $\beta = a + \delta$:

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Полагая здесь последовательно $\delta = \sigma$; $\delta = 2\sigma$; $\delta = 3\sigma$, получаем: $P(|X-a| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0{,}683$; $P(|X-a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545$ ([1]) $P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973$.

Последняя вероятность достаточно близка к единице, то есть вероятности достоверного события, что послужило основанием сформулировать относительно просто запоминающееся и пригодное для использования на практике «*правило трех сигм*»: все значения нормальной случайной величины почти наверное лежат в интервале «а» плюс-минус три сигма ($a \pm 3\sigma$)».

[1] при $\delta = 1{,}96\sigma$ получаем значение вероятности, весьма близкое к 0,95 (а именно 0,950004).

Пример 2.7. Известно, что X – нормальная случайная величина с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 1{,}5$.

Найти вероятности событий: (i) $3{,}5 < X < 4{,}25$; (ii) $1 < X < 3$; (iii) $X < 2{,}75$.

В каком интервале почти наверное лежат все значения этой случайной величины? В какой интервал, симметричный относительно *MX*, поадают значения этой величины с вероятностью 0,95?

Решение.

(i) $\alpha = 3{,}5$; $\beta = 4{,}5$; $\frac{\beta-a}{\sigma} = \frac{4{,}25-2}{1{,}5} = 1{,}5$; $\frac{\alpha-a}{\sigma} = \frac{3{,}5-2}{1{,}5} = 1$;

$P(3{,}5 < X < 4{,}25) = = \Phi(1{,}5) - \Phi(1) = 0{,}4332 - 0{,}3413 = 0{,}0919$.

(ii) $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $\frac{\beta-a}{\sigma} = \frac{3-2}{1{,}5} = 0{,}6667$; $\frac{\alpha-a}{\sigma} = \frac{1-2}{1{,}5} = -0{,}6667$;

$P(1 < X < 3) = \Phi(0{,}6667) - \Phi(-0{,}6667) =$

$= \Phi(0{,}6667) + \Phi(0{,}6667) = 2\cdot\Phi(0{,}6667) = 0{,}4950$.

(iii) $\beta = 2{,}75$; $\frac{\beta-a}{\sigma} = \frac{0{,}75}{1{,}5} = 0{,}5$. По формуле (2.6) получаем:

$P(X < 2{,}75) = \Phi(0{,}5) + 0{,}5 = 0{,}6914$.

Далее, по правилу «трех сигм» $2 - 3\cdot 1{,}5 < X < 2 + 3\cdot 1{,}5$ почти наверное или:

$-2{,}5 < X < 6{,}5$ почти наверное. По сделанному примечанию, с вероятностью 0,95 значения X будут попадать в интервал

$$2 - 1{,}96\cdot 1{,}5 < X < 2 + 1{,}96\cdot 1{,}5$$

или

$$-0{,}94 < X < 1{,}94.$$

Аппроксимация биномиального распределения нормальным распределением (предельные теоремы Муавра – Лапласа)

Пусть X – биномиальная случайная величина с параметрами n и p . Если значение n достаточно велико, а значение p не слишком близко к нулю или единице, то:

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(\,k_1 < X < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Первая из этих формул есть результат так называемой локальной предельной теоремы Муавра-Лапласа, вторая – интегральной предельной теоремы. Ранее $P(X=k)$ обозначалась $P_n(k)$, и вместо $\mathrm{P}(\,k_1 < X < k_2)$ можно записать также $\mathrm{P}(\,k_1 < k < k_2)$, где k – число появлений некоторого события А в n опытах.

Пример 2.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена равно 81 раз.

Решение. Случайная величина X – число попаданий в мишень является биномиальной с параметрами n =100, p = 0.9. Так как n = 100 – достаточно большое число и $\lambda = np = 90$ велико для применения формула Пуассона, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Мы имеем:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\varphi\left(\frac{81-90}{\sqrt{9}}\right) = \frac{\varphi(-3)}{3} = \frac{0{,}0045}{3} = 0{,}0015\,.$$

Пример 5.5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 81 раза и не более 87 раз.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P(81 < k < 87) \approx \Phi\left(\frac{87-90}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{81-90}{\sqrt{9}}\right) = \Phi(-2) - \Phi(-3) = \Phi(3) - \Phi(2) = 0{,}4986 - 0{,}4772 = 0{,}0215$$

Распределение χ^2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – независимые стандартные нормальные случайные величины, то есть $X_i \sim N(0;1)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда закон распределения случайной величины $Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$ называется *законом распределения хи-квадрат с «k» степенями свободы*. Плотность распределения случайной величины Z равна $f(x) = Cx^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$, если $x \leq 0$. В прикладных вопросах обращаться непосредственно к формулам для $f(x)$ нет необходимости, так же, как и знать величину постоянной C (она равна $C = \frac{1}{2^m \Gamma(m)}$, $m = \frac{k}{2}$, $\Gamma(x)$ – так называемая гамма-функция).

Распределение Стьюдента (T – распределение).

Законом распределения Стьюдента с *«k» степенями свободы* называется закон распределения случайной величины $T = \frac{X_0}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2}}$, где $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k$ – независимые стандартные нормальные случайные величины. Плотность распределения имеет вид $f(x) = C\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$, нормирующую константу C можно найти в справочной литературе. Эта плотность внешне похожа на плотность стандартного нормального закона, с которым распределение Стьюдента сближается при $n \to \infty$ (при $n \geq 30$ можно говорить о хорошем приближении).

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть A и B такие случайные события, что $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$ и $P(B) = \frac{1}{2}$. Найти $P(A + B)$.

2. Известно, что A и B несовместные события, P(A) = 0,7. Может ли вероятность события B быть равна P(B) = 0,2? 0,3? 0,4? 0,5?

3. В партии, состоящей из 11 изделий, 6 бракованных. Наугад выбирается 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется не более двух бракованных.

4. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочнике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике;
б) только в двух справочниках.

5. В одном маленьком университете 30% всех обучающихся составляют студенты – первокурсники, по 20% - студенты второго и третьего курсов, 15% - студенты 4-го курса, 10% - студенты 5-го курса и 5% - аспиранты. Для поездки на фестиваль отбираются случайным образом делегация из 12 человек. Какова вероятность того, что в делегацию попадут
(a) по два студента с каждого курса и два аспиранта?
(b) хотя бы один аспирант и хотя бы один первокурсник?
(c) не только студенты?

6. Бросают игральную кость 10 раз. Чему равны вероятности следующих случайных событий: (a) число выпадений одного очка равно четырем, двух очков – двум и остальных очков – по одному? (b) число выпадений одного очка равно четырем и двух – трем? (c) числа выпадений количества очков, не делящегося на три, равно четырем, а делящихся на три - шести? (d) в точности двух выпадений одного очка и в точности трех выпадений двух очков?

7. В баскетбольной команде 12 человек, в каждый момент игры на площадке – пятеро. Если в команде два брата, то какова вероятность того, что в текущий момент их обоих нет на площадке?

8. Игральная кость сделана таким образом, что вероятность выпадения каждой грани пропорциональна числу очков на ней. Какова вероятность следующих случайных событий: A: «выпало четное число очков»; B: «выпало число очков, кратное 3»; C: «выпало не менее 3-х очков».

9. Игральная кость бросается два раза. Какова вероятность того, что:
(a) сумма выпавших очков больше 10, при условии, что один раз выпадает шестерка?
(b) сумма выпавших очков больше 10, при условии, что при первом бросании выпадает шестерка?
(c) сумма выпавших очков меньше 7, при условии, что один раз выпадает тройка?
(d) сумма выпавших очков равна 10, при условии, что один раз выпадает меньше чем четыре очка?

10. Независимо бросаются две игральные кости. Событие A состоит в том, что сумма выпавших очков четна, событие B – в том, что эта сумма делится на 3. Как сопоставить событие C: «выпало 6 очков» с событиями A и B? Будут ли события A и B независимыми?

11. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них ошибка превышает заданную точность.

12. Вероятность двух независимых событий равны 0,7 и 0,6. Какова вероятность того, что произойдет не более одного из этих событий?

13. Заказы от двух клиентов поступают независимо с вероятностями 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что поступит хотя бы один заказ? Ровно один заказ?

14. Вероятность сдать некоторый тест при каждой попытке Вы оцениваете в 0,5. Сколько следует попросить попыток, если надо обеспечить вероятность сдать тест не меньше, чем 0,95?

15. Событие А может наступить лишь пи условии проявления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1) = \frac{1}{4}$ и условные вероятности $P_{B_1}(A) = \frac{1}{2}$. и $P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}$. Найти вероятность P(A).

16. Вероятность безнадежной поломки велосипеда составляет 0,05. Какова вероятность, что в команде из трех велосипедистов хотя бы один доедет до финиша? Тот же вопрос, если в машине сопровождения есть в запасе еще один велосипед.

17. В партии из пяти изделий три бракованных. Пусть X - число бракованных изделий среди двух случайно выбранных. Составить закон распределения X, найти MX.

18. Из 5 писем, среди которых два важных, одно потерялось. Составьте закон распределения X - числа важных писем среди оставшихся, найдите MX.

19. Пусть X – число появлений события А в 8 независимых опытах. Известно, что DX = 2. Чему равна вероятность события А?

20. Функция распределения случайной величины X имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 0 \\ \frac{1}{8}x^3, \text{ если } 0 < x \le 2 \\ 1, \text{если } x > 2 \end{cases}$ Найдите MX и DX.

21. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 0 \\ Ax, \text{ если } 0 < x \le 1 \\ 0, \text{если } x > 1 \end{cases}$. Определите А, найдите MX и $P(0{,}2 < X < 0{,}8)$.

22. Пусть все значения случайной величины X принадлежат отрезку [a; b]. Какие из приведенных утверждений являются истинными?

а) $a \le MX \le b$; б) $P(X<a) = 0$; в) $MX \approx 0{,}5 \cdot (a+b)$; г) $P(X>b) = 1$.

23. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [0;b]. Определите b, если известно, что DX=0,75.

24. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [a;b]. Определите a и b, если известно, что MX = 2,5; DX=0,75.

25. Пусть вероятность того, что при изготовлении электролампы будет допущен брак, равна 0,002. Какова вероятность того, что из 1000 электроламп не будет бракованных?

26. На АТС поступает в среднем 180 вызовов в час. Какова вероятность того, что в течение минуты поступит не более двух вызовов?

27. Допустим, что рост человека (исключим баскетболистов и лилипутов) – нормальная случайная величина, причем в среднем рост равен примерно 170 см при среднеквадратичном отклонении ($\sqrt{DX}$) равном 15 см. В каком примерно интервале находится рост 95% людей?

28. Бросают игральную кость n раз. Чему равны среднее отклонение и дисперсия

(a) числа выпадений одного очка при $n = 50$?

(b) числа выпадений 1 или 2 очков при $n = 450$?

(c) числа выпадений количества очков, не делящегося на три, при $n = 500$?

29. Какое минимальное число бросаний игральной кости необходимо сделать, чтобы с вероятностью 0,95 добиться того, что доля выпадений одного очка не отклонится более чем на 0,01 от значения $1/6$?

30. Два склада конкурируют за возможность их использования для хранения ежедневно прибывающих в порт 1000 контейнеров. Если выбор склада для каждого контейнера равновероятен, то по сколько мест должны предусмотреть владельцы складов, если они хотят быть уверенными, что вместимость их складов окажется достаточной с вероятностью 0,99?

Часть 3. Математическая статистика

Раздел 3.1. Основные задачи, решаемые математической статистикой. Выборка, характеристики выборки

Одна из основных задач, рассматриваемых математической статистикой, состоит в следующем. Пусть X – некоторая случайная величина, закон распределения которой или вообще неизвестен, или известен не полностью, например, известно, что X – нормальная случайная величина, но неизвестно, чему равны параметры «a» и «σ» – или один из них. Если известны результаты нескольких экспериментов с этой случайной величиной, то есть известно, какие значения она приняла в каждом из них, то можно на основе этих данных сделать определенные суждения о неизвестной функции распределения случайной величины X, в частности, о значениях ее параметров.

Выборкой называется упорядоченный набор значений случайной величины X, зарегистрированных в n независимых экспериментах: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Число опытов n называется *объемом выборки*. До опыта значения $x_1, x_2, \dots$ неизвестны, то есть являются случайными величинами, причем независимыми, и их функции распределения будут совпадать с функцией распределения случайной величины X.

Во многих практических приложениях может быть применена также следующая схема рассуждений. Пусть есть множество объектов, каждый из которых характеризуется некоторым числом (признаком X). Если всего в этом множестве, которое называют также «генеральная совокупность», имеется N элементов, среди которых есть N_x таких, для которых $X < x$, то отношение $\frac{N_x}{N}$ называют генеральной функцией распределения $F_\Gamma(x)$. Пусть из этой совокупности наудачу выбирают один объект, то x_1 – значение признака, которое соответствует данному объекту – является случайной величиной, причем вероятность события «$x_1 < x$» будет равна как раз $\frac{N_x}{N}$; таким образом, функция распределения $F(x)$ случайной величины x_1 будет равна $F_\Gamma(x)$, то есть $F(x) = F_\Gamma(x)$. Если число объектов в генеральной совокупности велико или если выбранный объект возвращается обратно в генеральную совокупность, то случайная величина x_2 – значение признака для второго выбранного объекта будет также обладать функцией распределения $F(x)$. В итоге мы снова можем считать набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ полученными в опыте значениями некоторой случайной величины X, то есть выборкой.

Для удобства обработки значения из выборки предварительно упорядочивают в порядке возрастания; полученный набор называется *вариационным рядом*, его элементы часто обозначают x_i^*:

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \cdots \leq x_n^*$$

По выборке определяются (рассчитываются):

- выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$;

- выборочная дисперсия $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$;

- «исправленная» выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Как видно из определения, $s^2 = \frac{n}{n-1}D_B > D_B$; обе величины s^2 и D_B служат оценками дисперсии исследуемой случайной величины, но, как выясняется, для этого предпочтительнее использование s^2. Эти числовые характеристики выборки рассчитываются практически всегда.

Также могут быть построены:

- гистограммы частот и относительных частот;
- полигоны частот и относительных частот

и найдена выборочная функция распределения.

Гистограммы частот и относительных частот применяются, как правило, в том случае, когда выборка порождена непрерывным распределением и число наблюдений велико. Для построения предварительно разбивают диапазон изменения значений из выборки на несколько равных интервалов и определяют число наблюдений, попавших в отдельные интервалы – это будут *частоты* f_i. Относительные частоты получаем, разделив частоты на объем выборки: $q_i = \frac{f_i}{n}$. Далее отмечаем границы интервалов на горизонтальной оси и над каждым интервалом строим прямоугольник с высотой $h_i = \frac{f_i}{\Delta}$, где Δ - длина интервала. Совокупность этих прямоугольников образует гистограмму частот. Если высоту каждого прямоугольника определить как $h_i = \frac{q_i}{\Delta} = \frac{f_i}{n\Delta}$, то получим гистограмму относительных частот. Общая сумма площадей всех прямоугольников для гистограммы частот равна объему выборки n, для гистограммы относительных частот эта сумма равна единице. При большом числе наблюдений и количестве интервалов огибающая прямоугольников в гистограмме относительных частот может служить приближением к графику (неизвестной) плотности исследуемого распределения.

Полигоны частот применяют при исследовании выборки из дискретного распределения. Полигон частот – это ломаная линия, соединяющая точки
$(x_i^*; f_i)$, где x_i^* - *неповторяющиеся* элементы вариационного ряда, f_i – соответствующие частоты. Ломаная, соединяющая точки $(x_i^*; \frac{f_i}{n})$, образует полигон относительных частот.

Выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ определяется так:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, x \le x_1^* \\ \frac{f_1}{n}, x_1^* < x \le x_2^* \\ \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n}, x_2^* < x \le x_3^* \\ \ldots \\ \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \cdots \frac{f_{k-1}}{n}, x_{k-1}^* < x \le x_k^* \\ 1, x > x_k^*, \end{cases}$$

где k – число *неповторяющихся* элементов вариационного ряда. Таким образом, график функции $F_n^*(x)$ - ступенчатая линия, имеющая разрывы в точках x_i^*, при этом высота «ступеньки» равна $\frac{f_i}{n}$.

Одними из основных задач, решаемых математической статистикой, являются:

1. Оценка неизвестных параметров распределений.
2. Проверка статистических гипотез.

Далее рассматриваются способы решения этих задач.

Раздел 3.2. Задача оценки параметров. Оценивание параметров нормального распределения

1. Задача оценки параметров. Оценки параметров распределений подразделяются на точечные и интервальные.

Точечные оценки выражены одним числом ,то есть точечная оценка некоторого параметра θ – это построенная по выборке по специальным образом подобранной формуле величина θ^*. До проведения опытов (наблюдений) θ^* является случайной величиной, её будущее значение непредсказуемо; поэтому утверждения типа «θ приближенно равно θ^*» некорректно. Точечные оценки характеризуются следующим образом.

1) θ^*называется несмещенной оценкой[1] параметра θ, если $M\theta^* = \theta$. Свойство несмещенности означает, что «в среднем» оценка θ^* правильная и при многократном применении этого способа оценивания параметра θ не будет систематической ошибки. Как правило, используются именно несмещенные оценки.

В частности, *выборочное среднее $\overline{x}$ является несмещенной оценкой неизвестного математического ожидания MX*; *несмещенной оценкой дисперсии DX является исправленная выборочная дисперсия*.

2) θ^*называется эффективной оценкой, если среди других оценок она имеет наименьшую дисперсию; *выборочное среднее $\overline{x}$ является эффективной оценкой неизвестного математического ожидания* MX.

3) θ^*называется состоятельной оценкой, если для любого $\varepsilon>0$
$P(|\theta^* - \theta| > \varepsilon) \longrightarrow 0$, если $n \longrightarrow \infty$. Это означает, что при увеличении объема выборки вероятность значительных отклонений оценки от оцениваемого параметра – уменьшается. К сожалению, в э*кономических* исследованиях объем выборки часто нельзя сделать больше, из-за ограниченности самой исследуемой совокупности объектов.

Важно: точечные оценки могут быть рассчитаны по любой выборке, независимо от того, известно нам что-либо об исследуемом законе распределения или нет.

---

[1] строго говоря, свойство несмещенности следует отнести к *методу* построения оценки θ^*.

<u>Интервальные оценки</u> имеют вид $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$; интервал $(\theta_1^*; \theta_2^*)$ называется *доверительным интервалом*. Величины θ_1^*, θ_2^* рассчитываются по выборке и поэтому утверждение «интервал $(\theta_1^*; \theta_2^*)$ содержит неизвестный параметр θ» некорректно. Характеристикой доверительного интервала является так называемая *доверительная вероятность*, или *надежность* γ - вероятность того, что приведенное выше утверждение верно:

$$P(\theta_1^* < \theta < \theta_2^*) = \gamma \, .$$

Таким образом, величины θ_1^*, θ_2^* будут определяться, в том числе, и значением надежности.

Важно: так как характеристикой доверительного интервала является некоторая вероятность, для его построения необходимо иметь определенную информацию о законе распределения выборки (вид распределения; например, известно, что выборка получена из нормальной генеральной совокупности).

2. Оценивание параметров нормального распределения

I. Интервальные оценки параметра a.

I.1. Интервальные оценки параметра a при известном σ.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – выборка, порожденная нормальным распределением N(a, σ). Тогда $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые нормальные случайные величины, с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями: $Mx_i = a, Dx_i = \sigma^2$, $i = 1,2, \dots, n$. Доказано (в более подробных курсах теории вероятностей), что сумма независимых нормальных случайных величин является нормальной случайной величиной и, если нормальную величину умножить (разделить) на некоторое число, в результате получим также нормальную величину. Поэтому выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ здесь будет нормальной случайной величиной. Найдем её параметры. Учитывая свойства математического ожидания и дисперсии (см. Часть2, раздел 2.3), получаем

$$M\overline{x} = M\left(\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\right) = \frac{1}{n}(Mx_1 + Mx_2 + \cdots Mx_n) = \frac{n \cdot a}{n} = a$$

и

$$D\overline{x} = D\left(\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\right) = \frac{1}{n^2}(Dx_1 + Dx_2 + \cdots Dx_n) = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Таким образом, выборочное среднее имеет закон распределения $N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Применяя формулу (X.X) из Части 2, получаем

$$P(|\overline{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

(напомним, Φ – функция Лапласа). Пусть t_γ - такое число, что

$$2\Phi(t_\gamma) = \gamma.$$

Тогда, если мы требуем, чтобы вероятность $P(|\overline{x} - a| < \delta)$ была равна заданной надежности γ, должно быть: $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t_\gamma$, откуда находим:

$$\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$$

и доверительный интервал для a получаем в виде:

$$\overline{x} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Значение t_γ можно найти:

а) из таблиц значений функции Лапласа;

б) посредством встроенной функции НОРМСТОБР в пакете Excel

Функция НОРМСТОБР «работает» так:

если z = НОРСТОБР (p), то P(X<z) =p, где X имеет стандартное нормальное распределение. В данной задаче требуется найти t_γ из условия P(|X|<t_γ) =γ.

Так как стандартное нормальное распределение симметрично, то

P(X<$-t_\gamma$)= P(X>t_γ)= $\frac{1-\gamma}{2}$ и поэтому P(X<t_γ)= $1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$.

Значит,

$$t_\gamma = \text{НОРМСТОБР}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$

Можно также запомнить (сохранить в записи) следующие «стандартные» значения t_γ:

γ	t_γ
0,9	1,644
0,95	1,96
0,99	2,576

Пример 3.1. По результатам 25 наблюдений над нормальной случайной величиной с параметром σ =1,25 получено $\overline{x}$=4,23. Построить доверительный интервал для параметра *a* с надежностью γ = 0,95.

Решение. Вычисляем

$$\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 1{,}25}{\sqrt{25}} = 0{,}49\,.$$

Построим доверительный интервал:

$$\overline{x} - \delta < a < \overline{x} + \delta\,,$$

$$4{,}23 - 0{,}49 < a < 4{,}23 + 0{,}49\,,$$

$$3{,}74 < a < 4{,}72\,.$$

I.2. Интервальные оценки параметра *a* при неизвестном σ.

В этом случае параметр σ при построении доверительного интервала использовать нельзя. Вместо этого используется доказанное (отдельно) утверждение:

распределение случайной величины $T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{x}-a)}{s}$ является распределением Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1$. Определим величину t_γ из условия $P(|T| < t_\gamma) = \gamma$. Тогда интервал

$$\left(\overline{x} - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$$

содержит параметр «*a*» с заданной надежностью γ.

Величины t_γ для различных значений k приводятся в таблицах критических точек распределения Стьюдента. В этих таблицах, а также в функции СТЬЮДРАСПОБР из пакета Excel используется т.н. «уровень значимости» α - это величина, равная 1 –γ (то есть, α= $P(|T| < t_\gamma)$).

Пример 3.2. По результатам 25 наблюдений над нормальной случайной величиной получено $\overline{x}$=4,23 и s^2 = 1,25. Построить доверительный интервал для параметра *a* с надежностью γ = 0,95.

Решение. Рассчитываем α = 1 – γ = 1 – 0,95 = 0,05.

Определяем число степеней свободы $k = n - 1 = 25 - 1 = 24$.

По таблицам двусторонних критических точек распределения Стьюдента или задавая в Excel «= СТЬЮДРАСПОБР(0,05; 24)» находим t_γ= 2,064 .
Далее вычисляем:

$$\frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}064 \cdot \sqrt{1{,}25}}{\sqrt{25}} = \frac{2{,}064 \cdot 1{,}118}{5} = 0{,}462\,.$$

Находим доверительный интервал:

$4{,}23 - 0{,}462 < a < 4{,}23 + 0{,}462;$ $\qquad 3{,}768 < a < 4{,}692.$

II. Интервальные оценки параметра σ.

В теоретических курсах математической статистики устанавливается, что случайная величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

имеет «хи-квадрат» распределение с числом степеней свободы k = n-1.

Для заданной надежности γ определим значения $a_{\text{лев}}$ и $a_{\text{пр}}$ из условия

$$P(\chi^2 < a_{\text{лев}}) = 1 - \frac{\gamma}{2}, \qquad P(\chi^2 > a_{\text{пр}}) = 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Тогда доверительный интервал для σ^2 примет вид:

$$\frac{(n-1)s^2}{a_{\text{пр}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{a_{\text{лев}}}\,.$$

Пример 3.3. По результатам 25 наблюдений над нормальной случайной величиной получено s^2= 1,25. Построить доверительный интервал для σ^2 с надежностью γ = 0,95.

Решение. Вычисляем $1 - \frac{\gamma}{2} = 0{,}025$. Определяем число степеней свободы k = 25–1=24. По таблицам значений функции распределения «хи-квадрат» находим

$$a_{\text{лев}} = 12{,}4;\ a_{\text{пр}} = 39{,}4\,;$$

$$\frac{24 \cdot 1{,}25}{39{,}4} < \sigma^2 < \frac{24 \cdot 1{,}25}{12{,}4};$$

$$0{,}761 < \sigma^2 < 2{,}420.$$

Раздел 3.3. Общие принципы проверки статистических гипотез. Проверка гипотез о параметрах нормального закона. Критерии согласия Пирсона, Колмогорова

1. Общие принципы проверки статистических гипотез. Статистической гипотезой называется предположение о виде неизвестного распределения («исследуемое распределение является нормальным») или о значениях параметров распределения, тип которого известен («параметр '*a*' нормального закона равен нулю» или « параметр $a > 0$»). Если гипотеза однозначно определяет исследуемое распределение, то она называется простой. Среди приведенных выше гипотез нет простых; примером простой гипотезы может быть: «параметр '*a*' нормального закона, у которого $\sigma = 1$, равен нулю». Сложная гипотеза состоит из множества (как правило, бесконечного) простых гипотез. Так, гипотеза «параметр '*a*' нормального закона равен нулю» состоит из гипотез « $a = 0$, $\sigma = C$», где C принимает произвольное положительное значение.

Мы рассмотрим случай проверки *простых* гипотез – эта задача часто встречается на практике. Пусть такая гипотеза сформулирована; ее обычно называют основной или *нулевой* и обозначают H_0. *Весьма важно* отметить, что подразумеваемый в «повседневном смысле» выбор из двух возможностей: «принять гипотезу H_0» или «не принять гипотезу H_0» требует уточнения. А именно, данная гипотеза проверяется по отношению к так называемой *альтернативной*, или конкурирующей, гипотезе H_1. Эта гипотеза формулируется одновременно с основной и итоговое решение выбирается из двух следующих: «принять гипотезу H_0 и отвергнуть H_1» и «отвергнуть H_0 и принять H_1».

Таким образом, вполне возможна ситуация, когда *одна и та же* гипотеза H_0 при *одной и той же* выборке, но при разных альтернативах H_1 будет в одном случае приниматься, а в другом – отвергаться.

Проверка гипотез осуществляется на основании расчетов, проводимых по выборке, и поскольку выборочные значения случайны, то выводы по результатам этих расчетов могут быть ошибочными. Следует различать ошибки двух видов:

- ошибки I рода: «отвергнуть верную гипотезу H_0 (и, следовательно, принять H_1) » - нулевая гипотеза на самом деле верна, но отвергается;

- ошибки II рода: «принять неверную гипотезу H_0» - нулевая гипотеза на самом деле не верна, но принимается.

Эти ошибки различны, и их последствия также могут по существу отличаться. Часто приводят следующий «классический» пример. Нулевая гипотеза: «доза сильнодействующего лекарства определена правильно»; альтернативная гипотеза: « доза завышена». Ошибка первого рода приведет к затратам на новое определение правильной дозы, которая уже найдена; ошибка второго рода может иметь последствием причинение вреда здоровью пациента. Выяснение последствий от принятия неверного решения должно помочь правильно выбрать вероятность ошибки, которая будет приемлема в конкретной ситуации.

Процедура проверки гипотез включает следующие последовательные этапы.

1. Формулируются гипотезы H_0 и H_1.

2. Подбирается специальным образом случайная величина К – так называемый статистический критерий – обладающая свойствами: (а) значение К может быть определено (рассчитано) по выборке и (б) если гипотеза H_0 верна, то закон распределения К полностью известен.

Замечание. Термин «критерий» здесь, как это часто имеет место в литературе по математической статистике, употребляется в двух смыслах. Во-первых, он обозначает в целом сам способ, или правило, проверки каких-либо конкретных гипотез. Во вторых, он имеет указанный выше более узкий смысл – как обозначение специальной случайной величины, применяемой при проверке данной гипотезы. В этом втором случае часто вместо слова «критерий» употребляют: «статистика».

3. Выбирается (задается) приемлемое в данной задаче значение вероятности ошибки первого рода; оно обозначается α и называется уровнем значимости критерия.

4. Определяется так называемая критическая область $O_{КР}$ – интервал или интервалы на числовой оси, для которых вероятность того, что критерий К примет значение из критической области будет равна α.

5. Проводится эксперимент и тем самым формируется выборка.

6. По выборке рассчитывается наблюдаемое значение критерия $К_{набл}$.

7. Если это значение принадлежит критической области: $К_{набл} \in О_{КР}$, то нулевая гипотеза *отвергается* (и принимается $Н_1$); в противном случае говорят, что отвергнуть нулевую гипотезу нет оснований.

Отметим, что вероятность ошибки первого рода, уровень значимости, – это вероятность того, что при *верной* нулевой гипотезе значение критерия попадет в критическую область. Значение α обычно выбирается из чисел 0,1; 0,05; 0,01; однако развитие средств вычислений позволяет относительно просто решать рассматриваемую задачу при произвольно заданном α.

Вероятность отклонить неверную нулевую гипотезу называется *мощностью критерия*; это есть вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива альтернативная гипотеза. Таким образом, мощность критерия равна единица минус вероятность ошибки второго рода. *Замечание*. Несложно понять, что в общем случае может быть много вариантов выбрать критерий К, удовлетворяющий условиям (а) и (б). Подбор формулы для критерия в каждом конкретном случае проверки гипотез проводится специалистом-математиком; выбор критерия обеспечивает при заданном уровне значимости наибольшую мощность, то есть наименьшую возможную вероятность ошибки второго рода.

В зависимости от конкретной задачи вид критической области может быть разным. Следующие примеры являются наиболее распространенными на практике.

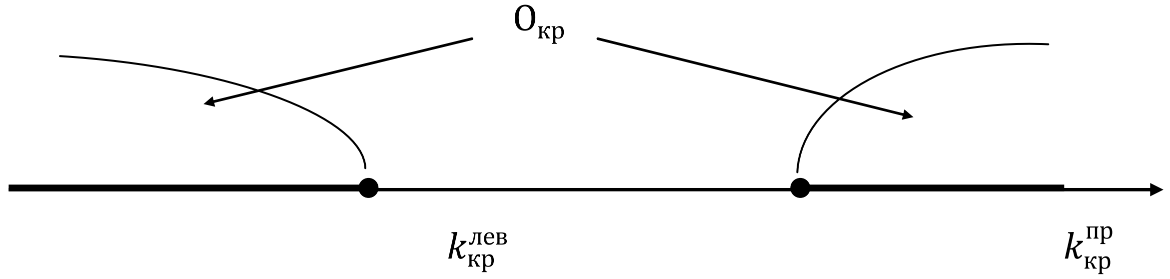


Рис. 3.1. Двусторонняя критическая область

Двусторонняя критическая область имеет вид:

$О_{КР} = (-\infty; k_{КР}^{лев}) \cup (k_{КР}^{пр}; \infty)$. Значения $k_{КР}^{лев}$ и $k_{КР}^{пр}$ определяются условием

$$Р(\ К < k_{КР}^{лев} \text{ или } К\ >\ k_{КР}^{пр}) = Р(\ К < k_{КР}^{лев}) + Р(\ К > k_{КР}^{пр}) = \alpha.$$

Если по смыслу значения критерия ограничены, например, должны быть обязательно неотрицательны, двусторонняя область может иметь вид, приведенный на рис. 3.2.

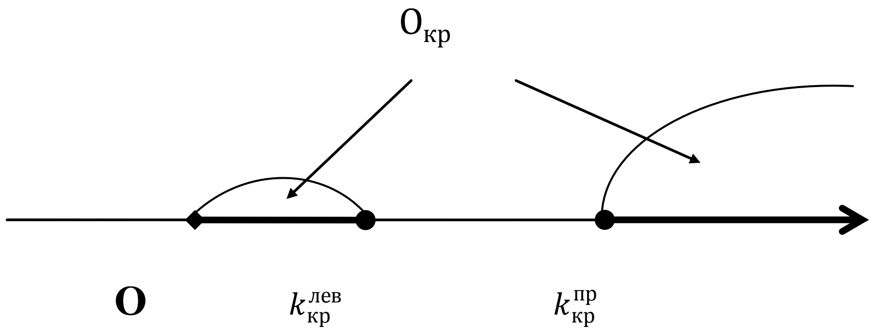
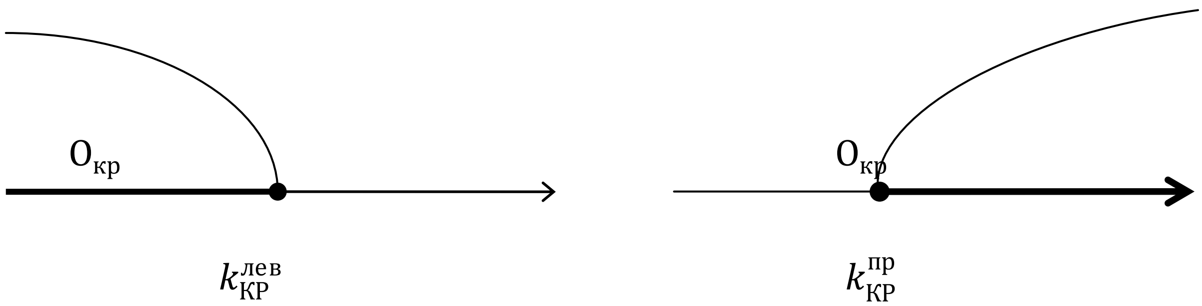


Рис. 3.2.Частный случай двусторонней критической области: возможные значения критерия - неотрицательны

Среди наиболее употребительных на практике критериев достаточно часто встречаются такие, распределения которых *симметричны*, то есть $Р(К > x) = Р(К < -x)$ [1]. В этом случае для двусторонней области получаем: $k_{КР}^{лев} = -k_{КР}^{пр}$. Обозначим $k = k_{КР}^{пр}$. Тогда $Р(\ К > k) = \frac{\alpha}{2}$ и $Р(\ К < -k) = \frac{\alpha}{2}$.

Односторонняя критическая область может быть левосторонней или правосторонней.



Левосторонняя критическая область *Правосторонняя* критическая область

Рис. 3.3. Односторонние критические области

Левосторонняя критическая область имеет вид: $О_{КР} = (-\infty; k_{КР}^{лев})$. Значение $k_{КР}^{лев}$ определяется условием $Р(\ К < k_{КР}^{лев}) = \alpha$.

Правосторонняя критическая область имеет вид: $О_{КР} = (k_{КР}^{пр}; \infty)$.

[1] в этом случае график плотности критерия будет симметричен относительно оси Oy

Значение $k_{КР}^{пр}$ определяется условием Р(К > $k_{КР}^{пр}$) = α.

Числа $k_{КР}^{пр}$, $k_{КР}^{лев}$ получили название критических точек, соответственно право- и левосторонних. Если распределение критерия симметрично, то $k_{КР}^{лев} = -k_{КР}^{пр}$ и эти обе «односторонние» точки вместе являются границами и двусторонней критической области. При этом значение $k_{КР}^{пр}$ для правосторонней области, соответствующее уровню значимости $\frac{\alpha}{2}$, совпадает со значением $k_{КР}^{пр}$ для *двусторонней* области, соответствующее уровню значимости α.

2. Проверка гипотез о значениях параметров нормального закона

I. Проверка гипотез о значениях параметра a.

I.1. Проверка гипотез о значениях параметра a при известном σ.

Если значение σ известно, то закон распределения случайной величины $K = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-a)}{\sigma}$ является стандартным нормальным законом N(0;1), то есть известен полностью. Следовательно, К можно выбрать в качестве критерия. Возможны три варианта постановки задачи проверки гипотез о значениях параметра «*a*», отличающиеся формулировкой альтернативной гипотезы:

1. H_0: $a = a_0$, H_1: $a \neq a_0$. В этом случае критическая область двусторонняя, симметричная относительно нуля: $О_{КР} = (-\infty; -k_{кр}) \cup (k_{кр}; \infty)$. Значение $k_{кр}$ определяется из условия $P(|K| > k_{кр}) = \alpha$ или $1 - 2\Phi(k_{кр}) = \alpha$, то есть $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$. (Это и два последующих условия на $k_{кр}$ получены с применением формул (5.1) и (5.2) для вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал).

2. H_0: $a = a_0$, H_1: $a > a_0$. Критическая область правосторонняя, $О_{КР} = (k_{кр}; \infty)$. Значение $k_{кр}$ определяется из условия $P(K > k_{кр}) = \alpha$ или $0{,}5 - \Phi(k_{кр}) = \alpha$, то есть $\Phi(k_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$.

3. H_0: $a = a_0$, H_1: $a < a_0$. Критическая область левосторонняя, $О_{КР} = (-\infty; -k_{кр})$. Значение $k_{кр}$ определяется из условия $P(K < -k_{кр}) = \alpha$ или $\Phi(k_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$. *Если значение σ неизвестно*, то в качестве критерия выбирается величина

$T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{x}-a)}{s}$, распределение которой является распределением Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1$.

1. H_0: $a = a_0$, H_1: $a \neq a_0$. Критическая область двусторонняя, $O_{кр} = (-\infty; -t_{кр}) \cup (t_{кр}; \infty)$.Значение $t_{кр}$ определяется из условия $P(|T| > t_{кр}) = \alpha$.

. 2. H_0: $a = a_0$, H_1: $a > a_0$. Критическая область $O_{КР} = (t_{кр}; \infty)$. Значение $t_{кр}$ определяется из условия $P(T > t_{кр}) = \alpha$.

3. H_0: $a = a_0$, H_1: $a < a_0$. Критическая область $O_{КР} = (-\infty; -t_{кр})$. Значение $t_{кр}$ определяется из условия $P(T < -t_{кр}) = \alpha$ (или, что то же самое, из условия $P(T > t_{кр}) = \alpha$).

Пример 3.4. Известно, что исследуемая величина имеет нормальное распределение с параметром $\sigma = 2,4$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу H_0: $a = 3$ при альтернативах H_1: $a \neq 3$ H_1: $a > 3$ H_1: $a < 3$. При этом известно, что по результатам 16 наблюдений получено $\overline{x} = 4{,}12$.

Решение. В данном случае критерием является величина $K = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}-a_0)}{\sigma}$. Вычисляем наблюдаемое значение критерия: $K_{набл} = \frac{\sqrt{16}\cdot(4{,}12-3)}{2{,}4} = 1{,}87$.

Для пары гипотез H_0: $a = 3$ H_1: $a \neq 3$ критическое значение $k_{кр}$ определяется из условия: $P(|K| > k_{кр}) = \alpha$; $k_{кр}$ находим либо по таблице критических точек нормального закона, либо по таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}475$, либо применяя соответствующую функцию из пактов прикладных статистических программ (в пакете MS Excel: = НОРМСТОБР(0,975)). Получаем $k_{кр} = 1{,}96$.

Отмечаем, что выполнено неравенство: $|K_{набл}| < k_{кр}$: 1,87 < 1,96. Вывод: H_0 – принимается («отвергнуть гипотезу H_0 нет оснований).

Для пары гипотез H_0: $a = 3$ H_1: $a > 3$ критическое значение $k_{кр}$ определяется из условия: $P(K > k_{кр}) = \alpha$. В этом случае $k_{кр} = 1{,}64$. Так как $K_{набл} > k_{кр}$: 1,87>1,64 , то H_0 – отвергается.

Для пары гипотез H_0: $a = 3$ H_1: $a < 3$ критическое значение $k_{кр}$ определяется из условия: $P(K < -k_{кр}) = \alpha$. В этом случае также $k_{кр} = 1{,}64$. Так как $K_{набл} > -k_{кр}$: 1,87>–1,64 , то H_0 – принимается.

Пример 3.5. Известно, что исследуемая величина имеет нормальное распределение. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу H_0: $a = 3$ при альтернативах H_1: $a \neq 3$ H_1: $a > 3$ H_1: $a < 3$.

При этом известно, что по результатам 16 наблюдений получено $\overline{x} = 4{,}01$, $s^2 = 5{,}68$.

В данном случае критерием является величина $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - a_0)}{s}$. Вычисляем наблюдаемое значение критерия: $T_{набл} = \frac{\sqrt{16}\cdot(4{,}01-3)}{\sqrt{5{,}68}} = 1{,}695$.

Для пары гипотез H_0: $a = 3$ H_1: $a \neq 3$ критическое значение $t_{кр}$ определяется из условия: $P(|T| > t_{кр}) = \alpha$; $k_{кр}$ находим либо по таблице критических точек распределения Стьюдента с числом степеней свободы, равном 16–1=15, либо применяя соответствующую функцию из пактов прикладных статистических программ (в пакете MS Excel: = СТЬЮДРАСПОБР(0,05;15)). Получаем $t_{кр} = 2{,}13$. Отмечаем, что выполнено неравенство: $|T_{набл}| < t_{кр}$: 1,695 < 2,13. Вывод: H_0 – принимается.

Для пары гипотез H_0: $a = 3$ H_1: $a > 3$ критическое значение $t_{кр}$ определяется из условия: $P(T > t_{кр}) = \alpha$. В этом случае $t_{кр} = 1{,}75$. Так как $T_{набл} < t_{кр}$:1,695<1,75 , то H_0 – принимается.

Для пары гипотез H_0: $a = 3$ H_1: $a < 3$ критическое значение $t_{кр}$ определяется из условия: $P(T < -t_{кр}) = \alpha$. В этом случае также $t_{кр} = 1{,}75$. Так как $T_{набл} > -t_{кр}$: 1,695>–1,75 , то H_0 – принимается.

II. Проверка гипотез о значениях параметра σ.

Более точно, проверяются гипотезы о значениях величины σ. Возможны три варианта постановки задачи проверки гипотез о значениях параметра «σ», отличающиеся формулировкой альтернативной гипотезы:

1. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.
2. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

3. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

Критерием во всех трех случаях является величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Если верна нулевая гипотеза, то эта случайная величина имеет «хи-квадрат» распределение с числом степеней свободы $k = n - 1$.

В первом случае критическая область – двусторонняя, имеет вид, приведенный на рисунке. При этом

$$P(\chi^2 > k_{\text{кр}}^{\text{пр}}) = \frac{\alpha}{2}, P(\chi^2 < k_{\text{кр}}^{\text{лев}}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Значение $k_{\text{кр}}^{\text{лев}}$ можно найти, например, используя функцию ХИ2ОБР пакета MS Excel, указав в качестве значения параметра «вероятность» число $\frac{\alpha}{2}$. Значение $k_{\text{кр}}^{\text{пр}}$ находим с помощью той же функции, задав значение «вероятность» равным $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Во втором и третьем случаях критические области односторонние, для второй пары гипотез - правосторонняя, $P(\chi^2 > k_{\text{кр}}^{\text{пр}}) = \alpha,$ для третьей – левосторонняя, $P(\chi^2 < k_{\text{кр}}^{\text{лев}}) = \alpha$.

Пример 3.6.

1. Сформулированы гипотезы: H_0: $\sigma^2 = 1{,}4$ при альтернативе $\sigma^2 \neq 1{,}4$. Требуется принять решение при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Известно, что по результатам 25 наблюдений получено $s^2=2{,}48$.

Решение. Число степеней свободы равно 24. Критическая область – двусторонняя. Находим её границы. Вычисляем $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025; 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$.

ХИ2ОБР(0,975; 24) = 39,36;   ХИ2ОБР(0,025; 24) = 12,40. Итак, критическая область имеет вид:

$$\chi^2 < 12{,}4 \text{ или } \chi^2 > 39{,}36.$$

Рассчитываем значение критерия:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 2{,}48}{1{,}4} = 42{,}51.$$

Значение критерия *принадлежит* критической области, нулевая гипотеза отвергается.

2. Сформулированы гипотезы: H_0: $\sigma^2 = 1{,}4$ при альтернативе $\sigma^2 > 1{,}4$. Требуется принять решение при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Известно, что по результатам 25 наблюдений получено $s^2=2{,}48$.

Решение. Число степеней свободы равно 24. Критическая область – правая односторонняя, имеет вид $O_{КР} = (k_{кр}; \infty)$. Значение $k_{кр}$ определяется из условия $P(\chi^2 > k_{кр}) = \alpha$ или $P(\chi^2 < k_{кр}) = 1 - \alpha = 0{,}95$. Теперь можно использовать ХИ2ОБР: $k_{кр}$= ХИ2ОБР(24;0,95) =36,41. Критическая область:

$$\chi^2 > 36{,}41$$

Значение критерия такое же, как в предыдущем примере: 42,51. Значение критерия *принадлежит* критической области, нулевая гипотеза отвергается.

3. Сформулированы гипотезы: H_0: $\sigma^2 = 1{,}4$ при альтернативе $\sigma^2 < 1{,}4$. Требуется принять решение при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Известно, что по результатам 25 наблюдений получено $s^2=2{,}48$.

Число степеней свободы равно 24. Критическая область – левая односторонняя, имеет вид $O_{КР} = (0; k_{кр})$. Значение $k_{кр}$ определяется из условия $P(\chi^2 < k_{кр}) = \alpha$. Получаем $k_{кр}$= 13,85. Критическая область: $\chi^2 < 13{,}85$. Значение критерия такое же, как в предыдущем примере: 42,51. Значение критерия *не принадлежит* критической области, нулевая гипотеза принимается.

3. Критерии согласия Пирсона, Колмогорова

Критерии согласия. Во многих практических задачах точный закон распределения неизвестен, и необходимо проверить справедливость гипотезы о том, что этот закон является, например, нормальным. Кроме того, бывает важно проверить, порождены ли две отдельные выборки одним и тем же законом распределения. Методы проверки таких гипотез получили название критерии согласия.

Критерий Пирсона, или *критерий χ^2 (Хи-квадрат)* — наиболее часто употребляемый критерий для проверки гипотезы о законе распределения. Нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что плотность распределения исследуемой случайной величины равна заданной функции $f(x)$.

Предварительно элементы выборки группируются в несколько интервалов и определяются числа $f_i^{\text{эмп}}$ – «эмпирические» (то есть полученные из опыта) частоты – количество наблюдений, попавших в i-тый интервал, i =1,2,..., m. С другой стороны, для каждого из таких интервалов (x_{i-1}, x_i) можно рассчитать «теоретические» частоты $f_i^{\text{теор}} = n \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$; напомним, что n – это объем выборки.

Для нормального распределения (и в некоторых других случаях) указанные интегралы нельзя найти по формуле Ньютона-Лейбница, поэтому часто применяют приближенную формулу $f_i^{\text{теор}} \approx n \cdot f(x_i^s) \cdot (x_i - x_{i-1})$, где x_i^s - середина интервала. В общераспространенных пакетах – Excel, LibreCal – есть встроенные функции для вычислений, связанных с нормальным законом. Так, в Excel $f_i^{\text{теор}}$ может быть рассчитано с применением функции НОРМРАСП:

Выражение для статистического критерия здесь следующее:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(f_i^{\text{эмп}} - f_i^{\text{теор}}\right)^2}{f_i^{\text{теор}}}.$$

Данная величина имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $k = m - 1$. По выбранному заранее уровню значимости α и числу k определяем $\chi^2_{\text{кр}}$. Если рассчитанная по выборке величина χ^2 будет больше, чем $\chi^2_{\text{кр}}$: $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}$, то предположение о том, что данная выборка получена из генеральной совокупности с плотностью распределения $f(x)$, *отклоняется*.

Замечание. Построить интервалы (x_{i-1}, x_i) можно многими способами, однако рекомендуется, чтобы числа $f_i^{\text{теор}}$ при $i = 1$ и $i = m$ были не меньше единицы, а при остальных i не меньше 5.

Критерий согласия Колмогорова (или критерий согласия Колмогорова - Смирнова) используют для того, чтобы определить, относятся ли две выборки к одному и тому же закону распределения (произведены из одной и той же генеральной совокупности), а также для того, чтобы определить, соответствует ли выборка заданному закону распределения.

Рассмотрим для определенности второй случай. Пусть $F(x)$ – заданная функция распределения. Вычислим величину

$$D_n = \sup_x |F_n^*(x) - F(x)|,$$

где $F_n^*(x)$ выборочная (эмпирическая) функция распределения (см. начало данной лекции). Для величины $\sqrt{n}D_n$ установлено приближенное (при n→∞) распределение: $P\left(\sqrt{n}D_n < \lambda\right) \approx Q(\lambda)$, для которого есть формулы для расчета. Таким образом, вычислив по выборке величину $\sqrt{n}D_n$ и определив (по таблице) значение $\lambda_{кр}$, для которого $Q\left(\lambda_{кр}\right) = 1 - \alpha$, α - заданный уровень значимости, мы отвергаем гипотезу о том, что выборка соответствует закону F(x) , если окажется, что $\sqrt{n}D_n > \lambda_{кр}$.

Пример 3.7. Приведены (упорядоченные по возрастанию) результаты 30 наблюдений над некоторой случайной величиной.

0,919; 0,986; 1,021; 1,061; 1,287; 1,340; 1,420; 1,592; 1,645; 1,730; 1,840; 1,906; 1,938; 1,975; 2,035; 2,143; 2,198; 2,204; 2,213; 2,232; 2,251; 2,342; 2,353; 2,628; 3,063; 3,245; 3,286; 3,308; 3,373; 3,934.

Требуется

1. Предполагая, что исследуемая величина – нормальная, построить точечные оценки параметров a и σ; построить доверительный интервал для параметра a с надежностью $\gamma = 0,95$.

2. Предполагая, что исследуемая величина – нормальная, проверить при уровне значимости $\alpha = 0,05$:

- гипотезу H_0: a = 2 при альтернативной гипотезе a ≠ 2;
- гипотезу H_0: a = 2 при альтернативной гипотезе a > 2.

3. Проверить по критерию Пирсона гипотезу о том, что выборка сделана из нормальной совокупности с параметрами a = 2 и σ = 1.

4. Проверить ту же гипотезу по критерию Колмогорова - Смирнова.

Решение.

1. Непосредственные вычисления с применением функций Microsoft Excel СРЗНАЧ и СТАНДОТКЛОН дают, соответственно, $\overline{x}$ = 2,116 и s = 0,622.

Таким образом $a \approx 2{,}116$ и $\sigma \approx 0{,}622$ – это точечные оценки (хотя мы обычно записываем здесь знак приближенного равенства, надо помнить, что он здесь не имеет того смысла, которым обладает вне теории вероятностей: истинные значения a и σ могут сколь угодно сильно отличаться от $\overline{x}$ и s, верно лишь то, что вероятность больших отклонений будет мала и в среднем мы не ошибаемся). Для построения интервальных оценок находим $t_{кр}$ при $\alpha = 0{,}05$ и $k = n - 2 = 28$: $t_{кр} = 2{,}049$ – получено с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР; вычисляем величину $\delta = t_{кр}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}049 \cdot \frac{0{,}622}{\sqrt{30}} \approx 0{,}233$. Доверительный интервал для «а» имеет вид: $\overline{x} - \delta < a < \overline{x} + \delta$ или

$$2{,}116 - 0{,}233 < a < 2{,}116 + 0{,}233,$$

то есть
$$1{,}883 < a < 2{,}349\,.$$

2. Так как по условию параметр σ неизвестен, то критерием для проверки выбранных гипотез является величина $T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{x} - a)}{s}$. Отметим, что проверяются гипотезы при $a_0 = 2$. Для первой пары гипотез значение $t_{кр}$ находим из условия $P(|T| > t_{кр}) = \alpha$. Такое значение $t_{кр}$ мы уже находили в предыдущей части решения, а именно: $t_{кр} = 2{,}046$. Вычисляем *наблюдаемое значение критерия* $T_{набл} = \frac{\sqrt{30}\cdot(2{,}116-2)}{0{,}622} \approx 1{,}022$. Так как $T_{набл} = 1{,}022 < 2{,}046 = t_{кр}$, то отвергнуть нулевую гипотезу нет оснований: результаты наблюдений не противоречат предположению о том, что $a = 2$.

При проверке второй пары гипотез используем ту же величину T и поэтому такое же значение $T_{набл} = 1{,}022$. Величину $t_{кр}$ теперь находим из условия $P(T > t_{кр}) = \alpha$. Согласно ранее сделанному замечанию, данное $t_{кр}$ можно найти и из условия $P(|T| > t_{кр}) = 2\alpha$ – поскольку распределение Стьюдента является симметричным. Получаем для $\alpha = 0{,}1$ и $k = 29$: $t_{кр} = 1{,}700$. Таким образом, у нас снова выполнено $T_{набл} < t_{кр}$, и в этой паре гипотез также принимается H_0.

4. Выберем интервалы (0,5; 1,0); (1,0;1,5); ...;(3,5;4,0). Всего у нас m = 7 интервалов, их границы обозначим x_i, i = 0, 1, 2, 7 (не путать с элементами вы-

борки!). Подсчитаем число наблюдений, попавших в каждый из них (найдем эмпирические частоты). Рассчитаем теоретические частоты двумя способами:
а) по приближенной формуле значение находим, пользуясь функцией НОРМРАСП с параметрами Среднее = 2; Х = 0,75; 1,25; ...; 3,75; среднеквадратичное = 0 интегральная = ложь (указываем, что вычисляем плотность распределения)
б) вычисляем значение функции распределения F(x) нормального закона, пользуясь функцией НОРМРАСП с параметрами Среднее = 2; Х = 0,5; 1,0; ...; 4,0; среднеквадратичное = 0 интегральная = истина и находим теоретические вероятности как $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$, затем теоретические частоты $f_i^{теор} = np_i$.
Результаты предварительных расчетов приведены в таблицах.
Вычисляем:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(f_i^{\text{эмп}} - f_i^{\text{теор}}\right)^2}{f_i^{\text{теор}}} = \frac{(2-2{,}74)^2}{2{,}74} + \cdots + \frac{(1-1{,}294)^2}{1{,}294} = 6{,}935.$$

По заданному α = 0,05 и числу степеней свободы k = m – 2 = 7 – 2 = 5 находим (например, с помощью функции ХИ2ОБР) $\chi^2_{кр}$ = 11,071. Так как $\chi^2_{набл} = 6{,}935 < 11{,}071 = \chi^2_{кр}$, то можно принять нулевую гипотезу – выборка соответствует нормальному распределению с параметрами a = 2 и σ = 1.
Второй вариант вычисления дает *точные* значения теоретических частот; единственным недостатком является то, что не во всех случаях им можно воспользоваться. Вычисления дают в этом случае: $\chi^2_{набл} = 7{,}010$; как видим, значение $\chi^2_{набл}$ несколько увеличилось. Однако по-прежнему справедливо неравенство $\chi^2_{набл} < 1\chi^2_{кр}$ и, следовательно, остается прежним вывод о принятии нулевой гипотезы.

Таблица 3.1

Расчет теоретических частот для критерия Пирсона – первый вариант

i	Интервал	Эмпирические частоты	Середина интервала $x_i^s = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$	Значение плотности $f(x_i^s)$ для N(2;1)	Теоретические частоты $f_i^{\text{теор}} \approx$ $\approx n \cdot f(x_i^s) \cdot (x_i - x_{i-1})$.
1	(0,5; 1,0)	2	0,75	0,183	2,740
2	(1,0;1,5)	5	1,25	0,301	4,517
3	(1,5;2,0)	7	1,75	0,387	5,800
4	(2,0;2,5)	9	2,25	0,387	5,800
5	(2,5;3,0)	1	2,75	0,301	4,517
6	(3,0;3,5)	5	3,25	0,183	2,740
7	(3,5;4,0)	1	3,75	0,086	1,294

Таблица 3.2

Расчет теоретических частот для критерия Пирсона – второй вариант

i	Правая граница интервала, x_i	Значение F(x_i) интегральной функции распределения N(2,1)	Теоретическая вероятность попадания в i-тый интервал, $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$	Теоретические частоты $f_i^{теор} = n \cdot p_i$.
«0»	0,5	0,067	0,092	
1	1,0	0,159	0,150	2,755
2	1,5	0,309	0,191	4,496
3	2,0	0,500	0,191	5,744
4	2,5	0,691	0,150	5,744
5	3,0	0,841	0,092	4,496
6	3,5	0,933	0,044	2,755
7	4,0	0,977	0,092	1,322

Таблица 3.3

Расчеты к применению критерия Колмогорова

i	x_i	$\frac{i-1}{30}$	$\frac{i}{30}$	$F(x_i)$	$\left\lvert\frac{i-1}{30} - F(x_i)\right\rvert$	$\left\lvert\frac{i}{30} - F(x_i)\right\rvert$
1	0,919	0,000	0,033	0,140	0,140	0,107
2	0,986	0,033	0,067	0,155	0,122	0,089
3	1,021	0,067	0,100	0,164	0,097	0,064
4	1,061	0,100	0,133	0,174	0,074	0,040
5	1,287	0,133	0,167	0,238	0,104	0,071
6	1,340	0,167	0,200	0,255	0,088	0,055
…	…	…	…	…	…	…
26	3,245	0,833	0,867	0,893	0,060	0,027
27	3,286	0,867	0,900	0,901	0,034	0,001
28	3,308	0,900	0,933	0,905	0,005	0,029
29	3,373	0,933	0,967	0,915	0,018	0,052
30	3,934	0,967	1,000	0,973	0,007	0,027

4. В этой части примера x_i , i = 1, 2, ..., 30 – элементы выборки. Выборочная функция распределения $F_n^*(x)$, согласно определению, будет возрастать на величину $\frac{1}{30} \approx 0{,}03333$ при переходе через каждое выборочное значение; на интервалах между ними она сохраняет *постоянное* значение. Поскольку функция распределения нормального закона $F(x)$ строго возрастает, то на каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ величина $|F_n^*(x) - F(x)|$ может быть наибольшей только на границе отрезков, в точках x_i. В итоге надо найти наибольшее из чисел

$\left\lvert\frac{i-1}{30} - F(x_i)\right\rvert$, $\left\lvert\frac{i}{30} - F(x_i)\right\rvert$ по всем i от $i = 1$ до $i = 30$. Приведем фрагмент таблицы с вычислениями (см. выше табл. 3.3).

Далее находим наибольшее из чисел двух последних столбцов: оно оказалось равным $D_n = 0{,}140$, вычисляем $\sqrt{n}D_n =$ 0,766 и по таблице λ-распределения Колмогорова-Смирнова находим, что значение Q(λ), равное $1 - \alpha = 0{,}95$ достигается при $\lambda_{кр} = 1{,}36$. Так как наблюдаемое значение $\sqrt{n}D_n = 0{,}766 < \lambda_{кр}$, то принимаем нулевую гипотезу: выборка соответствует нормальному распределению с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана выборка: 3,5,7,4,5,4,3,6,7,3. Требуется: а) построить статистический ряд; б) построить полигон частот; в) найти $x_в$, $D_в$.

2. По выборке 1;1;2;1;3;3;1;1 построить график выборочной функции распределения, полигон и гистограмму относительных частот.

3. Для выборки объема n = 8 вычислена выборочная дисперсия $D_В = 112$. Чему равна исправленная выборочная дисперсия s^2 ?

3. По результатам 25 наблюдений над нормальной случайной получено $\overline{x} = 9{,}27;\ s^2 = 2{,}67$. Постройте доверительный интервал для параметра «а» с надежностью γ = 0,95. Сколько необходимо было бы произвести наблюдений, чтобы интервал такой же ширины соответствовал надежности γ = 0,99?

4. Постройте критическую область для проверки гипотезы H_0: «а = 3» при альтернативе H_1: «а < 3», уровне значимости α = 0,05 и предполагаемом числе наблюдений $n = 20$. Сделайте эту проверку, если известно, что получено $\overline{x} = 2{,}07;\ s^2 = 3{,}47$.

5. По результатам 16 наблюдений получен доверительный интервал (2,42; 3,18) для параметра «а» нормального закона при неизвестном «σ» с надежностью γ=0,95. Каким будет доверительный интервал при γ=0,9?

6. По результатам 25 наблюдений получен доверительный интервал (1,82; 2,78) для параметра «а» нормального закона при неизвестном «σ» с надежностью γ=0,9. Каким будет доверительный интервал при γ=0,95?

7. Ошибочно использовав $D_В$ вместо s^2, студент получил доверительный интервал для «a» шириной на 5% меньше истинного. Если первоначально надежность была 0,95, то какая она теперь?

8. Какому максимальному уровню значимости соответствует принятие гипотезы H_0 «a= 1» при альтернативе H_1 «a≠ 1», если наблюдений 16, σ=2 и получено $\overline{x} = 2{,}02$?

9. По наблюдениям 1; 8; 15 при α=0,01 проверить гипотезу H_0: «σ^2=220» при альтернативе H_1: «σ^2>220»

10. При проверке гипотезы H_0 «a=1» при альтернативе H_1 «a≠1» при известном σ=2 и 16 наблюдениях рассчитанное значение критерия K оказалось таким, что H_0 принимается при уровне значимости α=0,05 , но отвергается при α=0,1. Что можно сказать о величине выборочного среднего $\overline{x}$?

11. Разбив отрезок [0;2] на 4 интервала, применить критерий согласия для проверки гипотезы о том, что выборка: 0,48; 1,08; 1,18; 1,2; 1,2; 1,26; 1,34; 1,36; 1,38; 1,4; 1,44; 1,92 получена из равномерного на [0;2] распределения при уровне значимости α=0,05.

12. По результатам 16 наблюдений получено $\overline{x}$ = 5,47. Если известно, что σ = 2, то при каких альтернативах гипотеза H_0 «a = 4,5» будет принята и при каких – отвергнута для α=0,05?

13. Оказалось, что доверительные интервалы при γ=0,9 и 10 наблюдениях для «a» при известном и неизвестном σ совпадают. Что можно сказать о величине s (по сравнению с σ)?

14. Вычислить значение критерия Колмогорова-Смирнова для выборки 0,24; 0,54; 0,68; 0,96, если проверяется гипотеза о том, что исследуемое распределение полу-треугольное на [0;1] (плотность $f(x)=x$ при $x\in[0;1]$ и $f(x)\equiv 0$ вне этого интервала).

15. Ширина доверительного интервала для параметра «а» при неизвестном σ, построенного для γ=0,99, примерно в 1,7 раза больше, чем у интервала, построенного для γ=0,9. О каком числе наблюдений идет речь?

16. Известно, что σ = 2. Сколько следует провести опытов, чтобы точность (половина ширины доверительного интервала) определения «а» при γ=0,95 была не больше, чем 0, 85?

17. Известно, что σ = 1 и точность (половина ширины доверительного интервала) определения «а» при γ=0,95 оказалась равной 0,4. Сколько было опытов?

18. При ошибочном использовании D_B вместо s^2 при проверке гипотезы H_0 «σ^2=2 » при альтернативе H_1 « $\sigma^2 \neq 2$ » и α=0,1 основная гипотеза H_0 была ошибочно отклонена (т.е. она была бы принята, если бы взяли s^2). Больше или меньше 2 значение D_B?

19. При известном σ=2 и 16 наблюдениях получено $\overline{x} = 2{,}48$. При каком максимальном значении a_0 гипотеза H_0 «$a = a_0$» при альтернативе H_1 «$a \neq a_0$» будет приниматься при уровне значимости α=0,05?

20. Исследуется нормальное распределение с параметром σ = 2,33. Планируется провести 16 наблюдений для проверки гипотезы H_0 «a = 2» при альтернативе H_1 «a = 5». Применяется критерий $K = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}-a_0)}{\sigma}$, критическая область выбрана в виде $(k_{\text{кр}}; \infty)$, уровень значимости выбран равным α=0,05. Какова вероятность ошибки второго рода (то есть будет принято, что a = 2, хотя на самом деле a = 5)?

Список литературы

Основная литература:

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов /В. Е. Гмурман - 12-е изд., перераб. - М.: Высш. образование, 2007. - 479 с.
2. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова. - 1990. - 431с.
3. Орлов, А. И. Вероятность и прикладная статистика: основные факты : справ./ А. И. Орлов - М. : Кнорус, 2010. - 190 с.

Дополнительная литература

4. Лемешко, Б.Ю. Статистический анализ, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: монография / Б.Ю. Лемешко [и др.] – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.
5. Боровков, А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1984. – 472 с.
6. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. втузов / Е. С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - 5-е изд., испр. - М.: Издательский центр «Академия», 2003. - 448 с.

Оглавление

Часть1. Случайные события и их вероятности 3

Раздел 1.1. 3

Предмет и методы теории вероятностей. Понятие вероятности. 3

Действия над случайными событиями (алгебра событий). 5

Классическое определение вероятности случайного события 7

Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики. 9

Раздел 1.2 13

Теоремы сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события 13

Условная вероятность. Независимые события. Теоремы умножения вероятностей 15

Формула полной вероятности. Формула Бейеса 19

Раздел 1.3. 21

Последовательность независимых испытаний с двумя исходами. Формула Бернулли 21

Наивероятнейшее число появления события в независимых испытаниях 24

Часть 2. Случайные величины 26

Раздел 2.1. 26

Дискретные и непрерывные случайные величины. Ряд распределения дискретной случайной величины. 26

Функция распределения и плотность распределения случайной величины. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. 28

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины 30

Совместный закон распределения нескольких случайных величин. Независимые случайные величины. 34

Раздел 2.2. Специальные распределения – биномиальное, нормальное, Пуассона, показательное. 35

Задачи для самостоятельного решения 44

Часть 3. Математическая статистика. 48
Раздел 3.1 48
Основные задачи, решаемые математической статистикой. Выборка, характеристики выборки 48
Раздел 3.2. 51
Задача оценки параметров 51
Оценивание параметров нормального распределения 52
Раздел 3.3 56
Общие принципы проверки статистических гипотез 56
Проверка гипотез о параметрах нормального закона 60
Критерии согласия Пирсона, Колмогорова 64
Задачи для самостоятельного решения 71
Список литературы 74

Редактор В. А. Родичева

Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4,90

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный
химико-технологический университет»
153000 г. Иваново, Шереметевский пр., 7