Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
« Ивановский государственный химико-технологический университет »

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(методические указания)

Составитель: А.К. Ратыни

Иваново 2007

Составитель: А.К. Ратыни

УДК 517.5

Уравнение теплопроводности: Методические указания/ ГОУВПО Иван. Гос. хим.-технол. ун-т. Сост. А.К. Ратыни.– Иваново, 2007.– 21 с.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей, углубленно изучающих курс дифференциальных уравнений. В пособии дана постановка граничных задач для уравнения теплопроводности; введены понятия классического и обобщенного решений этих задач; сформулированы достаточные условия корректности задач на различных мно -жествах функций. Изложен также метод Фурье отыскания формальных ре- шений. Рассмотрены типовые примеры. Приведены задания для самостоя- тельной работы студентов.

Библиогр. 9 назв.

Рецензент: доцент кафедры информатики и вычислительной техники В.А. Бобкова (ГОУВПО Ивановский государственный химико-техноло– гический университет)

Оглавление

§ 1. Постановка граничной задачи…………………………………………….. 4
§ 2. Классическое и обобщенные решения. Корректность граничной задачи……………………………………………………………………….. 6
§ 3. Решение граничной задачи методом разделения переменных (методом Фурье)………………………………………………………………10
Упражнения……………………………………………………………. 19
Ответы и указания к упражнениям………………………………… 20
Литература…………………………………………………………….. 21

§ 1. *ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ.*

1. Уравнение теплопроводности с двумя независимыми переменны -ми. Начальные и краевые условия.

Уравнением теплопроводности (другое название – уравнение диффузии) с двумя независимыми переменными в математической физике называют уравнение

$$u_t - a\, u_{xx} = f(x,t), \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$ – искомая функция переменных x и t; $a > 0$ – заданное число; $f(x,t)$ – заданная функция, $u_t \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Уравнение (1) – линейное дифференциальное уравнение (д.у.) второго порядка параболического типа (см. [7], § 2).

Далее рассматривается задача отыскания решений уравнения (1), определенных в замкнутом прямоугольнике плоскости

$$\overline{Q} = \{(x,t): 0 \le x \le h,\ 0 \le t \le T\};$$

здесь h и T – заданные положительные числа. Через Q обозначается открытый прямоугольник, полученный из $\overline{Q}$ удалением границ последнего: $Q = \{(x,t): 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ (см. рис. 1).

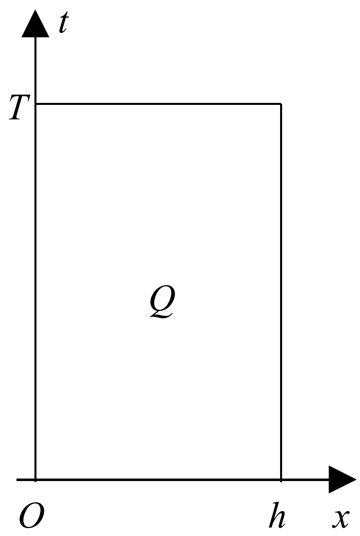

Рис. 1

Д. у. (1) имеет бесконечно много решений. Для того, чтобы из этого множества выделить одно решение, надо задать дополнительную информацию об искомом решении. Обычно такая информация задается в виде *начального условия*

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (2)$$

и краевых условий

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = \psi_1(t),\ \alpha_2 u(h,t) + \beta_2 u_x(h,t) = \psi_2(t); \qquad (3)$$

здесь $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – заданные функции, α_1, β_1, α_2, β_2 – заданные числа, причем такие, что

$$|\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\alpha_2| + |\beta_2| > 0.$$

Задача отыскания решения д.у. (1), удовлетворяющего уравнениям (2) и (3), – это простейшая граничная задача для уравнения (1)

2. Пример физической задачи, приводящей к системе (1), (2), (3).

Уравнение (1) является математической моделью процесса распределения температуры в тонком однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, ось которого принята за координатную ось Ox. В этом случае: $u(x,t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t, коэффициент a характеризует физические свойства материала стержня; правая часть $f(x,t)$ д.у. (1) пропорциональна линейной плотности источников тепла, действующих внутри стержня (если таковых нет, то $f(x,t) \equiv 0$).

Рис. 2

Задание начального условия (2) с физической точки зрения означает задание температуры $\varphi(x)$ в любой точке x стержня в момент времени $t = 0.$ Предположим, что стержень имеет длину h и расположен так, как показано на рис. 2. Тогда краевые условия (3) имеют определенный теплофизический смысл, зависящий от значений чисел α_i , β_i .

Если $\alpha_1 \neq 0,\ \beta_1 = 0$, то первое из уравнений (3) примет вид

$$u(0,t) = \psi_{1,1}(t), \text{ где } \psi_{1,1}(t) = \psi_1(t)/\alpha_1.$$

Оно называется краевым условием *первого рода* и означает, что в любой момент времени t известна температура $\psi_{1,1}(t)$ левого края стержня.

Если $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 \neq 0,$ то это же краевое условие примет вид

$$u_x(x,0) = \psi_{1,2}(t), \text{ где } \psi_{1,2}(t) = \psi_1(t)/\beta_1.$$

Оно называется краевым условием *второго рода* и означает, что в любой момент времени t известен поток тепла, протекающий через левый край стержня ($\psi_{1,2}(t)$ – величина, пропорциональная этому потоку).

Если $\alpha_1 \neq 0,\ \beta_1 \neq 0$, то первое уравнение в (3) можно записать в виде

$$u_x(0,t) = \chi_1(u(0,t) - \psi_{1,3}(t)) \text{ , где } \chi_1 = -\alpha_1/\beta_1 ,\ \psi_{1,3}(t) = \psi_1(t)/\beta_1.$$

Оно называется краевым условием *третьего рода* и выражает при $\chi_1 > 0$ закон теплообмена Ньютона. Применительно к рассматриваемому случаю данный закон можно сформулмровать так: тепловой поток через левый край стержня пропорционален разности температуры края стержня $u(0,t)$ и температуры внешней среды $\psi_{1,3}(t)$ вблизи этого края. Все сказанное здесь о первом из уравнений (3), разумеется, относится и ко второму.

3. Уравнение теплопроводности с несколькими пространственными переменными.

Уравнение (1) описывает процесс теплообмена в стержне приближенно, поскольку ряд физических предположений, на которых основан вывод этого д.у., не совсем точно отражает реальность. В частности, при выводе (1) считалось, что в каждый фиксированный момент времени температура изменяется лишь вдоль стержня, а в любом направлении, перпендикулярном оси стержня, температура неизменна.Такое предположение допустимо, если стержень достаточно тонкий. Если же это не так, или вообще, если изучается теплообмен в теле произвольной формы, где температура меняется в нескольких направлениях, то надо использовать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_1,\ldots,x_n,t). \qquad (4)$$

Д.у. (4) называется *уравнением теплопроводности с n пространственны -ми переменными.* Здесь: $x_1,\ldots,x_n$ – прямоугольные координаты в пространстве R^n, искомая функция $u = u(x_1,\ldots,x_n,t)$ – температура в точке $(x_1,\ldots,x_n)$ тела в момент времени t; $a > 0$ – заданное число; $f(x_1,\ldots,x_n,t)$ – заданная функция; n полагают равным трем, двум или единице, если есть основания считать, что температура зависит от трех, двух или одной пространствен – ных переменных. При $n = 1$ д.у. (4) совпадает с (1), если принять $x_1 = x$.

Краевая задача для уравнения (4) при $n \geq 2$ ставится обычно следущим образом. Пусть D – область в R^n с границей S, $T = const > 0$. Требуется найти такое решение д.у. (4), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(x_1,\ldots,x_n,0) = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

и краевому условию

$$\left(\alpha\, u + \beta\,\frac{\partial u}{\partial N}\right)\Big|_S = \psi\,(x_1,\ldots,x_n,t).$$

Здесь: $N = N(x_1,\ldots,x_n)$ – вектор нормали к S в точке $(x_1,\ldots,x_n)$; $\varphi,\ \psi,\ \alpha,\ \beta$ – заданные функции, причем α и β зависят от тех же переменных, что и ψ; $|\alpha| + |\beta| > 0$ при $(x_1,\ldots,x_n) \in S$, $t \in [0,T]$. Величины a, f, φ, ψ имеют такой же физический смысл, как и в (1), (2), (3).

§ 2. *КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ. КОРРЕКТНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ.*

Ограничимся здесь рассмотрением для уравнения (1) граничной задачи с с краевыми условиями первого рода

$$u(0, t) = \psi_1(t),\quad u(h, t) = \psi_2(t). \qquad (5)$$

Используемые далее обозначения функциональных пространств и множеств функций можно найти в [6].

О п р е д е л е н и е 1. Классическим решением задачи (1), (2), (5) называется функция $u(x, t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $(x, t) \in Q$, начальному условию (2) при всех $x \in [0,h]$, краевым условиям (5) при всех $t \in [0,T]$.

Задача (1), (2), (5) корректна на множестве $C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ в пространствах $(C(\overline{Q}), C[0,h], C[0,T], C[0,T])$ (см. определение 4 в [7]). Точнее, справедлива

Теорема 1. *Для любой функции* $f(x, t) \in C^1(\overline{Q})$ *и любых функций* $\varphi(x) \in C[0, h]$, $\psi_1(t) \in C[0, T]$, $\psi_2(t) \in C[0, T]$, *удовлетворяющих равенствам (которые называются условиями согласования)*

$$\varphi(0) = \psi_1(0),\ \varphi(h) = \psi_2(0), \qquad (6)$$

существует классическое решение задачи (1),(2),(5). Это решение единственно и для него верна оценка

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \le M_1(\|f\|_{C(\overline{Q})} + \|\varphi\|_{C[0,h]} + \|\psi_1\|_{C[0,T]} + \|\psi_2\|_{C[0,T]}), \qquad (7)$$

где $M_1 > 0$ *– некоторая постоянная, зависящая только от a, h, T.*

Аналогичное утверждение верно и для задачи (1),(2), (3), его доказательтельство достаточно сложно и использует, в частности, принцип сжимающих отображений (см. [6]).

Поясним, почему эта теорема – утверждение о корректности рассматриваемой задачи. Систему уравнений (1), (2), (5) запишем в виде системы (13), (14) из [7], положив $f = f_0$, $\varphi = f_1$, $\psi_1 = f_2$, $\psi_2 = f_3$, $l_o u = u_t - a\, u_{xx}$, $l_1 u = u(x,0)$, $l_2 u = u(0, t)$, $l_3 u = u(h, t)$. Обозначим $U = C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, $U^0 = F_0^0 = C(\overline{Q})$, $F_0 = C^1(\overline{Q})$, $F_1 = F_1^0 = C[0,h]$, $F_2 = F_2^0 = F_3 = F_3^0 = C[0, T]$. Ясно, что $U^0 \supset U$, $F_0^0 \supset F_0$.

Условия теоремы 1 обеспечивают выполнение требований а), б) опреде–
ления 4 из [7]. Покажем, что неравенство (7) гарантирует выполнение и требования в) этого определения. Пусть функции $\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ удовлетворяют условиям, предъявленным в теореме 1 к f, φ, ψ_1, ψ_2 соответственно.Тогда, согласно этой теореме, существует классическое решение $\tilde{u}(x,t)$ задачи

$$\tilde{u}_t - a\, \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(x,t), \qquad (1а)$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \qquad (2а)$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{\psi}_1(t), \quad \tilde{u}(h,t) = \tilde{\psi}_2(t). \qquad (5а)$$

Вычитая из (1) уравнение (1а), из (2) – (2а), из (5) – (5а), получим, что $z(x, t) \equiv (u(x, t) - \tilde{u}(x,t))$ – классическое решение задачи

$$z_t - a\, z_{xx} = f(x, t) - \tilde{f}(x,t),$$

$$z(x,0) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x),$$

$$z(0,t) = \psi_1(t) - \tilde{\psi}_1(t), \; z(h,t) = \psi_2(t) - \tilde{\psi}_2(t).$$

Применяя к $z(x,t)$ оценку (7), будем иметь

$$\|z\|_{C(\overline{Q})} = \|u - \tilde{u}\|_{C(\overline{Q})} \le M_1(\|f - \tilde{f}\|_{C(\overline{Q})} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[0,h]} +$$

$$+ \|\psi_1 - \tilde{\psi}_1\|_{C[0,T]} + \|\psi_2 - \tilde{\psi}_2\|_{C[0,T]}). \qquad (7а)$$

Зададим число $\varepsilon > 0$ (ε может быть как угодно малым) и положим $\delta = \varepsilon / (4M_1)$. Тогда из неравенств $\|f - \tilde{f}\|_{C(\overline{Q})} < \delta$, $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[0,h]} < \delta$, $\|\psi_1 - \tilde{\psi}_1\|_{C[0,T]} < \delta$, $\|\psi_2 - \tilde{\psi}_2\|_{C[0,T]} < \delta$ (соответствующих неравенствам

$\| f_j - \tilde{f}_j \|_{F_j^0} < \delta$ определения 4 из [7]) будет, в силу (8), следовать неравенство $\| u - \tilde{u} \|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon$, что и требовалось показать.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 легко вытекает, что система уравнений, полученная из системы (1), (2), (5) удалением начального или хотя бы одного из краевых условий (не говоря уже о д.у. (1)), будет некорректной (поясните почему).

Ясно, что некоторые из приведенных в теореме 1 достаточных условий корректности (1),(2),(5) являются необходимыми для существования классического решения $u(x,t)$ задачи. Так, из непрерывности $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ следует: непрерывность $\varphi(x)$ на $[0,h]$ и $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – на $[0,T]$, а также выполнение условий согласования (6). Из включения $u(x,t) \in C^{2,1}(Q)$ следует непрерывность $f(x,t)$ в Q. Однако, в прикладных задачах нередко случается, что какие-то (или все) из перечисленных необходимых условий нарушаются *) и потому классического решения у задачи существовать не может. В такой ситуации вводится понятие «обобщенного решения» задачи. Делается это различными способами. Один из них состоит в том, что обобщенное решение определяется как предел в том или ином пространстве последовательности классических решений задач сходящихся в некотором смысле к задаче (1), (2), (5).

Приведем строгие формулировки для двух случаев, часто используемых на практике.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in C[0,h]$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C[0,T]$ и существуют такие последовательности функций $f_k(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap L_2(Q)$, $\varphi_k(x) \in C[0,h]$, $\psi_{1k}(t) \in C[0,T]$, $\psi_{2k}(t) \in C[0,T]$ $(k = 1,2,\ldots)$, что:

а) $\| f_k - f \|_{L_2(Q)} \to 0$, $\| \varphi_k - \varphi \|_{C[0,h]} \to 0$, $\| \psi_{1k} - \psi_1 \|_{C[0,T]} \to 0$,

$$\| \psi_{2k} - \psi_2 \|_{C[0,T]} \to 0 \text{ при } k \to \infty;$$

---

*) Рассмотрим, например, два стержня, сделанных из одного материала и имеющих одинаковые размеры, в частности, длину, равную $h/2$. Предположим, в некоторый момент времени (момент начала наблюдения) первый стержень имеет температуру φ_1, а второй – температуру φ_2, где φ_1 и φ_2 – числа, и в этот момент стержни соединяются в один стержень с длиною h. Тогда распределение температуры в полученном стержне приближенно описывается системой (1), (2), (3), где $\varphi(x) = \varphi_1$ при $0 \le x \le h/2$, $\varphi(x) = \varphi_2$ при $h/2 < x \le h$. Если $\varphi_1 \ne \varphi_2$, то $\varphi(x)$ – разрывная функция (т.е. $\varphi(x) \notin C[0,h]$).

Конечно, более точной математической моделью происходящего физического процесса будет система уравнений относительно двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – температур первого и второго стержней соответственно. Но исследовать такую систему значительно сложнее, чем задачу (1), (2), (3).

б) при каждом $k = 1,2,\dots$ задача

$$u_t - a\,u_{xx} = f_k(x,t),\ \ u(x,0) = \varphi_k(x),\ \ u(0,t) = \psi_{1k}(t),\ \ u(h,t) = \psi_{2k}(t) \qquad (8)$$

имеет классическое решение $u_k(x,t)$;

в) последовательность $u_k(x,t)$ ($k = 1,2,\dots$) имеет в $C(\overline{Q})$ предел $\breve{u}(x,t)$, т.е. $\|u_k - \breve{u}\|_{C(\overline{Q})} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда функция $\breve{u}(x,t)$ называется обобщенным решением из $C(\overline{Q})$ задачи (1), (2), (5).

Определение 3. Пусть $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in L_2(0,h)$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C[0,T]$ $\psi_1'(t) \in L_2(0,T), \psi_2'(t) \in L_2(0,T)$ и существуют такие последовательности функций $f_k(x,t) \in C(Q) \cap L_2(Q)$, $\varphi_k(x) \in C[0,h]$, $\psi_{1k}(t) \in C^1[0,T]$, $\psi_{2k}(t) \in C^1[0,T]$ ($k = 1,2,\dots$), что при $k \to \infty$

а) $$\|f_k - f\|_{L_2(Q)} \to 0,\ \|\varphi_k - \varphi\|_{L_2[0,h]} \to 0,$$

$$(\|\psi_{1k} - \psi_1\|_{C[0,T]} + \|\psi_{1k}' - \psi_1'\|_{L_2(0,T)}) \to 0,$$

$$(\|\psi_{2k} - \psi_2\|_{C[0,T]} + \|\psi_{2k}' - \psi_2'\|_{L_2(0,T)}) \to 0;$$

б) при каждом $k = 1,2,\dots$ задача (8) имеет классическое решение $u_k(x,t)$;

в) последовательность $u_k(x,t)$ ($k = 1,2,..$) имеет в $L_2(Q)$ предел $\bar{u}(x,t)$, т.е. $\|u_k - \bar{u}\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда функция $\bar{u}(x,t)$ называется обобщенным решением из $L_2(Q)$ задачи (1), (2), (5).

Приведем достаточные условия корректности задачи (1), (2), (5) на множествах функций, к которым принадлежат определенные выше обобщенные решения.

Теорема 2. *Для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ и любых функций $\varphi(x) \in C[0,h]$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих (6), задача (1),(2), (5) имеет обобщенное решение $\breve{u}(x,t)$* из $C(\overline{Q})$. *Это решение единственно и для него верна оценка*

$$\|\breve{u}\|_{C(\overline{Q})} \le M_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{C[0,h]} + \|\psi_1\|_{C[0,T]} + \|\psi_2\|_{C[0,T]}), \qquad (9)$$

где постоянная $M_2 > 0$ зависит лишь от чисел a, h, T.

Теорема 3. *Пусть $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in L_2(0,h)$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C[0,T]$, $\psi_1'(t) \in L_2(0,T), \psi_2'(t) \in L_2(0,T)$. Тогда задача (1),(2), (5) имеет* *обобщенное решение* $\bar{u}(x,t)$ из $L_2(Q)$. *Это решение единственно и для него верна оценка*

$$\|\bar{u}\|_{L_2(Q)} \le M_3(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(0,h)} + \|\psi_1\|_{C[0,T]} + \|\psi_2\|_{C[0,T]} + \\ + \|\psi_1'\|_{L_2(0,T)} + \|\psi_2'\|_{L_2(0,T)}), \qquad (10)$$

где постоянная $M_3 > 0$ *зависит лишь от чисел* a, h, T.

З а м е ч а н и е 2. Из неравенства (9) (из неравенства (10)) следует непрерывная зависимость в указанных нормах обобщенного решения $\breve{u}$ (решения $\bar{u}$) от заданных функций. Это устанавливается точно так же, как и для классического решения.

З а м е ч а н и е 3. Утверждение теоремы 2 о единственности обобщенного решения из $C(\overline{Q})$ означает следующее. Для любых последовательностей $f_k, \varphi_k, \psi_{1k}, \psi_{2k}$ ($k = 1,2,\ldots$), удовлетворяющих условиям определения 2, соответствующая последовательность u_k сходится в норме $C(\overline{Q})$ к одной и той же функции $\breve{u}$. Аналогичное замечание (с заменой $C(\overline{Q})$ на $L_2(Q)$) относится и к решению $\bar{u}$.

З а м е ч а н и е 4. Вопрос о том, в каком смысле обобщенные решения $\breve{u}$ и $\bar{u}$ удовлетворяют уравнению (1) (ведь существование производных у этих функций не предполагалось) в данном пособии затрагиваться не будет. Ответы на него можно найти в [3, 4].

§ 3. *РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ* (*МЕТОДОМ ФУРЬЕ*).

Перед чтением этого параграфа необходимо познакомиться с основными понятиями теории рядов Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (см., например, [8]).

1. Случай однородного уравнения и однородных краевых условий.

Рассмотрим задачу (1), (2), (3) с $f \equiv 0,\ \psi_1 \equiv 0,\ \psi_2 \equiv 0$:

$$u_t - a\,u_{xx} = f(x,t), \qquad (11)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (12)$$

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = 0,\ \alpha_2 u(h,t) + \beta_2 u_x(h,t) = 0. \qquad (13)$$

Отыскание решения $u(x,t)$ этой задачи, согласно методу Фурье, проводится в два этапа.

На <u>первом этапе</u> ищем <u>ненулевые</u> решения $U(x,t)$ уравнения (11), удовлетворяющие краевым условиям (13), в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , а вторая – только от t :

$$U(x,t) = v(x)\,z(t). \qquad (14)$$

Подставляя $U(x,t)$ в (11) вместо u, получим:

$$v(x)\, z^{/}(t) - a\, z(t)\, v^{//}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(x)\, z^{/}(t) = a\, z(t)\, v^{//}(x).$$

Разделив обе части последнего равенства на $a\, z(t)\, v(x)$, будем иметь

$$\frac{1}{a}\frac{z^{/}(t)}{z(t)} = \frac{v^{//}(x)}{v(x)} \quad . \tag{15}$$

Чтобы функция (14) была в Q решением д.у. (11) равенство (15) должно выполняться при всех $(x,t) \in Q$. Левая часть (15) зависит только от t и не может меняться с изменением x. Поэтому, если зафиксировать t, то левая часть (15) примет некоторое постоянное значение, которому при всех $x\in (0,h)$ будет равна правая часть (15). Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что этому же значению при всех $t \in (0,T)$ равна левая часть (15). Таким образом, $U(x,t)$ будет решением д.у. (11), если

$$\frac{1}{a}\frac{z^{/}(t)}{z(t)} = \frac{v^{//}(x)}{v(x)} = -\lambda = \text{const} \quad \text{при всех } (x,t) \in Q.$$

Отсюда следует, что функции $z(t)$ и $v(x)$ должны быть решениями д.у.

$$z^{/}(t) = -\, a\lambda\, z(t)\,, \tag{16}$$

$$v^{//}(x) = -\, \lambda\, v(x)\,. \tag{17}$$

Подставляя $U(x,t)$ в (13) вместо u, получим

$$(\alpha_1 v(0) + \beta_1 v^{/}(0))\, z(t) = 0,\ (\alpha_2\, v(h) + \beta_2\, v^{/}(h))\, z(t) = 0,\ \ t\in (0,T).$$

Так как по предположению $U(x,t) \not\equiv 0,$ то и $z(t) \not\equiv 0$, а потому последние два равенства равносильны равенствам

$$\alpha_1 v(0) + \beta_1 v^{/}(0) = 0,\ \alpha_2\, v(h) + \beta_2\, v^{/}(h) = 0. \tag{18}$$

Подведем итог проведенных построений: функция $U(x,t) = v(x)\, z(t)$ будет ненулевым решением д.у. (11), удовлетворяющим краевым условиям (13), если $v(x)$ будет ненулевым решением краевой задачи (17), (18) – задачи Штурма-Лиувилля, а $z(t)$ будет ненулевым решением д.у. (16).

Как известно, задача (17), (18) имеет счетное множество ненулевых решений (называемых собственными функциями задачи) $v = v_k(x)$ при определенных значениях $\lambda = \lambda_k$ (называемых собственными числами задачи), $k = 1,2,\ldots$ Предположим, что при каждом натуральном k найдены λ_k и $v_k(x)$. Подставив в д.у. (16) вместо λ число λ_k , найдем общее решение полученного уравнения (сделайте это самостоятельно):

$z = z_k(t) = A_k e^{-a\lambda_k t}$, где A_k – произвольная постоянная, $A_k \neq 0$ $(k = 1,2,\ldots)$.

Таким образом, мы найдем счетное множество ненулевых решений д.у. (11), удовлетворяющих краевым условиям (13): $U_k(x,t) = v_k(x)\, z_k(t)$ или

$$U_k(x,t) = A_k\, v_k(x)\, e^{-a\lambda_k t} \quad (k = 1,2,\ \ldots).$$

Но при этом, в случае *произвольной* $\varphi(x)$ ни одна из функций $U_k(x,t)$ и никакая конечная сумма данных функций не удовлетворяет начальному условию (12) (в силу теоремы 1 из [7] любая конечная сумма U_k является решением (11) и, как нетрудно проверить, удовлетворяет (13)). Именно поэтому необходим

<u>Второй этап.</u> Будем искать решение задачи (11), (12), (13) в виде ряда, членами которого являются $U_k\ (x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)\, e^{-a\lambda_k t}\ . \tag{19}$$

Так как каждый член этого ряда удовлетворяет д.у. (11) и краевым условиям (13), то, в силу линейности и однородности (11) и (13), сумма ряда $u(x,t)$ также будет удовлетворять (11) и (13) при любых значениях A_k . Это легко установить непосредственными вычислениями в предположении, что ряд (19) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды по x и один раз по t, сходятся в $\overline{Q}$ (подробнее см. в следующем параграфе). Подберем постоянные A_k так, чтобы сумма $u(x,t)$ ряда (19) удовлетворяла начальному условию (12):

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) = \varphi(x)\,.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)$ – ряд по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, то (см. [ ]) он может сходиться (в том или ином смысле) к $\varphi(x)$ лишь в том случае, если

$$A_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h \varphi(x) v_k(x)\,dx, \quad где\ \ d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx\,. \tag{20}$$

Таким образом, сумма ряда (19), где A_k вычислены по формулам (20), является искомым решением задачи (11), (12), (13).

З а м е ч а н и е 5. Строго говоря, сумма ряда (19) будет классическим или обобщенным решением задачи, если этот ряд сходится определенным образом. Достаточные условия, обеспечивающие «нужную» сходимость (19), приведены в § 4. В тех случаях, когда говорят о ряде (19) с A_k, вычисленными по формулам (20), не затрагивая вопрос о характере его сходимости, этот ряд обычно называют *формальным решением* задачи (11), (12), (13).

П р и м е р 1. Найти формальное решение граничной задачи

$$u_t - 3u_{xx} = 0,\ u(x,0) = px,\ u(0,t) = 0,\ u_x(10,t) = 0\ \ (p = const \neq 0). \tag{21}$$

(Это задача (11),(12),(13), где $a = 3,\ \varphi(x) = px,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_2 = 1,\ h = 10$).

Поиск решения $u(x,t)$ задачи (21) проведем по следующему плану.

1) Найдем собственные числа λ_k и собственные функции $v_k(x)$ задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей (21):

$$v'' = -\lambda v,\ \ v(0) = 0,\ \ v'(10) = 0$$

(это задача (17), (18) при указанных выше значениях $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, h$). Такая работа проделана в [8] (см. там пример 1 в § 2):

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{20}\right)^2,\ \ v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)\pi\ x}{20},\ \ k = 1,2,\ldots$$

2) Вычислим d_k и A_k по формулам (20):

$$d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10} \sin^2\frac{(2k-1)\pi\ x}{20}\,dx = 5,$$

$$A_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h \varphi(x)v_k(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^{10} px\sin\frac{(2k-1)\pi\ x}{20}\,dx = \frac{80p(-1)^{k-1}}{\pi^2(2k-1)^2},\ k = 1,2,\ldots$$

(подробные выкладки даны в [8] при решении примера 3).

3) Записываем <u>ответ</u>, т.е. ряд (19), в который подставлены найденные значения A_k, $v_k(x)$, λ_k и $a = 3$:

$$u(x,t) = \frac{80p}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\left(\sin\frac{(2k-1)\pi\ x}{20}\right)e^{-3\left(\frac{(2k-1)\pi}{20}\right)^2 t}.$$

2. Случай однородных краевых условий.

Рассмотрим здесь задачу (1), (2), (13) (т.е. задачу (1), (2), (3) при $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t) \equiv 0$). В результате построений, аналогичных проведенным в предыдущем пункте, получим следующее выражение для формального решения $u(x,t)$ этой задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x)\,e^{-a\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t)v_k(x). \tag{22}$$

Здесь: λ_k – собственные числа, $v_k(x)$ – собственные функции задачи (17), (18), A_k вычисляются по формулам (20), а функции $G_k(t)$ находятся по формулам ($k = 1,2,\ldots$)

$$G_k(t) = \int_0^t c_k(\tau)\,e^{-a\lambda_k(t-\tau)}d\tau,\ \textit{где}\ c_k(t) = \frac{1}{d_k}\int_0^h f(x,t)v_k(x)\,dx. \tag{23}$$

З а м е ч а н и е 6. Нетрудно показать, что $G_k(t)$ является решением следующей начальной задачи

$$G_k'(t) + a\lambda_k G_k(t) = c_k(t),\ G_k(0) = 0. \tag{24}$$

А потому $G_k(t)$ можно искать, используя любые методы интегрирования этой задачи (а не только по формулам (23)).

3. Случай неоднородных краевых условий.

Если в (3) $|\psi_1(t)|+|\psi_2(t)|\not\equiv 0$, то задачу (1), (2), (3) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями, т.е. к задаче вида (1),(2),(13).

В общем случае это делается следующим образом. Построим функцию $\gamma(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q})$, удовлетворяющую краевым условиям (3):

$$\alpha_1\gamma(0,t)+\beta_1\gamma_x(0,t)=\psi_1(t),\ \alpha_2\gamma(h,t)+\beta_2\gamma_x(h,t)=\psi_2(t),\quad t\in[0,T]. \qquad (25)$$

Такая функция обязательно найдется, если $\psi_1(t),\ \psi_2(t)\in C^1[0,T]$. Введем новую неизвестную функцию

$$w(x,t)=u(x,t)-\gamma(x,t), \qquad (26)$$

где $u(x,t)$ – искомое решение (1), (2), (3). Нетрудно проверить, что $w(x,t)$ – решение следующей задачи:

$$w_t-a\,w_{xx}=\hat{f}(x,t),\ \text{где}\ \hat{f}(x,t)=f(x,t)-(\gamma_t(x,t)-a\gamma_{xx}(x,t)), \qquad (27)$$

$$w(x,0)=\hat{\varphi}(x),\ \text{где}\ \hat{\varphi}(x)=\varphi(x)-\gamma(x,0), \qquad (28)$$

$$\alpha_1 w(0,t)+\beta_1 w_x(0,t)=0,\ \alpha_2 w(h,t)+\beta_2 w_x(h,t)=0. \qquad (29)$$

Действительно, с учетом (26), $w_t-a\,w_{xx}=u_t-a\,u_{xx}-(\gamma_t-a\,\gamma_{xx})=\hat{f}(x,t)$; последнее равенство следует из (1) и из определения $\hat{f}$. Равенство (28) следует из (26) и (2). Равенства (29) следуют из (26), (25), (3):

$\alpha_1 w(0,t)+\beta_1 w_x(0,t)=\alpha_1 u(0,t)+\beta_1 u_x(0,t)-(\alpha_1\gamma(0,t)+\beta_1\gamma_x(0,t))=$
$=\psi_1(t)-\psi_1(t)=0$; аналогично получаем второе равенство (29).

Выполнив для задачи (27), (28), (29) построения пункта **2**, найдем $w(x,t)$, а затем из (26) найдем решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), (3):

$$u(x,t)=w(x,t)+\gamma(x,t).$$

Функцию $\gamma(x,t)$ стараются выбирать так, чтобы $\hat{f}(x,t)$ и $\hat{\varphi}(x)$ имели вид, наиболее удобный для дальнейших вычислений.

В частном случае, когда ψ_1 и ψ_2 являются постоянными, рекомендуется брать в качестве γ линейную функцию x: $\gamma=px+q$, где p и q – числа. Подставляя эту функцию в (3) вместо u (т.е. записывая уравнения (25)) получим для определения p и q систему уравнений:

$$\alpha_1 q+\beta_1 p=\psi_1,\ \alpha_2(ph+q)+\beta_2 q=\psi_2.$$

Решив эту систему, получим нужную функцию γ (если система решений не имеет, то γ следует искать в другом виде). Функция $w(x,t)$ в данном случае имеет вид

$$w(x,t)=u(x,t)-px-q$$

и удовлетворяет тому же д.у., что и $u(x,t)$:

$$w_t-a\,w_{xx}=f(x,t).$$

Действительно, если $\gamma = px + q$, то $\gamma_t - a\gamma_{xx} = 0$ и в (27) $\widehat{f}(x,t) = f(x,t)$.

П р и м е р 2. Построить функцию $\gamma(x,t)$, удовлетворяющую краевым условиям:

а) $3\gamma_x(0,t) - \gamma(0,t) = 1$, $\gamma(5,t) = 3$;   б) $\gamma_x(0,t) = 8e^{-t}$, $\gamma_x(1,t) + 4\gamma(1,t) = -4$.

Р е ш е н и е. а) Так как ψ_1 и ψ_2 – постоянные ($\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 3$), то будем искать γ в виде $\gamma = px + q$, где p и q – числа. Подставляя эту функцию в заданные краевые условия, получим

$$3p - q = 1,\ 5p + q = 3.$$

Отсюда находим $p = 0,5$ и $q = 0,5$. Таким образом, искомая функция $\gamma = 0,5x + 0,5$.

б) Попытаемся и здесь искать γ в виде линейной функции x: $\gamma = px + q$, но p и q будем считать функциями t. После постановки γ в заданные краевые условия, получим для определения p и q систему уравнений

$$p = 8e^{-t},\ p + 4(p + q) = -4.$$

Отсюда находим $q = -(1 + 10e^{-t})$. Следовательно, $\gamma = 8xe^{-t} - (1 + 10e^{-t})$.

П р и м е р 3. Найти формальное решение граничной задачи

$$u_t - u_{xx} = 0,\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ при } 0 \le x \le 5 \\ 2x + 16 \text{ при } 5 < x \le 10, \end{cases} \tag{30}$$

$$u(0,t) = 1,\ u_x(10,t) = 2. \tag{31}$$

Поиск решения задачи (30), (31), согласно изложенной выше теории, можно провести следующим образом.

1) Так как краевые условия (31) неоднородны, то сначала строим функцию γ, удовлетворяющую этим условиям. В данном случае ψ_1 и ψ_2 – постоянные, поэтому можно попытаться найти γ в виде линейной функции x: $\gamma = px + q$. Подставляя γ в (31), получим: $\gamma(0) = q = 1$, $\gamma'(10) = p = 2$. Итак, $\gamma = 2x + 1$.

2) Введем новую искомую функцию $w(x,t) = u(x,t) - \gamma(x)$, т.е.

$$w(x,t) = u(x,t) - 2x - 1. \tag{32}$$

Запишем граничную задачу, решением которой будет $w(x,t)$:

$$w_t - w_{xx} = 0,\ w(x,0) = \widehat{\varphi}(x),\ где\ \widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le x \le 5 \\ 15 \text{ при } 5 < x \le 10, \end{cases} \tag{33}$$

$$w(0,t) = 0,\ w_x(10,t) = 0. \tag{34}$$

Ясно, что задача (33), (34) – это задача (27), (28), (29) для рассматриваемого примера (перечитайте две последние фразы перед примером 2).

3) Запишем задачу Штурма-Лиувилля, соотвествующую (33), (34):

$$v'' = -\lambda v,\ v(0) = 0,\ v'(10) = 0.$$

Найдем её собственные числа и собственные функции (см. пример 1):

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{20} \right)^2, \quad v_k(x) = \sin\frac{(2k-1)\pi x}{20}, \quad k = 1,2,\ldots$$

4) Вычислим d_k и A_k по формулам (20), заменяя там $\varphi(x)$ на $\widehat{\varphi}(x)$:

$$d_k = \int_0^h v_k^2(x)\,dx = \int_0^{10} \sin^2\frac{(2k-1)\pi x}{20}\,dx = 5; \quad A_k = \frac{1}{d_k}\int_0^h \widehat{\varphi}(x) v_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int_5^{10} 15\sin\frac{(2k-1)\pi x}{20}\,dx = -\frac{3\cdot 20}{(2k-1)\pi}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{20}\Bigg|_5^{10} =$$

$$= \frac{-60}{(2k-1)\pi}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2} + \frac{60}{(2k-1)\pi}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4} = \frac{60}{(2k-1)\pi}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4},$$

$k = 1,2,\ldots.$

5) В общем случае этот пункт должен содержать вычисление $c_k(t)$ и $G_k(t)$ по формулам (23), в которых надо было бы заменить $f(x,t)$ на $\widehat{f}(x,t)$. Но в данном примере $\widehat{f}(x,t) \equiv 0$, так что $G_k(t) \equiv 0$.

6) Записываем формальное решение задачи (33), (34) в виде ряда (22), а в данном случае в виде ряда (19) – частного случая (22):

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) e^{-a\lambda_k t}, \text{ т.е.}$$

$$w(x,t) = \frac{60}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{20}\, e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{20}\right)^2 t}.$$

7) Из (32) находим формальное решение задачи (30), (31):

$$u(x,t) = w(x,t) + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$u(x,t) = 2x + 1 + \frac{60}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{20}\, e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{20}\right)^2 t}. \quad (35)$$

З а м е ч а н и е 7. Для практических расчетов значений $u(x,t)$ используются (как обычно при работе с рядами) частичные суммы ряда (35). Так, если в правой части (35) заменить ряд его второй частичной суммой s_2, то получим следующее приближенное выражение для искомого решения:

$$u(x,t) \approx 2x + 1 + \frac{30\sqrt{2}}{\pi}\left(\left(\sin\frac{\pi x}{20}\right)e^{-\frac{\pi^2 t}{400}} - \frac{1}{3}\left(\sin\frac{3\pi x}{20}\right)e^{-\frac{9\pi^2 t}{400}}\right).$$

§ 4. *О ХАРАКТЕРЕ СХОДИМОСТИ РЯДА* (22) *ДЛЯ ПЕРВОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ.*

В § 3 уже отмечалось, что сумма ряда (22) будет классическим или обобщенным решением звдачи (1),(2),(13) лишь при выполнении определенных условий. В теоремах 4, 5, 6 приведены возможные варианты этих условий, но только для первой граничной задачи. То есть всюду далее в настоящем параграфе ***предполагается, что краевые условия (13) имеют вид***

$$u(0,t) = 0,\ u(h,t) = 0. \qquad (13_1)$$

Теорема 4. *Пусть* $f(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi(x) \in C[0,h]$, $\varphi'(x) \in L_2(0,h)$ и $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$. *Тогда справедливы утверждения а) и б):*

а) каждая из частичных сумм ряда (22)

$$s_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} A_k v_k(x) e^{-a\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{n} G_k(t) v_k(x) \quad (n = 1,2,\ldots)$$

принадлежат $C^{2,1}(\overline{Q})$ *и при* $n \to \infty$ *последовательность* s_n *сходится к функции* $u(x,t)$ *следующим образом*

$$\| u(x,t) - s_n(x,t) \|_{C(\overline{Q})} + \| u(x,t) - s_n(x,t) \|_{C^{2,1}(Q_0)} \to 0,$$

где Q_0 *– произвольное замкнутое подмножество* Q *;*

б) сумма $u(x,t)$ *ряда (22) является классическим решением задачи (1), (2),(*13_1*).*

Теорема 5. *Пусть* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in C[0,h]$, $\varphi'(x) \in L_2(0,h)$ и $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$. *Тогда справедливо следующее:*

а) каждая из частичных сумм ряда (22) $s_n(x,t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ *принадлежит* $C(\overline{Q})$ *и при* $n \to \infty$ *последовательность* s_n *сходится в* $C(\overline{Q})$ *к функции* $\breve{u}(x,t)$ *:*

$$\| \breve{u}(x,t) - s_n(x,t) \|_{C(\overline{Q})} \to 0;$$

б) сумма ряда (22) $u(x,t) \equiv \breve{u}(x,t)$ *является обобщенным решением из* $C(\overline{Q})$ *задачи (1), (2),(*13_1*).*

Теорема 6. *Пусть* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in L_2(0,h)$. *Тогда справедливо следующее:*

а) каждая из частичных сумм ряда (22) $s_n(x,t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ *принадлежит* $C(\overline{Q})$ *и при* $n \to \infty$ *последовательность* s_n *сходится в* $L_2(Q)$ *к функции* $\bar{u}(x,t)$:

$$\| \bar{u}(x,t) - s_n(x,t) \|_{L_2(Q)} \to 0;$$

б) сумма ряда (22) $u(x,t) \equiv \bar{u}(x,t)$ является обобщенным решением из $L_2(Q)$ задачи (1), (2),(13_1).

Мы не приводим здесь строгие доказательства этих теорем, но считаем полезным указать основные этапы доказательства хотя бы одной из них, например, теоремы 4.

1) Устанавливаем, опираясь на известные результаты анализа, справедливость включений $s_n \in C^{2,1}(\overline{Q}),\ n = 1,2,...$

2) Показываем, что ряд (22) сходится в $\overline{Q}$ равномерно, отсюда делаем вывод: $u \in C(\overline{Q})$.

3) Показываем, что равномерно в Q_0 сходятся ряды, полученные из (22) почленным дифференцированием один раз по t и два раза по x :

$$u_t = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k a\lambda_k v_k(x) e^{-a\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{/}(t) v_k(x), \qquad (36)$$

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k^{//}(x) e^{-a\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t) v_k^{//}(x). \qquad (37)$$

Таким образом приходим (с учетом произвольности Q_0) к выводу: $u \in C^{2,1}(Q)$.

4) Доказываем, используя (36) и (37), что сумма ряда (22) в Q удовлетворяет д.у. (1). Приведем соответствующие выкладки с краткими пояснениями.

$$u_t - a\,u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k a(\lambda_k v_k(x) + v_k^{//}(x)) e^{-a\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k^{/}(t) v_k(x) - aG_k(t) v_k^{//}(x)).$$

Учитывая равенства (24) и $v_k^{//}(x) = -\lambda_k v_k(x)$ (v_k – решение д.у. (17) при $\lambda = \lambda_k$) , будем иметь для $(x,t) \in Q$

$$u_t - a\,u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (G_k^{/}(t) + a\lambda_k G_k(t)) v_k(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) v_k(x) = f(x,t).$$

Справедливость последнего равенства вытекает из следующего. Согласно (23), $c_k(t)$ – коэффициенты Фурье, а последний ряд – ряд Фурье функции $f(x,t)$ по системе собственных функций $\{v_k(x)\}$ задачи (17), (18) (переменная t играет здесь роль параметра); условия же теоремы 4, наложенные на $f(x,t)$, гарантируют сходимость этого ряда в Q (см. в [8] теорему 4 и замечание 6).

5) Убеждаемся, что сумма ряда (22) удовлетворяет начальному условию. Действительно,

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k v_k(x)\ +\sum_{k=1}^{\infty}G_k(0)v_k(x)\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}A_k v_k(x)\ ,$$

так как $G_k(0) = 0$ (см. (24)). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k v_k(x)$ есть ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{v_k(x)\}$ (см. (20)); из условий, наложенных на $\varphi(x)$, следует в силу теоремы 5 из [8], что этот ряд равномерно на $[0, h]$ сходится к $\varphi(x)$. Таким образом, $u(x,0) = \varphi(x)$ при $x\in [0, h]$.

6) Из равенств $v_k(0) = 0$, $v_k(h) = 0$ выводим, что сумма ряда (22) удовлетворяет краевым условиям (13_1).

Упражнения

1. Найдите распределение температуры в стержне длиною h, если известно следующее: боковая поверхность и левый край стержня теплоизолированы; правый край всё время поддерживается при нулевой температуре; в начальный момент времени температура в стержне распределена линейно, причём, на левом крае она равна числу $u_0 \neq 0$, а на правом – нулю; источников тепла внутри стержня нет.

2. Найдите распределение температуры в полностью теплоизолированном стержне длиною h, если источников тепла внутри стержня нет, а начальная температура

$$\varphi(x)=\begin{cases} u_0\ \text{при}\ \ 0\le x\le h/2, \\ 0\ \text{при}\ \ h/2\le x\le h, \end{cases}\quad \text{где}\ u_0=const\neq 0\,.$$

3. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - a\,u_{xx} = 0,\ \ u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{2u_0}{h}x\ \text{при}\ \ 0\le x\le h/2, \\ \dfrac{2u_0}{h}(h-x)\ \text{при}\ \ h/2\le x\le h, \end{cases}\qquad \text{где}\ u_0=const\neq 0\,,$$

$$u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0.$$

4. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ (2 - x) \text{ при } 1 \le x \le 2, \end{cases} \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

5. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - a\, u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \frac{x(h - x)}{h^2}, \quad u(0, t) = u(h,t) = 0.$$

6. Решите задачу

$$u_t - a\, u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{h}, \quad u(0, t) = u(h,t) = 0.$$

7. Сведите граничную задачу с неоднородными краевыми условиями к задаче с однородными краевыми условиями:
а) $u_t - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = x^2 + 4e^{-x}$, $u(0, t) = 3$, $u_x(1, t) + 2\,u(1, t) = 6$; б) $u_t - 3\,u_{xx} = x + 5t$, $u(x,0) = 0$, $u_x(0, t) - u(0, t) = -4$, $u_x(3, t) = 1$;
в) $u_t - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = 2$, $u(0, t) = 2 + t$, $u_x(1, t) = e^{-t}$.

8. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - 8\,u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 10 - x, \quad u_x(0, t) = 3, \quad u(10, t) = 0.$$

9. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - 4\,u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 1 - x, \quad u_x(0, t) = 2, \quad u_x(10, t) = 2\,.$$

10. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} x + 3 \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ x + 1 \text{ при } 1 \le x \le 2, \end{cases} \quad u(0,t) = 2, \ u(2,t) = 4.$$

11. Найдите методом Фурье решение задачи
$u_t - a\,u_{xx} + cu = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(0, t) = 0$, $u(h, t) = 0$, где $c = const \ge 0$.

12. Найдите формальное решение задачи

$$u_t - u_{xx} = 1, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(h, t) = 2\,.$$

---

13. Установите (используя одну из теоремы 4, 5 или 6), будут найденные в упражнениях 4 и 10 формальные решения классическими или обобщен- ными решениями соответствующих задач.
14.

Ответы и указания к упражнениям

1. $$u(x,t) = \frac{8u_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2h}\right)e^{-a\left(\frac{(2k-1)\pi}{2h}\right)^2 t}.$$

Указание. Математической моделью процесса изменения температуры в стержне будет граничная задача

$$u_t - a\,u_{xx} = 0,\ u(x,0) = \frac{u_0}{h}(h-x),\ u_x(0,t) = 0,\ u(h,t) = 0.$$

2. $$u(x,t) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)}\left(\cos\frac{(2m-1)\pi x}{h}\right)e^{-a\left(\frac{(2m-1)\pi}{h}\right)^2 t}.$$

Указания. Математическая модель процесса –

$$u_t - a\,u_{xx} = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(h,t) = 0.$$

При отыскании решения следует учесть, что минимальное с.ч. соответствующей задачи Штурма-Лиувилля $\lambda_0 = 0$, а отвечающая λ_0 с.ф. $v_0(x) \equiv 1$.

3. $$u(x,t) = \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\left(\cos\frac{2(2m-1)\pi x}{h}\right)e^{-4a\left(\frac{(2m-1)\pi}{h}\right)^2 t}.$$

4. $$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\left(\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)e^{-\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)^2 t}.$$

5. $$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\left(\sin\frac{(2m-1)\pi x}{h}\right)e^{-a\left(\frac{(2m-1)\pi}{h}\right)^2 t}.$$

6. $$u(x,t) = \left(2\sin\frac{\pi x}{h}\right)e^{-\frac{a\pi^2}{h^2}t}.$$

8. $$u(x,t) = 3x - 30 + \frac{320}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi x}{20}\right)e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{50}t}.$$

9. $$u(x,t) = 2x - 14 + \frac{120}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\left(\cos\frac{(2m-1)\pi x}{10}\right)e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{25}t}.$$

10. $$u(x,t) = x + 2 + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}(\sin(2m-1)\pi x)\,e^{-(2m-1)^2\pi^2 t}.$$

11. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k (\sin\frac{k\pi\ x}{h}) e^{-\left(a\left(\frac{k\pi}{h}\right)^2+c\right)t}$, *где* $A_k=\frac{2}{h}\int_0^h \varphi(x)\sin\frac{k\pi\ x}{h}\,dx$.

12. $u(x,t)=\frac{16h^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\left(1-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(2k-1)\pi}{h}\right)^2 t}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi\ x}{2h}$.

Литература

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука,1976.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Том 2. М.: Наука, 1978.
6. Ратыни А.К. Некоторые понятия функционального анализа (методические указания), Иваново, ИГХТУ, 2003.
7. Ратыни А.К. О постановке и корректности граничных задач для уравнений с частными производными (методические указания), Иваново, ИГХТУ, 2006.
8. Ратыни А.К. Ряды Фурье по собственным функциям краевой задачи (методические указания), Иваново, ИГХТУ, 2004.
9. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.